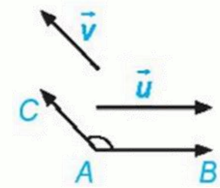
MỤC LỤC

A. Tóm tắt kiến thức

1. Định nghĩa góc giữa hai vecto:

- Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác vectơ $\vec{0}$. Từ một điểm A tuỳ ý, vẽ các vec tơ $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ và $\overrightarrow{AC}=\vec{v}$ Khi đó số đo của góc BAC được gọi là số đo của góc giữa hai vectơ $\vec{u},\vec{v}$, kí hiệu là $(\vec{u},\vec{v})$.



Chú ý

- Quy ước rằng góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{0}$ có thể nhận một giá trị tuỳ ý từ 0° đến 180°.
- Nếu $(\vec{u},\vec{v})=90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{u}\perp\vec{v}$ hoặc $\vec{v}\perp\vec{u}$.
- Đặc biệt vectơ $\vec{0}$ được coi là vuông góc với mọi vectơ.

2. Tích vô hướng của hai vectơ khác vectơ-không $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u}.\vec{v}$ được xác định bởi công thức sau: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.cos(\vec{u},\vec{v})$.

Chú ý

- $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0.$ hoặc $\vec{v}\perp\vec{u}$.
- Tích $\vec{u}.\vec{u}$ còn được viết là $\vec{u}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của $\vec{u}$.
- Ta có $\vec{u}^2=|\vec{u}|.|\vec{u}|.cos0^\circ=|\vec{u}|^2$.
- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}(x;y)$ và $\vec{v}(x';y')$ được tính theo công thức:

$$\vec{u}.\vec{v}=x.x'+u.u'$$

3. Biểu thức toạ độ và tính chất của tích vô hướng

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}(x;y)$ và $\vec{v}(x';y')$ được tính theo công thức:

$$\vec{u}.\vec{v}=x.x'+u.u'$$

Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $x.x'+y.y'=0$.
- Bình phương vô hướng của vectơ $\vec{u}(x;y)$ là $\vec{u}^2=x^2+y^2$.
- Nếu $\vec{u}\neq\vec{0}$ và $\vec{v}\neq\vec{0}$ thì $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\dfrac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$.

Tính chất

- Với ba vectơ $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ bất kì và mọi số thực k ta có:
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ (Tính chất phân phối đối với phép cộng);
- $\left(k\vec{u}\right).\vec{v} = k\left(\vec{u}.\vec{v}\right) = \vec{u}.\left(k\vec{v}\right).$

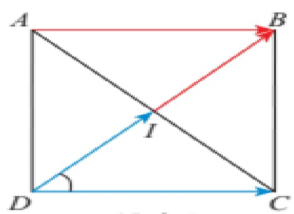
Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

⬩Dạng ❶: Góc giữa hai véctơ.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I là giao điểm của hai đường chéo. Tìm các góc:

a) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB})$; b) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI})$; c) $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB})$; d) $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC})$



Hình 4

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, suy ra $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DI}, \overrightarrow{DC}) = IDC = 45°$.

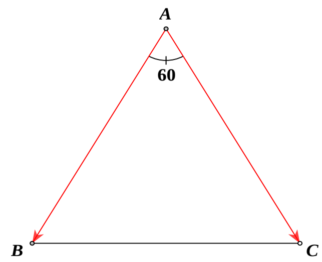
b) Ta có: $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{AI}$, suy ra $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{AI}) = (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}) = BIC = 90°$

c) Do hai vectơ $\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{DB}$ cùng hướng nên ta có $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{DB}) = 0°$

d) Do hai vectơ $\overrightarrow{IA}$, $\overrightarrow{IC}$ ngược hướng nên ta có $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = 180°$

Câu 2: Cho tam giác đều ABC. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$

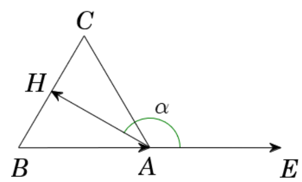
Lời giải



Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=3\cos 60^\circ=\dfrac{3}{2}$.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH Tính $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)$.

Lời giải

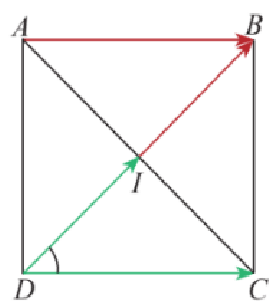


Vẽ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}$.

Khi đó $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AE}\right)=HAE=\alpha$ (hình vẽ)

$\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AE}\right)=180^\circ-BAH=180^\circ-30^\circ=150^\circ$.

Câu 4: Cho hình vuông $ABCD$ có tâm I, (Hình 1).



