

CÂU HỎI

Câu 1. Tìm tất cả giá trị m để dãy số (u_n) với $u_n = \frac{mn+1}{n+1}$ là dãy số tăng.

Trả lời:

Câu 2. Vào đầu mỗi tháng, ông An đều gửi vào ngân hàng số tiền cố định 30 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% /tháng. Tính số tiền ông An có được sau tháng sau tháng thứ hai

Trả lời:

Câu 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n^2}$. Hãy tính số hạng thứ 6 của dãy số.

Trả lời:

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -1, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \end{cases}$ với $n \geq 2$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy.

Trả lời:

Câu 5. Cho dãy số $(u_n): -3; -1; 1; 3; 5; \dots$ Hãy chỉ ra một hệ thức truy hồi xác định dãy số đã cho.

Trả lời:

Câu 6. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 4. Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, gọi A_n, B_n, C_n, D_n lần lượt là trung điểm của các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1}C_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1}, D_{n-1}A_{n-1}$. Gọi S_n là diện tích của tứ giác $A_nB_nC_nD_n$. Tính S_{12} .

Trả lời:

Câu 7. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n) với $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$.

Trả lời:

Câu 8. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy của dãy?

Trả lời:

Câu 9. Dãy số $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ bị chặn trên bởi a . Khi đó $a = ?$

Trả lời:

Câu 10. Tìm số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau đây: Dãy số (u_n) với

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Trả lời:

Câu 11. Tìm số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau đây: Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Trả lời:

Câu 12. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + (1-a)u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tìm các giá trị của a để dãy số (u_n) tăng.

Trả lời:

LỜI GIẢI

Câu 1. Tìm tất cả giá trị m để dãy số (u_n) với $u_n = \frac{mn+1}{n+1}$ là dãy số tăng.

Trả lời: $m > 1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Xét } u_{n+1} - u_n &= \frac{m(n+1)+1}{(n+1)+1} - \frac{mn+1}{n+1} = \frac{mn+m+1}{n+2} - \frac{mn+1}{n+1} \\ &= \frac{mn^2 + 2mn + m + n + 1 - (mn^2 + 2mn + n + 2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{m-1}{(n+2)(n+1)}. \end{aligned}$$

$$\text{Dãy số đã cho là dãy tăng} \Leftrightarrow \frac{m-1}{(n+2)(n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow m > 1$$

(do $(n+2)(n+1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$).

Vậy $m > 1$ thỏa mãn đề bài.

Câu 2. Vào đầu mỗi tháng, ông An đều gửi vào ngân hàng số tiền cố định 30 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% /tháng. Tính số tiền ông An có được sau tháng sau tháng thứ hai

Trả lời: $\approx 60,54$ (triệu đồng)

Lời giải

Số tiền ông An có được:

$$\text{Sau tháng thứ nhất là: } T_1 = 30 + 30 \cdot \frac{0,6}{100} = 30 \left(1 + \frac{0,6}{100} \right) = 30,18 \text{ (triệu đồng).}$$

$$\text{Sau tháng thứ hai: } T_2 = 30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100} \right) + \left[30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100} \right) \right] \frac{0,6}{100}$$

$$= \left[30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100} \right) \right] \left(1 + \frac{0,6}{100} \right) = 30 \left(1 + \frac{0,6}{100} \right) + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100} \right)^2$$

$$\approx 60,54 \text{ (triệu đồng)}$$

Câu 3. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n+1}{n^2}$. Hãy tính số hạng thứ 6 của dãy số.

Trả lời: $\frac{13}{36}$

Lời giải

$$u_6 = \frac{2.6+1}{6^2} = \frac{13}{36}.$$

Câu 4. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -1, u_2 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \end{cases}$ với $n \geq 2$. Tìm số hạng thứ 5 của dãy.

Trả lời: 9

Lời giải

Ta có $u_1 = -1, u_2 = 3$.

Từ hệ thức truy hồi ta có

$$u_3 = u_2 + 2u_1 = 3 + 2 \cdot (-1) = 1.$$

$$u_4 = u_3 + 2u_2 = 1 + 2 \cdot 3 = 7.$$

$$u_5 = u_4 + 2u_3 = 7 + 2 \cdot 1 = 9.$$

Câu 5. Cho dãy số $(u_n): -3; -1; 1; 3; 5; \dots$. Hãy chỉ ra một hệ thức truy hồi xác định dãy số đã cho.

Trả lời: $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$ với $n \geq 1$

Lời giải

Ta có $u_1 = -3, u_2 = -1, u_3 = 1, u_4 = 3, u_5 = 5, \dots$

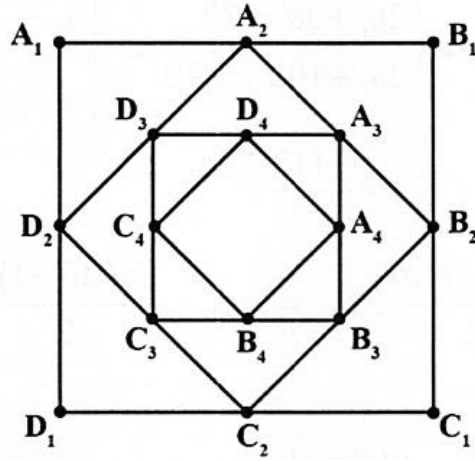
Suy ra $u_2 = u_1 + 2, u_3 = u_2 + 2, u_4 = u_3 + 2, u_5 = u_4 + 2, \dots$

Vậy hệ thức truy hồi xác định dãy số đã cho là $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$ với $n \geq 1$.

