

CÂU HỎI

Câu 1. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết rằng:
$$\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$$

Trả lời:

Câu 2. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết rằng:
$$\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$$

Trả lời:

Câu 3. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết rằng: $u_1 + 2u_5 = 0$ và $S_4 = 14$.

Trả lời:

Câu 4. Cho hai số -3 và 23 . Thêm vào giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n và S_n là tổng n số hạng đầu của cấp số cộng đó.

Trả lời:

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu bằng 1 và tổng 100 số hạng đầu bằng 14950 .

Tính tổng $\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{49} u_{50}}$.

Trả lời:

Câu 6. Trong một khán phòng có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước đó 4 ghế, hỏi khán phòng đó có tất cả bao nhiêu ghế?

Trả lời:

Câu 7. Trong một hội chợ đón xuân, một gian hàng sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo quy luật là hàng trên cùng có 1 hộp sữa, mỗi hàng ngay phía dưới lần lượt được xếp nhiều hơn 2 hộp so với hàng trên nó (tham khảo hình vẽ dưới). Hỏi hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?



Trả lời:

Câu 8. Cho biết bốn số $5; x; 15; y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $3x + 2y$.

Trả lời:

Câu 9. Cho cấp số cộng (u_n) , thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) , biết $d > 4$.

Trả lời:

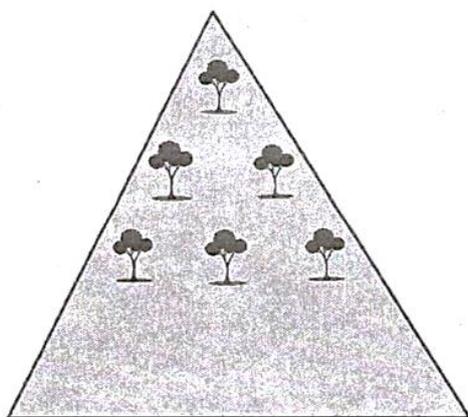
Câu 10. Giải phương trình $1 + 8 + 15 + 22 + \dots + x = 7944$.

Trả lời:

Câu 11. Cho bốn số thực tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tìm tích của bốn số đó.

Trả lời:

Câu 12. Người ta trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác theo cách sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, và cứ như thế mỗi hàng sau sẽ có nhiều hơn hàng ngay trước đó 1 cây. Hỏi tổng số hàng cây trong khu vườn bằng bao nhiêu?



Trả lời:

Câu 13. Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá của mét khoan đầu tiên là 100 nghìn đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 30 nghìn đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người cần khoan một giếng sâu 20m để lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bao nhiêu nghìn đồng?

Trả lời:

Câu 14. Cho hai cấp số cộng có dãy số hạng lần lượt là: $5; 8; 11; \dots$ và $3; 7; 11; \dots$. Hỏi trong 100 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số, có bao nhiêu số hạng chung?

Trả lời:

Câu 15. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 4$, công sai $d = -3$ và $u_n = -41$. Tìm n .

Trả lời:

Câu 16. Cho cấp số cộng có số hạng tổng quát $u_n = 5n - 7$, biết tổng n số hạng đầu của cấp số cộng là $S_n = 817$. Tìm n .

Trả lời:

Câu 17. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Hỏi số 83 là số hạng thứ mấy?

Trả lời:

Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12, u_{14} = 18$. Tìm u_9 .

Trả lời:

Câu 19. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_3 = 20, u_5 + u_7 = -29$. Tìm u_{12} .

Trả lời:

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Trả lời:

Câu 21. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$. Tìm tổng 20 số hạng đầu của dãy số

(u_n) .

Trả lời:

Câu 22. Tính tổng $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Trả lời:

Câu 23. Cho cấp số cộng (u_n) gồm bốn số nguyên. Biết tổng của chúng bằng 20, tổng các nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$. Tìm bốn số đó.