Hình 1

a) Tính $\widehat{IDC}$.

b) Tìm hai vectơ cùng có điểm đầu là D và điểm cuối lần lượt là I và C

c) Tìm hai vectơ có điểm đầu là D và lần lượt bằng vectơ $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{AB}$

Lời giải

a) /là tâm của $ABCD$, suy ra $IDC=45^\circ$

b) Vectơ có điểm đầu là D và điểm cuối là I là $\overrightarrow{DI}$

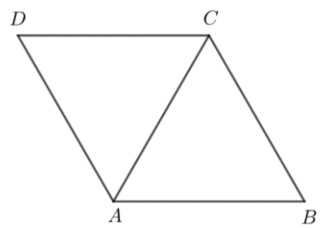
Vectơ có điểm đầu là D và điểm cuối là C là $\overrightarrow{DC}$

c) Vectơ có điểm đầu là D và bằng vectơ $\overrightarrow{IB}$ là $\overrightarrow{DI}$

Vectơ có điểm đầu là D và bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{DC}$

Câu 5: Cho tam giác ABC đều. Giá trị $\sin\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right)$ là

Lời giải



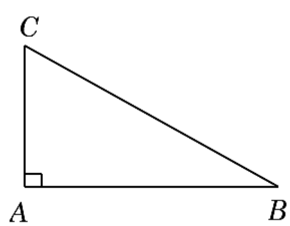
Vẽ hình bình hành $ABCD$.

Ta có $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)=DAC=60^\circ$.

Vậy $\sin\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right)=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Tam giác ABC vuông ở A và có $BC=2AC$. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)$.

Lời giải



Xác định được $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=180^\circ-ACB$

Ta có $\cos ACB=\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow ACB=60^\circ$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=180^\circ-ACB=120^\circ$

Vậy $\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=\cos 120^\circ=-\dfrac{1}{2}$

⬩Dạng ❷: Tính tích vô hướng của hai vectơ.

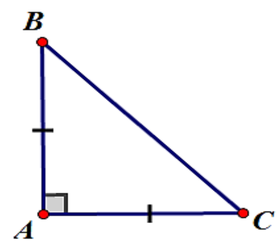
☞Các ví dụ minh họa

Câu 7: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $AB = 4$ cm.

a) Tính độ dài cạnh huyền BC.

b) Tính $\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{BA}\overrightarrow{BC}$

Lời giải



a) $BC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\left(\text{ cm}\right)$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

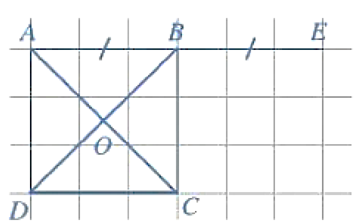
b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = 4\cdot 4\cdot\cos BAC = 16\cdot\cos 90^\circ = 16\cdot 0 = 0$.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = 4\cdot 4\sqrt{2}\cdot\cos ABC = 16\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ$$

$$= 16\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 16$$

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O có độ dài cạnh bằng a. Tính:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}$ b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}$



Hình 66

Lời giải

a) Ta có: $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}\right) = BAO = 45^\circ$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}\right)$

b) $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)$

$=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos135^{\circ}=a^2\sqrt{2}\cdot\dfrac{-\sqrt{2}}{2}=-a^2$

c) Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE},\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{BO}$ nên $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD}\right)=\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{BO}\right)=EBO=135^{\circ}$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OD}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OD}\right)=a\cdot\dfrac{a}{\sqrt{2}}\cdot\cos135^{\circ}=\dfrac{a^2}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{-a^2}{2}$.

Câu 9: Cho đoạn thẳng AB và I là trung điểm của AB. Chứng minh rằng với mỗi điểm O ta có:

a) $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IB}=0$; **b)** $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}.\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right)$;

Lời giải

a) Vì I là trung điểm AB nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

Vậy $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{OI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=\overrightarrow{OI}.\vec{0}=0$.

b) Vì I là trung điểm AB nên $2.\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right)$.

Vậy $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right).\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\right).\left(-\overrightarrow{OA}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}-\dfrac{1}{2}.\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}-\dfrac{1}{2}.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}^2-\overrightarrow{OA}^2\right)$.

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông tại A. Tính: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos90^{\circ}=AB.AC.0=0$.

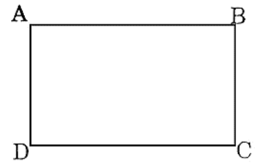
Câu 11: Cho hai vecto $\vec{a},\vec{b}$ có $\left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|=2a$ và góc giữa hai vecto đó bằng 45^0. Khi đó $\vec{a}.\vec{b}$ bằng

Lời giải

$\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=2a.2a.\cos45^0=2a^2\sqrt{2}$.

Câu 12: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8,AD=5$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$.

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-AB.CD=-64.$

©. Dạng toán rèn luyện

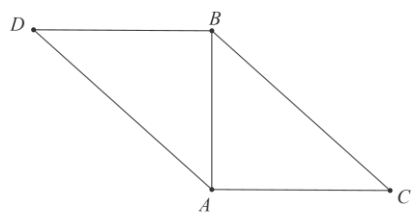
◆Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiêu phương án lựa chọn

Câu 1: Cho tam giác ABC vuông cân tại A, $AB=1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-1$. **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=1$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=-1$.

