

CÂU HỎI

Câu 1. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt[3]{x^3 + 1})$.

Trả lời:

Câu 2. Hàm Heaviside có dạng $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ thường được dùng để mô tả việc chuyển

trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t = 0$.

Tính $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t), \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$.

Trả lời:

Câu 3. Một cái hồ chứa 600l nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối 30g/l vào hồ với tốc độ 15l/phút.

a) Tính nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Nồng độ muối trong hồ sẽ thế nào khi t dần về dương vô cùng?

Trả lời:

Câu 4. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}$.

Trả lời:

Câu 5. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$;

Trả lời:

Câu 6. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 3x + 2}$.

Trả lời:

Câu 7. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

Trả lời:

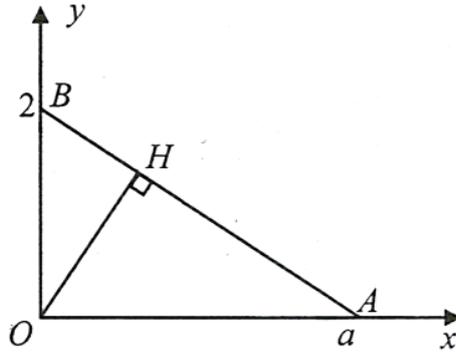
Câu 8. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1 - \sqrt[3]{x^3 - x})$.

Trả lời:

Câu 9. Trong hệ trục tọa độ Oxy , lấy điểm A thuộc tia Ox và điểm $B(0;2)$ thuộc tia Oy . Giả sử hoành độ điểm A là $a > 0$.

a) Tính độ dài đường cao OH của tam giác OAB theo a .

b) Khi điểm A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương trục Ox thì độ dài AH thay đổi như thế nào?



Trả lời:

Câu 10. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{2x^2-3x+1}$

Trả lời:

Câu 11. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4-5x}}{-2x^2 + 3x + 5}$

Trả lời:

Câu 12. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+7} - 5}{2x-2}$

Trả lời:

Câu 13. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{9x-2} + 1}{x-2}$

Trả lời:

Câu 14. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 24}{x-1}$

Trả lời:

Câu 15. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x^3 + 2}{|x-3|}$

Trả lời:

Câu 16. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^4 + 2x^3 + 1}{5x^3 - 2x + 1}$

Trả lời:

Câu 17. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-x)^4 \cdot (x^2-3)}{(2x^3-1)^4 (5-2x)^3}$

Trả lời:

Câu 18. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-2x)^5 \cdot (3x^2-2x)}{(2x^2-1)^2 (7-2x)^3}$

Trả lời:

Câu 19. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-2x^2)^3 \cdot (x-2)}{(3x^3-1)^5 (5-2x)^4}$

Trả lời:

Câu 20. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-2x^3)^2 \cdot (4x-1)}{(x^2-1)^2 \cdot (3+2x)^3}$

Trả lời:

Câu 21. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-4x^3)^4 \cdot (x^2-2)}{(2x^2-4)^5 \cdot (6+4x)}$

Trả lời:

Câu 22. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3+2x^2)^5 \cdot (3x^3-4)^2}{(5-x^3)^2 \cdot (1-2x^2)^3}$

Trả lời:

Câu 23. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6-2x^4)^4 \cdot (2-x^2)}{(x^2-3)^5 \cdot (6-4x)}$

Trả lời:

Câu 24. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-x^2)^6 \cdot (3x^2+2)^2}{(5x^2-3)^2 \cdot (1-2x^5)^3}$

Trả lời:

Câu 25. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 - 3x + 1})$

Trả lời:

Câu 26. Tìm giới hạn hàm số sau: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{49 - x^2}$

Trả lời:

Câu 27. Tìm giới hạn hàm số sau: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x^2 - 3x + 2}$

Trả lời:

Câu 28. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$

Trả lời:

Câu 29. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$

Trả lời:

Câu 30. Tính giới hạn của hàm số sau: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3}}{-x^2 + 3x - 2}$

