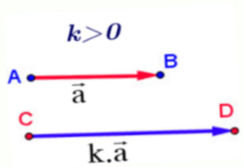
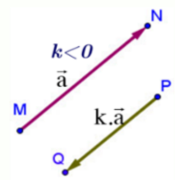
MỤC LỤC

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

❶. Tích của một số với một vectơ

- Cho số k khác 0 và vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là k $\vec{a}$.
- Vectơ k $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nếu k > 0, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu k < 0 và có độ dài bằng $|k|.|a|$.





- Ta quy ước $0\vec{a}$ và $k\vec{0} = \vec{0}$.
- Người ta còn gọi tích một số với một vectơ là tích của một vectơ với một số.

❷. Tính chất

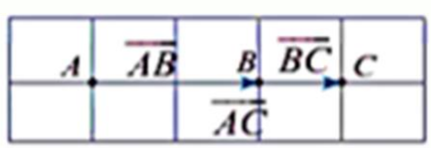
- Với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bất kì, với mọi số thực t và k, ta có:
  - $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$;
  - $(t + k)\vec{a} = t\vec{a} + k\vec{a}$;
  - $t(k\vec{a}) = (tk)\vec{a}$;
  - $1.\vec{a} = \vec{a}$.
  - $(-1).\vec{a} = -\vec{a}$.

❸. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

  Nhận xét:

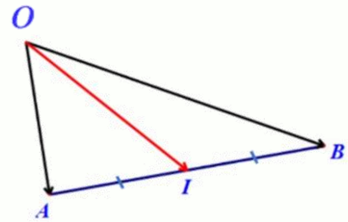
  Ba điểm phân biệt *A*, *B*, *C* thẳng hàng khi và chỉ khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.



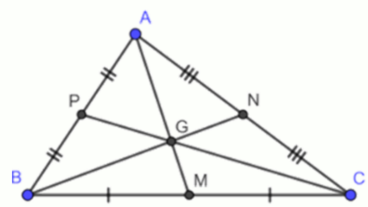
Chú ý: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mọi vectơ $\vec{c}$ luôn tồn tại duy nhất cặp số thực (m; n) sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

❹. Ứng dụng:

- Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Với điểm O tùy ý, ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$.



- Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Với điểm O tùy ý, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.

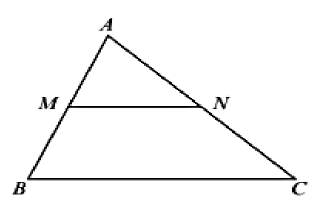


Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

⬩Dạng ❶: Xác định vectơ $k\vec{a}$

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC (Hình 2). Tìm trong hình các vectơ bằng: $2\overrightarrow{MN}$; $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; $-2\overrightarrow{CN}$.



Hình 2

Lời giải

Ta có: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$; $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MA}$; $-2\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 2: Vật thứ nhất chuyển động thẳng đều từ A đến B với tốc độ là 9 m/s và vật thứ hai chuyển động thẳng đều từ B đến A với tốc độ là 6 m/s. Gọi $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ lần lượt là các vectơ vận tốc của vật thứ nhất và vật thứ hai. Có hay không số thực k thoả mãn $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$?

Lời giải

Do tỉ số tốc độ của vật thứ nhất và vật thứ hai là $\frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ đồng thời hai vật chuyển động ngược hướng nên hai vectơ vận tốc ngược hướng. Suy ra $\vec{v}_1 = \frac{-3}{2}\vec{v}_2$.

Vậy $k = \frac{-3}{2}$

Câu 3: Cho đoạn thẳng *AB* và một điểm *M* tùy ý. Chứng minh *I* là trung điểm của đoạn thẳng *AB* khi và chỉ khi $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Lời giải

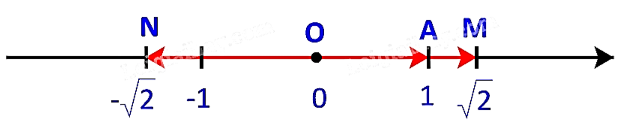
Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\text{MI} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$

$\Leftrightarrow$ *I* là trung điểm của đoạn thẳng *AB*.

Câu 4: Trên một trục số, gọi O, A, M, N tương ứng biểu thị các số $0; 1; \sqrt{2}; -\sqrt{2}$. Hãy nêu mối quan hệ về hướng và độ dài của mỗi vecto $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ với vecto $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Viết đẳng thức thể hiện mối quan hệ giữa hai vecto $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$.



Lời giải

Vecto $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$ có cùng giá nên chúng cùng phương.

Mà vecto $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng nằm trên tia OM nên chúng cùng chiều

Vậy vecto $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng.

Ngoài ra, $\left|\overrightarrow{OM}\right| = OM = \sqrt{2}$ và $\left|\overrightarrow{OA}\right| = OA = 1$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}\right| = \sqrt{2} \cdot \left|\overrightarrow{OA}\right|$

Ta kết luận $\overrightarrow{OM} = \sqrt{2} \cdot \overrightarrow{OA}$.

Câu 5: Cho B là trung điểm của đoạn thẳng AC. Tìm số k trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{CB}$;   b) $\overrightarrow{CA} = k\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ là hai vectơ cùng hướng và $\left|\overrightarrow{CA}\right| = 2\left|\overrightarrow{CB}\right|$

Suy ra $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB}$. Vậy $k = 2$

b) Ta có: $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ là hai vectơ ngược hướng và $\left|\overrightarrow{CA}\right| = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|$. Suy ra $\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{AB}$. Vậy $k = -2$.

Câu 6: Cho ba điểm A, B, C. Chứng minh:

a) $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$;   **b)** $3\left(5\overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.

Lời giải

a) Ta có: $2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = 2\overrightarrow{AC}$.

b) Ta có: $3\left(5\overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = 15\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - 14\overrightarrow{AC} = 15\overrightarrow{AC} - 14\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

◆Dạng ❷: Dùng tính chất, trung điểm, trọng tâm, ba điểm thẳng hàng

☞Các ví dụ minh họa

Câu 7: Cho G là trọng tâm của tam giác ABC và điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Lời giải

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)$

$= 3\overrightarrow{MG} + \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right) = 3\overrightarrow{MG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{MG}$

Câu 8: Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Chứng minh $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

Lời giải

Vì M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}$.

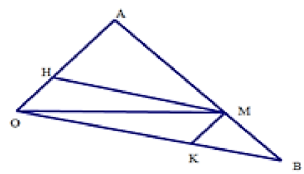
Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}$.

Suy ra $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=2\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}\right)=2\cdot\vec{0}=\vec{0}$

Câu 9:

Cho tam giác OAB. Điểm M thuộc cạnh AB sao cho $AM=\frac{2}{3}AB$.

Kẻ $MH//OB, MK//OA$ (Hình 60).



Hình 60

Giả sử $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

a) Biểu thị $\overrightarrow{OH}$ theo $\vec{a}$ và $\overrightarrow{OK}$ theo $\vec{b}$.

b) Biểu thị $\overrightarrow{OM}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

a)Ta có: $MH//OB, MK//OA$ suy ra

$\frac{OK}{OB}=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}, \frac{OH}{OA}=\frac{BM}{AB}=\frac{1}{3}$.

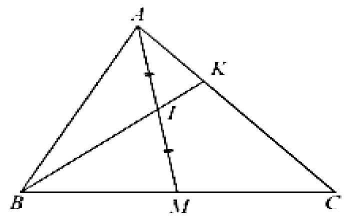
Vì $\overrightarrow{OH}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng hướng và $OH=\frac{1}{3}OA$ nên $\overrightarrow{OH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}\vec{a}$.

Vì $\overrightarrow{OK}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng và $OK=\frac{2}{3}OB$ nên $\overrightarrow{OK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\vec{b}$.

b)Vì tứ giác $OHMK$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$.

Câu 10:

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM và K là điểm trên cạnh AC sao cho $AK = \frac{1}{3}AC$.



Hình 6

a) Tính $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$.

b) Tính $\overrightarrow{BK}$ theo $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$.

c) Chứng minh ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải

a) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. (1)

b. $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) - 2 = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. (2)

c) Ta có: (1) $\Leftrightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

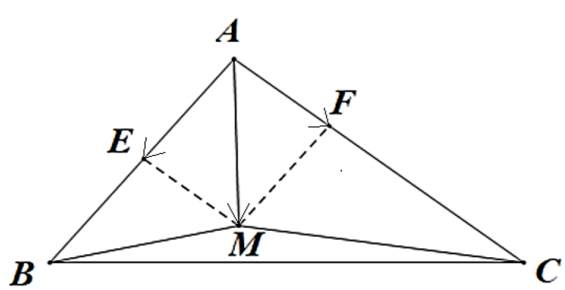
(2) $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

nên $\overrightarrow{BI} - \frac{3}{4}\overrightarrow{BK}$ (3)

Từ (3) ta suy ra ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Câu 11: Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Lời giải



Hình 4.29

Để xác định vị trí của M, trước hết ta biểu thị $\overrightarrow{AM}$ (với gốc A đã biết) theo hai vectơ đã biết $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Đẳng thức vectơ đã cho tương đương với:

$\overrightarrow{MA}+3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lấy điểm E là trung điểm của AB và điểm F thuộc cạnh AC sao cho $AF=\frac{1}{3}AC$.

Khi đó $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Vì vậy $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$.

Suy ra M là đỉnh thứ tư của hình bình hành $EAFM$.

Ta trở lại vấn đề đã được nêu trong phần đầu bài học. Điểm khối tâm M của hệ các chất điểm $A_1,\ A_2,...,\ A_n$ với các khối lượng tương ứng $m_1,\ m_2,...,\ m_n$ được xác định bởi đẳng thức vectơ

$m_1\overrightarrow{MA_1}+m_2\overrightarrow{MA_2}+...+m_n\overrightarrow{MA_n}=\vec{0}$.

Vì vậy, việc xác định điểm khối tâm được quy về xác định điểm thỏa mãn đẳng thức vec tơ tương ứng

Câu 12: Cho ba điểm A, B, C. Chứng minh $3\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}\right)-2\left(\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}$

Lời giải

©. Dạng toán rèn luyện

◆Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho tam giác ABC gọi M là trung điểm của BC và G là trọng tâm tam giác ABC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GM}$.

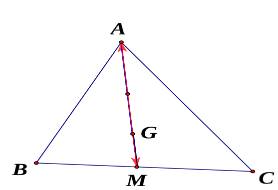
B. $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GM}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AG}$.

D. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}$.

Lời giải

Chọn B



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC

Theo tính chất của trọng tâm ta có $GA = 2GM$ và vectơ $\overrightarrow{GA}$ ngược chiều $\overrightarrow{GM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Mệnh đề nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GM}$.

B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn B

Tính chất của trọng tâm tam giác với M là điểm tùy ý thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC. Với điểm M là trung điểm BC và I là điểm tùy ý thì. Mệnh đề nào đúng

A. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IM}$.

B. $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM}$.

C. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

D. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IM}$.

Lời giải

Chọn B

Tính chất của trung điểm ta có $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC, với M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PM} = \vec{0}$.

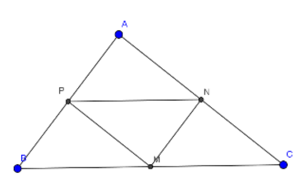
B. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{PM}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

D. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn C



Xét A: dễ thấy hiển nhiên đúng.

Xét B: $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PM}$. Nên B đúng.

Xét C: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$. Nên C sai.

Xét D: $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$. Nên D đúng.

Câu 5: Cho G là trọng tâm tam giác ABC, gọi I là trung điểm của BC. Đẳng thức nào sau đây **đúng?**

A. $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GI}$.

B. $\overrightarrow{IG}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{IA}$..

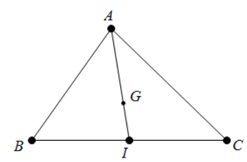
C. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

D. $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}$.

Lời giải

Chọn C

Theo quy tắc trung điểm ta có $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.



Câu 6: Cho đoạn thẳng AB. Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM=\frac{1}{4}AB$.Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MA}$.

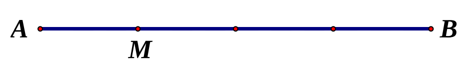
B. $\overrightarrow{BM}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$.

C. $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$.

D. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có, $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{MA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$ sai.

Câu 7: Chọn khẳng định đúng:

A. Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$.

B. Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

C. Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

D. Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

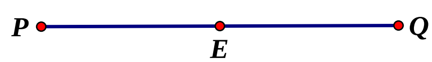
Câu 8: Cho E là trung điểm đoạn thẳng PQ và điểm M bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{EQ}$. **B.** $\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QE}$.

C. $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{ME}$. **D.** $\overrightarrow{EQ}+\overrightarrow{EP}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn D



Theo tính chất trung điểm của đoạn thẳng ta có: $\overrightarrow{EQ}+\overrightarrow{EP}=\vec{0}$.

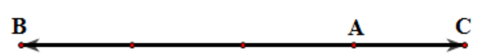
Câu 9: Cho ba điểm phân biệt A,B,C. Nếu $\overrightarrow{AB}=-3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{BC}=-4\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AC}$. **D.** $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Chọn D

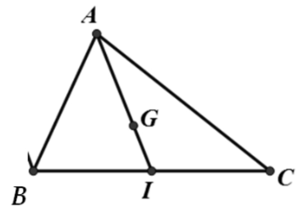


Câu 10: Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC.Khẳng định nào sau đây đúng

A. $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$. **B.** $3\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{IC}$.

