CÂU HỎI

Câu 1. Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{2n^2-3\sqrt{n}+1}{3n\sqrt{n}+2n}$

Trả lời: ....

Câu 2. Tìm giới hạn sau: $\lim \sqrt[4]{\dfrac{n^4-2n^3+1}{2n^3+n^2}}$.

Trả lời: ....

Câu 3. Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{4^{3n}-5^n}{2^{2n}+3\cdot 5^{2n}}$

Trả lời: ....

Câu 4. Tìm giới hạn sau: $\lim n\sqrt{\dfrac{9n^2}{4n^4-n^2}}$.

Trả lời: ....

Câu 5. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{2n^2-n+3}\right)$;

Trả lời: ....

Câu 6. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-2}-n\right)$;

Trả lời: ....

Câu 7. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{3n^2+n+2}-\sqrt{3n^2+n+1}\right)$;

Trả lời: ....

Câu 8. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(n+n^2-\sqrt{n^4+3n+1}\right)$.

Trả lời: ....

Câu 9. Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2+3n}$

Trả lời: ....

Câu 10. Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}$

Trả lời: ....

Câu 11. Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{n\cdot\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$

Trả lời: ....

Câu 12. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

Trả lời: ....

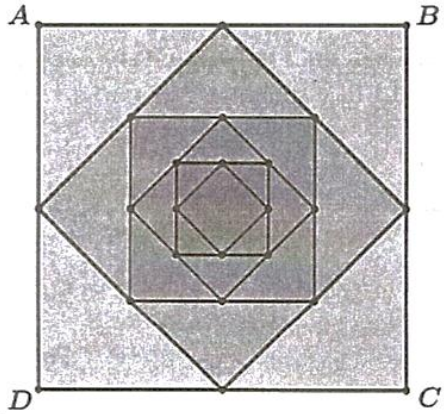
Câu 13. Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$

Trả lời: ……………………….

Câu 14. Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $T=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$

Trả lời: ……………………….

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1. Nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông $ABCD$, ta được hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông thứ hai, ta được hình vuông thứ ba. Tiếp tục như thế ta nhận được một dãy các hình vuông. Tìm tổng chu vi của dãy các hình vuông đó.



Trả lời: ……………………….

Câu 16. Tìm giới hạn sau: $\lim\frac{2n^3-2n+3}{1-4n^3}$

Trả lời: ……………………….

Câu 17. Tìm giới hạn sau: $\lim\frac{n^3+1}{n^2-2n+3}$

Trả lời: ……………………….

Câu 18. Tìm giới hạn sau: $\lim\frac{\sqrt{3n^2-4}}{3n+2}$

Trả lời: ……………………….

Câu 19. Tìm giới hạn sau: $\lim\frac{\sqrt[3]{3n^3+n^2+n+2}}{\sqrt{4n^2-4n+5}}$.

Trả lời: ……………………….

Câu 20. Tìm giới hạn sau: $\lim\frac{3^{n+1}-4^n}{4^{n-1}+3}$

Trả lời: ……………………….

Câu 21. Tìm giới hạn sau: $\lim\frac{3^n+4^{n+1}}{1-5^n}$

Trả lời: ……………………….

Câu 22. Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{3^{2n}+6^n}{6^n+2.5^n}$

Trả lời: ....

Câu 23. Tìm giới hạn sau: $\lim \sqrt[3]{\dfrac{2^{3n}-3^{n+1}}{8^{n+1}+6^{n-1}}}$.

Trả lời: ....

Câu 24. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(3n-5+2n^3\right)$;

Trả lời: ....

Câu 25. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{2n^2+3}\right)$;

Trả lời: ....

Câu 26. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}\right)$

Trả lời: ....

Câu 27. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$

Trả lời: ....

Câu 28. Tìm giới hạn sau: $\lim\sqrt{\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}$

Trả lời: ....

Câu 29. Tìm giới hạn sau: $\lim\left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

Trả lời: ....

Câu 30. Tìm giới hạn sau: $\lim\left[\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\right]$

Trả lời: ....

Câu 31. Tìm tổng sau: $S=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}+\ldots$

Trả lời: ....

Câu 32. Tìm tổng sau: $T=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ldots+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\ldots$

Trả lời: ....

Câu 33. Viết dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,271414\ldots$

Trả lời: ....

Câu 34. Viết dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,511111\ldots$

Trả lời: ....

Câu 35. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$, tính $\lim \dfrac{u_n}{3^n}$.

Trả lời: ....

Câu 36. Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh a. Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$, dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy sẽ nhận được một dãy các tam giác. Tính tổng diện tích S của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \ldots$

Trả lời: ....

Câu 37. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2 - 4n + 5} + 3 - n\right)$

Trả lời: ....

Câu 38. Tính giới hạn sau: $\lim\left(1 + 3n - \sqrt{9n^2 - n + 7}\right)$

Trả lời: ....

Câu 39. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2 + 6n - 1} - n\right)$

Trả lời: ....

Câu 40. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{4n^2 + 6n - 1} - 2n - 3\right)$

Trả lời: ....

Câu 41. Tính tổng sau: $S = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \ldots + \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n + \ldots$

Trả lời: ....

Câu 42. Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{\sqrt{4n^4 + 4n^2 + 6}}{4n^2 + n - 1}$

Trả lời: ....

Câu 43. Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{\sqrt{9n^4 + 6n^2 + 1}}{-n^2 + 2n - 1}$

Trả lời: ....

Câu 44. Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2 + 1} + n}{n^2 - 2n - 1}$

Trả lời: ....

Câu 45. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 1}\right)$

Trả lời: ....

Câu 46. Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{-3n^2+4n+1}{2n^2-3n+7}$.

Trả lời: ....

Câu 47. Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2-n}-3n+1}{n^2+2}$.

Trả lời: ....

