

CÂU HỎI

Câu 1. Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Nếu $a // b$ thì $(a, c) = (c, b)$.		
b)	Nếu $c // b$ thì $(a, b) = (a, c)$.		
c)	Nếu $a \perp c, b \perp c$ thì $a // b$.		
d)	Nếu $a \perp c$ thì $(a, b) = (c, b)$.		

Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$BD // B'D'$		
b)	$(AC, B'D') = 90^\circ$		
c)	Tam giác ACD' đều		
d)	$(AC, A'B) = 30^\circ$		

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của đoạn SB, SD . Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$MN // BD$		
b)	MN và AC là hai đường thẳng chéo nhau.		
c)	$AC \perp BD$		
d)	$(MN, AC) = 90^\circ$		

Câu 4. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, M là trung điểm cạnh BC, N là trung điểm của AC . Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$MN // AB$		
b)	$MD = ND = \frac{a\sqrt{2}}{2}$		
c)	$(AB, DM) = (MN, DM)$		
d)	$\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{3}$		

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Gọi E là trung điểm của AB . Biết $AB = 2a, AD = DC = a$, đồng thời $SA \perp AB, SA \perp AD$ và $SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$(SB, DC) = SBA$		
b)	$\tan SBA = \frac{\sqrt{3}}{2}$		
c)	$DE // BC$		
d)	$(SD, BC) \approx 52,42^\circ$		

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a . Cho biết $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp AB, SA \perp AD$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(AB, SA) = 90^\circ$		
b)	$SA \perp CD$		
c)	$(SD, BC) = (SD, CD)$		
d)	$SDA = 60^\circ$		

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD = 1$ và $BAC = BAD = 60^\circ, CAD = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$CD = \sqrt{2}$		
b)	Tam giác BCD vuông cân tại C .		
c)	$IJ \perp AB$		
d)	$IJ \perp CD$		

Câu 8. Trong hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$ABCD$ là hình chữ nhật.		
b)	$A'C' \perp BD$		
c)	$A'B \perp DC'$		
d)	$BC' \perp A'D$		

Câu 9. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$NA = NB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$		
b)	$MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$		
c)	$\overline{MN} \cdot \overline{BC} = \frac{a^2}{3}$		
d)	Góc giữa đường thẳng MN và BC bằng 45°		

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt là hình vuông cạnh a . Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$BC' // AD'$		
b)	$(AD', B'C) = 90^\circ$		
c)	$(AD', DC') = (BC', DC')$		
d)	$BC'D = 90^\circ$		

Câu 11. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA' \perp AB, AA' \perp AC$ và tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M là trung điểm AA' . Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(A'B, C'C) = AA'B$		
b)	$(A'B, C'C) = 45^\circ$		
c)	$(A'C, MB) = BAN$		
d)	$BMN \approx 42,6^\circ$.		

LỜI GIẢI

Câu 1. Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c . Xác định tính đúng sai các mệnh đề sau?

- a) Nếu $a // b$ thì $(a, c) = (c, b)$.
- b) Nếu $c // b$ thì $(a, b) = (a, c)$.
- c) Nếu $a \perp c, b \perp c$ thì $a // b$.
- d) Nếu $a \perp c$ thì $(a, b) = (c, b)$.

Lời giải

- a) Mệnh đề đúng.
- b) Mệnh đề đúng.
- c) Mệnh đề sai, vì a, b có thể chéo nhau.
- d) Mệnh đề sai.

Câu 2. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Khi đó:

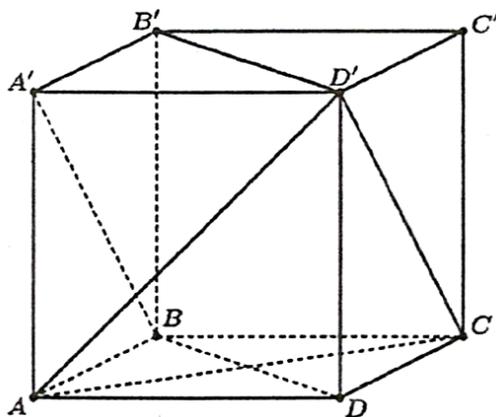
- a) $BD // B'D'$
- b) $(AC, B'D') = 90^\circ$
- c) Tam giác ACD' đều
- d) $(AC, A'B) = 30^\circ$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Ta có: $BB' // DD', BB' = DD' \Rightarrow BDD'B'$ là hình bình hành $\Rightarrow BD // B'D'$.

Vì vậy $(AC, B'D') = (AC, BD) = 90^\circ$ (do AC và BD là hai đường chéo hình vuông $ABCD$).