C. $\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{IC}$. **D.** $2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$

Lời giải



Chọn A

Vì I là trung điểm của BC nên $BI = CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vectơ $\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

Câu 11: Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$ và điểm O. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$. Khi đó:

A. $\overrightarrow{MN} = 7\vec{a}$.
B. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$.

C. $\overrightarrow{MN} = -7\vec{a}$.
D. $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = -4\vec{a} - 3\vec{a} = -7\vec{a}$.

Câu 12: Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a} = m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$

A. $m = 3$.
B. $m = -\dfrac{1}{3}$.

C. $m = \dfrac{1}{3}$.
D. $m = -3$

Lời giải

Chọn B

Do $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng nên $m = -\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|} = -\dfrac{5}{15} = -\dfrac{1}{3}$.

Câu 13: Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

A. $AB = AC$.
B. $\exists k \neq 0 : \overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.
D. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$ điểm M

Lời giải

Chọn B.

Câu 14: Cho ΔABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{BC},\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

A. $2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}$.

B. $\vec{a}-2\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}$.

C. $5\vec{a}+\vec{b},-10\vec{a}-2\vec{b}$.

D. $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $-10\vec{a}-2\vec{b}=-2.(5\vec{a}+\vec{b})\Rightarrow 5\vec{a}+\vec{b}$ và $-10\vec{a}-2\vec{b}$ cùng phương.

Câu 15: Cho hình bình hành $ABCD$ có M là giao điểm của hai đường chéo. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

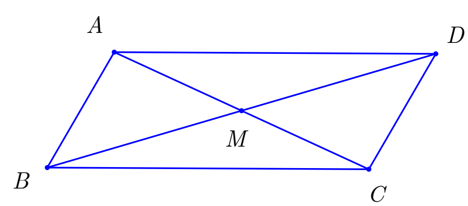
B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BM}$.

D. $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.

Lời giải

Chọn D



$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ sai vì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$ đối nhau.

Câu 16: Cho tam giác ABC có trọng tâm G và trung tuyến AM. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

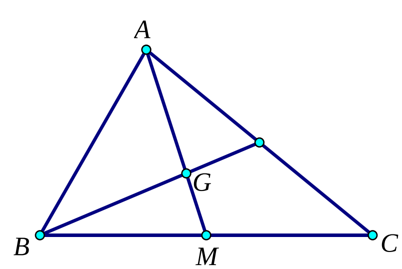
B. $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GM}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MG}$..

D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$, với mọi điểm *O*.

Lời giải

Chọn C



Ta phải có $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{MG}$.

Câu 17: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM, tìm khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BM}$.

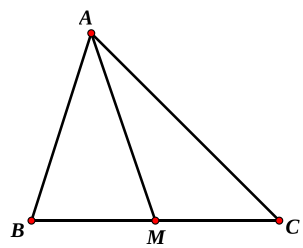
B. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

C. $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

D. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$.

Lời giải

Chọn B



Theo tính chất trung điểm đoạn thẳng ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

Câu 18: Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AO}$.

B. $2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD} = 5\overrightarrow{AC}$.

C. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AO}$.

Lời giải

Chọn B

Theo quy tắc hình bình hành $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ nên:

$$2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD} = 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) + 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AC}.$$

Câu 19: Cho tam giác ABC và I là trung điểm của cạnh BC. Điểm G có tính chất nào sau đây là điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm tam giác ABC?

A. $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$.

B. $IA = 3GI$.

C. $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.

D. $GA = 2GI$

Lời giải

Chọn A.

Câu 20: Cho hai điểm A và B phân biệt. Điều kiện cần và đủ để I là trung điểm AB là

A. $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}$.
B. $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$.

C. $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BI}$.
D. $AI=BI$.

Lời giải

Chọn B

I là trung điểm $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$.

Câu 21: Cho ΔABC có M là trung điểm BC, G là trọng tâm ΔABC. Khẳng định nào **sai**?

A. $\forall O: \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$.
B. $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GM}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{MG}$.
D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào tính chất trọng tâm ta suy ra các mệnh đề A, B, D đúng.

Mệnh đề C sai.

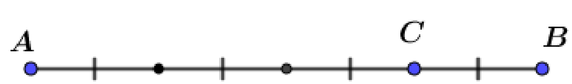
Câu 22: Cho C nằm giữa A và B sao cho $AC=3CB$. Mệnh đề nào sau đây ***đúng***?

A. $\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{BC}$.
B. $\overrightarrow{AB}=\frac{4}{3}\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{BC}$.
D. $\overrightarrow{AC}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn C



- $\overrightarrow{AB}=-4\overrightarrow{BC}$ nên đáp án A và B sai.
- $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ đáp án D sai.

Câu 23: Trên đường thẳng cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, với $AB=2a, AC=6a$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{BA}$.
B. $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{AB}$.

C. $\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{AB}$.

D. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn A

Có $AB=2a \Rightarrow BC=4a=2AB$

Mà $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{BA}$.

Câu 24: Cho hình chữ nhật *ABCD, I, K* lần lượt là trung điểm của *BC* và *CD.* Chọn đẳng thức đúng.

A. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AC}$.

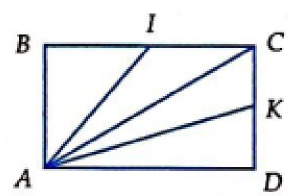
B. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IK}$.

D. $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

Đáp án D



$$\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Câu 25: Cho ΔABC, *AM, BN, CP* là các trung tuyến. *D, E, F* là trung điểm của *AM, BN* và *CP*. Với *O* là điểm bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.

B. $2\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=3\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$.

C. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$.

D. $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$

Lời giải

Ta có: $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OM}=4\overrightarrow{OD}$ (1)

Tương tự $\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OE}$ (2)

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OF}$ (3)

Cộng vế với vế (1), (2), (3) ta được đáp án **A**

Đáp án A

Câu 26: Cho tam giác *ABC* đều tâm *O*, *M* là điểm bất kì trong tam giác. Hình chiếu của *M* xuống ba cạnh lần lượt là *D, E, F*. Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$.

B. $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$.

C. $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$.

D. $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$

Lời giải

Qua *M* kẻ các đường thẳng $A_1B_1//AB, A_2C_1//AC, B_2C_2//BC$

$\Rightarrow$ Các tam giác đều $\Delta MB_1C_1, \Delta MA_1C_2, \Delta MA_2B_2$

Ta có: $\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}\right), \overrightarrow{ME}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MC_2}\right), \overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB_2}+\overrightarrow{MA_2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MB_2}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MC_2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Đáp án D.

Câu 27: Cho tam giác đều ABC. Phát biểu nào sau đây **đúng**?

A. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

B. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

Lời giải

Chọn B

Vì ΔABC đều nên $AB=AC\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{AC}\right|$.

Câu 28: Cho tam giác ABC, có bao nhiêu điểm M thỏa $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=5$?

A. 1.

B. 2.

C. vô số.

D. Không có điểm nào.

Lời giải

Chọn C

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có:

$$\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=5 \Leftrightarrow \left|3\overrightarrow{MG}\right|=5 \Leftrightarrow MG=\frac{5}{3}$$

Vậy quỹ tích điểm M là đường tròn tâm G, bán kính $\frac{5}{3}$.

Câu 29: Trên trục tọa độ $\left(O;\vec{e}\right)$, các điểm A,B và C có tọa độ lần lượt là $-1;2$ và 3. Tìm giá trị của $\overline{AB}+2\overline{AC}$.

A. 11. **B.** 1. **C.** 7. **D.** -11.

Lời giải

Chọn A

$\overline{AB}=2-\left(-1\right)=3,\ \overline{AC}=3-\left(-1\right)=4 \Rightarrow \overline{AB}+2\overline{AC}=3+2.4=11$.

Câu 30: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=4a$ và $AD=3a$. Độ dài của vecto $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}$ bằng:

A. $5a$. **B.** $6a$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $7a$.

Lời giải

Chọn A

Từ B kẻ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DA}$

Áp dụng quy tắc hình hình hành: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BF}$ (Với F là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật $ABEF$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{BF}\right|=\sqrt{\left(4a\right)^2+\left(3a\right)^2}=5a$.

Câu 31: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng $2a$. Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$ bằng:

A. a. **B.** $2\sqrt{3}a$. **C.** $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AM}\right|=2.\dfrac{\sqrt{3}}{2}.2a=2\sqrt{3}a$.

Câu 32: Cho hình bình hành $ABCD$ có $AB=a,\ AB\perp BD,\ BAD=60^0$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của BD,AD. Độ dài vec tơ $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AF}$ là

A. $\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $BD=a.\tan 60^o=a\sqrt{3}.\ GD=\sqrt{BD^2+BG^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+3a^2}=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$

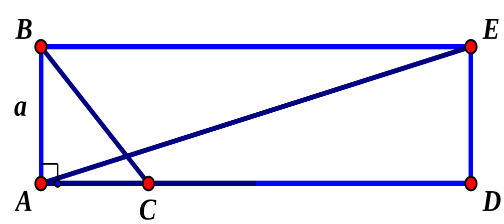
$\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AF}=-(\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF})=-2\overrightarrow{DH}=-\overrightarrow{DG}\Rightarrow\left|\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AF}\right|=DG=\dfrac{a\sqrt{13}}{2}$.

Câu 33: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $AB=a$. Tính độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$.

A. $\sqrt{20}a$. **B.** $5a$. **C.** $17a$. **D.** $\sqrt{17}a$.

Lời giải

Chọn D



Dựng các điểm D,E sao cho $\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AC}$ và tứ giác $ABED$ là hình bình hành.

Khi đó $\left|\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\overrightarrow{AE}\right|=\sqrt{a^2+(4a)^2}=a\sqrt{17}$.

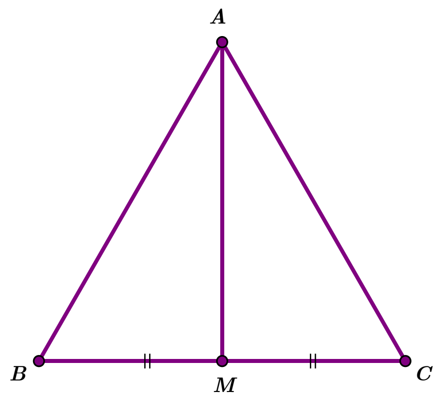
Câu 34: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 1. Ta có

A. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{3}$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right|=0$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right|=2$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right|=0$

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của BC ta có $AM=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Khi đó $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$

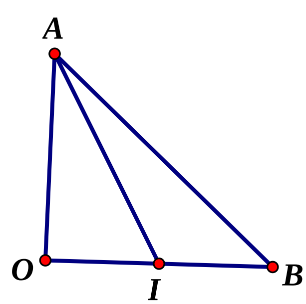
Nên $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CA}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=2\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{3}$.

Câu 35: Cho tam giác OAB vuông cân tại O, cạnh $OA=a$. Tính $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|$

A. $a\sqrt{5}$. **B.** $2a\sqrt{2}$. **C.** a. **D.** $\left(1+\sqrt{2}\right)a$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BA}=-\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}\right)=-2\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{IA}$ với I là trung điểm của OB.

Do đó: $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=\left|2\overrightarrow{IA}\right|=2IA$.

Trong tam giác vuông OAI ta có $IA=\sqrt{OA^2+OI^2}=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\left|2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right|=a\sqrt{5}$.

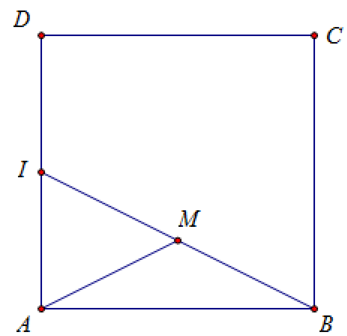
Câu 36: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng $6(\text{cm})$, gọi I là trung điểm cạnh AD. Ta có $\left|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right|$ bằng

A. $3\sqrt{5}\left(\text{cm}\right)$. **B.** $\left(12+3\sqrt{5}\right)\left(\text{cm}\right)$.

C. $\left(12-3\sqrt{5}\right)\left(\text{cm}\right)$. **D.** $5\sqrt{3}\left(\text{cm}\right)$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm IB, $IB=\sqrt{IA^2+AB^2}=\sqrt{3^2+6^2}=3\sqrt{5}\left(\text{cm}\right)$; $AM=\frac{1}{2}IB=\frac{3\sqrt{5}}{2}\left(\text{cm}\right)$.

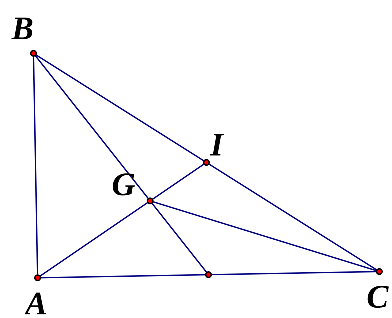
$\left|2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}\right|=2\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}\right|=2\left|\overrightarrow{AM}\right|=2.AM=3\sqrt{5}\left(\text{cm}\right)$.

Câu 37: Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC=45$. Tính $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|$?

A. 45. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** 15. **D.** 30.

Lời giải

Chọn C



$\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=\left|2\overrightarrow{GI}\right|=\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\right|=\frac{2}{3}\frac{BC}{2}=\frac{BC}{3}=15$.