Câu 48. Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{2^n-5\cdot 3^n}{3^n+1}$

Trả lời: ....

Câu 49. Tính giới hạn của dãy số sau: $u_n=\sqrt{4n^2+1}-2n$

Trả lời: ....

Câu 50. Tính giới hạn của dãy số sau: $u_n=\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+2}$

Trả lời: ....

Câu 51. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-3n^2}-n\right)$

Trả lời: ....

Câu 52. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n^2+2}\right)$

Trả lời: ....

Câu 53. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dạng phân số:

a) $0,7777777777777\ldots$

b) $0,27777777777\ldots$

Trả lời: ....

Câu 54. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

Trả lời: ....

Câu 55. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{2.4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+2)}\right)$.

Trả lời: ....

Câu 56. Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+n}+3\sqrt{n^2+1}}{n+1}$.

Trả lời: ....

Câu 57. Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n}+2n+1}{3n+1}$.

Trả lời: ....

Câu 58. Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{3n^2+n+1}$

Trả lời: ....

Câu 59. Tính giới hạn sau: $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}$.

Trả lời: ....

Câu 60. Tính giới hạn sau: $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{n}$.

Trả lời: ....

Câu 61. Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{2^{n+2}+4\cdot 6^{n-1}+2}{3^{n+1}+6^{n-1}+1}$.

Trả lời: ....

Câu 62. Tính giới hạn sau: $\lim\left(n+1-\sqrt{n^2+n}\right)$.

Trả lời: ....

Câu 63. Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}$

Trả lời: ....

Câu 64. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt[3]{2n^2-8n^3}\right)$

Trả lời: ....

Câu 65. Tính giới hạn sau: $\lim \dfrac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}$

Trả lời: ....

Câu 66. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số.

a) $0,3211111\ldots$

b) $0,313131\ldots$

c) $3,1525252\ldots$.

Trả lời: ....

LỜI GIẢI

Câu 1. Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{2n^2-3\sqrt{n}+1}{3n\sqrt{n}+2n}$

Trả lời: $+\infty$

Lời giải

Ta có:

$$\lim \frac{2n^2-3\sqrt{n}+1}{3n\sqrt{n}+2n}=\lim \frac{n\sqrt{n}\left(2\sqrt{n}-\frac{3}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)}{n\sqrt{n}\left(3+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)}=\lim \frac{2\sqrt{n}-\frac{3}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}}{3+\frac{2}{\sqrt{n}}}=+\infty$$

do $\begin{cases} \lim\left(2\sqrt{n}-\frac{3}{n}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)=+\infty \\ \lim\left(3+\frac{2}{\sqrt{n}}\right)=3 \end{cases}$

Câu 2. Tìm giới hạn sau: $\lim \sqrt[4]{\frac{n^4-2n^3+1}{2n^3+n^2}}$.

Trả lời: $+\infty$

Lời giải

Ta có: $\lim \sqrt[4]{\frac{n^4-2n^3+1}{2n^3+n^2}}=\frac{\overset{\sqrt{n}}{\lim}}{\sqrt[4]{\frac{n^3\left(n-2+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(2+\frac{1}{n}\right)}}}=\frac{\overset{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\lim}}{\sqrt[4]{\frac{n-2+\frac{1}{n^3}}{2+\frac{1}{n}}}}=+\infty$

do $\begin{cases} \lim\left(n-2+\frac{1}{n^3}\right)=+\infty \\ \lim\left(2+\frac{1}{n}\right)=2 \end{cases}$

Câu 3. Tìm giới hạn sau: $\lim \frac{4^{3n}-5^n}{2^{2n}+3\cdot 5^{2n}}$

Trả lời: $+\infty$

Lời giải

$$\lim \frac{4^{3n}-5^n}{2^{2n}+3.5^{2n}}=\lim \frac{64^n-5^n}{4^n+3\cdot 25^n}=\lim \frac{64^n\left[1-\left(\frac{5}{64}\right)^n\right]}{64^n\left[\left(\frac{4}{64}\right)^n+3\cdot\left(\frac{25}{64}\right)^n\right]}$$

$$=\lim \frac{1-\left(\frac{5}{64}\right)^n}{\left(\frac{4}{64}\right)^n+3\cdot\left(\frac{25}{64}\right)^n}=+\infty,\text{ do }\begin{cases} \lim\left[1-\left(\frac{5}{64}\right)^n\right]=1 \\ \lim\left[\left(\frac{4}{64}\right)^n+3\cdot\left(\frac{25}{64}\right)^n\right]=0 \end{cases}.$$

Câu 4. Tìm giới hạn sau: $\lim n\sqrt{\dfrac{9n^2}{4n^4-n^2}}$.

Trả lời: $\dfrac{3}{2}$

Lời giải

Ta có: $\lim n\sqrt{\dfrac{9n^2}{4n^4-n^2}} = \lim \dfrac{n^2}{n^2}\sqrt{\dfrac{9}{4-\dfrac{1}{n^2}}} = \lim\sqrt{\dfrac{9}{4-\dfrac{1}{n^2}}} = \dfrac{3}{2}$.

Câu 5. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{2n^2-n+3}\right)$;

Trả lời: $+\infty$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2-n}+\sqrt{2n^2-n+3}\right) = \lim n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}\right) = +\infty,$$

do $\begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}+\sqrt{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{3}{n^2}}\right) = \sqrt{1}+\sqrt{2} \end{cases}$

Câu 6. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-2}-n\right)$;

Trả lời: 1

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n-2}-n\right) = \lim\frac{n^2+2n-2-n^2}{\sqrt{n^2+2n-2}+n} = \lim\frac{2n-2}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}+n}$$

$$= \lim\frac{n\left(2-\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}+1\right)} = \lim\frac{2-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}+1} = \frac{2}{\sqrt{1}+1} = 1.$$

Câu 7. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{3n^2+n+2}-\sqrt{3n^2+n+1}\right)$;

Trả lời: 0

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{3n^2+n+2}-\sqrt{3n^2+n+1}\right)=\lim\frac{3n^2+n+2-\left(3n^2+n+1\right)}{\sqrt{3n^2+n+2}+\sqrt{3n^2+n+1}}$$

$$=\lim\frac{1}{\sqrt{3n^2+n+2}+\sqrt{3n^2+n+1}}=0\left(\text{do}\lim\left(\sqrt{3n^2+n+2}+\sqrt{3n^2+n+1}\right)=+\infty\right)$$

Câu 8. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(n+n^2-\sqrt{n^4+3n+1}\right)$.

