

CÂU HỎI

Câu 1. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \tan\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)$.

Trả lời:

Câu 2. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = 2e^{2x-1}$;

Trả lời:

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = 3\ln(x^2 + 1)$;

Trả lời:

Câu 4. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = 2\sin x - \ln x$;

Trả lời:

Câu 5. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = x \cdot 2^{2x}$

Trả lời:

Câu 6. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = x \sin x$.

Trả lời:

Câu 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số sau:

$$y = x^3 - x - 3 \text{ tại điểm có hoành độ } x_0 = 2;$$

Trả lời:

Câu 8. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số sau:

$$y = -\log_2 x \text{ tại điểm có hoành độ } x_0 = 2.$$

Trả lời:

Câu 9. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 3\sin 2t + 2\cos 2t$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của chất điểm trong t giây tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm đó khi $t = \frac{\pi}{4}$.

Trả lời:

Câu 10. Dân số (tính theo nghìn người) của một thành phố được cho bởi công thức

$f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$, trong đó t (được tính bằng năm) là khoảng thời gian kể từ năm 2015. Tìm tốc độ tăng dân số trong năm 2025 của thành phố đó.

Trả lời:

Câu 11. Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức

$T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$, trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ ở thời điểm $t = 2$.

Trả lời:

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{2x + 3}$

Trả lời:

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{9}{x}$ có đồ thị là (C) . Biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3;3)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích tam giác đó.

Trả lời:

Câu 14. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 4(\text{cm})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây.

Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng $0(\text{cm/s})$.

Trả lời:

Câu 15. Cân nặng trung bình của một em bé trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,00076t^3 - 0,06t^2 + 1,8t + 8,2$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound. Tính tốc độ thay đổi cân nặng của em bé đó tại thời điểm 15 tháng tuổi.

Trả lời:

Câu 16. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị là (C) . Tìm hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến tại một điểm M trên đồ thị (C) .

Trả lời:

Câu 17. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{1 + x - x^2}{1 - x + x^2}$

Trả lời:

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

Trả lời:

Câu 19. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = -\frac{2x + 1}{(x + 1)^2}$

Trả lời:

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{6}$

Trả lời:

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Trả lời:

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = (x^2 + 2x - 2) \cdot 5^x$

Trả lời:

Câu 23. Tính đạo hàm của hàm số $y = 5^x + \log_2 x + \ln(2x) + e^{-x} + \sqrt{3}$.

Trả lời:

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$.

Tính tổng $T = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2023)$.

Trả lời:

Câu 25. Chứng minh hàm số $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2x$ có đạo hàm không phụ thuộc x .

Trả lời:

Câu 26. Cho đường cong $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$.

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 ;

Trả lời:

Câu 27. Cho đường cong $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$.

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

Trả lời:

Câu 28. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 10 + t + 9t^2 - t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Tính thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất (tính từ thời điểm ban đầu)?

Trả lời:

Câu 29. Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 30. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Trả lời:

Câu 31. Một vật dao động điều hòa có phương trình $x = 2\sin \pi t$ (x tính bằng cm, t tính bằng giây). Tính thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất.

Trả lời:

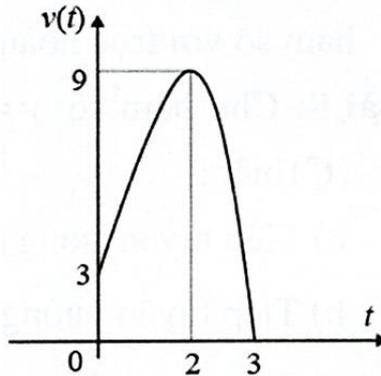
Câu 32. Một vật chuyển động có phương trình $S = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1(m)$, t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$.

Trả lời:

Câu 33. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = -t^3 + t^2 + t + 4$ (t là thời gian tính bằng giây). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 34. Một chuyển động có vận tốc được biểu diễn theo đồ thị hình bên. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1(s)$.



Trả lời:

Câu 35. Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $S(t)(km)$ là hàm số phụ thuộc theo biến t (giây) theo biểu thức sau $s(t) = e^{t^2+3} + 2t \cdot e^{3t+1}(km)$. Tính vận tốc của tên lửa sau 1 giây?