Trả lời:

Câu 24. Giải phương trình sau: $2 + 7 + 12 + \dots + x = 245$.

Trả lời:

Câu 25. Giải phương trình sau: $(2x + 1) + (2x + 6) + (2x + 11) + \dots + (2x + 96) = 1010$.

Trả lời:

Câu 26. Tìm m để phương trình $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Trả lời:

Câu 27. Một ngôi nhà hình kim tự tháp (có gạch nâu ốp bên ngoài) được bao quanh bởi rất nhiều cây cối và là nơi tuyệt vời để nghỉ mát mùa hè; ngôi nhà có chiều dài, chiều rộng là $6,8m$, chiều cao là $2,72m$. Khi xây dựng ngôi nhà, người chủ đã tính toán số viên gạch nâu hình hộp chữ nhật cần ốp tường; biết hàng trên ít hơn hàng dưới 1 viên, hàng trên cùng là 1 viên, kích thước viên gạch nâu hình hộp chữ nhật là $0,2m - 0,08m - 1m$. Hãy dự tính số viên gạch nâu ốp tường cả bốn mặt của ngôi nhà.



Trả lời:

Câu 28. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 26$ và $d = -4$. Viết công thức số hạng tổng quát u_n ?

Trả lời:

Câu 29. Một rạp xiếc có 35 dãy ghế, dãy đầu tiên có 18 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 4 ghế. Hỏi rạp xiếc có tất cả bao nhiêu ghế?

Trả lời:

Câu 30. Tính tổng $T = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Trả lời:

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m = 0$.

Trả lời:

Câu 32. Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

Trả lời:

Câu 33. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của một mét khoan đầu tiên là 75000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng lên 6000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 80m mới có nước. Vậy phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

Trả lời:

LỜI GIẢI

Câu 1. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết rằng:
$$\begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$$

Trả lời: số hạng đầu $u_1 = 1$ công sai $d = 3$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \begin{cases} u_4 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ u_1 + 3d + u_1 + 5d = 26 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 10 \\ 2u_1 + 8d = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ d = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ công sai $d = 3$.

Câu 2. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết rằng: $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases}$

Trả lời: số hạng đầu $u_1 = 21$, công sai $d = -3$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 15 \\ u_1 + u_6 = 27 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 - (u_1 + 2d) + (u_1 + 4d) = 15 \\ u_1 + (u_1 + 5d) = 27 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 2d = 15 \\ 2u_1 + 5d = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 21 \\ d = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 21$, công sai $d = -3$.

Câu 3. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của cấp số cộng (u_n) biết rằng: $u_1 + 2u_5 = 0$ và $S_4 = 14$.

Trả lời: số hạng đầu $u_1 = 8$, công sai $d = -3$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_1 + 2u_5 = 0 \Leftrightarrow u_1 + 2(u_1 + 4d) = 0 \Leftrightarrow 3u_1 + 8d = 0. \quad (1)$$

$$S_4 = 14 \Leftrightarrow \frac{4(2u_1 + 3d)}{2} = 14 \Leftrightarrow 2u_1 + 3d = 7. \quad (2)$$

$$\text{Giải hệ gồm hai phương trình (1) và (2), ta được } \begin{cases} u_1 = 8 \\ d = -3 \end{cases}.$$

Vậy cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 8$, công sai $d = -3$.

Câu 4. Cho hai số -3 và 23 . Thêm vào giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n và S_n là tổng n số hạng đầu của cấp số cộng đó.

Trả lời: $n = 12$ và $S_{12} = 96$

Lời giải

Theo giả thiết thì cấp số cộng có $n + 2$ số hạng với $u_1 = -3, u_{n+2} = 23$.

Ta có: $u_{n+2} = u_1 + (n+1)d \Rightarrow n+1 = \frac{u_{n+2} - u_1}{d} = \frac{23 - (-3)}{2} = 13 \Rightarrow n = 12.$

Khi đó: $S_{12} = \frac{12(2u_1 + 11d)}{2} = \frac{12[2(-3) + 11.2]}{2} = 96.$

Câu 5. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu bằng 1 và tổng 100 số hạng đầu bằng 14950.