Trả lời: $+\infty$

Lời giải

$$\lim\left(n+n^2-\sqrt{n^4+3n+1}\right)=\lim\frac{n^2+2n^3+n^4-\left(n^4+3n+1\right)}{n+n^2+\sqrt{n^4+3n+1}}$$

$$=\lim\frac{\left(2n+1-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n}+1\right)+n^2\sqrt{1+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}}=\lim\frac{2n+1-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+1+\sqrt{1+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}}=+\infty$$

$$\text{do}\begin{cases}\lim\left(2n+1-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}\right)=+\infty\\ \lim\left(\frac{1}{n}+1+\sqrt{1+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}\right)=1+1=2\end{cases}$$

Câu 9. Tìm giới hạn sau: $\lim\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+3n}$

Trả lời: $\frac{1}{2}$

Lời giải

Nhận xét: $1+2+\ldots+n$ là tổng của n số hạng đầu của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=1$ và công sai $d=1$.

Vì vậy $1+2+\ldots+n=\frac{(1+n)n}{2}$.

Ta có: $\lim\frac{1+2+\ldots+n}{n^2+3n}=\lim\frac{n(n+1)}{2\left(n^2+3n\right)}=\lim\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{3}{n}\right)}=\frac{1}{2}$.

Câu 10. Tìm giới hạn sau: $\lim\frac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}$

Trả lời: 0

Lời giải

Nhận xét: Xét $1+2+2^2+\ldots+2^n$ là tổng của $n+1$ số hạng đầu của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1=1$, công bội bằng $q=2$ nên

$$1+2+2^2+\ldots+2^n=\frac{u_1\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}=\frac{1\left(1-2^{n+1}\right)}{1-2}=2^{n+1}-1$$

Hoàn toàn tương tự, ta có: $1+3+3^2+\ldots+3^n=\dfrac{1\left(1-3^{n+1}\right)}{1-3}=\dfrac{3^{n+1}-1}{2}$.

Khi đó: $\lim\dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+3+3^2+\ldots+3^n}=\lim\dfrac{2^{n+1}-1}{\dfrac{3^{n+1}-1}{2}}$

$$=\lim 2\cdot\frac{2\cdot 2^n-1}{3\cdot 3^n-1}=\lim 2\cdot\frac{2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{1}{3^n}}{3-\dfrac{1}{3^n}}=2\cdot\frac{0}{3}=0.$$

Câu 11. Tìm giới hạn sau: $\lim\dfrac{n\cdot\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}$

Trả lời: $\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Nhận xét: $1+3+5+\ldots+(2n-1)$ là tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1=1$ và công sai là $d=2$, vì vậy, ta có:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=\frac{\left(u_1+u_n\right)n}{2}=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$$

Vì vậy: $\lim\dfrac{n\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}=\lim\dfrac{n\sqrt{n^2}}{2n^2+n+1}=\lim\dfrac{n^2}{2n^2+n+1}$

$$=\lim\frac{n^2}{n^2\left(2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\lim\frac{1}{2+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}.$$

Câu 12. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$.

Trả lời: 1

Lời giải

Ta có: $\lim\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\left(1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$= \lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \lim\frac{n}{n+1} = \lim\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1.$

Câu 13. Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$

Trả lời: $\frac{2}{3}$

Lời giải

Nhận xét: Ta cần áp dụng công thức tổng cấp số nhân lùi vô hạn:

$S = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots = \frac{u_1}{1-q}$ trong đó u_1, q theo thứ tự là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội

$q = -\frac{1}{2}$. Vì v?y: $S = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\ldots = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$

Câu 14. Tìm tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $T = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$

Trả lời: $\frac{3}{2}$

Lời giải

Nhận xét: Ta cần áp dụng công thức tổng cấp số nhân lùi vô hạn:

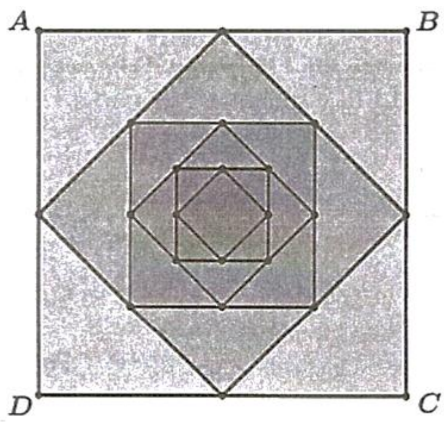
$S = u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots = \frac{u_1}{1-q}$ trong đó u_1, q theo thứ tự là số hạng đầu và công bội của cấp số nhân đó.

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội

$q = \frac{1}{3}.$

Vì vậy $T = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1 . Nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông $ABCD$, ta được hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh hình vuông thứ hai, ta được hình vuông thứ ba. Tiếp tục như thế ta nhận được một dãy các hình vuông. Tìm tổng chu vi của dãy các hình vuông đó.



