

CÂU HỎI

Câu 1. Xét tính liên tục của hàm số sau: $f(x) = \begin{cases} x^4 + x^2 - 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ 3x + 2 & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -1$

Trả lời:

Câu 2. Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm được chỉ ra: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m + 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}; x_0 = 2$

Trả lời:

Câu 3. Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm được chỉ ra $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m^2 x & \text{nếu } x = 1 \end{cases}; x_0 = 1$.

Trả lời:

Câu 4. Tìm giá trị của hàm số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + a & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Trả lời:

Câu 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 9}{x - \sqrt{3}} & \text{khi } x \neq \sqrt{3} \\ 26 \sin \frac{\pi}{3} & \text{khi } x = \sqrt{3} \end{cases}$ tại điểm $x_0 = \sqrt{3}$.

Trả lời:

Câu 6. Tìm giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ ax - \frac{1}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$.

Trả lời:

Câu 7. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Trả lời:

Câu 8. Một chất điểm chuyển động với tốc độ được cho bởi hàm số $v(t) = \begin{cases} 10 & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ t^2 - 5t + 10 & \text{khi } t > 5 \end{cases}$, trong đó $v(t)$ được tính theo đơn vị m/s và t được tính theo giây. Hỏi hàm $v(t)$ có liên tục tại điểm $t = 5$ hay không?

Trả lời:

Câu 9. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1}-x}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ 5x^2-5x & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$

Trả lời:

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-5x+2}{2x^2-x-6} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{4mx-1}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$.

Tìm m để hàm số trên liên tục tại $x_0 = 2$

Trả lời:

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+x+1 & \text{khi } x \neq 4 \\ 2a+1 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 4$

Trả lời:

Câu 12. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x+m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ (tại $x=1$)

Trả lời:

Câu 13. Tìm các giá trị của m để hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq -2 \\ m & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

Trả lời:

Câu 14. Tìm các giá trị của m để hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ mx+1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Trả lời:

Câu 15. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ (tại $x=2$)

Trả lời:

Câu 16. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x+m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ (tại $x=1$)

Trả lời:

Câu 17. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra: $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ (tại $x=3$).

Trả lời:

Câu 18. Tìm m để hàm số liên tục trên tập xác định: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

Trả lời:

Câu 19. Tìm m để hàm số liên tục trên tập xác định: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 1 \\ 2mx - 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$

Trả lời:

LỜI GIẢI

Câu 1. Xét tính liên tục của hàm số sau: $f(x) = \begin{cases} x^4 + x^2 - 1 & \text{khi } x \leq -1 \\ 3x + 2 & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = -1$

Trả lời: hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

Lời giải

Ta có: $f(-1) = (-1)^4 + (-1)^2 - 1 = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^4 + x^2 - 1) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3x + 2) = -1$.

Suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

Câu 2. Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm được chỉ ra: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ m + 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}; x_0 = 2$

Trả lời: $m = 2$

Lời giải

Ta có: $f(2) = m + 1$;

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3.$$

Hàm số liên tục tại $x_0 = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 3. Tìm m để hàm số sau liên tục tại điểm được chỉ ra $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ m^2 x & \text{nếu } x = 1 \end{cases}; x_0 = 1$.

Trả lời: $m = \pm \frac{1}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } f(1) &= m^2; \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x}+1)(x+1)} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại $x_0=1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 4. Tìm giá trị của hàm số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + a & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: $a = 2$

Lời giải

Trên các khoảng $(0; +\infty), (-\infty; 0)$, hàm số $f(x)$ là các hàm đa thức nên hàm số liên tục.

Vậy $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục tại điểm $x=0$.

$$\text{Ta có: } f(0) = 2 \text{ và } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 2x + 2) = 2, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + a) = a.$$

Ta thấy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=0$ khi và chỉ khi $a=2$.

Vậy, với $a=2$ thì hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Câu 5. Xét tính liên tục của hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{x^4-9}{x-\sqrt{3}} & \text{khi } x \neq \sqrt{3} \\ 26 \sin \frac{\pi}{3} & \text{khi } x = \sqrt{3} \end{cases} \text{ tại điểm } x_0 = \sqrt{3}.$$

Trả lời: hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = \sqrt{3}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(\sqrt{3}) = 26 \sin \frac{\pi}{3} = 26 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 13\sqrt{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{(x^2-3)(x^2+3)}{x-\sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} [(x+\sqrt{3})(x^2+3)] = 12\sqrt{3}$$

Suy ra $f(\sqrt{3}) \neq \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} f(x)$, vì vậy hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = \sqrt{3}$

$$\text{Câu 6. Tìm giá trị của tham số } a \text{ để hàm số } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ ax - \frac{1}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases} \text{ liên tục tại điểm } x=1.$$

Trả lời: $a=1$

Lời giải

Ta có: $f(1) = a - \frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(ax - \frac{1}{2} \right) = a - \frac{1}{2}$;

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow a - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1$$

Câu 7. Tìm giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: $m = \frac{7}{4}$

Lời giải

Xét $x \in (4; +\infty)$ thì $f(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ là hàm phân thức nên hàm số liên tục.