Tính tổng $\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{49} u_{50}}.$

Trả lời: $S = \frac{49}{148}$

Lời giải

Gọi d là công sai của cấp số cộng đã cho.

Ta có: $S_{100} = \frac{100}{2}(2u_1 + 99d) = 50(2.1 + 99d) = 14950 \Rightarrow d = 3.$

Đặt $S = \frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \dots + \frac{1}{u_{49} u_{50}}.$

Ta có: $S.d = \frac{d}{u_1 u_2} + \frac{d}{u_2 u_3} + \dots + \frac{d}{u_{49} u_{50}} = \frac{u_2 - u_1}{u_1 u_2} + \frac{u_3 - u_2}{u_2 u_3} + \dots + \frac{u_{50} - u_{49}}{u_{49} u_{50}}$
 $= \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_3} - \dots + \frac{1}{u_{49}} - \frac{1}{u_{50}} = \frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{50}} = 1 - \frac{1}{1 + 49.3} = \frac{147}{148}.$

Suy ra: $S = \frac{147}{148} : 3 = \frac{49}{148}.$

Câu 6. Trong một khán phòng có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liên sau nhiều hơn dãy trước đó 4 ghế, hỏi khán phòng đó có tất cả bao nhiêu ghế?

Trả lời: 2190

Lời giải

Gọi u_1, u_2, \dots, u_{30} lần lượt là số ghế của dãy ghế thứ nhất, dãy ghế thứ hai, ..., dãy ghế thứ ba mươi. Khi đó, (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 15$, công sai $d = 4$ (trong đó $1 \leq n \leq 30$). Gọi S_{30} là tổng số ghế trong khán phòng. Ta có:

$S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \frac{30}{2}[2u_1 + (30-1)d] = 15(2.15 + 29.4) = 2190.$

Câu 7. Trong một hội chợ đón xuân, một gian hàng sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo quy luật là hàng trên cùng có 1 hộp sữa, mỗi hàng ngay phía dưới lần lượt được xếp nhiều hơn 2 hộp so với hàng trên nó (tham khảo hình vẽ dưới). Hỏi hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?



Trả lời: 59

Lời giải

Xét cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 2$. Khi đó, tổng của n số hạng đầu cấp số cộng là: $S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] \Leftrightarrow 900 = \frac{n}{2}[2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2] \Leftrightarrow 1800 = 2n^2 \Leftrightarrow n^2 = 900$. Suy ra $n = 30$.

Vậy số hộp sữa của dãy cuối cùng là: $u_{30} = u_1 + 29d = 1 + 29 \cdot 2 = 59$.

Câu 8. Cho biết bốn số $5; x; 15; y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $3x + 2y$.

Trả lời: 70

Lời giải

Theo tính chất của cấp số cộng, ta có:
$$\begin{cases} x = \frac{5+15}{2} \\ \frac{x+y}{2} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \end{cases}$$

Vậy $3x + 2y = 70$.

Câu 9. Cho cấp số cộng (u_n) , thỏa mãn $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases}$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n) , biết $d > 4$.

Trả lời: $d = 15$

Lời giải

Ta có:
$$\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = 36 \\ u_2 u_3 = 54 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_1 + d) + (u_1 + 3d) + (u_1 + 5d) = 36 \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = 12 & (1) \\ (u_1 + d)(u_1 + 2d) = 54 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $u_1 = 12 - 3d$.

Thay vào (2), ta được: $(12 - 2d)(12 - d) = 54 \Leftrightarrow d^2 - 18d + 45 = 0 \Leftrightarrow d = 3$ hoặc $d = 15$.

Vì $d > 4$ nên $d = 15$ thoả mãn.