Câu 38: Cho tam giác ΔABC vuông tại A và độ dài cạnh $AB=4; AC=6$. Vectơ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ có độ dài là

A. 8. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là trung điểm của AC.

Ta có $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=\left|2\overrightarrow{BI}\right|=2BI=2\sqrt{AB^2+AI^2}=2\sqrt{4^2+3^2}=10$.

Câu 39: Cho tam giác OAB vuông cân tại O, $OA=a$, độ dài vector $3\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}$ là

A. $5a$. **B.** đáp án khác. **C.** $7a$. **D.** a.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}=4\overrightarrow{OB}$.

Lấy C sao cho $DOEC$ là hình vuông. Theo quy tắc cộng hình bình hành thì $\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{DE}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right|=5a$.

Câu 40: Cho tam giác ABC đều cạnh a, M là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{MC}\right|$

A. $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{MC}\right|=\dfrac{a}{2}$. **B.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{MC}\right|=\dfrac{2\sqrt{3}a}{3}$.

C. $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{MC}\right|=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$. **D.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{MC}\right|=\dfrac{3a}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}\right|=\left|2\overrightarrow{CI}\right|=2CI$ (I là trung điểm của AM)

$$=2.\sqrt{CM^2+IM^2}=2.\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

Câu 41: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $BC=3$. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=6$. **B.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=3\sqrt{3}$.

C. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=3\sqrt{2}$. **D.** $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=3$.

Lời giải

Chọn D

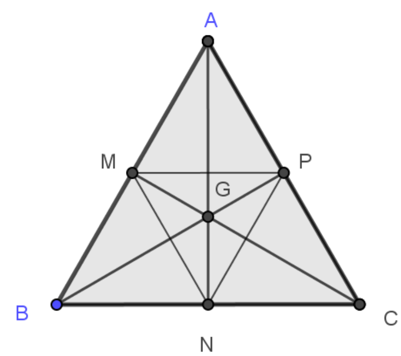
Gọi I là trung điểm của BC. Ta có: $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|=\left|2\overrightarrow{AI}\right|=2AI=BC=3$.

Câu 42: Cho tam giác đều ABC có $AB=3$. M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,BC,CA. G là trọng tâm tam giác MNP. Môđun của $\overrightarrow{AG}$ nhận giá trị nào dưới đây?

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: AN,BP,CM là các đường trung tuyến của tam giác ABC cũng là các đường trung tuyến của tam giác MNP.

Nên G là trọng tâm tam giác MNP cũng là trọng tâm của tam giác ABC.

$AN=\sqrt{AC^2-NC^2}=\sqrt{9-\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

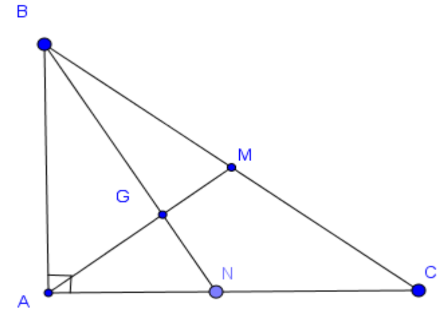
$\left|\overrightarrow{AG}\right|=\left|\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AN}\right|=\dfrac{2}{3}AN=\dfrac{2}{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Câu 43: Cho tam giác ABC vuông tại A, trọng tâm G, có $AB=3$, $AC=4$. Véc tơ $\overrightarrow{AG}$ có độ dài là

A. $\dfrac{10}{3}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{14}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Vì tam giác ABC vuông tại A nên $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=5$

Trung tuyến $AM=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{5}{2}$

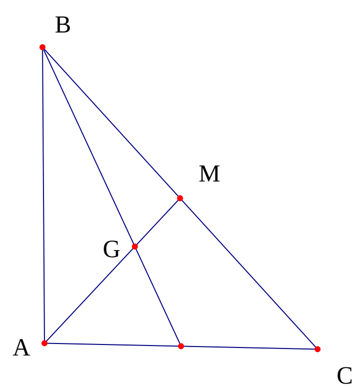
$\left|\overrightarrow{AG}\right|=AG=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{5}{3}$.

Câu 44: Gọi G là trọng tâm tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC=45$. Tính $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|$.

A. $45.$. **B.** $3\sqrt{5}.$. **C.** $15.$. **D.** $30.$

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC.

Tam giác ABC vuông tại A, suy ra $AM=\dfrac{BC}{2}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right|=2GM=\dfrac{2}{3}AM=\dfrac{BC}{3}=\dfrac{45}{3}=15.$.

Câu 45: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=2, AD=3$. Giá trị của biểu thức $T=\left|3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\right|$ bằng

A. $\sqrt{13}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** 12. **D.** $6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $T^2 = \left|3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right|^2 = 9\overrightarrow{AB}^2 + 12.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} + 4\overrightarrow{AD}^2 = 9AB^2 + 4AD^2 = 72$.

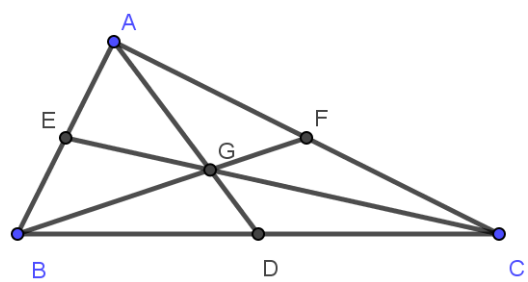
Vậy $T = 6\sqrt{2}$.

Câu 46: Gọi G là trọng tâm của tam giác vuông ABC với cạnh huyền $BC = 45$. Tính $\left|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right|$

A. 45. **B.** $3\sqrt{5}$. **C.** 15. **D.** 30.

Lời giải

Chọn C



Gọi D là trung điểm của BC.

Vì tam giác ABC vuông tại A, nên $AD = \frac{1}{2}BC = \frac{45}{2}$.

Ta có $\left|\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right| = 2\left|\overrightarrow{GD}\right| = \frac{2}{3}\left|\overrightarrow{AD}\right| = \frac{2}{3}.\frac{45}{2} = 15$.

Câu 47: Cho tam giác ABC đều, cạnh $2a$, trọng tâm G. Độ dài vecto $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC}$ là

A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} - \left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}\right) = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GB}$

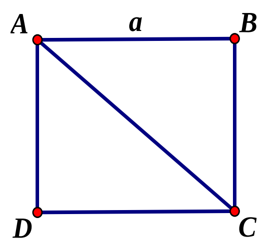
Suy ra $\left|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GC}\right|=2\left|\overrightarrow{GB}\right|=2.\frac{2a\sqrt{3}}{3}=\frac{4a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 48: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $2a\sqrt{2}$. **D.** $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có:. $\left|\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\left|\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right|=\left|\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right|=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}AC$.

Mà hình vuông $ABCD$ cạnh a nên $AC=a\sqrt{2}$.

Suy ra: $\left|\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Câu 49: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|$.

A. $3a$. **B.** $\left(2+\sqrt{2}\right)a$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}a$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $AC=a\sqrt{2}$ suy ra $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right|=2\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{2}a$.

Câu 50: Cho tam giác ABC đều có cạnh $AB=5$, H là trung điểm của BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|$.

A. $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=5$.

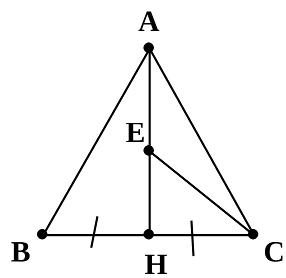
C. $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\dfrac{5\sqrt{7}}{4}$.		**D.** $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\right|=\left|2\overrightarrow{CE}\right|=2CE$ (với E là trung điểm của) AH.

Ta lại có: $AH=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ (ΔABC đều, AH là đường cao).



Trong tam giác HEC vuông tại H, có:

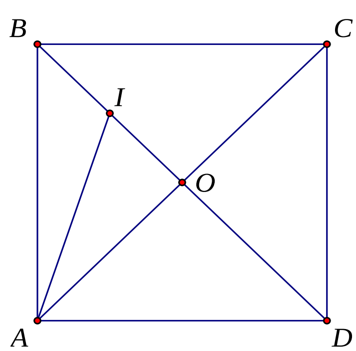
$$EC=\sqrt{CH^2+HE^2}=\sqrt{2.5^2+\left(\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{4}\Rightarrow\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=2CE=\frac{5\sqrt{7}}{2}.$$

Câu 51: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Tính $\left|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}\right|$

A. $\dfrac{a\sqrt{10}}{2}$.		**B.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.		**C.** $\dfrac{a\sqrt{10}}{4}$.		**D.** $\dfrac{5a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm BO. Ta có $\left|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}\right|=\left|2\overrightarrow{AI}\right|=2AI$.

Xét tam giác vuông AOI, ta có:

$$AI^2=AO^2+OI^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2+\left(\frac{BD}{4}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{5a^2}{8}.$$

$$\Rightarrow AI=\frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

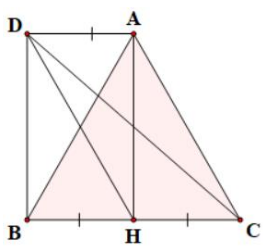
Vậy $\left|\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}\right|=2AI=\frac{a\sqrt{10}}{2}$.

Câu 52: Cho ΔABC đều cạnh a, gọi H là trung điểm của cạnh BC. Tính $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|$.

A. $\frac{\sqrt{7}a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. **D.** $\frac{a}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$. Khi đó, $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CH}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|=CD$.

Ta thấy, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HB}$ vì $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{HB}$ (do H trung điểm BC).

Suy ra, $AHBD$ là hình bình hành. Mà $AH\perp BC$ (vì ΔABC đều). Vậy $AHBD$ là hình chữ nhật.

Suy ra, $BD\perp BC$ và $BD=AH=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Áp dụng định lí Py-ta-go vào ΔDBC vuông tại B, có:

$CD^2=BD^2+BC^2=\frac{3a^2}{4}+a^2=\frac{7a^2}{4}\Rightarrow CD=\frac{a\sqrt{7}}{2}$. Vậy $\left|\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{HC}\right|=CD=\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

♦Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ và các điểm M,N,P thoả mãn

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$		
b)	$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}.$		
c)	$\overrightarrow{MP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$		
d)	Ba điểm M,N,P thẳng hàng.		

Câu 2. Cho ngũ giác $ABCDE$. Các điểm M,N,P,Q,R,S theo thứ tự là trung điểm của các đoạn EA,AB,BC,CD,MP,NQ. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ})$		
b)	$\overrightarrow{RS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{ED}.$		
c)	RS cắt ED		
d)	$RS=\frac{1}{4}ED$		

Câu 3. Cho bốn điểm A,B,C,D có M,N là trung điểm của AB,CD. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$		
b)	$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}.$		
c)	$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$		
d)	$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.$		

Câu 4. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi D là điểm đối xứng của B qua G,M là trung điểm của BC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đúng	Sai

a)	$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$		
b)	$\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$		
c)	$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$		
d)	$\overrightarrow{MD}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$		

Câu 5. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BN,CP. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
a)	G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$		
b)	$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BN}$		
c)	$\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$		
d)	$\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}.$		

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O,M là một điểm bất kỳ. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
a)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$		
b)	$\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=6\overrightarrow{AC}$		
c)	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}$		
d)	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$		

Câu 7. Cho tứ giác $OABC$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	**Đúng**	**Sai**
a)	$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}$		
b)	$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$		
c)	$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$		
d)	$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$		

Câu 8. Cho ΔABC. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,AC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$2\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$		
b)	$\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$		
c)	$\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$		
d)	$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CM}$		

Câu 9. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O, H là trực tâm tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$BD//CH$		
b)	$CD//BH$		
c)	$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$		
d)	$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$		

Câu 10. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lvert\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\rvert=\lvert\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}\rvert$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường tròn tâm B, bán kính $R=CG$.		
b)	$2\lvert\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\rvert=3\lvert\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\rvert$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GI (với I là trung điểm của BC).		
c)	$\lvert\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\rvert=2028$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường tròn tâm G, bán kính $R=626$.		
d)	$\lvert 3\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{AC}\rvert=\lvert\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\rvert$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng IC với $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.		

Câu 11. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB//CD, AB=2AD=2CD, E$ là trung điểm cạnh AB. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$		
b)	$\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{CB}$		
c)	$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CE}$		

d)	$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EC}$		
e)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EB}=3\overrightarrow{DC}$		
f)	$\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})$		

Câu 12. Cho ΔABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI=3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}$ theo cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$2\overrightarrow{IC}=-3\overrightarrow{IB}$		
b)	$5\overrightarrow{JB}=3\overrightarrow{JC}$		
c)	$\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$		
d)	$\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$		

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB,CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{OP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OP}=\vec{0}$		
b)	$3\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$		
c)	Ba điểm B,P,N không thẳng hàng		
d)	Ba đường thẳng AC,BD,MN đồng quy		

Câu 14. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB,BC. Lấy hai điểm I,J sao cho: $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ và $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	M,N,J thẳng hàng.		
b)	$\overrightarrow{JM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{JN}$		
c)	J là trung điểm của BI.		
d)	Gọi E là điểm thuộc AB sao cho $\overrightarrow{AE}=\frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ thì C,E,J thẳng hàng.		