Ta có: $A'D' // BC, A'D' = BC \Rightarrow A'BCD'$ là hình bình hành $\Rightarrow A'B // CD'$.

Vì vậy $(AC, A'B) = (AC, CD')$.

Gọi a là cạnh của hình lập phương thì $AD' = CD' = AC = a\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông cạnh a).

Suy ra tam giác ACD' đều nên $(AC, CD') = \angle ACD' = 60^\circ$.

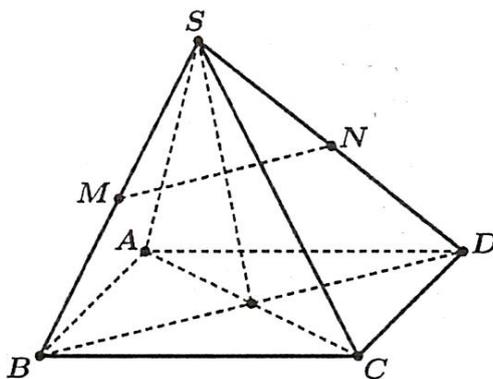
Vậy $(AC, A'B) = 60^\circ$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của đoạn SB, SD . Khi đó:

- a) $MN \parallel BD$.
- b) MN và AC là hai đường thẳng chéo nhau.
- c) $AC \perp BD$
- d) $(MN, AC) = 90^\circ$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
----------------	----------------	----------------	----------------



Xét tam giác SBD có MN là đường trung bình, suy ra $MN \parallel BD$. (1)

Mặt khác: $AC \perp BD$ (hai đường chéo trong hình thoi). (2)

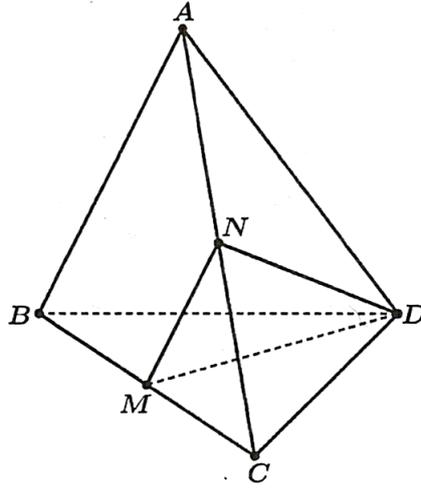
Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp MN$ hay $(MN, AC) = 90^\circ$.

Câu 4. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a, M là trung điểm cạnh BC, N là trung điểm của AC . Khi đó:

- a) $MN \parallel AB$
- b) $MD = ND = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
- c) $(AB, DM) = (MN, DM)$
- d) $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------



Gọi N là trung điểm của AC nên MN là đường trung bình của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \begin{cases} MN \parallel AB(*) \\ MN = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2} \end{cases}$$

Vì $\triangle BCD$ và $\triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh bằng a nên $MD = ND = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Từ (*) suy ra: $(AB, DM) = (MN, DM)$.

Xét $\triangle MND$, ta có:

$$\cos DMN = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2MN \cdot MD} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

$\Rightarrow DMN$ là góc nhọn.

Vậy $(AB, DM) = (MN, DM) = DMN$ nên $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Gọi E là trung điểm của AB . Biết $AB = 2a, AD = DC = a$, đồng thời $SA \perp AB, SA \perp AD$ và $SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó:

a) $(SB, DC) = SBA$

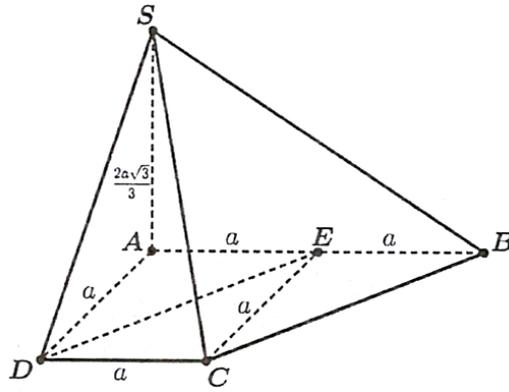
b) $\tan SBA = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $DE \parallel BC$

d) $(SD, BC) \approx 52,42^\circ$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------



Vì $CD // AB$

$$\Rightarrow (SB, DC) = (SB, AB) = SBA.$$

(ΔSAB vuông tại A nên $SBA < 90^\circ$).

Xét ΔSAB vuông tại A , ta có:

$$\tan SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SBA = 30^\circ.$$

Vậy $(SB, DC) = SBA = 30^\circ$.

Gọi E là trung điểm của AB .

Vì $BE // CD, BE = CD = a$ nên $BCDE$ là hình bình hành $\Rightarrow DE // BC$.