Lời giải

Chọn D



Dựng $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB.AD.\cos 45=\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=1$.

Câu 2: Cho ΔABC đều cạnh a. Giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ là

A. $2a$. **B.** $\dfrac{1}{2}a^2$. **C.** a^2. **D.** $-\dfrac{1}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=AB.AC.\cos 60°=a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}a^2$.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.   **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2$.

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}a^2$.   **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2$.

Lời giải

Chọn B

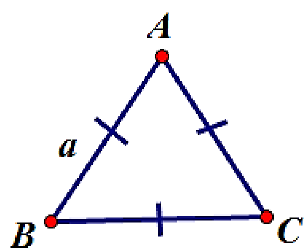
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos BAC=a.a.\cos 60^\circ=\frac{a^2}{2}$.

Câu 4: Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Giá trị $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ bằng

A. $\frac{a^2}{2}$.   **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.   **C.** $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.   **D.** $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{BC}\right|.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=AB.BC.\cos 120^\circ=a.a.\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{a^2}{2}$.

Câu 5: Cho tam giác ABC đều có độ dài các cạnh bằng 6. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

A. 18.   **B.** -18.   **C.** -6.   **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos BAC=6.6.\cos 60^\circ=36.\frac{1}{2}=18$.

Câu 6: Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 2. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=4$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\vec{0}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-4$.

Lời giải

Chọn A

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB\perp AD$ do đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0$.

Câu 7: Cho tam giác ABC vuông tại A có $B=30^0, AC=2.$ Gọi M là trung điểm của $BC.$ Tính giá trị của biểu thức $P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}.$

A. $P=-2$. **B.** $P=2\sqrt{3}$. **C.** $P=2$. **D.** $P=-2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

ΔABC vuông tại A có $AB=\dfrac{AC}{\tan B}=\dfrac{2}{\tan 30^0}=2\sqrt{3}.$

Suy ra $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=4.$

$$P=\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(-AB.BC.\cos B+AC.BC.\cos C\right)$$

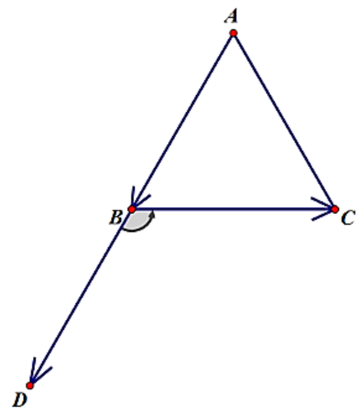
$$=\frac{1}{4}\left(-2\sqrt{3}.4.\cos 30^0+2.4.\cos 60^0\right)=-2.$$

Câu 8: Cho tam giác ΔABC đều cạnh a. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ bằng:

A. a^2. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **C.** $-\dfrac{a^2}{2}$. **D.** $\dfrac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C



$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)=CBD=120^{\circ}$

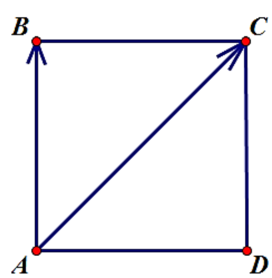
Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=AB.BC.\cos 120^{\circ}=-\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng:

A. a^2. **B.** $a^2\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$. **D.** $\dfrac{1}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn A



$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=BAC=45^{\circ}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos 45^{\circ}=a.a\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.

Câu 10: Cho tam giác ABC có $A=90^0, B=60^0$ và $AB=a$. Khi đó $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ bằng

A. $-2a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $3a^2$. **D.** $-3a^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=-CA.CB.\cos C=-\sqrt{3}a.2a.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-3a^2$.

Câu 11: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng với mọi $\vec{a}$ và $\vec{b}$?

A. $\left|\vec{a}.\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\left|cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$.

C. $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$. **D.** $\left|\vec{a}.\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$.

Lời giải

Chọn A

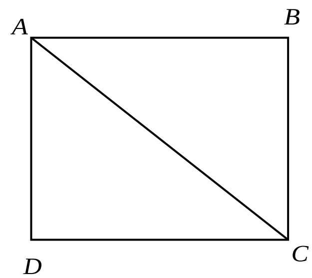
Theo định nghĩa tích vô hướng hai vectơ, ta có $\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\Rightarrow\left|\vec{a}.\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\left|cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right|$.

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 2. Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ bằng

A. -4. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $-2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|.\cos BAC=-2.2\sqrt{2}.\cos 45°=-4$.

Câu 13: Cho tam giác ABC vuông ở A và góc $B=30^0$. Tính giá trị của
$\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)$.

A. $\dfrac{1+3\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2+\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$. **D.** $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

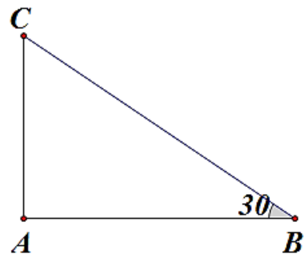
$\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)+\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\sin 90^0+\cos 30^0=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

Câu 14: Cho tam giác ABC vuông tại A và góc $ABC = 30°$. Xác định góc giữa hai vectơ $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.