Trả lời:

Câu 36. Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 35t^2 - \frac{5}{3}t^3$ (kết quả khảo sát trong 12 tháng liên tục). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất vào ngày thứ mấy?

Trả lời:

Câu 37. Một vật chuyển động với phương trình $S(t) = 4t^2 + t^3$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $S(t)$ tính bằng m . Tìm gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc của vật bằng 11.

Trả lời:

Câu 38. Tính đạo hàm hàm số sau: $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

Trả lời:

Câu 39. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Trả lời:

LỜI GIẢI

Câu 1. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \tan\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)$.

Trả lời: $\frac{4x}{\cos^2\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)}$

Lời giải

$$y' = \left(\tan\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)\right)' = \frac{\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)'}{\cos^2\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{4x}{\cos^2\left(2x^2 + \frac{\pi}{3}\right)}$$

Câu 2. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = 2e^{2x-1}$;

Trả lời: $4e^{2x-1}$

Lời giải

$$y' = (2e^{2x-1})' = 2 \cdot (2x-1)' e^{2x-1} = 4e^{2x-1}$$

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = 3\ln(x^2 + 1)$;

Trả lời: $\frac{6x}{x^2 + 1}$

Lời giải

$$y' = (3\ln(x^2 + 1))' = 3 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{6x}{x^2 + 1}$$

Câu 4. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = 2\sin x - \ln x$;

Trả lời: $-2\sin x + \frac{1}{x^2}$

Lời giải

Ta có: $y' = (2\sin x - \ln x)' = 2\cos x - \frac{1}{x}$;

$$y'' = \left(2\cos x - \frac{1}{x}\right)' = 2(\cos x)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = -2\sin x + \frac{1}{x^2}$$

Câu 5. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = x \cdot 2^{2x}$

Trả lời: $4^x \cdot \ln 4(2 + x \ln 4)$

Lời giải

Ta có: $y' = (x \cdot 2^{2x})' = (x \cdot 4^x)' = x' \cdot 4^x + (4^x)' \cdot x = 4^x + 4^x \cdot \ln 4 \cdot x$;

$$y'' = (4^x + 4^x \cdot \ln 4 \cdot x)' = (4^x)' + \ln 4 \cdot (x \cdot 4^x)' \quad ((x \cdot 4^x)' \text{ làm giống bước trên})$$

$$= 4^x \ln 4 + \ln 4 \cdot (4^x + 4^x \cdot \ln 4 \cdot x) = 2 \cdot 4^x \ln 4 + \ln^2 4 \cdot 4^x \cdot x = 4^x \cdot \ln 4(2 + x \ln 4).$$

Câu 6. Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = x \sin x$.

Trả lời: $2 \cos x - x \sin x$

Lời giải

Ta có:

$$y' = (x \sin x)' = x' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot x = \sin x + x \cos x$$

$$y'' = (\sin x + x \cos x)' = (\sin x)' + (x \cos x)'$$

$$= \cos x + x' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x = 2 \cos x - x \sin x$$

Câu 7. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số sau:

$$y = x^3 - x - 3 \text{ tại điểm có hoành độ } x_0 = 2;$$

Trả lời: $y = 11x - 19$

Lời giải

Theo giả thiết, ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$, gọi điểm $M(2;3)$ là toạ độ tiếp điểm.

Ta có: $y' = (x^3 - x - 3)' = 3x^2 - 1$ nên tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M có hệ số góc là $y'(2) = 11$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị đã cho tại điểm M là:

$$y - 3 = 11(x - 2) \Leftrightarrow y = 11x - 19.$$

Câu 8. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số sau:

$$y = -\log_2 x \text{ tại điểm có hoành độ } x_0 = 2.$$

Trả lời: $y = \frac{-1}{2 \ln 2} x + \frac{1}{\ln 2} - 1$

Lời giải

Theo giả thiết, ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -1$, gọi điểm $M(2;-1)$ là toạ độ tiếp điểm.

Ta có: $y' = (-\log_2 x)' = -\frac{1}{x \ln 2}$ nên tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M có hệ số góc là $y'(2) = \frac{-1}{2 \ln 2}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị đã cho tại điểm M là:

$$y + 1 = \frac{-1}{2 \ln 2} (x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2 \ln 2} x + \frac{1}{\ln 2} - 1.$$

Câu 9. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 3 \sin 2t + 2 \cos 2t$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của chất điểm trong t giây tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm đó khi $t = \frac{\pi}{4}$.