Trả lời: $8+4\sqrt{2}$

Lời giải

Nếu cạnh hình vuông ban đầu là x thì theo định lí Pythagore, ta có cạnh hình vuông thứ hai là $\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{x\sqrt{2}}{2}$.(*)

Gọi cạnh hình vuông $ABCD$ là $u_1=1$, từ (*) ta có cạnh hình vuông thứ hai là $u_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$, cạnh hình vuông thứ ba là $u_3=\frac{1}{2}$, cạnh hình vuông thứ tư là $u_4=\frac{\sqrt{2}}{4}, \ldots$

Xét tổng chu vi dãy các hình vuông là:

$$S=4u_1+4u_2+4u_3+\ldots=4\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\ldots\right).$$

Dễ thấy $1+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng 1, công bội bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy ta có: $S=4\cdot\frac{u_1}{1-q}=4\cdot\frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=8+4\sqrt{2}$.

Câu 16. Tìm giới hạn sau: $\lim\frac{2n^3-2n+3}{1-4n^3}$

Trả lời: $-\frac{1}{2}$

Lời giải

$$\lim\frac{2n^3-2n+3}{1-4n^3}=\lim\frac{n^3\left(2-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{1}{n^3}-4\right)}=\lim\frac{2-\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^3}}{\frac{1}{n^3}-4}=-\frac{1}{2}$$

Câu 17. Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{n^3+1}{n^2-2n+3}$

Trả lời: $+\infty$

Lời giải

$$\lim \frac{n^3+1}{n^2-2n+3}=\lim \frac{n^3\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}=\lim \frac{n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)}{1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}=+\infty$$

do $\begin{cases} \lim n\left(1+\frac{1}{n^3}\right)=+\infty \\ \lim\left(1-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=1 \end{cases}$

Câu 18. Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{\sqrt{3n^2-4}}{3n+2}$

Trả lời: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

$$\frac{\sqrt{3n^2-4}}{3n+2}=\lim \frac{n\sqrt{3-\frac{4}{n^2}}}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)}=\lim \frac{\sqrt{3-\frac{4}{n^2}}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Câu 19. Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{\sqrt[3]{3n^3+n^2+n+2}}{\sqrt{4n^2-4n+5}}$.

Trả lời: $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}$

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt[3]{3n^3+n^2+n+2}}{\sqrt{4n^2-4n+5}}=\lim \frac{n\sqrt[3]{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}}{n\sqrt{4-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}}=\lim \frac{\sqrt[3]{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}}{\sqrt{4-\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}}=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}.$$

Câu 20. Tìm giới hạn sau: $\lim \dfrac{3^{n+1}-4^n}{4^{n-1}+3}$

Trả lời: -4

Lời giải

$$\lim\frac{3^{n+1}-4^n}{4^{n-1}+3}=\lim\frac{3\cdot 3^n-4^n}{\frac{1}{4}\cdot 4^n+3}=\lim\frac{4^n\left[3\left(\frac{3}{4}\right)^n-1\right]}{4^n\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4^n}\right)}=\lim\frac{3\left(\frac{3}{4}\right)^n-1}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4^n}}=\frac{-1}{\frac{1}{4}}=-4$$

Câu 21. Tìm giới hạn sau: $\lim\frac{3^n+4^{n+1}}{1-5^n}$

Trả lời: 0

Lời giải

$$\lim\frac{3^n+4^{n+1}}{1-5^n}=\lim\frac{3^n+4\cdot 4^n}{1-5^n}=\lim\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{1}{5}\right)^n-1}=\frac{0}{-1}=0$$

Câu 22. Tìm giới hạn sau: $\lim\frac{3^{2n}+6^n}{6^n+2.5^n}$

Trả lời: $+\infty$

Lời giải

$$\lim\frac{3^{2n}+6^n}{6^n+2\cdot 5^n}=\lim\frac{9^n+6^n}{6^n+2\cdot 5^n}=\lim\frac{9^n\left[1+\left(\frac{6}{9}\right)^n\right]}{9^n\left[\left(\frac{6}{9}\right)^n+2\left(\frac{5}{9}\right)^n\right]}$$

$$=\lim\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+2\left(\frac{5}{9}\right)^n}=+\infty\left(\text{do}\lim\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n+2\left(\frac{5}{9}\right)^n\right]=0\right).$$

Câu 23. Tìm giới hạn sau: $\lim\sqrt[3]{\frac{2^{3n}-3^{n+1}}{8^{n+1}+6^{n-1}}}$.

Trả lời: $\frac{1}{2}$

Lời giải

$$\lim\sqrt[3]{\frac{2^{3n}-3^{n+1}}{8^{n+1}+6^{n-1}}}=\lim\sqrt[3]{\frac{8^n-3.3^n}{8.8^n+\frac{1}{6}6^n}}=\lim\sqrt[3]{\frac{8^n\left(1-3.\left(\frac{3}{8}\right)^n\right)}{8^n\left(8+\frac{1}{6}\left(\frac{6}{8}\right)^n\right)}}$$

$$=\lim\sqrt[3]{\frac{1-3\left(\frac{3}{8}\right)^n}{8+\frac{1}{6}\left(\frac{3}{4}\right)^n}}=\sqrt[3]{\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$$

Câu 24. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(3n-5+2n^3\right)$;

Trả lời: $+\infty$

Lời giải

$$\lim\left(3n-5+2n^3\right)=\lim n^3\left(\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}+2\right)=+\infty.$$

Câu 25. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{2n^2+3}\right)$;

Trả lời: $-\infty$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{2n^2+3}\right)=\lim n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}-\sqrt{2+\frac{3}{n^2}}\right)=-\infty$$

Câu 26. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}\right)$

Trả lời: $\frac{1}{2}$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim\frac{n^2+n-n^2-2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}}=\lim\frac{n-2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+2}}$$

$$=\lim\frac{n\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right)}=\lim\frac{1-\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}=\frac{1}{2}$$

Câu 27. Tìm giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$

Trả lời: $-\frac{2}{3}$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)=\lim\frac{n^3-2n^2-n^3}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}$$

$$=\lim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}=\lim\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=-\frac{2}{3}$$

Câu 28. Tìm giới hạn sau: $\lim\sqrt{\dfrac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}$

Trả lời: $\dfrac{1}{6}$

Lời giải

Ta có: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(có thể chứng minh đẳng thức này bằng phương pháp quy nạp).