Trả lời:

Câu 31. Tính giới hạn của hàm số sau $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{2x+12} + x}{x^2 + 2x}$

Trả lời:

Câu 32. Tính giới hạn của hàm số sau $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x^3 + x^2 - 2}$

Trả lời:

Câu 33. Tính giới hạn hàm số sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x - 2)$

Trả lời:

Câu 34. Tìm giới hạn của hàm số sau tại điểm cho trước. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{khi } x > 2 \\ 8 - x^3 & \text{, tại } x = 2 \\ x^4 - 16 & \text{khi } x < 2 \\ x - 2 & \end{cases}$

Trả lời:

Câu 35. Tìm giới hạn của hàm số sau tại điểm cho trước. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2 & \text{khi } x > 1 \\ x^2 - 1 & \text{, tại } x = 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$

Trả lời:

LỜI GIẢI

Câu 1. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x} - \sqrt[3]{x^3 + 1})$.

Trả lời: $-\frac{1}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - x \right) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^3 - 1}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}} \end{aligned}$$

$$\text{Xét } A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + 1}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Xét } B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2}} = 0,$$

$$\text{do } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2} \right) = +\infty$$

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt[3]{x^3 + 1} \right) = A + B = -\frac{1}{2}.$$

Câu 2. Hàm Heaviside có dạng $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ thường được dùng để mô tả việc chuyển

trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t = 0$.

Tính $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t), \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$.

Trả lời: $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) = 0$ và $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = 1$

Lời giải

Xét dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n < 0$ và $t_n \rightarrow 0$, ta có $H(t_n) = 0$.

Khi đó: $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} H(t_n) = 0$.

Xét dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n > 0$ và $t_n \rightarrow 0$, ta có $H(t_n) = 1$.

Khi đó: $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t_n) = 1$.

Câu 3. Một cái hồ chứa 600l nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối 30g/l vào hồ với tốc độ 15l/phút.

a) Tính nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Nồng độ muối trong hồ sẽ thế nào khi t dần về dương vô cùng?

Trả lời: a) $\frac{30t}{40+t}$ (g/l) b) 30(g/l)

Lời giải

a) Sau t phút bơm nước vào hồ thì lượng nước là $600+15t$ (l) và lượng muối có được là $30.15t$ (g).

Nồng độ muối của nước là: $C(t) = \frac{30.15t}{600+15t} = \frac{30t}{40+t}$ (g/l).

b) Khi t dần về dương vô cùng, ta có:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{40+t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t \left(\frac{40}{t} + 1 \right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30}{\frac{40}{t} + 1} = 30 \text{ (g/l)}$$

Câu 4. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x}$.

Trả lời: $\frac{7}{24}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} - 7}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+9} - 3}{x} + \frac{\sqrt{x+16} - 4}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x+9-9}{x(\sqrt{x+9}+3)} + \frac{x+16-16}{x(\sqrt{x+16}+4)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sqrt{x+9}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+16}+4} \right] = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24} \end{aligned}$$

Câu 5. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$;

Trả lời: $\frac{1}{3}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1^3}{\left(\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1 \right) x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2} + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Câu 6. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 3x + 2}$.

Trả lời: $\frac{1}{6}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{(x-1)(x-2)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{(x-1)(x-2)}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+7-2^3}{(x-1)(x-2) \left[\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right]}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-2) \left(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4 \right)} = -\frac{1}{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^2 - (x+3)}{(x-1)(x-2)(2 + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-2)(2 + \sqrt{x+3})} = \frac{1}{4}$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 3x + 2} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$.

Câu 7. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$

Trả lời: $\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{20} \left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} x^{30} \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{x^{50} \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

Câu 8. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \sqrt[3]{x^3 - x}\right)$.