Khi đó: $(SD, BC) = (SD, DE)$.

$$\text{Ta có: } SE^2 = SA^2 + AE^2 = \frac{4a^2}{3} + a^2 = \frac{7a^2}{3}; SD^2 = SA^2 + AD^2 = \frac{7a^2}{3};$$

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 2a^2.$$

$$\text{Suy ra } SE = SD = \frac{a\sqrt{21}}{3}, DE = a\sqrt{2}.$$

Áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác SDE , ta được:

$$\cos SDE = \frac{SD^2 + DE^2 - SE^2}{2SD \cdot DE} = \frac{2a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{42}}{14} > 0 \Rightarrow SDE \text{ là góc nhọn.}$$

Vậy $(SD, BC) = (SD, DE) = SDE$. Suy ra: $(SD, BC) = SDE \approx 62,42^\circ$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a . Cho biết $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp AB, SA \perp AD$. Khi đó:

a) $(AB, SA) = 90^\circ$

b) $SA \perp CD$

c) $(SD, BC) = (SD, CD)$

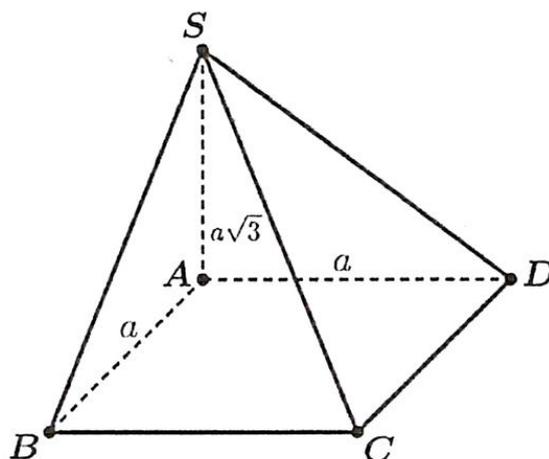
d) $SDA = 60^\circ$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

Vì $CD // AB$ (hai cạnh đối trong hình thoi) nên $(CD, SA) = (AB, SA) = 90^\circ$.

Vậy $SA \perp CD$.



Vì $BC // AD$ (hai cạnh đối trong hình thoi) nên $(SD, BC) = (SD, AD)$.

Tam giác SAD vuông tại A có:

$$\tan SDA = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SDA = 60^\circ.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (SD, BC) &= (SD, AD) \\ &= SDA = 60^\circ. \end{aligned}$$

Câu 7. Cho tứ diện ABCD có $AB = AC = AD = 1$ và $BAC = BAD = 60^\circ, CAD = 90^\circ$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó:

a) $CD = \sqrt{2}$

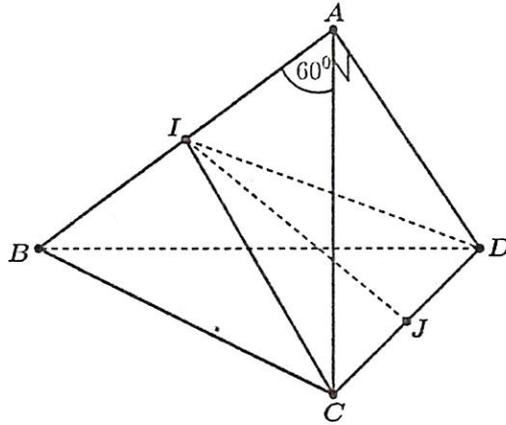
b) Tam giác BCD vuông cân tại C.

c) $IJ \perp AB$

d) $IJ \perp CD$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------



Các tam giác ABC và ABD cân tại A và có góc 60° nên hai tam giác ABC và ABD đều cạnh bằng 1.

Tam giác ACD vuông cân tại A có:

$$CD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Tam giác BCD có:

$$BC^2 = 1, BD^2 = 1, CD^2 = 2$$

$$\text{hay } BC^2 + BD^2 = CD^2$$

suy ra tam giác BCD vuông cân tại B .

Ta có: $AJ = BJ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên tam giác JAB cân tại J .

Mặt khác I là trung điểm AB nên $IJ \perp AB$.