Khi đó:

$$\lim\sqrt{\frac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{2n(n+7)(6n+5)}}=\lim\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{12n(n+7)(6n+5)}}$$

$$=\lim\sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12\left(1+\frac{7}{n}\right)\left(6+\frac{5}{n}\right)}}=\frac{1}{6}$$

Câu 29. Tìm giới hạn sau: $\lim\left[\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$

Trả lời: $\dfrac{1}{2}$

Lời giải

$$\lim\left[\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$$

$$=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

Câu 30. Tìm giới hạn sau: $\lim\left[\dfrac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\right]$

Trả lời: 1

Lời giải

$$\lim\left[\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}\right]$$

$$=\lim\left[\frac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{2.1}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3.2}+\ldots+\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)n}\right]$$

$$=\lim\left[\sqrt{1}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]=\lim\left[1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]=1$$

Câu 31. Tìm tổng sau: $S=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}+\ldots$

Trả lời: $\frac{1}{4}$

Lời giải

Ta thấy S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1=\frac{1}{3}$, công bội $q=-\frac{1}{3}$.

Vì vậy $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.

Câu 32. Tìm tổng sau: $T=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ldots+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n+\ldots$

Trả lời: $2+\sqrt{2}$

Lời giải

Ta thấy T là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$, công bội

$q=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vì vậy $T=\frac{u_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=2+\sqrt{2}$.

Câu 33. Viết dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,271414\ldots$

Trả lời: $\frac{2687}{9900}$

Lời giải

Ta có: $0,271414\ldots=0,27+0,0014+0,000014+\ldots$

Xét tổng $0,0014+0,000014+0,00000014+\ldots$

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu là $u_1=0,0014$ và công bội $q=\frac{1}{100}$.

Vì vậy $0,271414\ldots=0,27+\frac{u_1}{1-q}=\frac{27}{100}+\frac{0,0014}{1-\frac{1}{100}}=\frac{2687}{9900}$.

Câu 34. Viết dạng phân số của số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,511111\ldots$

Trả lời: $\frac{23}{45}$

Lời giải

Ta có: $0,51111\ldots=0,5+0,01+0,001+0,0001+\ldots$

Xét tổng $0,01+0,001+0,0001+\ldots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $u_1 = 0,01$ và công bội $q = \frac{1}{10}$.

Vì vậy $0,51111\ldots = 0,5 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \ldots$

$= 0,5 + \frac{u_1}{1-q} = 0,5 + \frac{0,01}{1-\frac{1}{10}} = \frac{23}{45}.$

Câu 35. Cho dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n = 3u_{n-1} - 1, \forall n \geq 2 \end{cases}$, tính $\lim \frac{u_n}{3^n}$.

Trả lời: $-\frac{5}{6}$

Lời giải

Xét số a thoả mãn $u_n - a = 3(u_{n-1} - a), \forall n \geq 2 \Leftrightarrow u_n = 3u_{n-1} - 2a, \forall n \geq 2$.

Suy ra $-2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Vậy $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_n - \frac{1}{2} = 3\left(u_{n-1} - \frac{1}{2}\right), \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Đặt $v_n = u_n - \frac{1}{2} \Rightarrow v_{n-1} = u_{n-1} - \frac{1}{2}, \forall n \geq 2$ và $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$.

Khi đó dãy (v_n) thoả mãn $\begin{cases} v_1 = -\frac{5}{2} \\ v_n = 3v_{n-1}, \forall n \geq 2 \end{cases}$.

Ta thấy (v_n) là cấp số nhân với $v_1 = -\frac{5}{2}$, công bội $q = 3$, suy ra $v_n = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1}, \forall n \geq 1$

Do đó $u_n = v_n + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$.

Vậy $\lim \frac{u_n}{3^n} = \lim \frac{-\frac{5}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{2}}{3^n} = \lim\left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{2 \cdot 3^n}\right) = -\frac{5}{6}$.

Câu 36. Cho tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh a. Người ta dựng tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_1B_1C_1$, dựng tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng đường cao của tam giác $A_2B_2C_2$ và cứ tiếp tục như vậy sẽ nhận được một dãy các tam giác. Tính tổng diện tích S của tất cả các tam giác đều $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \ldots$

Trả lời: $a^2\sqrt{3}$

Lời giải

Diện tích $\Delta A_1B_1C_1$ có cạnh a là $S_1 = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Diện tích $\Delta A_2B_2C_2$ có cạnh $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ là $S_2 = \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{4}\left(a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{3}{4}S_1$.

Diện tích $\Delta A_3B_3C_3$ có cạnh $\dfrac{3a}{4}$ là $S_3 = \left(\dfrac{3a}{4}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3}{4}S_2$.

Theo quy luật đó, ta thấy $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n + \ldots$ là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ và công bội $q = \dfrac{3}{4}$.

Do đó: $S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n + \ldots = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}}{1-\dfrac{3}{4}} = a^2\sqrt{3}$.