Câu 15. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD, K là trung điểm IJ, M là điểm bất kì. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$		
b)	$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{IJ}$		
c)	$\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{MK}$		
d)	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MK}$		

Câu 16. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC. Gọi G là trọng tâm, H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, AA' là đường kính của (O). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{A'C}$		
b)	$\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OM}$		
c)	$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$		
d)	$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$		

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và CD. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$		
b)	$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$		
c)	$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$		
d)	$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$		

Câu 18. Cho ΔABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI=BI$. J là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $5JB=JC$. G là trọng tâm ΔABC. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{CI}$		
b)	$\overrightarrow{AI}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$		
c)	$\overrightarrow{AJ}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$		

d)	$\overrightarrow{AG}=\frac{14}{27}\overrightarrow{AI}-\frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}$		

Câu 19. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi I,J là 2 điểm định bởi $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AB}$		
b)	$\overrightarrow{IJ}=-2\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$		
c)	$\overrightarrow{IG}=\frac{-5}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$		
d)	3 điểm I,J,G thẳng hàng.		

Câu 20. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi G là trung điểm EF. Gọi O là điểm bất kì. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$		
b)	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$		
c)	$\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$		
d)	$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$		

Câu 21. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AB},\vec{v}=\overrightarrow{AE}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AD}=\vec{u}+\vec{v}$		
b)	$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$		
c)	$\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$		
d)	$\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$		

Câu 22. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm BC, B' là điểm đối xứng của B qua G. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tứ giác $AGCB'$ là hình bình hành		
b)	$\overrightarrow{CB'} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$		
c)	$\overrightarrow{AB'} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$		
d)	$\overrightarrow{MB'} = \frac{-5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$		

Câu 23. Cho ΔABC. Gọi I là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $IB = 3IC$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{IC}$ ngược hướng		
b)	$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$		
c)	Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$, $KB = 3KA$. $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$		
d)	$\overrightarrow{BC} = -\frac{20}{17}\overrightarrow{AI} - \frac{48}{17}\overrightarrow{JK}$		

Câu 24. Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{AC}$		
b)	Hai vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương		
c)	M thuộc đường thẳng AC		
d)	Hai đường thẳng MN và AC song song		

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ và các điểm M, N, P thoả mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

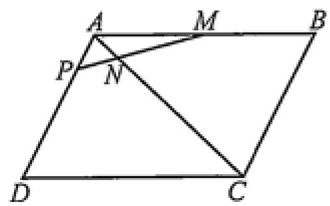
b) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

c) $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

d) Ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng



Ta có: $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB})=\frac{1}{6}\cdot 4\cdot\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}$ cùng phương.

Vậy ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Câu 2. Cho ngũ giác $ABCDE$. Các điểm M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các đoạn EA, AB, BC, CD, MP, NQ. Khi đó:

a) $\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ})$

b) $\overrightarrow{RS}=\frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$.

c) RS cắt ED

d) $RS=\frac{1}{4}ED$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

Ta có : $\overrightarrow{RS}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ})=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{4}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BD})=\frac{1}{4}\overrightarrow{ED}.$

Vậy $RS//ED$ và $RS=\frac{1}{4}ED$.

Câu 3. Cho bốn điểm A,B,C,D có M,N là trung điểm của AB,CD. Khi đó:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}.$

c) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}$

d) $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Do M và N là trung điểm của AB,CD nên ta có các đẳng thúc:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0},\quad \overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}.$

Ta lại có $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}\end{cases}$

Cộng hai đẳng thức trên vế theo vế, ta chứng minh được $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi D là điểm đối xứng của B qua G,M là trung điểm của BC. Khi đó:

a) $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}$

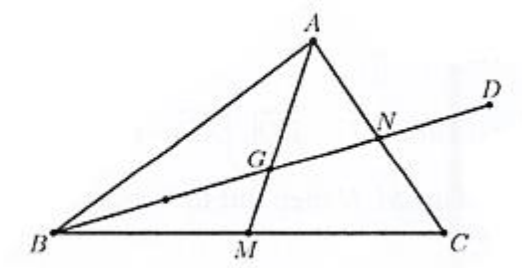
b) $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{MD}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng



Ta có: $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$

Ta có: $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GD}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN})$

$=-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}.$

Câu 5. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BN, CP. Khi đó:

a) G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BN}$

c) $\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

d) $\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}.$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có : $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}$

Khi đó:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{GB}+(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$

$=2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=-2\cdot\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

$=-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP};\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CP}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}.$

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O, M là một điểm bất kỳ. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=6\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MO}$

d) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Ta có: $\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+5\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+5\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

$=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}$

$=4\overrightarrow{MO}+\underbrace{(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})}_{0}+\underbrace{(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})}_{\vec{0}}=4\overrightarrow{MO}.$

Câu 7. Cho tứ giác $OABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$;

c) $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$;

d) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Ta có: $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$.

Câu 8. Cho ΔABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Khi đó:

a) $2\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$

b) $\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$

c) $\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}\overrightarrow{CM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CM}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Ta có: $-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}-\frac{4}{3}\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})-\frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC})+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}.$

Ta có: $-\frac{4}{3}\overrightarrow{CM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$

Ta có:

$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}$.

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BN}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CM}$.

Câu 9. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O, H là trực tâm tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O. Khi đó:

a) $BD//CH$

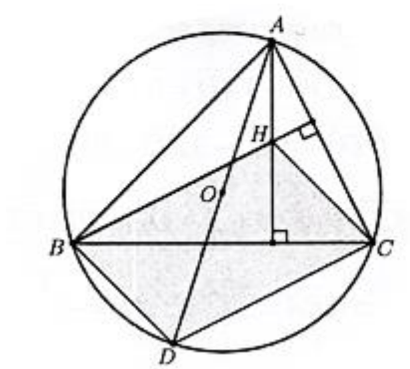
b) $CD//BH$

a) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HO}$;

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OH}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai



Xét tam giác ABD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $AB \perp BD$; mặt khác $AB \perp CH$ nên $BD//CH$ (1).

Tương tự, tam giác ACD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $AC \perp CD$; mặt khác $AC \perp BH$ nên $CD//BH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BDCH$ là hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HD}=2\overrightarrow{HO}$ (vì O là trung điểm AD).

Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HC}$

$=3\overrightarrow{OH}+(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})=3\overrightarrow{OH}+2\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{OH}$.

Câu 10. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Khi đó:

a) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}|$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường tròn tâm B, bán kính $R=CG$.

b) $2|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=3|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GI (với I là trung điểm của BC).

c) $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=2028$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường tròn tâm G, bán kính $R=626$.

d) $|3\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}|$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng IC với $\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Lời giải

a) Ta có: $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}|\Leftrightarrow|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{BM}|$

$\Leftrightarrow|3\overrightarrow{MG}-3\overrightarrow{MC}|=BM\Leftrightarrow|3(\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MC})|=BM\Leftrightarrow 3|\overrightarrow{CG}|=BM\Leftrightarrow BM=3CG$.

Nhận xét: Ba điểm B,C,G cố định. Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm B, bán kính $R=3CG$.

b) Ta có: $2|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=3|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|\Leftrightarrow 2|3\overrightarrow{MG}|=3|2\overrightarrow{MI}|$

(với I là trung điểm của BC).

$\Leftrightarrow 6MG=6MI\Leftrightarrow MG=MI$.

Nhận xét: Hai điểm G,I cố định. Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GI.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC nên G cố định.

Ta có: $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=2028\Leftrightarrow|3\overrightarrow{MG}|=2028\Leftrightarrow 3MG=2028\Leftrightarrow MG=676$.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G, bán kính $R=676$.

d) Ta có: $3\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{AC}=3(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AC})=3\overrightarrow{CM}$ (1).

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

Suy ra I là điểm cố định. Khi đó:

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=3\overrightarrow{MI}+(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB})=3\overrightarrow{MI}+\vec{0}=3\overrightarrow{MI}$ (2).

Thay (1) và (2) vào hệ thức $|3\overrightarrow{AM}-3\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}|$, ta được:

$|3\overrightarrow{CM}|=|3\overrightarrow{MI}|\Leftrightarrow 3CM=3MI \Leftrightarrow MC=MI$.

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng IC.

Câu 11. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB//CD, AB=2AD=2CD, E$ là trung điểm cạnh AB. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{DE}=-\overrightarrow{CB}$;

c) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CE}$;

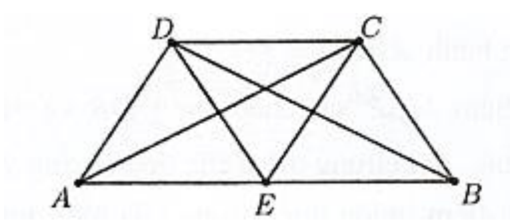
d) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{EC}$;

e) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EB}=3\overrightarrow{DC}$;

f) $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB})$.

Lời giải

a) Đúng	**b) Sai**	**c) Đúng**	**d) Đúng**
e) Đúng	**f) Đúng**		



Ta có: $AE=CD=\frac{1}{2}AB, AE//CD$ nên $AECD$ là hình bình hành (*).

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $BCDE$ là hình bình hành (**).

a) Mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề sai (do (**)).

c) Mệnh đề đúng (tính chất trung điểm).

d) Mệnh đề đúng (do (*)).

e) Mệnh đề đúng. Vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EB}=2\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EB}=3\overrightarrow{EB}=3\overrightarrow{DC}$.

f) Mệnh đề đúng (tính chất trung điểm).

Câu 12. Cho ΔABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI=3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB=2JC$. Phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}$ theo cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Khi đó:

a) $2\overrightarrow{IC}=-3\overrightarrow{IB}$

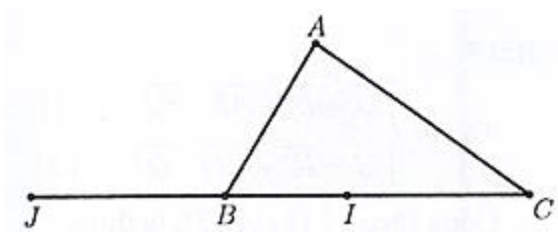
b) $5\overrightarrow{JB}=3\overrightarrow{JC}$

c) $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng



Theo giả thiết, ta có: $2\overrightarrow{IC}=-3\overrightarrow{IB}(1),5\overrightarrow{JB}=2\overrightarrow{JC}(2)$.

Từ (1) ta được: $2\overrightarrow{IC}=-3\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI})=-3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI})$ $\Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

.

Từ (2) ta được: $5\overrightarrow{JB}=2\overrightarrow{JC}\Leftrightarrow 5(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AJ})=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AJ})$ $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AJ}=5\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\Rightarrow \overrightarrow{AJ}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của AB,CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{OP}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$. Khi đó:

a) $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OP}=\vec{0}$

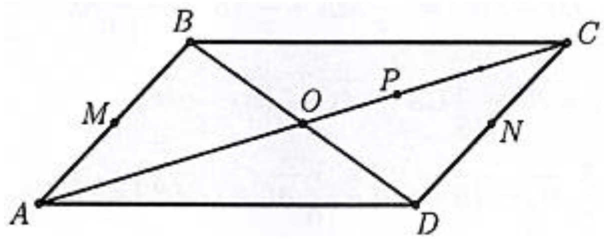
b) $3\overrightarrow{AP}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

c) Ba điểm B,P,N không thẳng hàng

d) Ba đường thẳng AC,BD,MN đồng quy

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng



Ta có: $\overrightarrow{OA} = -3\overrightarrow{OP} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OP} = \vec{0}$.

Khi đó: $3\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AC} = 3(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP}) - 2.2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OP} = \vec{0}$.

Ta có: $\overrightarrow{OP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \Rightarrow P$ là trọng tâm của tam giác BCD, do vậy trung tuyến BN của tam giác BCD đi qua trọng tâm P đó. Vậy ba điểm B, P, N thẳng hàng.

Nhận xét : AC và BD cắt nhau tại tâm O là trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác : $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$.

Do đó O là trung điểm của MN hay AC, BD, MN đồng quy tại O.

Câu 14. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Lấy hai điểm I, J sao cho: $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ và $2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Khi đó:

a) M, N, J thẳng hàng.

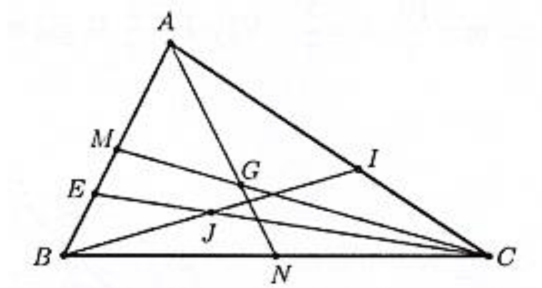
b) $\overrightarrow{JM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{JN}$

c) J là trung điểm của BI.

d) Gọi E là điểm thuộc AB sao cho $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ thì C, E, J thẳng hàng.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng



a) Ta có: $2\overrightarrow{JA}+5\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=2(\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB})+3(\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC})=4\overrightarrow{JM}+6\overrightarrow{JN}=\vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{JM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{JN}$. Do đó J,M,N thẳng hàng.

Điểm J thuộc đoạn MN và thỏa mãn $JM=\frac{3}{2}JN$.

b) Ta có: $\overrightarrow{JM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{JN}\Leftrightarrow \overrightarrow{JM}=-\frac{3}{2}(\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{MN})$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\overrightarrow{JM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow \overrightarrow{JM}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{MN}$

$2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC}+2\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{CI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}.$

Khi đó: $\overrightarrow{JB}=\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{MB}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{MN}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BC}\quad+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{BC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}-\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$$=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-2\left(-\frac{3}{10}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=-2\overrightarrow{JB}(\text{ do }(1)).$$

Vậy J là trung điểm của BI.

c) $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{NJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$

$=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}=-\frac{7}{10}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Mặt khác : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{AB}$.