Tam giác ABC và ABD đều cạnh 1 nên $CI = DI = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

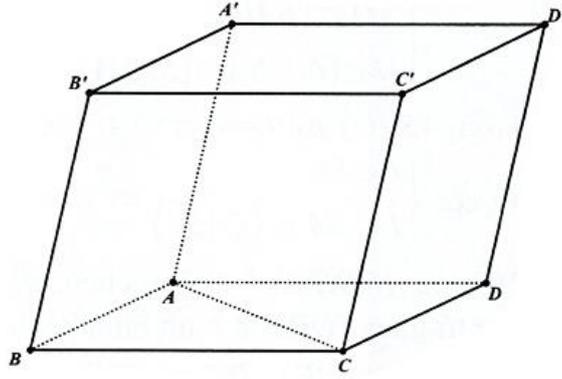
Vì vậy tam giác ICD cân tại I , mà J là trung điểm CD nên $IJ \perp CD$

Câu 8. Trong hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Khi đó:

- $ABCD$ là hình chữ nhật.
- $A'C' \perp BD$.
- $A'B \perp DC'$.
- $BC' \perp A'D$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------



Vì hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau nên các tứ giác $ABCD$, $A'B'BA$, $B'C'CB$ đều là hình thoi.

$$AC \perp BD \text{ mà } AC // A'C' \Rightarrow A'C' \perp BD.$$

$$A'B \perp AB' \text{ mà } AB' // DC' \Rightarrow A'B \perp DC'.$$

$$BC' \perp B'C \text{ mà } B'C // A'D \Rightarrow BC' \perp A'D.$$

Câu 9. Cho tứ diện đều $ABCD$ có các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khi đó:

a) $NA = NB = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

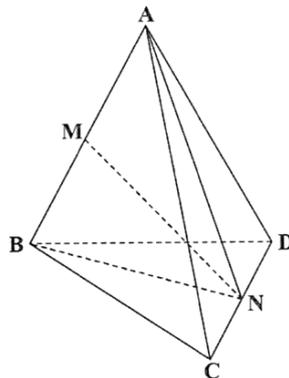
b) $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

c) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{3}$

d) Góc giữa đường thẳng MN và BC bằng 45°

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------



AN, BN lần lượt là các đường trung tuyến của hai tam giác đều $\triangle ACD$ và $\triangle BCD$ nên

$$NA = NB = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó ΔNAB cân tại N và $MN \perp AB$.

Xét ΔAMN vuông tại M . Ta có:

$$MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Đặt $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = b, \overrightarrow{AD} = c$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM} \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot (-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a}^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c})$$

Do $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = a^2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$ và $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \left(\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\vec{a}^2 + \vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}^2 \right) = \frac{a^2}{2}$$

Gọi φ là góc giữa MN và BC .

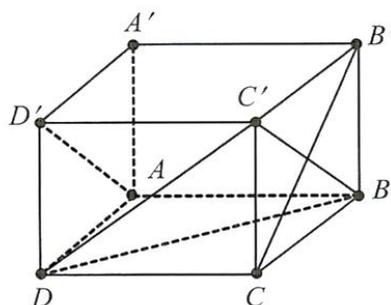
$$\text{Ta có } \cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Suy ra } \varphi = 45^\circ.$$

Câu 10. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có 6 mặt là hình vuông cạnh a . Khi đó:

- a) $BC' \parallel AD'$
- b) $(AD', B'C) = 90^\circ$
- c) $(AD', DC') = (BC', DC')$
- d) $BC'D = 90^\circ$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------



Ta có: $BC' // AD'$ nên $(AD', B'C) = (BC', B'C) = 90^\circ$.

Ta có: $BC' // AD'$ nên $(AD', DC') = (BC', DC') = \angle BC'D$

Ta có: $\triangle BC'D$ đều nên $\angle BC'D = 60^\circ$.

Câu 11. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA' \perp AB, AA' \perp AC$ và tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi M là trung điểm AA' . Khi đó:

a) $(A'B, C'C) = \angle AA'B$

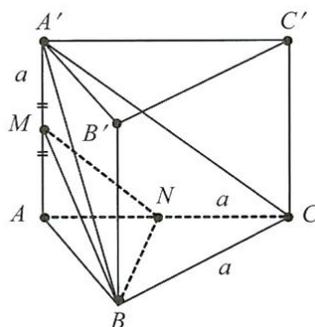
b) $(A'B, C'C) = 45^\circ$

c) $(A'C, MB) = \angle BAN$

d) $\angle BMN \approx 42,6^\circ$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------



Ta có: $AA' // C'C \Rightarrow (A'B, C'C) = (A'B, AA') = \angle AA'B$

Mà $\triangle AA'B$ vuông cân tại A nên $\angle AA'B = 45^\circ$.

Gọi N là trung điểm của AC

Ta có: $A'C // MN \Rightarrow (A'C, MB) = (MN, MB) = \angle BMN$

Xét $\triangle MNB$ có:

$$MB = MN = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a, BN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \angle BMN = \frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2} = \frac{7}{10} \Rightarrow \angle BMN \approx 45,6^\circ.$$