Câu 37. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2-4n+5}+3-n\right)$

Trả lời: 1

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{n^2-4n+5}+3-n\right)$$

$$= \lim\left(\frac{\left(\sqrt{n^2-4n+5}-n\right)\cdot\left(\sqrt{n^2-4n+5}+n\right)}{\sqrt{n^2-4n+5}+n}+3\right)$$

$$= \lim\left(\frac{n^2-4n+5-n^2}{\sqrt{n^2-4n+5}+n}+3\right) = \lim\left(\frac{-4n+5}{\sqrt{n^2-4n+5}+n}+3\right) = \lim\left(\frac{-4+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+1}+3\right) = 1$$

Câu 38. Tính giới hạn sau: $\lim\left(1+3n-\sqrt{9n^2-n+7}\right)$

Trả lời: $\dfrac{7}{6}$

Lời giải

$$\lim\left(1+3n-\sqrt{9n^2-n+7}\right)$$

$$= \lim\left(1+\frac{9n^2-9n^2+n-7}{3n+\sqrt{9n^2-n+7}}\right) = \lim\left(1+\frac{n-7}{3n+\sqrt{9n^2-n+7}}\right) = \lim\left(1+\frac{1-\dfrac{7}{n}}{3+\sqrt{9-\dfrac{1}{n}+\dfrac{7}{n^2}}}\right) = \frac{7}{6}$$

Câu 39. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2+6n-1}-n\right)$

Trả lời: 3

Lời giải

$\lim\left(\sqrt{n^2+6n-1}-n\right)$

$$=\lim\left(\frac{n^2+6n-1-n^2}{\sqrt{n^2+6n-1}+n}\right)=\lim\frac{6n-1}{\sqrt{n^2+6n-1}+n}=\lim\frac{6-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}+1}=3$$

Câu 40. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{4n^2+6n-1}-2n-3\right)$

Trả lời: $-\frac{3}{2}$

Lời giải

$\lim\left(\sqrt{4n^2+6n-1}-2n-3\right)$

$$=\lim\left(\sqrt{4n^2+6n-1}-2n-3\right)=\lim\left(\frac{4n^2+6n-1-4n^2}{\sqrt{4n^2+6n-1}+2n}-3\right)$$

$$=\lim\left(\frac{6n-1}{\sqrt{4n^2+6n-1}+2n}-3\right)=\lim\left(\frac{6-\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}+2}-3\right)=-\frac{3}{2}$$

Câu 41. Tính tổng sau: $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{-1}{2}\right)^n+\ldots$

Trả lời: $\frac{2}{3}$

Lời giải

Tổng đã cho là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$ và công bội

$q=-\frac{1}{2}$ nên $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\left(\frac{-1}{2}\right)^n+\ldots=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}$

Câu 42. Tính giới hạn sau: $\lim\frac{\sqrt{4n^4+4n^2+6}}{4n^2+n-1}$

Trả lời: $\frac{1}{2}$

Lời giải

$$\lim\frac{\sqrt{4n^4+4n^2+6}}{4n^2+n-1}=\lim\frac{n^2\cdot\sqrt{4+\frac{4}{n^2}+\frac{6}{n^4}}}{n^2\cdot\left(4+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim\frac{\sqrt{4+\frac{4}{n^2}+\frac{6}{n^4}}}{4+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$$

Câu 43. Tính giới hạn sau: $\lim \frac{\sqrt{9n^4+6n^2+1}}{-n^2+2n-1}$

Trả lời: -3

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt{9n^4+6n^2+1}}{-n^2+2n-1}=\lim \frac{n^2\cdot\sqrt{9+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}{n^2\cdot\left(-1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}=\lim \frac{\sqrt{9+\frac{6}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}{-1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=-3$$

Câu 44. Tính giới hạn sau: $\lim \frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{n^2-2n-1}$

Trả lời: 0

Lời giải

$$\lim \frac{\sqrt{3n^2+1}+n}{n^2-2n-1}=\lim \frac{n\cdot\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+n}{n^2-2n-1}=\lim \frac{1}{n}\cdot\frac{\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}+1}{1-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}=0$$

Câu 45. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-1}\right)$

Trả lời: $\frac{1}{2}$

Lời giải

$$=\lim \frac{n^2+n-\left(n^2-1\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-1}}=\lim \frac{n+1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\lim \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$$

Câu 46. Tính giới hạn sau: $\lim \frac{-3n^2+4n+1}{2n^2-3n+7}$.

Trả lời: $-\frac{3}{2}$

Lời giải

$\lim \frac{-3n^2+4n+1}{2n^2-3n+7}=\lim \frac{-3+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}=-\frac{3}{2}$ (bậc của tử bằng bậc của mẫu).

Câu 47. Tính giới hạn sau: $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n}-3n+1}{n^2+2}$.

Trả lời: 0

Lời giải

$$\lim\frac{\sqrt{9n^2-n}-3n+1}{n^2+2}=\lim\frac{\sqrt{\frac{9}{n^2}-\frac{1}{n^3}}-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}=0$$ (bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu).

Câu 48. Tính giới hạn sau: $\lim\frac{2^n-5\cdot 3^n}{3^n+1}$

Trả lời: -5

Lời giải

$$\lim\frac{2^n-5.3^n}{3^n+1}=\lim\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-5}{1+\frac{1}{3^n}}=-5$$

Câu 49. Tính giới hạn của dãy số sau: $u_n=\sqrt{4n^2+1}-2n$

Trả lời: 0

Lời giải

Ta thấy $\lim u_n=\lim\left(\sqrt{4n^2+1}-2n\right)=\lim\left(\sqrt{4(+\infty)^2+1}-2(+\infty)\right)=\infty-\infty$.

Suy ra, không xác định.

Ta nhân tử và mẫu cho $\sqrt{4n^2+1}+2n$, khi đó

$$\lim u_n=\lim\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim\frac{\left(n^2+4\right)-\left(n^2+2\right)}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+2}}=\lim\frac{2}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+2}}$$

$$=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}=\frac{2.0}{\sqrt{1+4.0}+\sqrt{1+2.0}}=0.$$

Vậy $\lim u_n=0$.