Để C,E, J thẳng hàng thì :

$\exists m \in \mathbb{R}, \overrightarrow{CE} = m \cdot \overrightarrow{CJ} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB} = -\frac{7m}{10}\overrightarrow{AC} + \frac{m}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -\frac{7m}{10} \\ k = \frac{m}{2} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{10}{7}, k = \frac{5}{7}. \Rightarrow k = \frac{5}{7}.$$

Câu 15. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD, K là trung điểm IJ, M là điểm bất kì. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$

c) $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MK}$

d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MK}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$

$= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + 2\overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) = 2\overrightarrow{IJ}$

b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$

$= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + 2\overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JC}) = 2\overrightarrow{IJ}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MJ} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = 4\overrightarrow{MK}$

Câu 16. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC. Gọi G là trọng tâm, H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, AA' là đường kính của (O). Khi đó:

a) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$

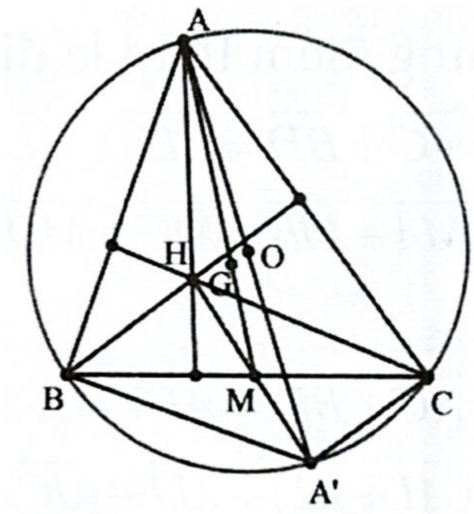
b) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$

c) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HO}$

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai



a) Do tứ giác $BHCA'$ có $BH // A'C(\perp AC)$ và $CH // BA'(\perp AB)$ nên $BHCA'$ là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$

b) Lại có M là trung điểm của đường chéo BC nên M là trung điểm của HA' hay H, M, A' thẳng hàng.

Do OM là đường trung bình của $\Delta AHA'$ nên $AH = 2OM$, mà $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

c) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA}$ (Tứ giác $AHCA'$ là hình bình hành $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$

$= 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH}$.

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và CD. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

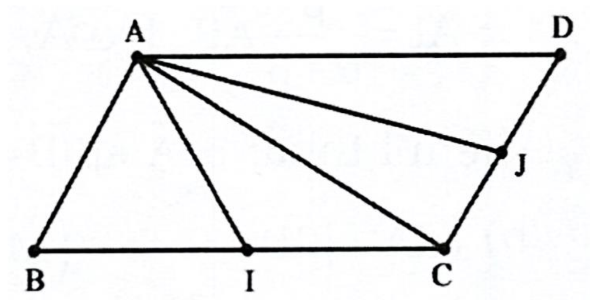
b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$

$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$

Câu 18. Cho ΔABC. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = BI$. J là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $5JB = JC$. G là trọng tâm ΔABC. Khi đó:

a) $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CI}$

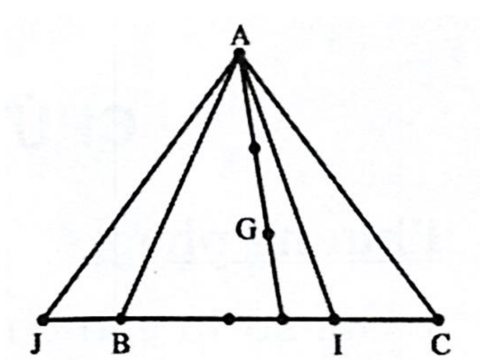
b) $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AG} = \frac{14}{27}\overrightarrow{AI} - \frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng



a) Vì $BI = 2CI$ và $\overrightarrow{BI}$ và $\overrightarrow{CI}$ cùng hướng

$\Rightarrow \overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Vì $5JB = JC$ và $\overrightarrow{JB}$ và $\overrightarrow{JC}$ cùng hướng

$\Rightarrow 5\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

b) Gọi M là trung điểm cạnh BC :

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AJ} \\ -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AJ} \\ -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 8\overrightarrow{AJ} \\ -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AI} + \frac{8}{9}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AJ} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AI} + \frac{8}{9}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = 5\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{AI} - 4\overrightarrow{AJ}\right) + \frac{8}{9}\overrightarrow{AJ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AI} + \frac{8}{9}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{13}{9}\overrightarrow{AI} - 20\overrightarrow{AJ} \end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{AI} + \frac{8}{9}\overrightarrow{AJ}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{13}{9}\overrightarrow{AI} - \frac{20}{9}\overrightarrow{AJ}\right)$

$= \frac{1}{27}\overrightarrow{AI} + \frac{8}{27}\overrightarrow{AJ} + \frac{13}{27}\overrightarrow{AI} - \frac{20}{3}\overrightarrow{AJ} = \frac{14}{27}\overrightarrow{AI} - \frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}$.

Câu 19. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi I, J là 2 điểm định bởi $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$.Khi đó:

a) $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB}$

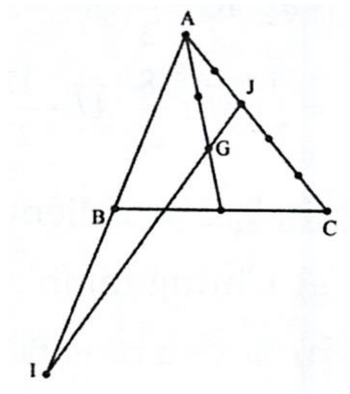
b) $\overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{IG} = \frac{-5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

d) 3 điểm I, J, G thẳng hàng.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng



$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) \Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$

$3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AJ} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}) = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

Gọi M là trung điểm BC

$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - 2\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \frac{-5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Xét hệ:

$$\begin{cases} \overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{IG} = \frac{-5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \\ \frac{3}{5}\overrightarrow{IG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{6}{5}\overrightarrow{IG}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{IG}$ cùng phương $\Rightarrow I, J, G$ thẳng hàng.

Câu 20. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi G là trung điểm EF. Gọi O là điểm bất kì. Khi đó:

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

c) $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

d) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GF}=2(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF})=\vec{O}$.

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AF}=2(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=4\overrightarrow{AG}$.

c) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FC})\ =\frac{1}{2}(2\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{FC})=\overrightarrow{EF}$

d) $\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{4}(2\overrightarrow{OE}+2\overrightarrow{OF})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF})=\frac{1}{2}\cdot 2\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OG}$

Câu 21. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Đặt $\vec{u}=\overrightarrow{AB},\vec{v}=\overrightarrow{AE}$. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AD}=\vec{u}+\vec{v}$

b) $\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$

c) $\overrightarrow{AF}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$

d) $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

a) Gọi O là tâm lục giác đều $ABCDEF$

Tứ giác $ABDE1$ hình chữ nhật $\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{u}+\vec{v}$.

b) Tứ giác $ABCO$ là hình thoi

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{3}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$$

c) $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}$ (tứ giác $ABOF$ là hình thoi nên $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{BA}$)

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})-\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\vec{u}+\frac{1}{2}\vec{v}$.

d) Tứ giác $AOEF$ là hình thoi nên

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{AO}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=-\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{v}$.

Câu 22. Cho ΔABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm BC, B' là điểm đối xứng của B qua G. Khi đó:

a) Tứ giác $AGCB'$ là hình bình hành

b) $\overrightarrow{CB'}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

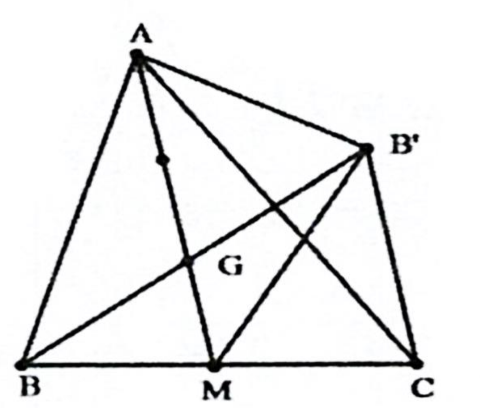
c) $\overrightarrow{AB'}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

d) $\overrightarrow{MB'}=\frac{-5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

Gọi M là trung điểm BC. Tứ giác $AGCB'$ là hình bình hành (có 2 đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).



$\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{GA}=-\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Gọi M là trung điểm AB. Tứ giác $AGCB'$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{MB'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AM} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{-5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

Câu 23. Cho ΔABC. Gọi I là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $IB = 3IC$.Khi đó:

a) $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{IC}$ ngược hướng

b) $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

c) Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$, $KB = 3KA$.

$\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{BC} = -\frac{20}{17}\overrightarrow{AI} - \frac{48}{17}\overrightarrow{JK}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

Ta có $IB = 3IC$ và $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{IC}$ ngược hướng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI} = -3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}); 4\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

Ta có: $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AI} \\ 3\overrightarrow{AB} - 8\overrightarrow{AC} = 12\overrightarrow{JK} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{32}{17}\overrightarrow{AI} + \frac{36}{17}\overrightarrow{JK} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{12}{17}\overrightarrow{AI} - \frac{12}{17}\overrightarrow{JK} \end{cases}$

Vậy: $\overrightarrow{BC} = \frac{12}{17}AI - \frac{12}{17}JK - AI - \frac{36}{17}JK \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = -\frac{20}{17}\overrightarrow{AI} - \frac{48}{17}\overrightarrow{JK}$

Câu 24. Cho tam giác ABC. Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức:

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Khi đó:

a) $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{AC}$

b) Hai vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}$ cùng phương

c) M thuộc đường thẳng AC

d) Hai đường thẳng MN và AC song song.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-3\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MN}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}$.

Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}$ cùng phương (1).

Xét: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}$. Do đó M là một đỉnh của hình bình hành $ABCM$ hay M không thuộc đường thẳng $AC(2)$

Từ (1) và (2) suy ra hai đường thẳng MN và AC song song.

⬩Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho ΔABC vuông tại B có $\hat{A}=30^\circ, AB=a$. Gọi I là trung điểm của AC. Hãy tính: $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$

Trả lời:……………………..

Câu 2. Cho ΔABC vuông tại B có $\hat{A}=30^\circ, AB=a$. Gọi I là trung điểm của AC. Hãy tính: $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$.

Trả lời:……………………..

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I,J theo thứ tự là trung điểm của AB,CD và $IJ=\frac{5}{4}$.

Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của BC,AC. Tính $|\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CI}|$?

Trả lời:……………………..

Câu 4. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý, G là trọng tâm tam giác ABC. Điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$. Đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định. Khi đó điểm cố định đó là điểm nào?

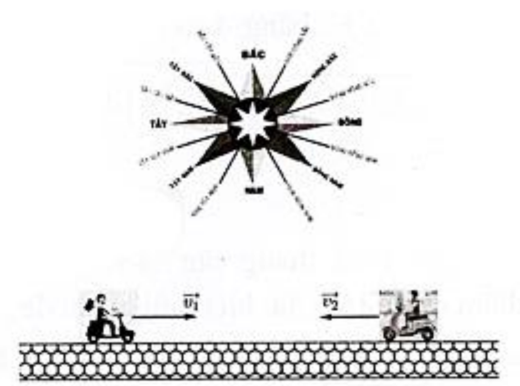
Trả lời:……………………

Câu 5. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý không thuộc các đường thẳng AB, BC, AC. Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các trung điểm J, K, I của cạnh BC, AC, AB. Biết ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm (đặt điểm đó là N).

Khi đó MN luôn đi qua một điểm cố định khi M di động. Vậy điểm cố định đó là điểm nào?

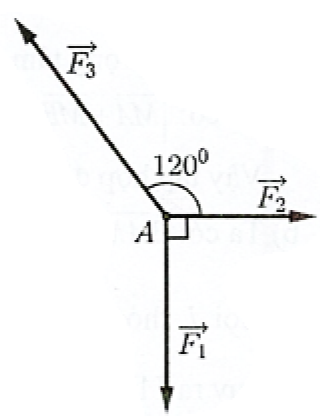
Trả lời:……………………

Câu 6. Một người đi xe máy từ Tây sang hướng Đông với vận tốc 40 km/h được biểu thị bởi vectơ $\overrightarrow{v_1}$, một người khác đi xe máy từ hướng Đông sang hướng Tây với vận tốc 60 km/h được biểu thị bởi vectơ $\overrightarrow{v_2}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{v_2}$ theo $\overrightarrow{v_1}$.



Trả lời:……………………

Câu 7. Một chất điểm A chịu tác dụng của ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ như hình vẽ biết chất điểm A đang ở trạng thái cân bằng. Tính độ lớn của các lực $\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ biết rằng lực $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn 12N



Trả lời:……………………

Câu 8. Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Trả lời:……………………

Câu 9. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD. Biết $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{IJ}$, khi đó $k = ?$

Trả lời:……………………

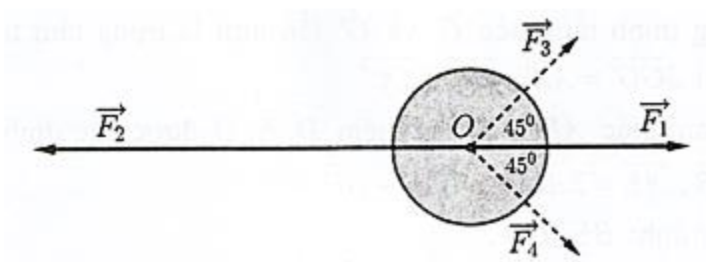
Câu 10. Cho ΔABC có trọng tâm G. Các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}, \vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Trả lời:……………………

Câu 11. Nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$ thì $k\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$, khi đó $k = ?$

Trả lời:……………………

Câu 12. Một vật đang ở vị trí O chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$, trong đó độ lớn lực $\vec{F_2}$ lớn gấp đôi độ lớn lực $\vec{F_1}$. Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực $\vec{F_3}, \vec{F_4}$ có phương hợp với lực $\vec{F_1}$ các góc 45° như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng $20N$. Tìm độ lớn của mỗi lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$.