Câu 10. Giải phương trình $1 + 8 + 15 + 22 + \dots + x = 7944$.

Trả lời: 330

Lời giải

Vế trái phương trình là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 7$ và số hạng cuối $u_n = x$, tổng n số hạng của cấp số cộng $S_n = 7944$.

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2} \Leftrightarrow 7944 = \frac{[2 \cdot 1 + (n-1)7]n}{2} \\ &\Leftrightarrow 7n^2 - 5n - 15888 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} n = 48 & (\text{nhận}) \\ n = -\frac{331}{7} & (\text{loại}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x = u_{48} = 1 + 47 \cdot 7 = 330$.

Câu 11. Cho bốn số thực tạo thành một cấp số cộng có tổng bằng 28 và tổng các bình phương của chúng bằng 276. Tìm tích của bốn số đó.

Trả lời: 585

Lời giải

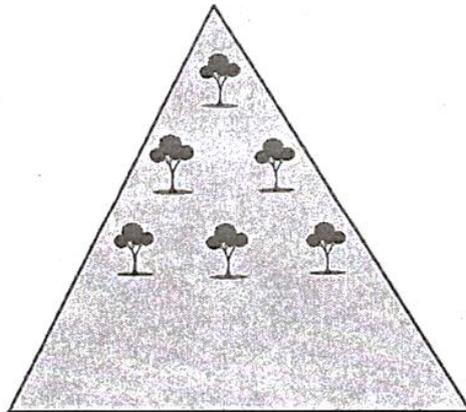
Gọi bốn số cần tìm theo thứ tự cấp số cộng là: $a - 3r, a - r, a + r, a + 3r$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} a - 3r + a - r + a + r + a + 3r = 28 \\ (a - 3r)^2 + (a - r)^2 + (a + r)^2 + (a + 3r)^2 = 276 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 28 \\ 4a^2 + 20r^2 = 276 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ r^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ r = \pm 2 \end{cases}$$

Vậy bốn số cần tìm là 1, 5, 9, 13; tích của chúng bằng 585

Câu 12. Người ta trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác theo cách sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, và cứ như thế mỗi hàng sau sẽ có nhiều hơn hàng ngay trước đó 1 cây. Hỏi tổng số hàng cây trong khu vườn bằng bao nhiêu?



Trả lời: 30 hàng.

Lời giải

Số cây trên mỗi hàng lập thành một cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

$$\text{Tổng số cây trồng được là: } S_n = 465 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 465 \Leftrightarrow n^2 + n - 930 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 30 \text{ (nhận)} \\ n = -31 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy số hàng cây trong khu vườn là 30 hàng.

Câu 13. Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá của mét khoan đầu tiên là 100 nghìn đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 30 nghìn đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người cần khoan một giếng sâu 20m để lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bao nhiêu nghìn đồng?

Trả lời: 7700 (nghìn đồng).

Lời giải

Gọi u_n là giá của mét khoan thứ n , trong đó $1 \leq n \leq 20$.

Khi đó, (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100$ và công sai $d = 30$.

Số tiền mà gia đình phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng là:

$$S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = \frac{20(2 \cdot 100 + 19 \cdot 30)}{2} = 7700 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Câu 14. Cho hai cấp số cộng có dãy số hạng lần lượt là: 5; 8; 11; ... và 3; 7; 11; ... Hỏi trong 100 số hạng đầu tiên của mỗi cấp số, có bao nhiêu số hạng chung?