Câu 50. Tính giới hạn của dãy số sau: $u_n=\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+2}$

Trả lời: 0

Lời giải

Ta thấy $\lim u_n$ có dạng vô định $\infty-\infty$, ta nhân tử và mẫu cho $\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+2}$,

Khi đó: $\lim u_n=\lim\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+2}\right)=\lim\frac{\left(n^2+4\right)-\left(n^2+2\right)}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+2}}=\lim\frac{2}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+2}}$

$=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}=\frac{2.0}{\sqrt{1+4.0}+\sqrt{1+2.0}}=0$. Vậy $\lim u_n=0$.

Câu 51. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-3n^2}-n\right)$

Trả lời: -3

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3-3n^2}-n\right)=\lim\frac{n^3-3n^2-n^3}{\sqrt[3]{\left(n^3-3n^2\right)^2}+n^2-n\cdot\sqrt[3]{n^3-3n^2}}=-\lim\frac{3}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{n}\right)^2}+1-\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}}$$

Khi $n\to\infty$ thì: $\lim\frac{1}{n}=0\Rightarrow\lim\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}=1\Rightarrow\lim\left(\sqrt[3]{\left(1-\frac{3}{n}\right)^2}+1-\sqrt[3]{1-\frac{3}{n}}\right)=1$

Do đó, $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-3n^2}-n\right)=-3$.

Câu 52. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n^2+2}\right)$

Trả lời: 0

Lời giải

$$\begin{aligned}\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n^2+2}\right)&=\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-n\right)+\lim\left(n-\sqrt{n^2+2}\right)\\&=\lim\frac{n^3+3-n^3}{\left(n^3+3\right)^{\frac{2}{3}}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}+\lim\frac{n^2-n^2-2}{n+\sqrt{n^2+2}}\\&=\lim\frac{3}{\left(n^3+3\right)^{\frac{2}{3}}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}-\lim\frac{2}{n+\sqrt{n^2+2}}\end{aligned}$$

Khi $n\to\infty$ thì: $\lim\left(\left(n^3+3\right)^{\frac{2}{3}}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}\right)=\infty;\lim\left(n+\sqrt{n^2+2}\right)=\infty$.

Suy ra $\lim\frac{3}{\left(n^3+3\right)^{\frac{2}{3}}+n^2+n\cdot\sqrt[3]{n^3+3}}-\lim\frac{2}{n+\sqrt{n^2+2}}=0$.

Do đó, $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+3}-\sqrt{n^2+2}\right)=0$.

Câu 53. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dạng phân số:

a) $0,7777777777777\ldots$

b) $0,27777777777\ldots$

Trả lời: a) $\frac{7}{9}$ và b) $\frac{5}{18}$

Lời giải

a) $\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10}$ nên

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}$$

Suy ra $0,7777777777777\ldots=7.0,11111111111\ldots=7\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots\right)=\frac{7}{9}$

b) $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10}$ nên

$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\ldots=\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{90}$$

Suy ra $0,27777777777\ldots=0,2+0,07777777=\frac{2}{10}+7\cdot\frac{1}{90}=\frac{25}{90}=\frac{5}{18}$.

Câu 54. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$

Trả lời: 1

Lời giải

Xét $A=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Ta có: $2A=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{3.5}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$

$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$

Suy ra $\lim A=\lim\frac{2n}{2n+1}=\lim\frac{2}{2+\frac{1}{n}}=1$

Câu 55. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}\right)$.

Trả lời: $\frac{3}{2}$

Lời giải

Xét $B=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}$.

Ta có $2B=\frac{2}{1.3}+\frac{2}{2.4}+\ldots+\frac{2}{n(n+2)}$

$=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+2}$

Suy ra $\lim B = \lim\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n+2}\right) = \lim\left(\frac{3}{2} - \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right) = \frac{3}{2}$.

Câu 56. Tính giới hạn sau: $\lim\frac{\sqrt{n^2+n}+3\sqrt{n^2+1}}{n+1}$.

Trả lời: 4

Lời giải

$$\lim\frac{\sqrt{n^2+n}+3\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \lim\frac{\frac{\sqrt{n^2+n}+3\sqrt{n^2+1}}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+3\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt{1}+3\sqrt{1}}{1} = 4$$

Câu 57. Tính giới hạn sau: $\lim\frac{\sqrt[3]{8n^3+n}+2n+1}{3n+1}$.

Trả lời: $\frac{4}{3}$

Lời giải

$$\lim\frac{\sqrt[3]{8n^3+n}+2n+1}{3n+1} = \lim\frac{\sqrt[3]{8+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{\sqrt[2]{8}+2}{3} = \frac{4}{3}$$

Câu 58. Tính giới hạn sau: $\lim\frac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{3n^2+n+1}$

Trả lời: 1

Lời giải

$$\lim\frac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{3n^2+n+1} = \lim\frac{\frac{n\sqrt{n^2+1}+2n^2+3}{n^2}}{\frac{3n^2+n+1}{n^2}} = \lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+2+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{1}+2}{3} = 1$$

Câu 59. Tính giới hạn sau: $u_n = \frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n}$.

Trả lời: $\lim u_n = 0$

Lời giải

$$\lim u_n = \lim\frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{n} = \lim\left(\sqrt{\frac{n^2+2n}{n^2}}-1\right) = \lim\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}-1\right) = \sqrt{1+2.0}-1 = 0.$$

Vậy $\lim u_n = 0$.

Câu 60. Tính giới hạn sau: $u_n=\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{n}$.

Trả lời: $\lim u_n=0$

Lời giải

$$\lim u_n=\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2+n}}{n}=\lim\frac{\left(n^2+2n\right)-\left(n^2+n\right)}{n\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}\right)}=\lim\frac{n}{n\left(\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}\right)}$$

$$=\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2+n}}=\lim\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{0}{\sqrt{1+2.0}+\sqrt{1+0}}=0.$$ Vậy $\lim u_n=0$.

Câu 61. Tính giới hạn sau: $\lim\dfrac{2^{n+2}+4\cdot 6^{n-1}+2}{3^{n+1}+6^{n-1}+1}$.