A. $60°$. **B.** $120°$. **C.** $-30°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A



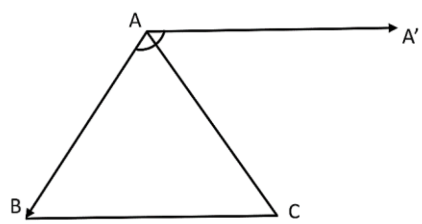
Ta có $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = ACB = 60°$.

Câu 15: Cho tam giác đều ABC. Tính góc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$.

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $30°$. **D.** $150°$.

Lời giải

Chọn A



Dựng véc tơ $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC}$ khi đó ta có $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}\right) = BAA'$.

Vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow BC//AA' \Rightarrow CAA' = ACB = ABC = 60°$.

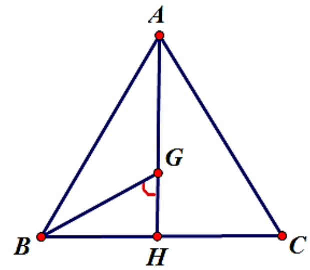
Do đó $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'}\right) = BAA' = BAC + CAA' = 60° + 60° = 120°$.

Câu 16: Cho tam giác ABC đều có trọng tâm G và H là trung điểm của BC. Xác định $\cos\left(\overrightarrow{GB}\ ;\ \overrightarrow{GH}\right)$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Do tam giác ABC đều nên $AH \perp BC$ và $GBH = 30°$, suy ra $\left(\overrightarrow{GB}\,;\overrightarrow{GH}\right) = BGH = 60°$.

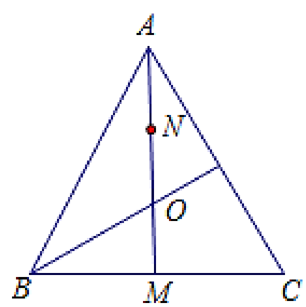
Vậy $\cos\left(\overrightarrow{GB}\,;\overrightarrow{GH}\right) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$.

Câu 17: Cho tam giác ABC đều, tâm O, M là trung điểm của BC. Góc $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}\right)$ bằng

A. $150°$. **B.** $30°$. **C.** $120°$. **D.** $60°$.

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm của $AO \Rightarrow AN = OM$ (tính chất trọng tâm của tâm của tam giác)

Mà $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{OM}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OM}$

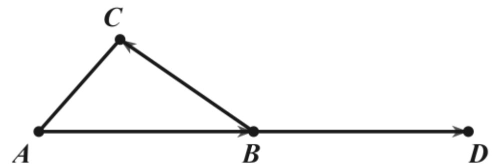
$\Rightarrow \left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB}\right) = NAB = MAB = 30°$.

Câu 18: Cho tam giác ABC tìm $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB}\right)$.

A. $90°$. **B.** $180°$. **C.** $270°$. **D.** $360°$.

Lời giải

Chọn D



Dựng điểm D sao cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$. Khi đó, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right) = DBC = 180° - ABC$.

Tương tự, $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) = 180° - BCA$ và $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) = 180° - CAB$.

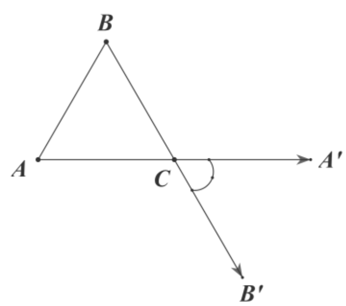
Vậy $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}\right) = 540° - \left(ABC + BCA + CAB\right) = 540° - 180° = 360°$.

Câu 19: Cho tam giác ABC đều. Giá trị $\sin\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right)$ là

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D



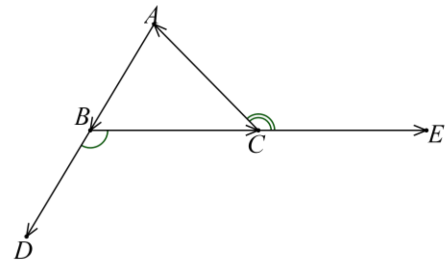
Theo hình vẽ ta có: $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{CA'}\right) = A'CB = 60° \Rightarrow \sin\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}\right) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20: Cho tam giác ABC với $A = 60°$. Tính tổng $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right)$.

A. $120°$. **B.** $360°$. **C.** $270°$. **D.** $240°$.

Lời giải

Chọn D



Vẽ các vectơ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC}$.

Ta có $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\right) = \left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CA}\right) = CBD + ACE$

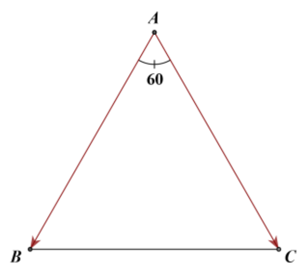
$= 180° - ABC + 180° - ACB = 360° - \left(ABC + ACB\right) = 360° - \left(180° - A\right) = 360° - 120° = 240°$.