Trả lời: 25

Lời giải

Giả sử u_n, v_m theo thứ tự là số hạng thứ n và m của mỗi cấp số cộng, ta có:

$$u_n = 5 + 3(n-1); v_m = 3 + 4(m-1). \text{ Ta có:}$$

$$u_n = v_m \Leftrightarrow 5 + 3(n-1) = 3 + 4(m-1) \Leftrightarrow 2 + 3n = -1 + 4m \Leftrightarrow n = \frac{4m}{3} - 1.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{m}{3}, \text{ vì } n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow t \in \mathbb{N}^*. \text{ Ta có: } \begin{cases} m = 3t \leq 100 \\ n = 4t - 1 \leq 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t \leq 33 \\ t \leq 25 \end{cases}$$

Suy ra $t \in \{1; 2; 3; \dots; 25\}$. Với mỗi giá trị của t , ta có một số hạng chung thuộc về hai dãy $(u_n), (v_m)$. Vậy có tất cả 25 số hạng chung của hai dãy số đã cho trong 100 số hạng đầu tiên.

Câu 15. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 4$, công sai $d = -3$ và $u_n = -41$. Tìm n .

Trả lời: $n = 16$

Lời giải

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$, suy ra $-41 = 4 + (n-1) \cdot (-3) \Leftrightarrow n = 16$.

Với điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$, vậy $n = 16$ thỏa mãn.

Câu 16. Cho cấp số cộng có số hạng tổng quát $u_n = 5n - 7$, biết tổng n số hạng đầu của cấp số cộng là $S_n = 817$. Tìm n .

Trả lời: $n = 19$

Lời giải

Gọi u_1 là số hạng đầu của cấp số cộng (u_n) .

Vì $u_n = 5n - 7$ nên $u_1 = 5 \cdot 1 - 7 = -2$.

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} \Leftrightarrow 817 = \frac{n[-2 + (5n - 7)]}{2} \Leftrightarrow 5n^2 - 9n - 1634 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 19 \\ n = -\frac{86}{5} \end{cases}$$

Với điều kiện $n \in \mathbb{N}^*$, ta tìm được $n = 19$.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) là một cấp số cộng có $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Hỏi số 83 là số hạng thứ mấy?

Trả lời: 21

Lời giải

Ta có $u_n = u_1 + (n-1)d$, suy ra $83 = 3 + (n-1) \cdot 4 \Leftrightarrow n = 21$.

Vậy số 83 là số hạng thứ 21.

Câu 18. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_4 = -12, u_{14} = 18$. Tìm u_9 .

Trả lời: 3

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_4 = u_1 + 3d \\ u_{14} = u_1 + 13d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + 3d = -12 \\ u_1 + 13d = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ u_1 = -21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_9 = u_1 + 8d = -21 + 8 \cdot 3 = 3.$$

Câu 19. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 + u_3 = 20, u_5 + u_7 = -29$. Tìm u_{12} .

Trả lời: $-\frac{113}{2}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_2 + u_3 = 20 \\ u_5 + u_7 = -29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1 + 3d = 20 \\ 2u_1 + 10d = -29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{41}{2} \\ d = -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow u_{12} = u_1 + 11d = \frac{41}{2} + 11 \cdot (-7) = -\frac{113}{2}.$$

Câu 20. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Trả lời: 1500

Lời giải

$$\text{Ta có: } u_3 + u_{28} = 100 \Leftrightarrow (u_1 + 2d) + (u_1 + 27d) = 100 \Leftrightarrow 2u_1 + 29d = 100$$

$$\text{Mà } S_{30} = \frac{30}{2}(2u_1 + 29d) \text{ nên } S_{30} = 15 \cdot 100 = 1500.$$

Câu 21. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 3, n \geq 1 \end{cases}$. Tìm tổng 20 số hạng đầu của dãy số (u_n) .

Trả lời: 610

Lời giải

Vì dãy số (u_n) có $u_{n+1} = u_n + 3, n \geq 1$ nên (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 2$, công sai $d = 3$.