Trả lời: 1

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \sqrt[3]{x^3 - x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3 + x}{(x+1)^2 + (x+1)\sqrt[3]{x^3 - x} + \sqrt[3]{(x^3 - x)^2}}$$

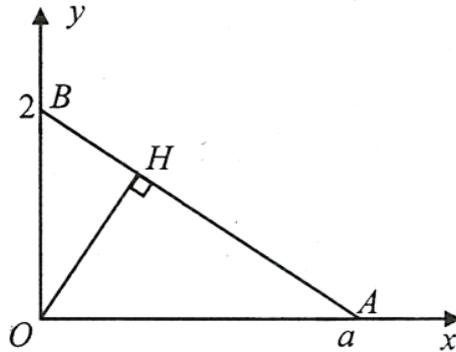
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4x + 1}{(x+1)^2 + (x+1)\sqrt[3]{x^3 - x} + \sqrt[3]{(x^3 - x)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2}} = \frac{3}{1+1+1} = 1$$

Câu 9. Trong hệ trục tọa độ Oxy , lấy điểm A thuộc tia Ox và điểm $B(0;2)$ thuộc tia Oy . Giả sử hoành độ điểm A là $a > 0$.

a) Tính độ dài đường cao OH của tam giác OAB theo a .

b) Khi điểm A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương trục Ox thì độ dài OH thay đổi như thế nào?



Trả lời: a) $\frac{2a}{\sqrt{4+a^2}}$ b) độ dài OH dần về 2

Lời giải

a) Tam giác OAB vuông tại O có đường cao OH nên:

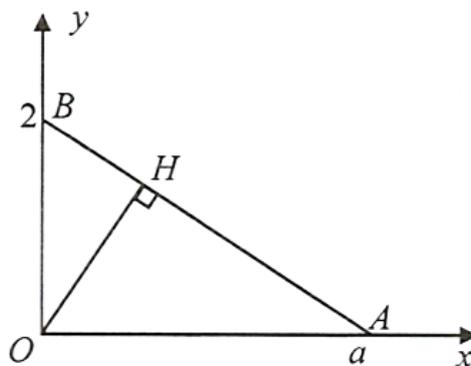
$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Rightarrow OH = \frac{OA \cdot OB}{\sqrt{OA^2 + OB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{4+a^2}}.$$

b) Đặt $h(a) = OH = \frac{2a}{\sqrt{4+a^2}}$.

Khi điểm A dịch chuyển ra vô cực theo tia Ox thì $a \rightarrow +\infty$.

$$\text{Ta có: } \lim_{a \rightarrow +\infty} h(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2a}{\sqrt{4+a^2}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2a}{a\sqrt{\frac{4}{a^2}+1}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{4}{a^2}+1}} = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2.$$

Vậy khi điểm A dần về vô cực thì độ dài OH dần về 2



Câu 10. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{2x^2-3x+1}$

Trả lời: $\frac{3}{4}$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{2x^2-3x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4}{(2x^2-3x+1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{(x-1)(2x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(2x-1)(\sqrt{3x+1}+2)} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Câu 11. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4-5x}}{-2x^2 + 3x + 5}$

Trả lời: $\frac{13}{42}$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + \sqrt{4-5x}}{-2x^2 + 3x + 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x^2 - 4 + 5x}{(-2x^2 + 3x + 5)(3x - \sqrt{4-5x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(9x-4)}{(x+1)(-2x+5)(3x - \sqrt{4-5x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x-4}{(-2x+5)(3x - \sqrt{4-5x})} = \frac{13}{42} \end{aligned}$$

Câu 12. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+7} - 5}{2x-2}$

Trả lời: $\frac{7}{24}$

Lời giải

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{2x+7} - 5}{2x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2 + \sqrt{2x+7}-3}{2x-2} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x+3-4}{(2x-2)(\sqrt{x+3}+2)} + \frac{2x+7-9}{(2x-2)(\sqrt{2x+7}+3)} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x-1}{2(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} + \frac{2x-2}{(2x-2)(\sqrt{2x+7}+3)} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{2(\sqrt{x+3}+2)} + \frac{1}{\sqrt{2x+7}+3} \right] = \frac{7}{24} \end{aligned}$$