Câu 21: Cho tam giác đều ABC. Tính $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) + \cos\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)$.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \cos\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) + \cos\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = 3\cos 60° = \frac{3}{2}$.

Câu 22: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM}$.

A. $-a^2$. **B.** a^2. **C.** $-\frac{a^2}{2}$. **D.** $\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AC^2} = a$;

$AB = AM = BM = a \Leftrightarrow \Delta ABM$ đều $\Rightarrow \cos BAM = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

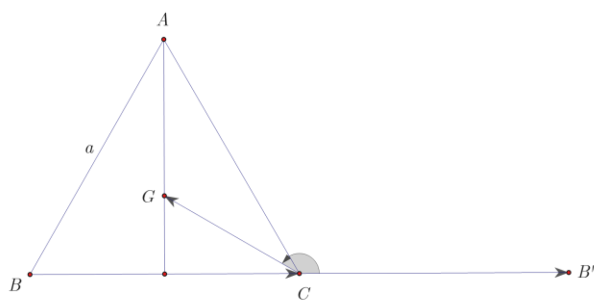
Khi đó: $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -AB.AM.\cos A = -a.a.\frac{1}{2} = -\frac{a^2}{2}$.

Câu 23: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a, trọng tâm G. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CG}$ bằng

A. $\frac{a^2}{\sqrt{2}}$. **B.** $-\frac{a^2}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^2}{2}$. **D.** $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CG} = \left|\overrightarrow{BC}\right|.\left|\overrightarrow{CG}\right|.\cos\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CG}\right) = BC.CG.\cos\left(\overrightarrow{CB'}, \overrightarrow{CG}\right)$

$= BC.CG.\cos 150^\circ = a.\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{a^2}{2}$.

Câu 24: Cho tam giác đều ABC, $AB = a$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$?

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = -\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$. **B.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$.

C. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}a^2$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = AB.CA.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}\right) = a.a.\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}a^2$.

Câu 25: Cho $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 4$, $\left|\vec{a}\right| = 2$, $\left|\vec{b}\right| = 3$. Tính $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

A. 3. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{12}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 4 \Rightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = 16$

$\Leftrightarrow \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 16 \Leftrightarrow 4 + 2\vec{a}\vec{b} + 9 = 16 \Leftrightarrow 2\vec{a}\vec{b} = 3$

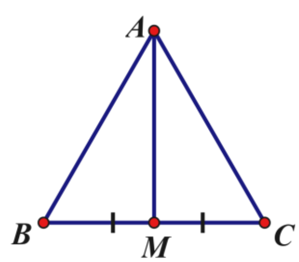
$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = 2^2 - 3 + 3^2 = 10 \Rightarrow \left|\vec{a}-\vec{b}\right| = \sqrt{10}$.

Câu 26: Cho ΔABC đều, $AB = 6$ và M là trung điểm của BC. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA}$ bằng

A. -27. **B.** 27. **C.** 18. **D.** -18.

Lời giải

Chọn A



ΔABC là tam giác đều nên AM là trung tuyến đồng thời là phân giác nên: $BAM = 30°$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -AB.AM.\cos(AB, AM) = -6.\frac{6\sqrt{3}}{2}.\cos 30° = -27$.

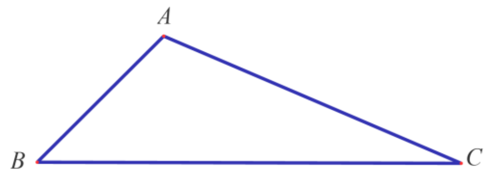
Câu 27: ho tam giác ABC có $AB = 2$ cm, $BC = 4$ cm, $CA = 5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

A. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 37$. **B.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{37}{2}$.

C. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \frac{37}{20}$. **D.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -\frac{37}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=ACB$.

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC có

$$\cos ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC.BC}=\frac{5^2+4^2-2^2}{2.5.4}=\frac{37}{40}.$$

Do đó $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{CA}\right|.\left|\overrightarrow{CB}\right|\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=CA.CB.\cos ACB=5.4.\frac{37}{40}=\frac{37}{2}$.

Câu 28: Cho $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=3$, $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=5$. Tìm $\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|$.

A. 135. **B.** 11. **C.** $\frac{3\sqrt{30}}{2}$. **D.** 45.

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra $\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=5$ nên ta có

$$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|^2=25 \Leftrightarrow \vec{a}^2+4\vec{b}^2+4\vec{a}.\vec{b}=25$$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|^2+4\left|\vec{b}\right|^2+4\vec{a}.\vec{b}=25$$

$$\Leftrightarrow 2^2+4.3^2+4\vec{a}.\vec{b}=25$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=-\frac{15}{4}.$$

Do đó $\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|^2=9\vec{a}^2+\vec{b}^2-6\vec{a}.\vec{b}=9\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-6\vec{a}.\vec{b}=9.2^2+3^2-6.\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{135}{2}$.