Vậy tổng 20 số hạng đầu của dãy số (u_n) là:

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2u_1 + 19d] = 10(2 \cdot 2 + 19 \cdot 3) = 610.$$

Câu 22. Tính tổng $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Trả lời: 5050

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } S &= (100^2 - 99^2) + (98^2 - 97^2) + \dots + (2^2 - 1^2) \\ &= (100 - 99)(100 + 99) + (98 - 97)(98 + 97) + \dots + (2 - 1)(2 + 1) \\ &= 199 + 195 + 191 + \dots + 3 \end{aligned}$$

Mà dãy số $3, 7, \dots, 191, 195, 199$ là cấp số cộng có $\begin{cases} u_1 = 3 \\ d = 4 \\ u_n = 199 \end{cases}$

$$\Rightarrow 199 = u_1 + (n-1)d \Rightarrow n = 50.$$

$$\text{Vậy } S = S_{50} = \frac{50}{2}(2u_1 + 49d) = 5050.$$

Câu 23. Cho cấp số cộng (u_n) gồm bốn số nguyên. Biết tổng của chúng bằng 20, tổng các nghịch đảo của chúng bằng $\frac{25}{24}$. Tìm bốn số đó.

Trả lời: $u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6, u_4 = 8$ hoặc $u_1 = 8, u_2 = 6, u_3 = 4, u_4 = 2$

Lời giải

Gọi $d = 2x$ là công sai của cấp số cộng đã cho, vì cấp số cộng đã cho gồm bốn số nguyên nên suy ra $d \in \mathbb{Z}$.

Ta có bốn số cần tìm là $a - 3x, a - x, a + x, a + 3x$.

Khi đó từ giả thiết ta có: $(a - 3x) + (a - x) + (a + x) + (a + 3x) = 20 \Leftrightarrow 4a = 20 \Leftrightarrow a = 5$.

Ta lại có: $\frac{1}{a-3x} + \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+3x} = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{1}{5-3x} + \frac{1}{5-x} + \frac{1}{5+x} + \frac{1}{5+3x} = \frac{25}{24}$ (1)

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq \frac{5}{3} \\ x \neq -\frac{5}{3} \\ x \neq 5 \\ x \neq -5 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5-3x} + \frac{1}{5+3x} \right) + \left(\frac{1}{5-x} + \frac{1}{5+x} \right) = \frac{25}{24} \Leftrightarrow \frac{2}{25-9x^2} + \frac{2}{25-x^2} = \frac{5}{24}$$

$$\Leftrightarrow 48(25-x^2) + 48(25-9x^2) = 5(25-x^2)(25-9x^2) \Leftrightarrow 45x^4 - 770x^2 + 725 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = \frac{145}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm \frac{\sqrt{145}}{3} \end{cases}$$

Đổi chiều điều kiện và vì $d \in \mathbb{Z}$ nên ta nhận $x = \pm 1$.

Với $a = 5, x = 1$ ta có $u_1 = 2, u_2 = 4, u_3 = 6, u_4 = 8$.

Với $a = 5, x = -1$ ta có $u_1 = 8, u_2 = 6, u_3 = 4, u_4 = 2$.

Câu 24. Giải phương trình sau: $2 + 7 + 12 + \dots + x = 245$.

Trả lời: $x = 47$

Lời giải

Ta có dãy số $2, 7, 12, \dots, x$ lập thành cấp số cộng có $\begin{cases} u_1 = 2 \\ d = 5 \\ u_n = x \\ S_n = 245 \end{cases}$

$$\text{Suy ra: } S_n = 245 \Leftrightarrow 245 = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] \Leftrightarrow 245 \cdot 2 = n[2 \cdot 2 + (n-1)5] \Rightarrow n = 10.$$

Vậy $x = u_{10} = u_1 + 9d = 47$.

Câu 25. Giải phương trình sau: $(2x+1) + (2x+6) + (2x+11) + \dots + (2x+96) = 1010$.

Trả lời: $x = 1$

Lời giải

Ta có dãy số $(2x+1), (2x+6), (2x+11), \dots, (2x+96)$ lập thành cấp số cộng có

$$\begin{cases} u_1 = 2x+1 \\ d = 5 \\ u_n = 2x+96 \\ S_n = 1010 \end{cases}$$

Suy ra: $2x+96 = 2x+1 + (n-1)5 \Rightarrow n = 20$.