Trả lời: -12

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 3(\sin 2t)' + 2(\cos 2t)' = 6\cos 2t - 4\sin 2t$.

Và $s''(t) = 6(\cos 2t)' - 4(\sin 2t)' = -12\sin 2t - 8\cos 2t$.

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ là:

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = s''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -12\left[\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right] - 8\left[\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right] = -12$$

Câu 10. Dân số (tính theo nghìn người) của một thành phố được cho bởi công thức

$f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$, trong đó t (được tính bằng năm) là khoảng thời gian kể từ năm 2015. Tìm tốc độ tăng dân số trong năm 2025 của thành phố đó.

Trả lời: 0,533 (nghìn người/năm)

Lời giải

Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thành phố đó (tính bằng nghìn người/năm), ta có: $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$.

Từ năm 2015 đến năm 2025 nghĩa là $t = 10$.

Vậy tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t = 10$ là:

$$f'(10) = \frac{120}{(10+5)^2} = \frac{8}{15} \approx 0,533 \text{ (nghìn người/năm)}$$

Câu 11. Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức

$T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$, trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ ở thời điểm $t = 2$.

Trả lời: $0,8 (^{\circ}F / \text{ngày})$.

Lời giải

Đạo hàm của hàm số T biểu thị tốc độ thay đổi của nhiệt độ.

Ta có: $T'(t) = -0,2t + 1,2$.

Vậy tốc độ thay đổi nhiệt độ tại thời điểm $t = 2$ là:

$$T'(2) = -0,2 \cdot 2 + 1,2 = 0,8 (^{\circ}F / \text{ngày}).$$

Câu 12. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{2x + 3}$

Trả lời: $\frac{2x^2 + 6x + 14}{(2x + 3)^2}$

Lời giải

$$y' = \frac{(x^2 + 4x - 1)' \cdot (2x + 3) - (2x + 3)' \cdot (x^2 + 4x - 1)}{(2x + 3)^2}$$

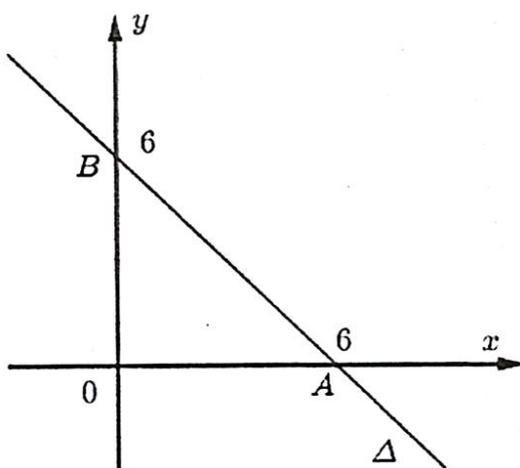
$$= \frac{(2x + 4)(2x + 3) - 2(x^2 + 4x - 1)}{(2x + 3)^2} = \frac{4x^2 + 14x + 12 - 2x^2 - 8x + 2}{(2x + 3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 6x + 14}{(2x + 3)^2}.$$

Câu 13. Cho hàm số $y = \frac{9}{x}$ có đồ thị là (C) . Biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3;3)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích tam giác đó.

Trả lời: 18

Lời giải



Ta có $y' = -9 \cdot \frac{1}{x^2}$, hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là $y'(3) = \frac{-9}{3^2} = -1$.

Phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C) tại tiếp điểm M là:

$$y - 3 = -1(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 6$$

Biết (Δ) cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm $A(6;0), B(0;6)$ nên diện tích tam giác OAB vuông tại O bằng:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \quad (\text{đơn vị diện tích})$$

Câu 14. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 4(\text{cm})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây.

Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng $0(\text{cm/s})$.

Trả lời: $t = \frac{2}{3} + k(k \in \mathbb{Z})(s)$

Lời giải

Ta có: $v(t) = x' = -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$.

Thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 nghĩa là $v(t) = 0$

$$\Leftrightarrow -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi t - \frac{2\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} + k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy các thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 là:

$$t = \frac{2}{3} + k (k \in \mathbb{Z})(s)$$

Câu 15. Cân nặng trung bình của một em bé trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,00076t^3 - 0,06t^2 + 1,8t + 8,2$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound. Tính tốc độ thay đổi cân nặng của em bé đó tại thời điểm 15 tháng tuổi.

Trả lời: 0,513 (pound/tháng)

Lời giải

Ta có: $w'(t) = \frac{57}{25000}t^2 - \frac{3}{25}t + 1,8$.

Tốc độ thay đổi cân nặng của em bé đó tại thời điểm 15 tháng tuổi là:

$$w'(15) = \frac{57}{25000} \cdot 15^2 - \frac{3}{25} \cdot 15 + 1,8 = 0,513 \text{ (pound/tháng)}$$

Câu 16. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị là (C) . Tìm hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến tại một điểm M trên đồ thị (C) .

Trả lời: $y'(1) = 12$

Lời giải

Gọi điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tọa độ tiếp điểm và $y' = -3x^2 + 6x + 9$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là $y'(x_0) = -3x_0^2 + 6x_0 + 9$.

Ta thấy, hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là một hàm số có đồ thị là một parabol, có đỉnh

$$S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow S(1; 12) \text{ và hệ số } a = -3 < 0 \text{ nên hàm số có giá trị lớn nhất bằng } 12 \text{ tại } x_0 = 1.$$

Vậy hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến là $y'(1) = 12$

Câu 17. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

Trả lời: $\frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}$

Lời giải

$$y' = \frac{(1+x-x^2)'(1-x+x^2) - (1-x+x^2)'(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$= \frac{(1-2x)(1-x+x^2) - (-1+2x)(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}.$$

Câu 18. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$

Trả lời: $\frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$

Lời giải

$$y' = \frac{(x^2 - 3x + 3)'(x-1) - (x-1)'(x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(2x-3)(x-1) - (x^2 - 3x + 3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

Câu 19. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = -\frac{2x+1}{(x+1)^2}$

Trả lời: $\frac{2x}{(x+1)^3}$

Lời giải

$$y' = -\frac{(2x+1)' \cdot (x+1)^2 - [(x+1)^2]' \cdot (2x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{2(x+1)^2 - 2(x+1)(2x+1)}{(x+1)^4}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x}{(x+1)^4} \Rightarrow y' = \frac{2x}{(x+1)^3}$$

Câu 20. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{6}$

Trả lời: $\frac{16}{3}$

Lời giải

$$y = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -2 \cot 2x$$

$$\Rightarrow y' = -2 \frac{-2}{\sin^2 2x} = \frac{4}{\sin^2 2x} \Rightarrow y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{16}{3}.$$

Câu 21. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$. Tính $f' \left(\frac{\pi}{4} \right)$.

Trả lời: 0

Lời giải

$$f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x - (1 + \cot^2 x)}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} = \frac{\tan^2 x - \cot^2 x}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{\tan^2 \frac{\pi}{4} - \cot^2 \frac{\pi}{4}}{2\sqrt{\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4}}} = 0$$

Câu 22. Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = (x^2 + 2x - 2) \cdot 5^x$

Trả lời: $(2x + 2) \cdot 5^x + (x^2 + 2x - 2) \cdot 5^x \ln 5$

Lời giải

$$y' = (x^2 + 2x - 2)' \cdot 5^x + (5^x)' \cdot (x^2 + 2x - 2) = (2x + 2) \cdot 5^x + (x^2 + 2x - 2) \cdot 5^x \ln 5$$

Câu 23. Tính đạo hàm của hàm số $y = 5^x + \log_2 x + \ln(2x) + e^{-x} + \sqrt{3}$.

Trả lời: $5^x \cdot \ln 5 + \frac{1}{x \ln 2} + \frac{1}{x} - e^{-x}$

Lời giải

$$y = 5^x + \log_2 x + \ln(2x) + e^{-x} + \sqrt{3} \Rightarrow y' = 5^x \cdot \ln 5 + \frac{1}{x \ln 2} + \frac{1}{x} - e^{-x}$$

Câu 24. Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$.