Vậy $\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|=\frac{3\sqrt{30}}{2}$.

Câu 29: Cho tam giác ABC đều cạnh a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$?

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2}{2}$ **D.** $-\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=-BA.BC.\cos 60°=-a.a.\frac{1}{2}=-\frac{a^2}{2}$.

Câu 30: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ được tính theo a là:

A. $8a^2$. **B.** $8a$. **C.** $8\sqrt{3}a^2$ **D.** $8\sqrt{3}a$.

Lời giải

Chọn A

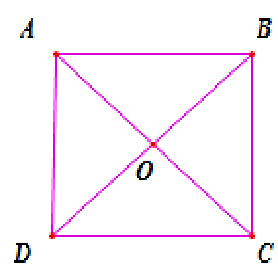
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.\ AC\ .cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=4a.4a.\cos 60°=8a^2$.

Câu 31: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh bằng a. Tìm mệnh đề **sai**:

A. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a^2$. **B.** $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$. **C.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}=\frac{a^2}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BO}=\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BO}=AB.BO.\cos 135^{\circ}=a.a\frac{\sqrt{2}}{2}.\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-a^2}{2}$

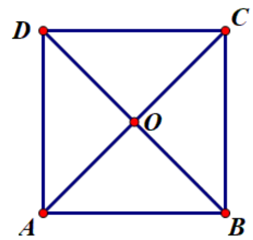
Vậy $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BO}=\frac{a^2}{2}$ là đáp án sai.

Câu 32: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh bằng $2a$. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}$ bằng

A. $2a^2$. **B.** $2a^2\sqrt{2}$. **C.** $-2a^2\sqrt{2}$. **D.** $-2a^2$.

Lời giải

Chọn D



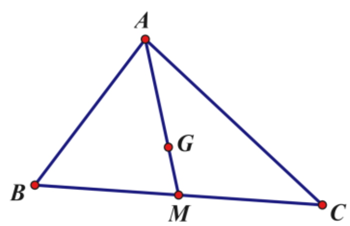
Ta có $OB = \frac{BD}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BO} = AB.BO.\cos 135^0 = 2a.a\sqrt{2}.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2a^2$.

Câu 33: Cho ΔABC vuông tại A, có trọng tâm G, $AC = a\sqrt{3}; BC = 2a$, M là trung điểm

Lời giải

Chọn D



$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a$.

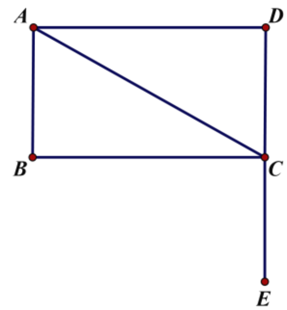
$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}.\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2\right) = \frac{1}{6}\left(a^2 - 3a^2\right) = \frac{-1}{3}a^2$

Câu 34: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AC = 2a$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{DC}$.

A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $150°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn D



Cách 1: Xét $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right).\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = -CD^2 = -a^2$.

Nên $\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DC}}{CA.DC} = \dfrac{-a^2}{2a.a} = -\dfrac{1}{2}$. Suy ra: $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DC}\right)=120°$.

Cách 2: Vẽ $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{DC}$.

Khi đó: $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CE}\right)=ACE=180°-ACD$.

Xét tam giác ACD có $\cos ACD=\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow ACD=60°$.

Do đó: $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{DC}\right)=120°$.

Câu 35: Cho tam giác ABC vuông ở A. Góc $ABC=60°$, tìm góc giữa hai vectơ $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)$

A. $30°$. **B.** $60°$. **C.** $90°$. **D.** $120°$.

Lời giải

Chọn D

Gọi B' là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BB'}\Rightarrow B$ là trung điểm của AB'

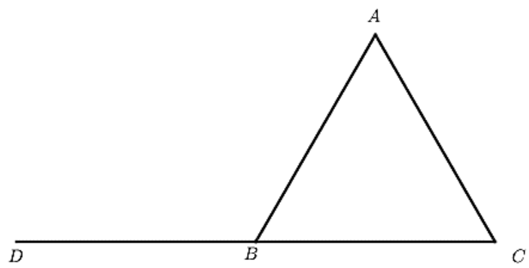
Suy ra $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{BB'},\overrightarrow{BC}\right)=B'BC=120°$.

Câu 36: Cho tam giác đều ABC. Tính $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CB}\right)$

A. 60^o. **B.** 120^o. **C.** 90^o. **D.** 180^o.

Lời giải

Chọn B



Ta có : $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BD}\right)=ABD=180^o-ABC=180^o-60^o=120^o$.