Vậy $S_{20} = 1010 \Leftrightarrow \frac{20}{2}(u_1 + u_n) = 1010 \Leftrightarrow 10(2x+1 + 2x+96) = 1010 \Rightarrow x = 1$.

Câu 26. Tìm m để phương trình $x^4 - 2(m+1)x^2 + 2m+1 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

Trả lời:
$$\begin{cases} m = 4 \\ m = -\frac{4}{9} \end{cases}$$

Lời giải

Đặt $t = x^2, t \geq 0$.

Phương trình trở thành $t^2 - 2(m+1)t + 2m+1 = 0$ (2)

Phương trình đề bài có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm

dương phân biệt $t_2 > t_1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - (2m+1) > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 2(m+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m \neq 0$.

Khi đó phương trình (1) có bốn nghiệm là $-\sqrt{t_2}; -\sqrt{t_1}; \sqrt{t_1}; \sqrt{t_2}$.

Bốn nghiệm này lập thành cấp số cộng khi:
$$\begin{cases} -\sqrt{t_2} + \sqrt{t_1} = -2\sqrt{t_1} \\ -\sqrt{t_1} + \sqrt{t_2} = 2\sqrt{t_1} \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Leftrightarrow t_2 = 9t_1$$
.

Theo định lý Vi-ét thì:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2(m+1) \\ t_1 t_2 = 2m+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 9t_1 = 2(m+1) \\ t_1 \cdot 9t_1 = 2m+1 \end{cases} \Rightarrow 9m^2 - 32m - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 & (\text{thỏa mãn}) \\ m = -\frac{4}{9} & (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

Câu 27. Một ngôi nhà hình kim tự tháp (có gạch nâu ốp bên ngoài) được bao quanh bởi rất nhiều cây cối và là nơi tuyệt vời để nghỉ mát mùa hè; ngôi nhà có chiều dài, chiều rộng là $6,8m$, chiều cao là $2,72m$. Khi xây dựng ngôi nhà, người chủ đã tính toán số viên gạch nâu hình hộp chữ nhật cần ốp tường; biết hàng trên ít hơn hàng dưới 1 viên, hàng trên cùng là 1 viên, kích thước viên gạch nâu hình hộp chữ nhật là $0,2m - 0,08m - 1m$. Hãy dự tính số viên gạch nâu ốp tường cả bốn mặt của ngôi nhà.



Trả lời: 2380

Lời giải

Một bức tường có $2,72:0,08 = 34$ hàng gạch.

Số gạch ở mỗi hàng tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

Số viên gạch trên một bức tường là $S_{34} = 34 \cdot 1 + \frac{34 \cdot 33}{2} \cdot 1 = 595$ viên gạch.

Vì 4 mặt đều bằng nhau nên có $4 \cdot 595 = 2380$ viên gạch người chủ dự tính đặt mua.

Câu 28. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_2 = 26$ và $d = -4$. Viết công thức số hạng tổng quát u_n ?

Trả lời: $u_n = 34 - 4n$

Lời giải

Áp dụng công thức $u_n = u_1 + (n-1)d$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 26 = u_2 = u_1 + (2-1)(-4) \\ d = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26 = u_1 + (-4) \\ d = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 30 \\ d = -4 \end{cases}$$

Khi đó số hạng tổng quát $u_n = 34 - 4n$.

Câu 29. Một rạp xiếc có 35 dãy ghế, dãy đầu tiên có 18 ghế. Mỗi dãy sau có hơn dãy trước 4 ghế. Hỏi rạp xiếc có tất cả bao nhiêu ghế?