Trả lời: 4

Lời giải

$$\lim\frac{2^{n+2}+4\cdot 6^{n-1}+2}{3^{n+1}+6^{n-1}+1}=\lim\frac{4\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{2}{3}+2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n}{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^n}=\frac{4\cdot 0+\frac{2}{3}+2\cdot 0}{3\cdot 0+\frac{1}{6}+0}=4$$

Câu 62. Tính giới hạn sau: $\lim\left(n+1-\sqrt{n^2+n}\right)$.

Trả lời: $\dfrac{1}{2}$

Lời giải

$$\lim\left(n+1-\sqrt{n^2+n}\right)=\lim\frac{(n+1)^2-n^2-n}{n+1+\sqrt{n^2+n}}=\lim\frac{n+1}{n+1+\sqrt{n(n+1)}}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$$

Do đó, $\lim\left(n+1-\sqrt{n^2+n}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Câu 63. Tính giới hạn sau: $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}$

Trả lời: $\dfrac{2}{3}$

Lời giải

$$\lim\frac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}=\lim\frac{n^2+n-n^2}{4n^2+3n-4n^2}\cdot\frac{\sqrt{4n^2+3n}+2n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\frac{1}{3}\lim\frac{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{2}{3}$$

Do đó, $\lim \dfrac{\sqrt{n^2+n}-n}{\sqrt{4n^2+3n}-2n}=\dfrac{2}{3}$.

Câu 64. Tính giới hạn sau: $\lim\left(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt[3]{2n^2-8n^3}\right)$

Trả lời: $+\infty$

Lời giải

$$\lim\left(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt[3]{2n^2-8n^3}\right)=\lim\left(\sqrt{4n^2+n}+2n\right)-\lim\left(\sqrt[3]{2n^2-8n^3}+2n\right)$$

$$=\lim\frac{4n^2+n-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}-2n}+\lim\frac{2n^2-8n^3+8n^3}{\left(2n^2-8n^3\right)^{\frac{2}{3}}+4n^2-2n\sqrt[3]{2n^2-8n^3}}$$

$$=\lim\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}-2n}+\lim\frac{2n^2}{\sqrt[3]{\left(2n^2-8n^3\right)^2}+4n^2-2n\cdot\sqrt[3]{8n^3\left(\frac{1}{4n}-1\right)}}$$

$$=\frac{1}{\lim\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)}+\frac{1}{\lim\left[2\cdot\left(\frac{1}{4n}-1\right)^{\frac{2}{3}}+2-2\left(\frac{1}{4n}-1\right)^{\frac{1}{3}}\right]}$$

Khi $n\to\infty$ thì: $\lim\frac{1}{n}=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)=2-2=0\\ \lim\left[2\cdot\left(\frac{1}{4n}-1\right)^{\frac{2}{3}}+2-2\left(\frac{1}{4n}-1\right)^{\frac{1}{3}}\right]=-2+2+2=2\end{cases}$

$$\Rightarrow\frac{1}{\lim\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}-2\right)}+\frac{1}{\lim\left[2\cdot\left(\frac{1}{4n}-1\right)^{\frac{2}{3}}+2-2\left(\frac{1}{4n}-1\right)^{\frac{1}{3}}\right]}=+\infty$$

Do đó, $\lim\left(\sqrt{4n^2+n}-\sqrt[3]{2n^2-8n^3}\right)=+\infty$.

Câu 65. Tính giới hạn sau: $\lim\dfrac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}$

Trả lời: 1

Lời giải

$$\lim\frac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}=\lim\frac{2n^2-n^3+n^3}{n^2+n-n^2}\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt[3]{\left(2n^2-n^3\right)^2}+n^2-n\sqrt[3]{2n^2-n^3}}$$

$$=\lim\frac{\sqrt{\left(n\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n\right)}}{\sqrt[3]{n^6\cdot\left(\frac{2}{n}-1\right)^2}+n^2-n\cdot\sqrt[3]{n^3\left(\frac{2}{n}-1\right)}}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{\left(\frac{2}{n}-1\right)^{\frac{2}{3}}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}}.$$

Khi $n\to\infty$ thì: $\lim\frac{1}{n}=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\left(\left(\frac{2}{n}-1\right)^{\frac{2}{3}}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}\right)=-1+1+1=1\\ \lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)=1\end{cases}$

$$\Rightarrow\lim\frac{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right.}{\left(\frac{2}{n}-1\right)^{\frac{2}{3}}+1-\sqrt[3]{\frac{2}{n}-1}}=1.\ \Rightarrow\lim\frac{\sqrt[3]{2n^2-n^3}+n}{\sqrt{n^2+n}-n}=1$$

Câu 66. Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số.

a) $0,3211111\ldots$

b) $0,313131\ldots$

c) $3,1525252\ldots.$

Trả lời: a) $\frac{289}{900}$ b) $\frac{31}{99}$ c) $\frac{3121}{990}$

Lời giải

a) Ta có $\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10}$ nên

$\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^5}+\ldots=\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{900}$ suy ra $0,321111\ldots=\frac{32}{100}+\frac{1}{900}=\frac{289}{900}$

b) Ta có $\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10^2}$ nên

$$\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\ldots=\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{1}{99}$$

Suy ra $0,313131\ldots=31\left(\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\ldots\right)=31\cdot\frac{1}{99}=\frac{31}{99}$.

c) Ta có $\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^7}+\ldots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn công bội $\frac{1}{10^2}$ nên

$$\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^7}+\ldots=\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}}=\frac{1}{990}$$ suy ra

$$3{,}1525252\ldots=\frac{31}{10}+52\left(\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^5}+\frac{1}{10^7}+\ldots\right)=\frac{31}{10}+\frac{52}{990}=\frac{3121}{990}$$