Câu 13. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{9x-2} + 1}{x-2}$

Trả lời: $\frac{-7}{24}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{9x-2} + 1}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1} - 3 + 4 - \sqrt{9x-2}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{5x-1} - 3}{x-2} + \frac{4 - \sqrt{9x-2}}{x-2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{5x-1-9}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)} + \frac{16-9x+2}{(x-2)(4+\sqrt{9x-2})} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{5(x-2)}{(x-2)(\sqrt{5x-1}+3)} + \frac{9(2-x)}{(x-2)(4+\sqrt{9x-2})} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{5}{\sqrt{5x-1}+3} - \frac{9}{4+\sqrt{9x-2}} \right) = \frac{-7}{24}
\end{aligned}$$

Câu 14. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 24}{x-1}$

Trả lời: $+\infty$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 24}{x-1} = +\infty$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - x^2 + 2x - 24) = -22 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1) = 0 \text{ (Khi } x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow x-1 < 0 \text{)} \end{cases}$$

Câu 15. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x^3 + 2}{|x-3|}$

Trả lời: $-\infty$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x^3 + 2}{|x-3|} = -\infty$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 2x^3 + 2) = -43 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} |x-3| = 0 \text{ (Khi } x \rightarrow 3^- \Rightarrow x < 3 \Rightarrow |x-3| > 0 \text{)} \end{cases}$$

Câu 16. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^4 + 2x^3 + 1}{5x^3 - 2x + 1}$

Trả lời: $+\infty$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^4 + 2x^3 + 1}{5x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{-3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}}{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = +\infty.$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}}{5 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{-3}{5} < 0 \end{cases}$$

Câu 17. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-x)^4 \cdot (x^2-3)}{(2x^3-1)^4 (5-2x)^3}$

Trả lời: 0

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-x)^4 \cdot (x^2-3)}{(2x^3-1)^4 (5-2x)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(\frac{4}{x}-1\right)^4 \cdot x^2 \left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{x^{12} \left(2-\frac{1}{x^3}\right)^4 \cdot x^3 \left(\frac{5}{x}-2\right)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^9} \cdot \frac{\left(\frac{4}{x}-1\right)^4 \left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{x^3}\right)^4 \left(\frac{5}{x}-2\right)^3} = 0$$

Câu 18. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-2x)^5 \cdot (3x^2-2x)}{(2x^2-1)^2 (7-2x)^3}$

Trả lời: 3

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-2x)^5 \cdot (3x^2-2x)}{(2x^2-1)^2 (7-2x)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \left(\frac{3}{x}-2\right)^5 \cdot x^2 \left(3-\frac{2}{x}\right)}{x^4 \left(2-\frac{1}{x^2}\right)^2 \cdot x^3 \left(\frac{7}{x}-2\right)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{x}-2\right)^5 \cdot \left(3-\frac{2}{x}\right)}{\left(2-\frac{1}{x^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{x}-2\right)^3} = 3$$

Câu 19. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-2x^2)^3 \cdot (x-2)}{(3x^3-1)^5 (5-2x)^4}$

Trả lời: 0

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-2x^2)^3 \cdot (x-2)}{(3x^3-1)^5 (5-2x)^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 \left(\frac{1}{x^2}-2\right)^3 \cdot x \left(1-\frac{2}{x}\right)}{x^{15} \left(3-\frac{1}{x^3}\right)^5 \cdot x^4 \left(\frac{5}{x}-2\right)^4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{12}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{x^2}-2\right)^3 \left(1-\frac{2}{x}\right)}{\left(3-\frac{1}{x^3}\right)^5 \left(\frac{5}{x}-2\right)^4} = 0$$

Câu 20. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-2x^3)^2 \cdot (4x-1)}{(x^2-1)^2 \cdot (3+2x)^3}$

Trả lời: 2

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-2x^3)^2 \cdot (4x-1)}{(x^2-1)^2 \cdot (3+2x)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^6 \left(\frac{3}{x^3}-2\right)^2 \cdot x \left(4-\frac{1}{x}\right)}{x^4 \left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 \cdot x^3 \left(\frac{3}{x}+2\right)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{3}{x^3}-2\right)^2 \cdot \left(4-\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{x}+2\right)^3} = 2$$