Tính tổng $T = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2023)$.

Trả lời: $\frac{\sqrt{2024} - 1}{2\sqrt{2024}}$

Lời giải

Tập xác định $D = [0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x}) - (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right).$$

Vậy $T = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2023)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2023}} - \frac{1}{\sqrt{2024}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2024}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2024} - 1}{2\sqrt{2024}}. \end{aligned}$$

Câu 25. Chứng minh hàm số $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2x$ có đạo hàm không phụ thuộc x .

Trả lời: -2

Lời giải

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 2x)' \\ &= 6\sin^5 x \cdot \cos x - 6\cos^5 x \sin x + 6\sin x \cdot \cos^3 x - 6\sin^3 x \cdot \cos x - 2 \\ &= 6\sin x \cos x (\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x) - 2 \\ &= 6\sin x \cos x (\sin^2 x (\sin^2 x - 1) + \cos^2 x (1 - \cos^2 x)) - 2 \\ &= 6\sin x \cos x (-\cos^2 x \sin^2 x + \cos^2 x \sin^2 x) - 2 = -2. \end{aligned}$$

Câu 26. Cho đường cong (C): $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 2 ;

Trả lời: $y = -x + 5$

Lời giải

Ta có: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ và $y(2) = 3$

$$y'(2) = -\frac{1}{(2-1)^2} = -1.$$

Do đó phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm (2;3) là: $y = -1(x-2) + 3 \Rightarrow y = -x + 5$

Câu 27. Cho đường cong (C): $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

Trả lời: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$; $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

Lời giải

Ta có: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ và $y(2) = 3$

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (x_0-1)^2 = 4 \Rightarrow x_0 = 3, x_0 = -1$$

+ Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \frac{5}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{1}{4}(x-3) + \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$

+ Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{1}{4}(x+1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

Câu 28. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 10 + t + 9t^2 - t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Tính thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất (tính từ thời điểm ban đầu)?

Trả lời: $v(t)_{\max} \Leftrightarrow t = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$

Lời giải

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 9t + 1$ có đồ thị là Parabol, do đó $v(t)_{\max} \Leftrightarrow t = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$.

Câu 29. Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Trả lời: $8(m/s)$

Lời giải

Vận tốc v của vật được tính theo công thức: $v(t) = s'(t) = t^2 - 2t + 9$.

Ta có: $t^2 - 2t + 9 = (t-1)^2 + 8 \geq 8 \Rightarrow v \geq 8$.

Vậy vận tốc nhỏ nhất của vật là $8(m/s)$ đạt được tại thời điểm $t=1$ (giây).

Câu 30. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Trả lời: $12m/s^2$

Lời giải

Gia tốc chuyển động tại $t = 3s$ là $s''(3)$

Ta có: $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9; s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12m/s^2$.

Câu 31. Một vật dao động điều hòa có phương trình $x = 2\sin \pi t$ (x tính bằng cm, t tính bằng giây). Tính thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất.

Trả lời: $t = \frac{3}{2}$

Lời giải

Gia tốc của vật bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động

Ta có: $x' = 2\pi \cos \pi t \Rightarrow a(t) = x''(t) = -2\pi^2 \sin \pi t$

Vì $-1 \leq \sin \pi t \leq 1 \Leftrightarrow -2\pi^2 \leq -2\pi^2 \sin \pi t \leq 2\pi^2 \Leftrightarrow -2\pi^2 \leq a(t) \leq 2\pi^2$

Gia tốc lớn nhất khi $\sin \pi t = -1 \Leftrightarrow \pi t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} + 2k$

Với $k = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}(l); k = 1 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

Vậy tại $t = \frac{3}{2}$ giây là thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất.

Câu 32. Một vật chuyển động có phương trình $S = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1(m), t$ là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$.

Trả lời: $48m/s^2$

Lời giải

$$S = f(t) = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 9t^2 - 6t + 2$$

$$\Rightarrow a(t) = f''(t) = 12t^2 - 18t - 6$$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là $a(3) = 12 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 - 6 = 48m/s^2$.