Trả lời:……………………

Câu 13. Cho ΔABC. Gọi M là điểm thỏa $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Trả lời:……………………

Câu 14. Cho ΔABC. Gọi M là điểm trên đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Trả lời:……………………

Câu 15. Cho 2 điểm phân biệt A và B và hai số α và β với $\alpha + \beta \neq 0$.

Khi đó tồn tại bao nhiêu điểm I thỏa $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Trả lời:……………………

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F là 2 điểm thỏa $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$. Khi đó $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AF}$. Vậy $k=?$

Trả lời:……………………

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Lấy các điểm I, J sao cho $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0}; \overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{IO}$, vậy $k=?$

Trả lời:……………………

Câu 18. Cho ΔABC. Gọi I, J là 2 điêm thỏa $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}, \overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BJ}$. Vậy $k=?$

Trả lời:……………………

Câu 19. Cho 4 điểm *A, B, C, D*. Gọi *I, S* lần lượt là trung điểm của BC và CD. Khi đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{DA}=k\overrightarrow{DB}$. Vậy $k=?$

Trả lời:……………………

Câu 20. Cho ΔABC. Gọi J là điểm trên cạnh AC sao cho $JA=\frac{2}{3}JC$. Tính $\overrightarrow{BJ}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{BJ}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Trả lời:……………………

Câu 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Tính vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$.

Trả lời:……………………

Câu 22. Cho ΔABC có điểm D, I thỏa $3\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AI}$. Vậy $k=?$

Trả lời:……………………

Câu 23. Cho tam giác ABC có hai trung tuyến AK và BM. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.

Trả lời:……………………

Câu 24. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Cho điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=6$, khi đó điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:……………………

Câu 25. Cho tam giác ABC. Cho điểm N thỏa mãn đẳng thức: $|3\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}|=|\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NA}|$, khi đó điểm N thuộc đường tròn có đường kính bằng độ dài cạnh nào của tam giác ABC?

Trả lời:……………………

Câu 26. Cho tam giác ABC, có trọng tâm G, I là trung điểm của BC. Biết điểm M thỏa mãn $2|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=3|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$. Tìm tập hợp điểm M

Trả lời:…………………

Câu 27. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM = BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Khi đó $\overrightarrow{DB}=k\overrightarrow{QB}$. Vậy $k=?$

Trả lời:…………………

Câu 28. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $2BA=5BM$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi N là điểm trên AC sao cho $AN=xAC$. Tìm x, biết ba điểm M, N, G thẳng hàng.

Trả lời:……………………

Câu 29. Cho tứ giác $ABCD$. Xác định điểm E thoả mãn $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+3\overrightarrow{ED}=\vec{0}$.

Trả lời:……………………..

Câu 30. Cho tam giác ABC. Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$

Trả lời:……………………..

Câu 31. Cho tứ giác $ABCD$. Điểm M trên đường thẳng CD sao cho $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó điểm M là hình chiếu của điểm nào?

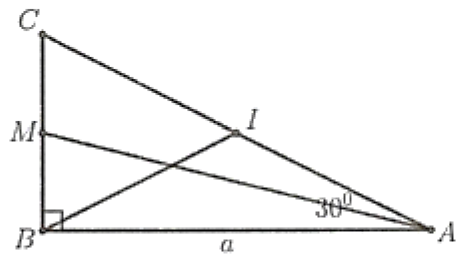
Trả lời:……………………..

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho ΔABC vuông tại B có $\hat{A}=30^\circ, AB=a$. Gọi I là trung điểm của AC. Hãy tính: $|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}|$

Trả lời: $\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

Lời giải



Xét ΔABC vuông tại B: $\tan A = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB \cdot \tan A = a\tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

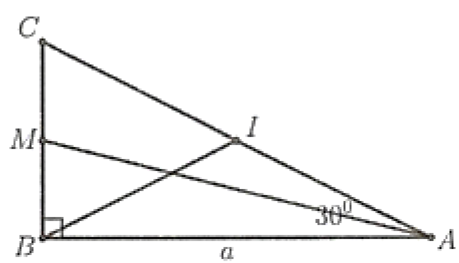
$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Ta có: $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |2\overrightarrow{BI}| = 2|\overrightarrow{BI}| = 2BI = 2 \cdot \dfrac{AC}{2} = AC = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2. Cho ΔABC vuông tại B có $\hat{A} = 30^\circ, AB = a$. Gọi I là trung điểm của AC. Hãy tính: $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$.

Trả lời: $\dfrac{a\sqrt{39}}{3}$

Lời giải



Xét ΔABC vuông tại B: $\tan A = \dfrac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB \cdot \tan A = a\tan 30^\circ = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Gọi M là trung điểm của BC, ta có:

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2}$$

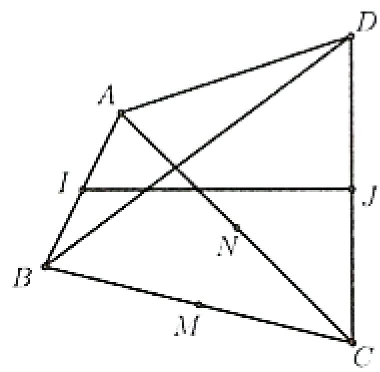
$$= 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{3}.$$

Câu 3. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và $IJ = \frac{5}{4}$.

Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BC, AC. Tính $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CI}|$?

Trả lời: 0

Lời giải



Ta có: $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (1), $2\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ (2), $2\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$ (3). Cộng theo vế (1), (2), (3):

$2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CI}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) = \vec{0}.$

Suy ra: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$. Do vậy $|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CI}| = 0$.

Câu 4. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý, G là trọng tâm tam giác ABC. Điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$. Đường thẳng MN luôn qua một điểm cố định. Khi đó điểm cố định đó là điểm nào?

Trả lời: trung điểm AG

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MG}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 6\overrightarrow{MI}$

(với I là trung điểm AG).

Vậy hai vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MI}$ cùng phương nên ba điểm M, N, I thẳng hàng.

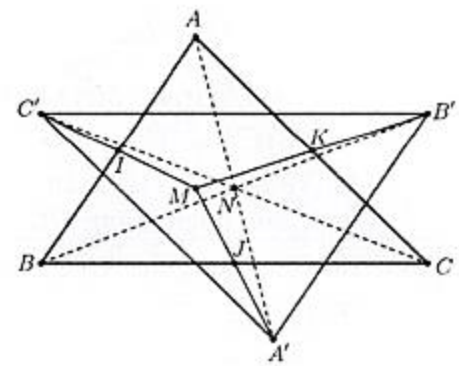
Do đó đường thẳng MN luôn qua điểm I cố định.

Câu 5. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý không thuộc các đường thẳng AB, BC, AC. Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của M qua các trung điểm J, K, I của cạnh BC, AC, AB. Biết ba đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy tại một điểm (đặt điểm đó là N).

Khi đó MN luôn đi qua một điểm cố định khi M di động. Vậy điểm cố định đó là điểm nào?

Trả lời: trọng tâm tam giác ABC

Lời giải



Xét tứ giác $MBA'C$ có hai đường chéo $BC, A'M$ cắt nhau tại trung điểm J của mỗi đường nên $MBA'C$ là hình bình hành, suy ra: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA'}$ (1); mặt khác $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA'}=2\overrightarrow{MN}$ (2).

Cộng theo vế (1) và (2):

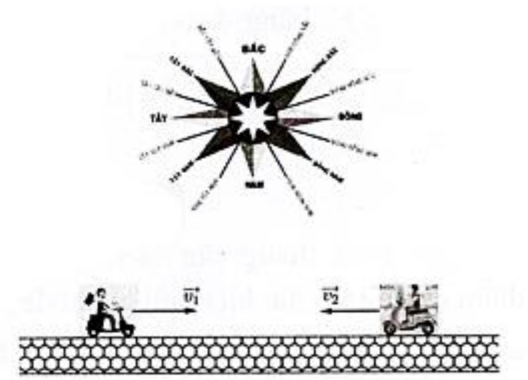
$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{MA'}+2\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MN}$ (3).

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $2\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{MG} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$.

Vậy MN luôn đi qua điểm G cố định khi M di động.

Câu 6. Một người đi xe máy từ Tây sang hướng Đông với vận tốc 40 km/h được biểu thị bởi vectơ $\overrightarrow{v_1}$, một người khác đi xe máy từ hướng Đông sang hướng Tây với vận tốc 60 km/h được biểu thị bởi vectơ $\overrightarrow{v_2}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{v_2}$ theo $\overrightarrow{v_1}$.



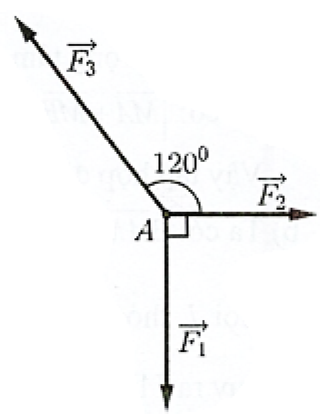
Trả lời: $\overrightarrow{v_2} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{v_1}$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{v_2}$ ngược hướng với $\overrightarrow{v_1}$ và có độ lớn bằng $\frac{60}{40} = \frac{3}{2}$ lần độ lớn vectơ $\overrightarrow{v_1}$.

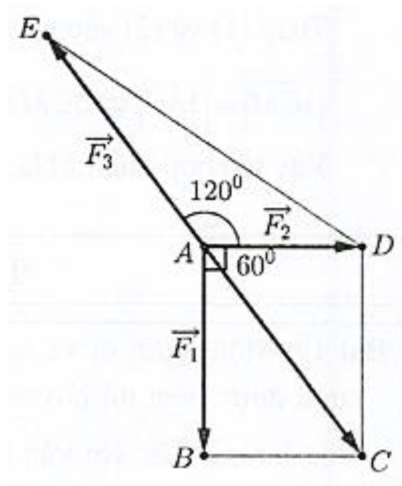
Vì vậy $\overrightarrow{v_2} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{v_1}$.

Câu 7. Một chất điểm A chịu tác dụng của ba lực $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ như hình vẽ biết chất điểm A đang ở trạng thái cân bằng. Tính độ lớn của các lực $\overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ biết rằng lực $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn 12N



Trả lời: $8\sqrt{3}\,N$

Lời giải



Đặt $\vec{F_1} = \overrightarrow{AB}, \vec{F_2} = \overrightarrow{AD}, \vec{F_3} = \overrightarrow{AE}$. Vẽ hình chữ nhật $ABCD$. Từ giả thiết:

$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = \vec{0}$ (vật ở trạng tháng cân bằng)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AE}.$

Ta có $AB = 12, CAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow \overrightarrow{BAC} = 30^\circ.$

Tam giác ABC vuông tại B nên: $BC = AB\tan 30^\circ = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} = AD;$

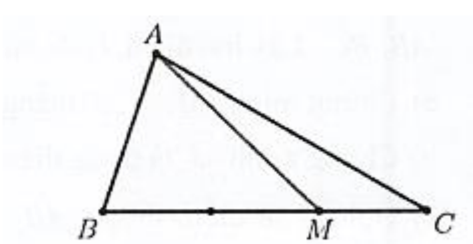
Độ lớn lực $\vec{F_2}$ bằng $4\sqrt{3}\,N$.

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + (4\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{3}$. Do vậy $\left|\vec{F_3}\right| = |\overrightarrow{AE}| = AC = 8\sqrt{3}\,N$.

Câu 8. Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Trả lời: $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải



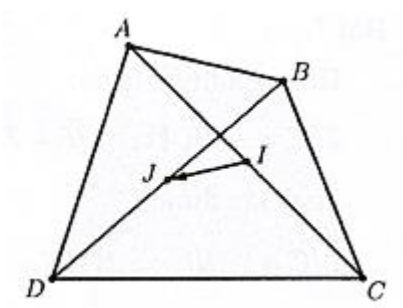
Ta có

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$
$$= \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

Câu 9. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD. Biết $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{IJ}$, khi đó $k = ?$

Trả lời: $k = 2$

Lời giải



Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \, (1) \\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ} \, (2) \end{cases}$

Cộng theo vế (1) và (2), ta được:

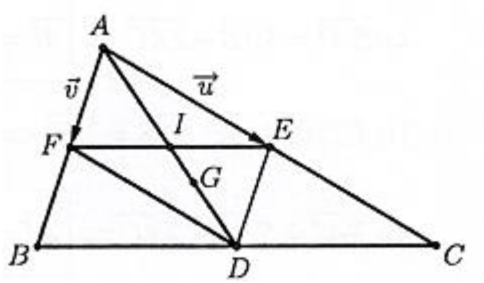
$$2\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DJ})$$
$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

Suy ra $k = 2$

Câu 10. Cho ΔABC có trọng tâm G. Các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AE}, \vec{v} = \overrightarrow{AF}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AI}$ theo hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$.