Câu 21. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-4x^3)^4 \cdot (x^2-2)}{(2x^2-4)^5 \cdot (6+4x)}$

Trả lời: $-\infty$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3-4x^3)^4 \cdot (x^2-2)}{(2x^2-4)^5 \cdot (6+4x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{12} \left(\frac{3}{x^3}-4\right)^4 \cdot x^2 \left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{x^{10} \left(2-\frac{4}{x^2}\right)^5 \cdot x \left(\frac{6}{x}+4\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \frac{\left(\frac{3}{x^3}-4\right)^4 \left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{4}{x^2}\right)^5 \left(\frac{6}{x}+4\right)} = -\infty$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{3}{x^3}-4\right)^4 \left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{\left(2-\frac{4}{x^2}\right)^5 \left(\frac{6}{x}+4\right)} = 2 > 0 \end{cases}$$

Câu 22. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3+2x^2)^5 \cdot (3x^3-4)^2}{(5-x^3)^2 \cdot (1-2x^2)^3}$

Trả lời: $-\infty$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(3+2x^2)^5 \cdot (3x^3-4)^2}{(5-x^3)^2 \cdot (1-2x^2)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{10} \left(\frac{3}{x^2}+2\right)^5 \cdot x^6 \left(3-\frac{4}{x^3}\right)^2}{x^6 \left(\frac{5}{x^3}-1\right)^2 \cdot x^6 \left(\frac{1}{x^2}-2\right)^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 \cdot \frac{\left(\frac{3}{x^2}+2\right)^5 \cdot \left(3-\frac{4}{x^3}\right)^2}{\left(\frac{5}{x^3}-1\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2}-2\right)^3} = -\infty$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{3}{x^2}+2\right)^5 \cdot \left(3-\frac{4}{x^3}\right)^2}{\left(\frac{5}{x^3}-1\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^2}-2\right)^3} = -36 < 0 \end{cases}$$

Câu 23. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6-2x^4)^4 \cdot (2-x^2)}{(x^2-3)^5 \cdot (6-4x)}$

Trả lời: $+\infty$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6-2x^4)^4 \cdot (2-x^2)}{(x^2-3)^5 \cdot (6-4x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{16} \left(\frac{6}{x^4}-2\right)^4 \cdot x^2 \left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{x^{10} \left(1-\frac{3}{x^2}\right)^5 \cdot x \left(\frac{6}{x}-4\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 \cdot \frac{\left(\frac{6}{x^4}-2\right)^4 \left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^5 \cdot \left(\frac{6}{x}-4\right)} = +\infty$$

$$\forall \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{6}{x^4}-2\right)^4 \left(\frac{2}{x^2}-1\right)}{\left(1-\frac{3}{x^2}\right)^5 \cdot \left(\frac{6}{x}-4\right)} = 4 > 0 \end{array} \right.$$

Câu 24. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-x^2)^6 \cdot (3x^2+2)^2}{(5x^2-3)^2 \cdot (1-2x^5)^3}$

Trả lời: 0

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(4-x^2)^6 \cdot (3x^2+2)^2}{(5x^2-3)^2 \cdot (1-2x^5)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{12} \left(\frac{4}{x^2}-1\right)^6 \cdot x^4 \left(3+\frac{2}{x^2}\right)^2}{x^4 \left(5-\frac{3}{x^2}\right)^2 \cdot x^{15} \left(\frac{1}{x^5}-2\right)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} \cdot \frac{\left(\frac{4}{x^2}-1\right)^6 \cdot \left(3+\frac{2}{x^2}\right)^2}{\left(5-\frac{3}{x^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x^5}-2\right)^3} = 0$$

Câu 25. Tính giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 - 3x + 1})$

Trả lời: $\frac{3}{4}$

Lời giải

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 + 3x - 1}{2x - \sqrt{4x^2 - 3x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{2x + x \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{2 + \sqrt{4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{4}$$