Xét $x \in (-\infty; 4)$ thì $f(x) = mx + 1$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục.

Xét $x = 4$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x + 4) = 8$ và

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (mx + 1) = 4m + 1; f(4) = 4m + 1.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 4$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) \Leftrightarrow 4m + 1 = 8 \Leftrightarrow m = \frac{7}{4}.$$

Câu 8. Một chất điểm chuyển động với tốc độ được cho bởi hàm số

$$v(t) = \begin{cases} 10 & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ t^2 - 5t + 10 & \text{khi } t > 5 \end{cases}, \text{ trong đó } v(t) \text{ được tính theo đơn vị } m/s \text{ và } t \text{ được tính theo}$$

giây. Hỏi hàm $v(t)$ có liên tục tại điểm $t = 5$ hay không?

Trả lời: hàm số $v(t)$ liên tục tại điểm $t = 5$.

Lời giải

Ta có: $v(5) = 10$ và $\lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} 10 = 10$; $\lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} (t^2 - 5t + 10) = 10$.

Suy ra $v(5) = \lim_{t \rightarrow 5} v(t)$.

Vậy hàm số $v(t)$ liên tục tại điểm $t = 5$.

Câu 9. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x-1}-x}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ 5x^2 - 5x & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$

Trả lời: hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

Ta có: $f(x_0) = f(1) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{2x-1} - x}{x^2 - 1} = 0 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x).$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1).$$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x + 2}{2x^2 - x - 6} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{4mx - 1}{3} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$.

Tìm m để hàm số trên liên tục tại $x_0 = 2$

Trả lời: $m = \frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $f(x_0) = f(2) = \frac{8m-1}{3}$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{2x^2 - x - 6} = 1.$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

$$\Rightarrow \frac{8m-1}{3} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}.$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1 & \text{khi } x \neq 4 \\ 2a + 1 & \text{khi } x = 4 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 4$

Trả lời: $a = 10$

Lời giải

Ta có: $f(x_0) = f(4) = 2a + 1$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x^2 + x + 1) = 21.$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 4$ thì $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$.

$$\Rightarrow 2a + 1 = 21 \Leftrightarrow a = 10.$$

Câu 12. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ (tại $x = 1$)

Trả lời: $m = 0$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3$$

Hàm số liên tục $\Leftrightarrow 3 = 3 + m \Leftrightarrow m = 0$

Câu 13. Tìm các giá trị của m để hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq -2 \\ m & \text{khi } x = -2 \end{cases}$$

Trả lời: $m = 3$

Lời giải

Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq -2$.

Do đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = -2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$ (1)

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} (x+1) = -2+1 = -1; f(-2) = m.$$

Khi đó (1) $\Leftrightarrow -1 = m \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 14. Tìm các giá trị của m để hàm số sau liên tục trên tập xác định của chúng:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ mx + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$$

Trả lời: $m = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (mx + 1) = m + 1; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 1 + 1 = 2; f(1) = 2.$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow m + 1 = 2 \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 15. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ (tại $x = 2$)

Trả lời: $m = 3$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+1) = 3$$

Hàm $f(x)$ liên tục tại $x=0 \Rightarrow m=3$.

Câu 16. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ (tại $x=1$)

Trả lời: $m=0$

Lời giải

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết thì ta có $3+m = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

$$\text{Suy ra } 3+m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3 \Leftrightarrow m=0.$$

Câu 17. Tìm m để hàm số liên tục tại điểm được chỉ ra: $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ (tại $x=3$).

Trả lời: $m=-4$

Lời giải

Hàm số $f(x)$ có TXĐ là $(-1; +\infty)$.

Theo giả thiết thì ta phải có:

$$m = f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = -\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1}+2) = -4$$

Câu 18. Tìm m để hàm số liên tục trên tập xác định: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$

Trả lời: $m=0$

Lời giải

Hàm số $f(x)$ liên tục với $\forall x \neq 1$.

Do đó, $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ (1)

Ta có: $f(1) = 3.1 + m = m + 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 1 + 2 = 3.$$

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow 3 = m + 3 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 19. Tìm m để hàm số liên tục trên tập xác định: $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x < 1 \\ 2mx - 3 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$

Trả lời: $m = 2$

Lời giải

Ta có: $f(1) = 2m \cdot 1 - 3 = 2m - 3$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2mx - 3); \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1.$$

$$\text{YCBT} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2m - 3 = 1 = 2m - 3 \Leftrightarrow m = 2.$$