Trả lời: 3010

Lời giải

Số ghế của mỗi dãy (bắt đầu từ dãy đầu tiên) theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng có 35 số hạng với công sai $d = 4$ và $u_1 = 18$.

$$\text{Tổng số ghế là } S_{35} = u_1 + u_2 + \dots + u_{35} = \frac{35 \cdot [2 \cdot 18 + (35-1) \cdot 4]}{2} = 3010.$$

Câu 30. Tính tổng $T = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + \dots + 2^2 - 1^2$.

Trả lời: 500500

Lời giải

Ta có:

$$T = 1000^2 - 999^2 + 998^2 - 997^2 + \dots + 2^2 - 1^2$$

$$T = (1000^2 - 999^2) + (998^2 - 997^2) + \dots + (2^2 - 1^2)$$

$$T = 1 \cdot (1000 + 999) + 1 \cdot (998 + 997) + \dots + 1 \cdot (2 + 1)$$

$$T = 1999 + 1995 + \dots + 3$$

Nhận thấy các số hạng của tổng T tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1999$ và công sai $d = -4$.

Giả sử tổng T có n số hạng.

$$\text{Khi đó: } u_n = 3 \Leftrightarrow u_1 + (n-1)d = 3 \Leftrightarrow 1999 + (n-1) \cdot (-4) = 3 \Leftrightarrow n = 500$$

$$\text{Vậy } T = S_{500} = \frac{500 \cdot (u_1 + u_{500})}{2} = \frac{500 \cdot (1999 + 3)}{2} = 500500.$$

Câu 31. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có ba nghiệm phân biệt lập thành một cấp số cộng: $x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m = 0$.

Trả lời: $m = 1$

Lời giải

$$\text{Phương trình: } x^3 - 3mx^2 + 2m(m-4)x + 9m^2 - m = 0 (*)$$

Giả sử phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng.

$$\text{Theo định lý Vi-ét đối với phương trình bậc ba, ta có: } x_1 + x_2 + x_3 = 3m \quad (1)$$

$$\text{Vì } x_1, x_2, x_3 \text{ lập thành một cấp số cộng nên } x_1 + x_3 = 2x_2 \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta được: } 3x_2 = 3m \Leftrightarrow x_2 = m.$$

Thay $x_2 = m$ vào phương trình (*) ta được:

$$m^3 - 3m \cdot m^2 + 2m(m-4) \cdot m + 9m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m^2 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

Với $m = 0$, ta có: $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (loại vì phương trình có một nghiệm duy nhất).

Với $m = 1$, ta có: $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2; x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32. Một chiếc đồng hồ đánh chuông, kể từ thời điểm 0 (giờ) thì sau mỗi giờ thì số tiếng chuông được đánh đúng bằng số giờ mà đồng hồ chỉ tại thời điểm đánh chuông. Hỏi một ngày đồng hồ đó đánh bao nhiêu tiếng chuông?

Trả lời: 300 tiếng chuông.

Lời giải

Kể từ lúc 1 (giờ) đến 24 (giờ) số tiếng chuông được đánh lập thành cấp số cộng có 24 số hạng với $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

Do đó tổng số tiếng chuông đánh trong 1 ngày là: $S = S_{24} = \frac{24 \cdot (u_1 + u_{24})}{2} = \frac{24 \cdot (1 + 24)}{2} = 300$.

Vậy một ngày đồng hồ đó đánh 300 tiếng chuông.

Câu 33. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước đến để khoan giếng nước. Biết giá của một mét khoan đầu tiên là 75000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng lên 6000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 80m mới có nước. Vậy phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

Trả lời: 24960000 (đồng)

Lời giải

Giá tiền khoan mỗi mét (bắt đầu từ mét đầu tiên) lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 75000, d = 6000$. Do cần phải khoan 80m nên tổng số tiền cần trả là:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_{80} = S_{80} = 80u_1 + \frac{80 \cdot 79}{2}d = 80 \cdot 75000 + \frac{80 \cdot 79}{2} \cdot 6000 = 24960000 \text{ (đồng)}$$