Câu 37: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Góc $\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{BA}\right)$ có giá trị là

A. 45^0 **B.** 145^0 **C.** 135^0 **D.** 30^0

Lời giải

Chọn A

Hình vuông $ABCD$ tâm O. Nên:

$\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CD}\right)=45^0$

Câu 38: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Góc $\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{BA}\right)$ có giá trị là

A. 45^0 **B.** 145^0 **C.** 135^0 **D.** 30^0

Lời giải

Hình vuông $ABCD$ tâm O. Nên:

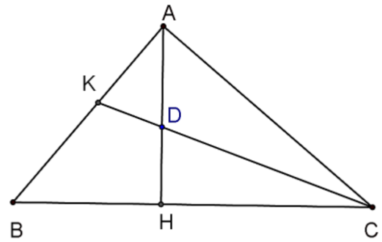
$\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{BA}\right)=\left(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{CD}\right)=45^0$

Câu 39: Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $B=50°$. Kẻ đường cao AH $(H\in BC)$, đường phân giác trong của góc C là CK $(K\in AB)$. Xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AH}$ và $\overrightarrow{CK}$.

A. $110°$. **B.** $120°$. **C.** $100°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn A



Gọi D là giao điểm của AH và CK.

Ta có: $DAC = ABC = 50°; ACD = 20°$.

$\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{DH}$ cùng hướng và $\overrightarrow{CK}, \overrightarrow{DK}$ cùng hướng.

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CK}\right) = \left(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DK}\right) = HDK = ADC =$

$180° - DAC - ACD = 180° - 50° - 20° = 110°$

⬩Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

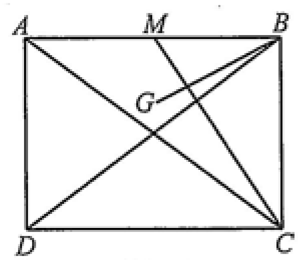
Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các vectơ $\vec{a} = (-2;3), \vec{b} = (4;1)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = 12$		
b)	$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 4$		
c)	Vectơ $\vec{c} = m\vec{i} + \vec{j}$ vuông góc với $\vec{a}$ khi $m = \frac{3}{2}$		
d)	Tọa độ vectơ $\vec{d}$ sao cho $\vec{a}.\vec{d} = 4, \vec{b}.\vec{d} = -2$ bằng $\left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$		

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các vectơ $\vec{a} = (2;5), \vec{b} = (3;-7)$, $\vec{c} = (1;1)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a}.\vec{b} = 29$		
b)	$(\vec{a}, \vec{b}) = 15°$		
c)	$(\vec{a}, \vec{c}) \approx 23{,}1986°$		
d)	Để $\vec{d} = (4x+1)\vec{i} + (x+4)\vec{j}$ tạo với vectơ $\vec{c}$ một góc $45°$ thì $x = -\frac{1}{4}$.		

Câu 3. Cho hình chữ nhật $ABCD, AB = 4a, AD = 3a$. Gọi M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ACM (Hình).



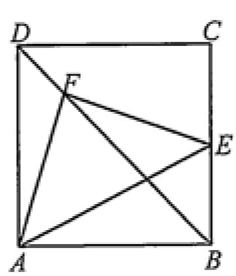
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC}$		
b)	$\overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.		
c)	$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$		
d)	$\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} = -a^2$.		

Câu 4. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6\sqrt{3}$		
b)	$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 7$.		
c)	$(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + 30\sqrt{3}$		
d)	$(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 5 + 30\sqrt{3}$		

Câu 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Lấy E là trung điểm của BC, điểm F thoả mãn $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$

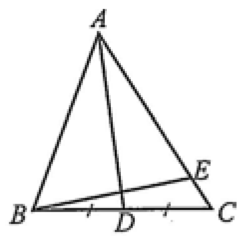


Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai

a)	$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$		
b)	$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$		
c)	$\overrightarrow{EF}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$		
d)	Tam giác AEF vuông cân.		

Câu 6. Cho tam giác ABC có có $AB=4\sqrt{2}, AC=6, BAC=45^{\circ}$. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC. Điểm E thoả mãn $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AC}(k\in\mathbb{R})$ (Hình). Các mệnh đề sau đúng hay sai?



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=20$		
b)	$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$		
c)	$BC=3\sqrt{5}$		
d)	$AD\perp BE$ khi $k=\frac{14}{15}$		

Câu 7. Cho tam giác ABC đều, đường cao AH. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=30°$		
b)	$(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB})=90^{\circ}$		
c)	$(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BC})=120°$		
d)	$(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BA})=130°$		

Câu 8. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 2 và góc B bằng 60°. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=60^{\circ}$		
b)	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA})=30^{\circ}$		

c)	$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=3$		
d)	$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BA}=-3$		

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a, BC=2a$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$ACB=60^\circ$		
b)	$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$		
c)	$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=3a^2$.		
d)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-4a^2$		

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, có cạnh a. Biết M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=a^2$		
b)	$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{3}$		
c)	$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$		
d)	$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=a^2$		

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh bằng a. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=2a^2$		
b)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=a^2$		
c)	$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=-a^2$		
d)	$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=a^2$		