Câu 33. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = -t^3 + t^2 + t + 4$ (t là thời gian tính bằng giây). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

Trả lời: $s''\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

Lời giải

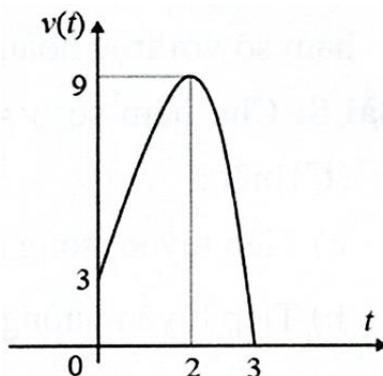
Vận tốc của chất điểm có phương trình là: $v = s' = -3t^2 + 2t + 1$.

Vận tốc của chất điểm đạt GTLN khi $t = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{3}$.

Gia tốc của chất điểm có phương trình là: $s'' = -6t + 2$.

Tại thời điểm vận tốc đạt GTLN thì gia tốc bằng $s''\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

Câu 34. Một chuyển động có vận tốc được biểu diễn theo đồ thị hình bên. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1(s)$.



Trả lời: 3

Lời giải

Đồ thị của vận tốc là một Parabol có phương trình $v(t) = at^2 + bt + c$.

Trên hình vẽ đồ thị qua các điểm $(0;3), (2;9), (3;0)$ nên có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 6 \\ 9a + 3b + -3 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 11 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Do đó phương trình của vận tốc là $v(t) = -4t^2 + 11t + 3$.

Vậy gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1(s)$ là: $a(1) = v'(1) = 3$

Câu 35. Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $S(t)(km)$ là hàm số phụ thuộc theo biến t (giây) theo biểu thức sau $s(t) = e^{t^2+3} + 2t \cdot e^{3t+1}(km)$. Tính vận tốc của tên lửa sau 1 giây?

Trả lời: $10e^4(km/s)$

Lời giải

$$v(t) = s'(t) = 2t \cdot e^{t^2+3} + 2e^{3t+1} + 6t \cdot e^{3t+1} \Rightarrow v(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^4 + 2 \cdot e^4 + 6e^4 = 10e^4(km/s)$$

Câu 36. Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 35t^2 - \frac{5}{3}t^3$ (kết quả khảo sát trong 12 tháng liên tục). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất vào ngày thứ mấy?

Trả lời: ngày thứ 7

Lời giải

$$\text{Ta có } f(t) = 35t^2 - \frac{5}{3}t^3 \Rightarrow f'(t) = 70t - 5t^2 (t > 0)$$

Vì $f'(t)$ có đồ thị là một parabol có bề lõm quay xuống nên đạt giá trị cực đại tại $t = -\frac{70}{2(-5)} = 7$.

Vậy vào ngày thứ 7 tốc độ truyền bệnh là nhanh nhất.

Câu 37. Một vật chuyển động với phương trình $S(t) = 4t^2 + t^3$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $S(t)$ tính bằng m . Tìm gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc của vật bằng 11.

Trả lời: $14m/s^2$

Lời giải

$$\text{Ta có: } v(t) = S'(t) = 8t + 3t^2 \text{ và } a(t) = v'(t) = 6t + 8.$$

$$\text{Theo đề bài, ta có: } v = 11 \Rightarrow 3t^2 + 8t = 11 \Rightarrow t = 1 (t > 0).$$

Vậy gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc của vật bằng 11 là $a(1) = 14m/s^2$.

Câu 38. Tính đạo hàm hàm số sau: $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

Trả lời: $\frac{4 \ln 3}{(3^x + 3^{-x})^2}$.

Lời giải

$$y' = \frac{(3^x \ln 3 + 3^{-x} \ln 3)(3^x + 3^{-x}) - (3^x - 3^{-x})(3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3)}{(3^x + 3^{-x})^2}$$

$$= \frac{(3^x + 3^{-x})^2 - (3^x - 3^{-x})^2}{(3^x + 3^{-x})^2} \ln 3 = \frac{4 \ln 3}{(3^x + 3^{-x})^2}.$$

Câu 39. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Trả lời: $12m/s$

Lời giải

Ta có: $v = S' = -3t^2 + 6t + 9$ và $a = v' = -6t + 6$.

Gia tốc triệt tiêu khi $a = 0 \Rightarrow t = 1$.

Khi đó vận tốc của chuyển động là $v(1) = 12m/s$.