Trả lời: $\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

Lời giải



Theo tính chất đường trung bình thì

$$\begin{cases} DE // AB \\ DF // AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} DE // AF \\ DF // AE \end{cases}$$

Suy ra: $AEDF$ là hình bình hành $\Rightarrow AD = AE + AF$.

Từ giả thiết ta có I là tâm của hình bình hành $AEDF$.

Khi đó: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$;

Câu 11. Nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$ thì $k\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$, khi đó $k = ?$

Trả lời: $k = 3$

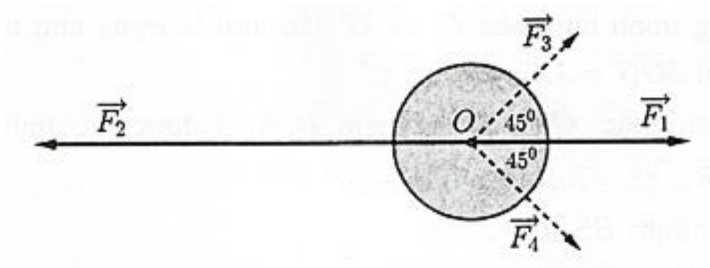
Lời giải

Ta có

$$\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}$$
$$= 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + \left(\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}\right) = 3\overrightarrow{GG'} + \vec{0} + \vec{0} = 3\overrightarrow{GG'}.$$

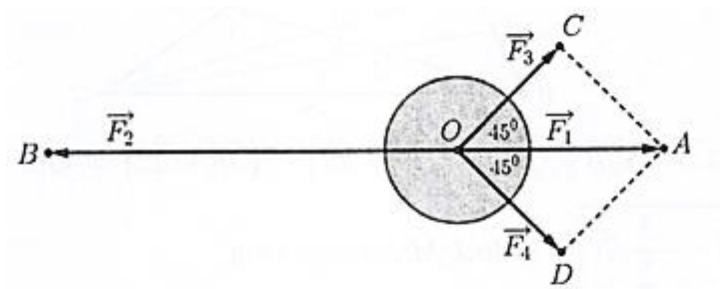
Suy ra $k = 3$

Câu 12. Một vật đang ở vị trí O chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là $\vec{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$, trong đó độ lớn lực $\vec{F_2}$ lớn gấp đôi độ lớn lực $\vec{F_1}$. Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực $\vec{F_3}, \vec{F_4}$ có phương hợp với lực $\vec{F_1}$ các góc 45° như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng $20N$. Tìm độ lớn của mỗi lực $\vec{F_1}, \overrightarrow{F_2}$.



Trả lời: $40\sqrt{2}\,N$

Lời giải



Ta có : $\vec{F_2} = -2\vec{F_1}$. Để vật trở về trạng thái cân bằng thì hợp lực bằng $\vec{0}$.

$\Leftrightarrow \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F_1} - 2\vec{F_1} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{F_1}$.

Đặt $\vec{F_1} = \overrightarrow{OA}, \vec{F_2} = \overrightarrow{OB}, \vec{F_3} = \overrightarrow{OC}, \vec{F_4} = \overrightarrow{OD}$.

Ta có: $\vec{F_3} + \vec{F_4} = \vec{F_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}$. Do đó $OCAD$ là hình bình hành.

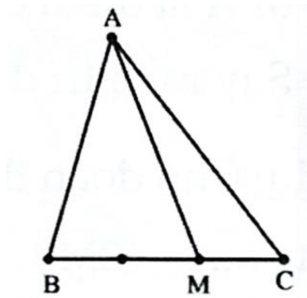
Mặt khác: $OC = OD = 20$ và $COD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ nên $OCAD$ là hình vuông. Khi đó:

$\left|\vec{F_1}\right| = OA = 20\sqrt{2}\,N, \left|\vec{F_2}\right| = 2\left|\vec{F_1}\right| = 40\sqrt{2}\,N$.

Câu 13. Cho ΔABC. Gọi M là điểm thỏa $\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Trả lời: $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải



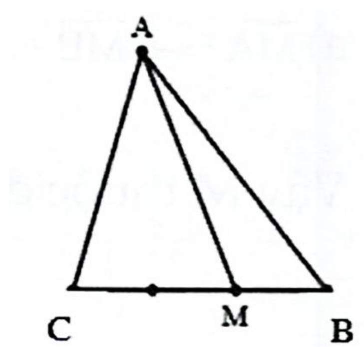
$\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 14. Cho ΔABC. Gọi M là điểm trên đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Phân tích $\overrightarrow{AM}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Trả lời: $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải



Cách 1: $MC=2MB, \overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$ ngược hướng nên

$\overrightarrow{MC}=-2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Cách 2: $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 15. Cho 2 điểm phân biệt A và B và hai số α và β với $\alpha+\beta\neq 0$.

Khi đó tồn tại bao nhiêu điểm I thỏa $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Trả lời: 1

Lời giải

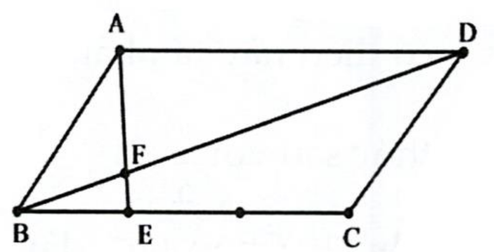
$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow -\alpha\overrightarrow{AI}+\beta(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI})=\vec{0}\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{AI}=\beta\overrightarrow{AB}\ \Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

Do A,B cố định, $\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ không đổi nên tồn tại duy nhất điểm I thỏa: $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E và F là 2 điểm thỏa $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BF}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BD}$. Khi đó $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AF}$. Vậy $k=?$

Trả lời: $\dfrac{4}{3}$

Lời giải



Ta phân tích $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AF}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

Xét hệ: $\begin{cases}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{AF}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\\ \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AF}$

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Lấy các điểm I, J sao cho $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0};\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{IJ}=k\overrightarrow{IO}$, vậy $k=?$

Trả lời: 4

Lời giải

$3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}-2\overrightarrow{ID}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+2(\overrightarrow{IC}-\overrightarrow{ID})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{JA}-2\overrightarrow{JB}+2\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}+2(\overrightarrow{JC}-\overrightarrow{JB})=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{IO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AD}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{IO}=-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{IJ}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6\overrightarrow{IO}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}\\ \dfrac{3}{2}\overrightarrow{IJ}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}\end{cases}\Rightarrow 6\overrightarrow{IO}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ}=4\overrightarrow{IO}$

Câu 18. Cho ΔABC. Gọi I, J là 2 điêm thỏa $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0},\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{BI}=k\overrightarrow{BJ}$. Vậy $k=?$

Trả lời: $\dfrac{3}{2}$

Lời giải

$\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow -\overrightarrow{AI}+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI})=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$

$\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$

$\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{JB}+3\overrightarrow{JC}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BJ}-2\overrightarrow{BJ}+3(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BJ})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BJ}-2\overrightarrow{BJ}+3\overrightarrow{BC}-3\overrightarrow{BJ}=\vec{0}\Leftrightarrow 6\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\Leftrightarrow 6\overrightarrow{BJ}=-4\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{BJ}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Ta có : $\begin{cases}\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{BJ}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{BI}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}\\ \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{BI}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BJ}$

Câu 19. Cho 4 điểm *A*, *B*, *C*, *D*. Gọi *I*, *S* lần lượt là trung điểm của BC và CD. Khi đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{DA}=k\overrightarrow{DB}$. Vậy $k=?$

Trả lời: $\dfrac{3}{2}$

Lời giải

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AI}$

$=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{JI}=\overrightarrow{DB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DB}$

Câu 20. Cho ΔABC. Gọi J là điểm trên cạnh AC sao cho $JA=\frac{2}{3}JC$. Tính $\overrightarrow{BJ}$ theo 2 vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$. Tính $\overrightarrow{BJ}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Trả lời: $\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

Lời giải

Cách 1. $JA=\frac{2}{3}JC \Leftrightarrow 3JA=2JC$ mà $\overrightarrow{JA}$ và $\overrightarrow{JC}$ ngược hướng

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{JA}=-2\overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BJ})+2(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BJ})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 5\overrightarrow{BJ}=3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BJ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$.

Cách 2: J thuộc cạnh AC và $JA=\frac{2}{3}JC \Rightarrow \frac{AJ}{AC}=\frac{2}{5} \Leftrightarrow AJ=\frac{2}{5}AC$

$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

Câu 21. Cho hình bình hành $ABCD$. Tính vectơ $\overrightarrow{AD}$ theo $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$.

Trả lời: $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

Lời giải

Gọi O là tâm hình bình hnh $ABCD$

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}.$

Câu 22. Cho ΔABC có điểm D, I thỏa $3\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DC},\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$. Khi đó $\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AI}$. Vậy $k=?$

Trả lời: 2

Lời giải

$\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AI}+3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI})-2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AI})=\vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AI})-2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AI}=\vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

$3\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})=2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$. Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AI}$

Câu 23. Cho tam giác ABC có hai trung tuyến AK và BM. Hãy phân tích vectơ $\overrightarrow{AB}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AK}$ và $\overrightarrow{BM}$.

Trả lời: $\frac{2}{2}(\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BM})$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AK}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BM}$ (vì $KM=\frac{1}{2}AB$)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{2}{2}(\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{BM})$

Câu 24. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của ΔABC. Cho điểm M sao cho $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=6$, khi đó điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời: 2

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG} \Rightarrow |\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=3|\overrightarrow{MG}|=3MG \Leftrightarrow MG=2$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính bằng 2.

Câu 25. Cho tam giác ABC. Cho điểm N thỏa mãn đẳng thức: $|3\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}|=|\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NA}|$, khi đó điểm N thuộc đường tròn có đường kính bằng độ dài cạnh nào của tam giác ABC?

Trả lời: AB

Lời giải

Gọi E là trung điểm của AC

$|3\overrightarrow{NA}-2\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}|=|\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NA}| \Leftrightarrow |2(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB})+\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NC}|=|\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NA}|$

$\Leftrightarrow |2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{NE}|=|\overrightarrow{AB}|\ (*)$

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{EI}$

$(*) \Leftrightarrow |2(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{NE})|=|\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{NI}|=|\overrightarrow{AB}| \Leftrightarrow NI=\dfrac{1}{2}AB$

Vậy tập hợp điểm N là đường tròn tâm I bán kính $\dfrac{AB}{2}$.

Câu 26. Cho tam giác ABC, có trọng tâm G, I là trung điểm của BC. Biết điểm M thỏa mãn $2|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=3|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$. Tìm tập hợp điểm M

Trả lời: trung trực của GI.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}$

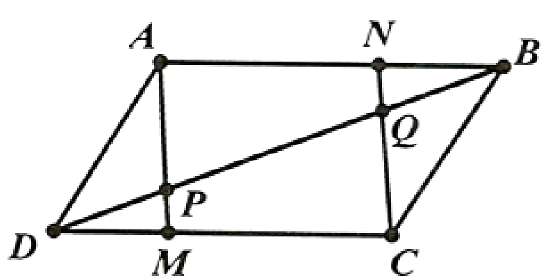
$2|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=3|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 2|3\overrightarrow{MG}|=3|2\overrightarrow{MI}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MG}|=|\overrightarrow{MI}|$

Vậy tập hợp điểm M là trung trực của GI.

Câu 27. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các đoạn thẳng DC, AB theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $DM=BN$. Gọi P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Khi đó $\overrightarrow{DB}=k\overrightarrow{QB}$. Vậy $k=?$

Trả lời: 1

Lời giải



Ta có $DM=BN \Rightarrow AN=MC$, mặt khác AN song song với MC do đó tứ giác $ANCM$ là hình bình hành

Suy ra $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{NC}$.

Xét tam giác ΔDMP và ΔBNQ ta có $DM = NB$ (giả thiết), $PDM = QBN$ (so le trong) Mặt khác $DMP = APB$ (đối đỉnh) và $APQ = NQB$ (hai góc đồng vị) suy ra $DMP = BNQ$.

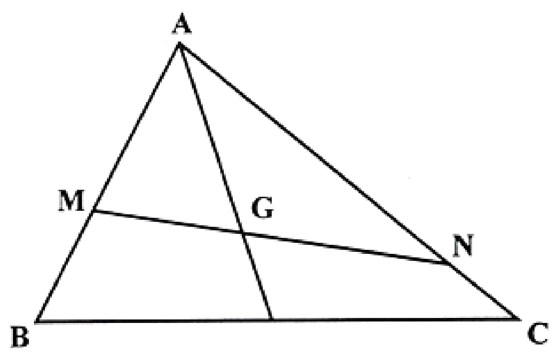
Do đó $\Delta DMP = \Delta BNQ$ (c.g.c) suy ra $DB = QB$.

Dễ thấy $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{QB}$ cùng hướng vì vậy $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{QB}$.

Câu 28. Cho tam giác ABC. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $2BA = 5BM$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Gọi N là điểm trên AC sao cho $AN = xAC$. Tìm x, biết ba điểm M, N, G thẳng hàng.

Trả lời: $x = \frac{3}{4}$

Lời giải



Ta có

$$+\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{4}{15}\overrightarrow{AB}$$

$$+\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

+ Do M, N, G thẳng hàng nên

$$\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MG} \Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{15}} \Rightarrow 3x = \frac{9}{4} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

Câu 29. Cho tứ giác $ABCD$. Xác định điểm E thoả mãn $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + 3\overrightarrow{ED} = \vec{0}$.

Trả lời: trung điểm của đoạn thẳng GD.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có: $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}=3\overrightarrow{EG}$.