Câu 6. Cho hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có cạnh bằng 4. Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, gọi A_n, B_n, C_n, D_n lần lượt là trung điểm của các cạnh $A_{n-1}B_{n-1}, B_{n-1}C_{n-1}, C_{n-1}D_{n-1}, D_{n-1}A_{n-1}$. Gọi S_n là diện tích của tứ giác $A_nB_nC_nD_n$. Tính S_{12} .

Trả lời: $\frac{1}{32768}$

Lời giải



Ta thấy mỗi tứ giác $A_n B_n C_n D_n$ là một hình vuông có cạnh là $A_n B_n$.

Ta có: $A_1 B_1 = 4, A_2 B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_1 B_1 = 2\sqrt{2}, A_3 B_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} A_2 B_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 A_1 B_1 = 2, \dots$

Tổng quát: $A_n B_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} A_1 B_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \cdot 4 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+3}$.

Diện tích hình vuông $A_n B_n C_n D_n$ là $S_n = (A_n B_n)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$, với mọi $n \in \mathbb{N}^*$

Áp dụng với $n=12$ có: $S_{12} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15} = \frac{1}{32768}$.

Câu 7. Xét tính tăng, giảm của dãy số (u_n) với $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1}$.

Trả lời: dãy giảm

Lời giải

Ta có: $u_n = n - \sqrt{n^2 - 1} = \frac{(n - \sqrt{n^2 - 1})(n + \sqrt{n^2 - 1})}{n + \sqrt{n^2 - 1}} = \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$

Khi đó: $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1) + \sqrt{(n+1)^2 - 1}} < \frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$

Suy ra: $u_{n+1} < u_n$

Vậy dãy (u_n) là dãy giảm.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \frac{2n+1}{n+2}$. Số $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy của dãy?

Trả lời: 250

Lời giải

Ta có: $u_n = \frac{167}{84}$

$$\Leftrightarrow \frac{2n+1}{n+2} = \frac{167}{84} \Leftrightarrow 84.(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$$

Vậy $\frac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n) .

Câu 9. Dãy số $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$ bị chặn trên bởi a . Khi đó $a = ?$

Trả lời: 2

Lời giải

Ta có: $u_n > 1$,

Giả sử tồn tại $u_n \geq 2 \Rightarrow \sqrt{u_{n-1} + 2} \geq 2 \Rightarrow u_{n-1} \geq 2$.

Nếu tồn tại $u_n \geq 2$ thì suy ra $u_{n-1} \geq 2$, từ đó suy ra được $u_{n-2}, u_{n-3}, \dots, u_2, u_1 \geq 2$ vô lý

Do $u_1 = \sqrt{2} < 2$. Nên điều giả sử là sai. Suy ra: $u_n < 2$

$$\text{Xét } u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n + 2} - u_n = \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} = \frac{(2 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} > 0$$

Suy ra: $u_{n+1} > u_n$ nên u_n là dãy tăng.

Vậy dãy đã cho tăng và bị chặn trên bởi 2.

Câu 10. Tìm số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau đây: Dãy số (u_n) với

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Trả lời: $u_n = 2n - 1$

Lời giải

Từ công thức $u_{n+1} = u_n + 2, \forall n \geq 1$ suy ra $u_{n+1} - u_n = 2, \forall n \geq 1$. Khi đó ta có:

$$u_2 - u_1 = 2$$

$$u_3 - u_2 = 2$$

$$u_4 - u_3 = 2$$

.....

$$u_n - u_{n-1} = 2$$

Cộng theo vế các đẳng thức trên ta được:

$$u_n - u_1 = (n-1) \cdot 2 \Leftrightarrow u_n = u_1 + 2n - 2 \Leftrightarrow u_n = 2n - 1$$

Câu 11. Tìm số hạng tổng quát u_n theo n của dãy số sau đây: Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Trả lời: $u_n = 2^n$

Lời giải

Từ công thức $u_{n+1} = 2u_n, \forall n \geq 1$ suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2, \forall n \geq 1$. Từ đó ta có:

$$\frac{u_2}{u_1} = 2; \frac{u_3}{u_2} = 2; \frac{u_4}{u_3} = 2; \dots; \frac{u_n}{u_{n-1}} = 2$$

Nhân theo về tất cả các đẳng thức trên ta được: $\frac{u_n}{u_1} = 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = u_1 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2 \cdot 2^{n-1} \Leftrightarrow u_n = 2^n$

Câu 12. Cho dãy số (u_n) biết $\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + (1-a)u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Tìm các giá trị của a để dãy số (u_n) tăng.

Trả lời: $a > 1$

Lời giải

Xét hiệu: $u_{n+2} - u_{n+1} = au_{n+1} + (1-a)u_n - u_{n+1} = (a-1)u_{n+1} + (1-a)u_n = (a-1)(u_{n+1} - u_n)$

Khi đó:

$$u_3 - u_2 = (a-1)(u_2 - u_1) = (a-1)(2-1) = a-1$$

$$u_4 - u_3 = (a-1)(u_3 - u_2) = (a-1)(a-1) = (a-1)^2$$

$$u_5 - u_4 = (a-1)(u_4 - u_3) = (a-1)(a-1)^2 = (a-1)^3$$

Suy ra: $u_{n+1} - u_n = (a-1)^{n-1}$.

Để dãy số (u_n) tăng thì $a-1 > 0 \Leftrightarrow a > 1$

Vậy $a > 1$ thì dãy số (u_n) tăng.