Câu 26. Tìm giới hạn hàm số sau: $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{49-x^2}$

Trả lời: $\frac{1}{56}$

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{49-x^2} = \frac{0}{0}$, để khử dạng vô định ta nhân tử và mẫu cho $(\sqrt{x-3}+2)$, ta được

$$\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3}-2}{49-x^2} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt{x-3}-2)(\sqrt{x-3}+2)}{(\sqrt{x-3}+2)(7-x)(7+x)} = \lim_{x \rightarrow 7} \frac{1}{(7+x)(\sqrt{x-3}+2)} = \frac{1}{56}$$

Câu 27. Tìm giới hạn hàm số sau: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{x+2}}{x^2-3x+2}$

Trả lời: $-\frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$, để khử dạng vô định ta nhân tử và mẫu cho $(2 + \sqrt{x+2})$, ta được:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{x+2}}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2 - \sqrt{x+2})(2 + \sqrt{x+2})}{(x-1)(x-2)(2 + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{(x-1)(2 + \sqrt{x+2})} = -\frac{1}{4}.$$

Câu 28. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9}$

Trả lời: 0

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 3x + 9}{x^4 - 8x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 - 2x - 3)}{(x-3)(x^3 + 3x^2 + x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 3x^2 + x + 3} = 0$$

Câu 29. Tìm giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a}$

Trả lời: $4a^3$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^4 - a^4}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^3 + ax^2 + a^2x + a^3) = 4a^3$$

Câu 30. Tính giới hạn của hàm số sau: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3}}{-x^2 + 3x - 2}$

Trả lời: $-\frac{1}{2}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 3}}{-x^2 + 3x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - \sqrt{3x^2 + 3})(2 + \sqrt{x^2 + 3})}{-(2 - \sqrt{3x^2 + 3})(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(2 - \sqrt{3x^2 + 3})(x-2)} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 31. Tính giới hạn của hàm số sau $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{2x+12} + x}{x^2 + 2x}$

Trả lời: $-\frac{5}{6}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{2x+12} + x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt[3]{2x+12} + x)(\sqrt[3]{(2x+12)^2} - x\sqrt[3]{2x+12} + x^2)}{x(x+2)(\sqrt[3]{(2x+12)^2} - x\sqrt[3]{2x+12} + x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 12)}{x(x+2)(\sqrt[3]{(2x+12)^2} - x\sqrt[3]{2x+12} + x^2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x + 12}{(\sqrt[3]{(2x+12)^2} - x\sqrt[3]{2x+12} + x^2)x} = -\frac{5}{6}.$$

Câu 32. Tính giới hạn của hàm số sau $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x^3 + x^2 - 2}$

Trả lời: $\frac{1}{12}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x^3 + x^2 - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[4]{x} - 1)((\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1))}{(x-1)(x^2 + x + 2)(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x^2 + x + 2)(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x^2 + x + 2)(\sqrt[4]{x} + 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Câu 33. Tính giới hạn hàm số sau: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x - 2)$

Trả lời: $-\frac{1}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x - 2) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{2}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} - 1 + \frac{2}{x}} = \frac{1}{-\sqrt{1} - 1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Câu 34. Tìm giới hạn của hàm số sau tại điểm cho trước $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{8 - x^3} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{x^4 - 16}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$, tại $x = 2$

Trả lời: không tồn tại

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x}{8 - x^3} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{(2-x)(4+2x+x^2)} \\ &= -\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2 + 2x + 4} = -\frac{2}{2^2 + 2 \cdot 2 + 4} = -\frac{1}{6} \cdot \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+2)(x^2+4) = 4 \cdot 8 = 32 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x). \end{aligned}$$

Do đó, không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Câu 35. Tìm giới hạn của hàm số sau tại điểm cho trước. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \\ -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$, tại $x = 1$

Trả lời: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{2} = -\frac{1}{2}$$

Nhận thấy $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{1}{2}$. Do đó $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$.