Khi đó $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}+3\overrightarrow{ED}=\vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{EG}+3\overrightarrow{ED}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG}+\overrightarrow{ED}=\vec{0}$.

Vậy E là trung điểm của đoạn thẳng GD.

Câu 30. Cho tam giác ABC. Tìm điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB}$;

Lời giải

Trả lời: trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KC} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}=\vec{0}$. Suy ra K là trọng tâm của tam giác ABC.

Câu 31. Cho tứ giác $ABCD$. Điểm M trên đường thẳng CD sao cho $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó điểm M là hình chiếu của điểm nào?

Trả lời: trọng tâm của tam giác ABC.

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

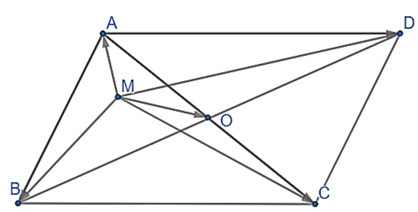
Ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG} \Rightarrow |\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|=|3\overrightarrow{MG}|=3MG$. $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi độ dài MG nhỏ nhất.

Khi điểm M chuyển động trên đường thẳng CD, độ dài MG nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của G lên đường thẳng CD.

Câu 32: Cho hình bình hành $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo, Với M là điểm tuỳ ý, chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$; b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MO}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{MO}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO}+\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=4\overrightarrow{MO}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO}+\vec{0}+\vec{0}=4\overrightarrow{MO}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MO}=4\overrightarrow{MO}$

(luôn đúng)

(vì O là giao điểm 2 đường chéo nên là trung điểm của AB, CD)

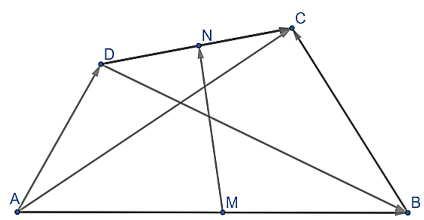
b) $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}$ (đpcm)

Câu 33: Cho tứ giác *ABCD*. Gọi *M* và *M* lần lượt là trung điểm các cạnh *AB* và *CD*. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AC}$ + $\overrightarrow{BD}$ = 2 $\overrightarrow{MN}$;   B) $\overrightarrow{AC}$ + $\overrightarrow{BD}$ = $\overrightarrow{BC}$ + $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải



$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}$

$=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}\right)+\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)$

$=\vec{0}+2\overrightarrow{MN}+\vec{0}=2\overrightarrow{MN}$

(đpcm)

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}$

$\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)=2\overrightarrow{MN}$

Mặt khác ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$

Suy ra $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

Cách 2:

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}$(đpcm)

Câu 34: Cho hai điểm phân biệt *A* và *B*. Xác định điểm *M* sao cho $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Lời giải

Cách 1:

$\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=-4\overrightarrow{MB} \Rightarrow \dfrac{MA}{MB}=\dfrac{\left|\overrightarrow{MA}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|}=\dfrac{\left|-4\overrightarrow{MB}\right|}{\left|\overrightarrow{MB}\right|}=4$ và hai vectơ $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ ngược hướng Suy ra M nằm giữa AB sao cho $\dfrac{MA}{MB}=4$

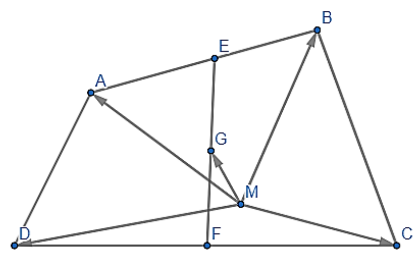
Cách 2:

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{MA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+4\overrightarrow{MB}=\vec{0}\\ \Leftrightarrow\ &5\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

Vậy $\mathrm{A}, \mathrm{M}, \mathrm{B}$ thẳng hàng, M nằm giữa A và B sao cho $MB=\dfrac{1}{5}AB$

Câu 35: Cho tứ giác ABCD. Gọi *E*, *F*, *G* lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng *AB*, *CD*, *EF*. Lấy điểm *M* tuỳ ý, chứng minh rằng $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.

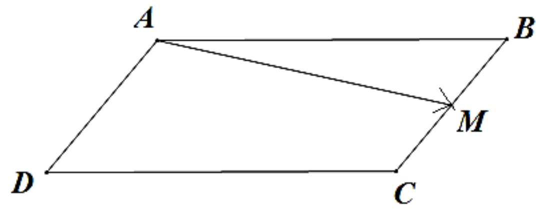
Lời giải



$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} &= \left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EA}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EB}\right)\\ &\quad +\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FC}\right)+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FD}\right)\\ &=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MM}\right)+2\left(\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}\right)\\ &\quad +\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}\right)+\left(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FD}\right)\\ &=4\overrightarrow{MG}+2\cdot\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}=4\overrightarrow{MG}\ \text{(đpcm)} \end{aligned}$$

Câu 36: Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

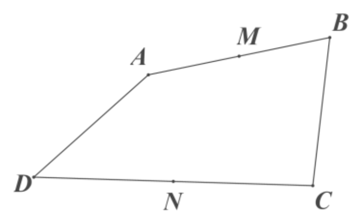
Lời giải



$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

Câu 37: Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh $AB,\ CD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Lời giải



$$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}=2\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}\right)=2\overrightarrow{MN}+\vec{0}+\vec{0}=2\overrightarrow{MN}$$

Câu 38: Cho hai điểm phân biệt A và B.

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

Lời giải

a) $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}+2\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

b) Ta có: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KA}\right)+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KB}\right)=\overrightarrow{OK}+\frac{1}{3}\overrightarrow{KA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{OK}+\frac{1}{3}\left(-2\overrightarrow{KB}\right)+\frac{2}{3}\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{OK}$$

Câu 39: Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}$.

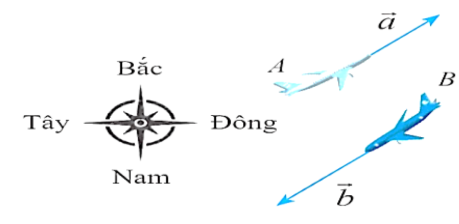
Lời giải

a)

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA}=-\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\right)$$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{OM}$

Câu 40: Máy bay *A* đang bay về hướng đông bắc với tốc độ 600 km/h. Cùng lúc đó, máy bay *B* đang bay về hướng tây nam với tốc độ 800 km/h. Biểu diễn vectơ vận tốc $\vec{b}$ của máy bay *B* theo vectơ vận tốc $\vec{a}$ của máy bay *A*.



Hình 7

Lời giải

Vecto $\vec{a},\vec{b}$ là vecto vận tốc của máy bay A và máy bay b.

Do đó $|\vec{a}|,|\vec{b}|$ lần lượt là độ lớn của vecto vận tốc tương ứng.

Ta có: $|\vec{a}|=600,|\vec{b}|=800$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\frac{800}{600}=\frac{4}{3}$$

Hai hướng Đông Bắc và Tây Nam là ngược nhau, do đó $\vec{b}=-\frac{4}{3}\vec{a}$

Câu 41: Cho hai điểm phân biệt *A* và *B*.

a) Xác định điểm *O* sao cho $\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm *M*, ta có $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MO}$.

Lời giải

$$\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{OB}=\vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{BA}$$
$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

Vậy O thuộc đoạn AB sao cho $OB=\frac{1}{4}AB$

b) Ta có:

$$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)+3\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)$$
$$=\left(\overrightarrow{MO}+3\overrightarrow{MO}\right)+\left(\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}\right)$$
$$=4\overrightarrow{MO}+\vec{0}=4\overrightarrow{MO}\cdot(\text{ đpcm})$$

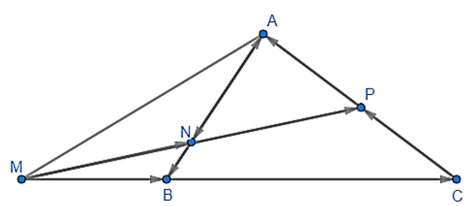
Câu 42: Cho tam giác *ABC*.

a) Xác định các điểm *M*, *N*, *P* thoả mãn: $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{PA}$.

b) Biểu thị mỗi vectơ $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MP}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$.

c) Chứng minh ba điểm *M*, *N*, *P* thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có:

+) $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng; tỉ số độ dài $\frac{BC}{MB}=2$

$\Rightarrow M$ nằm ngoài đoạn thẳng BC sao cho $MB=\frac{1}{2}BC$

+) $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{NB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=3\overrightarrow{NB}\Rightarrow 4\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{NB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow N$ thuộc đoạn thẳng AB và $NB=\frac{1}{4}AB$

+) $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{PA}\Leftrightarrow\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}=\vec{0}$

$\Rightarrow P$ là trung điểm của CA

b) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{MC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)$

$=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

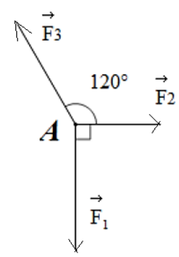
c) Ta có:

$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BA};\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

$\Rightarrow\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{MN}$

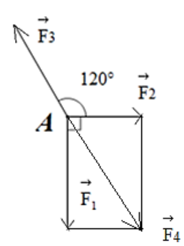
Vậy M,N,P thẳng hàng

Câu 43: Chất điểm A chịu tác động của ba lực $\overrightarrow{F_1},\ \overrightarrow{F_2},\ \overrightarrow{F_3}$ như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}$). Tính độ lớn của các lực $\overrightarrow{F_2},\ \overrightarrow{F_3}$, biết $\overrightarrow{F_1}$ có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

Lời giải



$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_4}$

$\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{F_4}=-\overrightarrow{F_3}\Rightarrow\left|-\overrightarrow{F_3}\right|=\left|\overrightarrow{F_4}\right|$

Ta có: $\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_1}\right|.\tan 30^\circ=\frac{20\sqrt{3}}{3};\left|\overrightarrow{F_4}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{F_1}\right|}{\cos 30^\circ}=\frac{40\sqrt{3}}{3}$;

Vậy $\left|\overrightarrow{F_2}\right| = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ N, $\left|\overrightarrow{F_3}\right| = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$ N.

Câu 44: Cho tam giác ABC. Các điểm D, E thuộc BC thỏa mãn $BD = DE = EC$ (Hình 62). Giả sử $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$.Biểu thị các véc tơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

Lời giải

a) Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos \widehat{BAC} = a^2\sqrt{2}\cos 45^\circ = a^2$.

b) Dễ thấy: $AC \perp BD \Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = 90^\circ \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = AC \cdot BD \cdot \cos 90^\circ = AC \cdot BD \cdot 0 = 0$.

Câu 45: Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN, G là trọng tâm của tam giác BCD.Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG}$.

b) $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$.

c) Điểm G thuộc đoạn thẳng AE và $\overrightarrow{AG} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AE}$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

Mà: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}; \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$ (do M, N là trung điểm của AB, CD) $\Rightarrow \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = 4\overrightarrow{EG} + 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = 4\overrightarrow{EG}$ (do G là trung điểm của MN)

b) Vì E là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED} = \vec{0}$

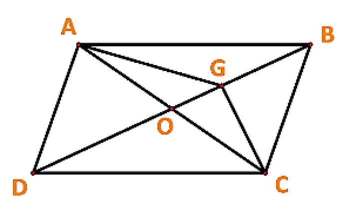
Từý a ta suy ra $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG}$

c) Ta có: $\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{EG} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} = 4 \cdot (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG}) \Leftrightarrow -3\overrightarrow{EA} = 4\overrightarrow{AG}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{AG}$ hay $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.

Câu 46: Cho hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác; Biểu thị các véc tơ $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CG}$ theo $\vec{a}, \vec{b}$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Ta có:

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}\cdot$ Mà $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\vec{a};\overrightarrow{AD}=\vec{b}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\vec{a}+\overrightarrow{BG};$

$\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BG}=\vec{b}+\overrightarrow{BG}$

Lại có: $\overrightarrow{BG},\overrightarrow{BD}$ cùng phương và $|\overrightarrow{BG}|=\frac{2}{3}BO=\frac{1}{3}|\overrightarrow{BD}|$

$\Rightarrow \overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}(-\vec{a}+\vec{b})$

Do đó $(^{*})\Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\overrightarrow{BG}=\vec{a}+\dfrac{1}{3}(-\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\\ \overrightarrow{CG}=\vec{b}+\overrightarrow{BG}=\vec{b}+\dfrac{1}{3}(-\vec{a}+\vec{b})=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}\end{cases}$

Vậy $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b};\overrightarrow{CG}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}.$

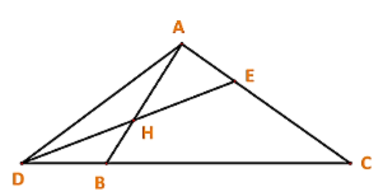
Câu 47: Cho tam giác ABC. Các điểm D,E,H thỏa mãn:

$\overrightarrow{DB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AH}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$

a) Biểu thị mỗi véc tơ $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DHB},\overrightarrow{HE}$ theo hai véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.

b) Chứng minh rằng D,E,H thẳng hàng.

Lời giải



Dễ thấy: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

Ta có:

+) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\cdot$ Mà $\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{DB}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \left(-\frac{1}{3}\right)(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

+) $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AH} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AH}$

Mà $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{DH} = -\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

+) $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AE}$

Mà $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{HE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

b) Theo câu a, ta có: $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{HE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ Hai vecto $\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{HE}$ cùng phương.

$\Leftrightarrow D, E, H$ thẳng hàng