Câu 12. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, biết $AD=a, BC=3a$ và cạnh $AB=2a$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-4a^2$		
b)	$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=2a^2$		
c)	$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-2a^2$		
d)	Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Khi đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}=6a^2$		

Câu 13. Cho tam giác đều ABC, đường cao AH. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=60^\circ$		
b)	$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=120^\circ$		
c)	$\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right)=90^\circ$		
d)	$(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{AB})=120^\circ$		

Câu 14. Cho tam giác ABC đều có cạnh a, có trọng tâm G. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$		
b)	$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{4}$		
c)	$AGB=120^\circ$		
d)	$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GC}=\frac{a^2}{6}$		

Câu 15. Cho tam giác ABC có $AB=2a, AC=3a, BAC=60^\circ$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng BC. Điểm J thuộc đoạn AC thỏa mãn: $12AJ=7AC$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4a^2$		
b)	$\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$		
c)	$\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$		
d)	$AI\perp BJ$		

LỜI GIẢI

Câu 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các vectơ $\vec{a}=(-2;3),\vec{b}=(4;1)$. Khi đó:

a) $\vec{a}(\vec{a}-\vec{b})=12$

b) $(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})=4$

c) Vectơ $\vec{c}=m\vec{i}+\vec{j}$ vuông góc với $\vec{a}$ khi $m=\frac{3}{2}$

d) Tọa độ vectơ $\vec{d}$ sao cho $\vec{a}.\vec{d}=4,\vec{b}.\vec{d}=-2$ bằng $\left(-\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right)$

Lời giải:

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Ta có : $\vec{a}-\vec{b}=(-6;2)\Rightarrow\vec{a}(\vec{a}-\vec{b})=-2(-6)+3.2=18$;

$\vec{a}+\vec{b}=(2;4),2\vec{a}-\vec{b}=(-8;5)\Rightarrow(\vec{a}+\vec{b})(2\vec{a}-\vec{b})=2(-8)+4.5=4$.

b) Ta có : $\vec{c}=(m;1)$. Vì $\vec{c}\perp\vec{a}$ nên $\vec{a}\cdot\vec{c}=0\Rightarrow-2m+3\cdot1=0\Rightarrow m=\frac{3}{2}$.

c) Gọi $\vec{d}=(x;y)$. Ta có: $\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{d}=4\\ \vec{b}\cdot\vec{d}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+3y=4\\ 4x+y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{5}{7}\\ y=\frac{6}{7}\end{cases}$ Vậy $\vec{d}=\left(-\frac{5}{7};\frac{6}{7}\right)$.

Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các vectơ $\vec{a}=(2;5),\vec{b}=(3;-7)$, $\vec{c}=(1;1)$. Khi đó:

a) $\vec{a}.\vec{b}=29$

b) $(\vec{a},\vec{b})=15^\circ$

c) $(\vec{a},\vec{c})\approx 23{,}1986^\circ$

d) Để $\vec{d}=(4x+1)\vec{i}+(x+4)\vec{j}$ tạo với vectơ $\vec{c}$ một góc 45° thì $x=-\frac{1}{4}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Ta có: $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{2.3+5(-7)}{\sqrt{2^2+5^2}\cdot\sqrt{3^2+(-7)^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=135^\circ$;

$\cos(\vec{a},\vec{c})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{2.1+5.1}{\sqrt{2^2+5^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{7\sqrt{58}}{58}\Rightarrow(\vec{a},\vec{c})\approx 23{,}1986^\circ$.

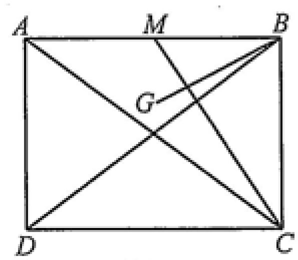
b) Ta có: $\vec{d}=(4x+1;x+4)$ tạo với $\vec{c}$ một góc 45° nên:

$$\cos(\vec{d},\vec{c})=\frac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{|\vec{d}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{4x+1+x+4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(4x+1)^2+(x+4)^2}}=\cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+5}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17x^2+16x+17}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 5x+5=\sqrt{17x^2+16x+17}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 17x^2+16x+17=25x^2+50x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ 8x^2+34x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{4}.$$

Câu 3. Cho hình chữ nhật $ABCD, AB=4a, AD=3a$. Gọi M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ACM (Hình).



a) $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-3\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{BG}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$

c) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$

b) $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CM}=-a^2.$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

Ta có: $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ACM nên

$$3\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\Rightarrow\overrightarrow{BG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $BC=AD=3a, \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$.

Ta có: $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{CM}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2-\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2$

$=\frac{1}{4}(4a)^2-\frac{1}{3}\cdot 4a\cdot 3a-\frac{1}{3}(3a)^2=-3a^2.$

Câu 4. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thoả mãn $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4,(\vec{a},\vec{b})=150^\circ$. Khi đó:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=-6\sqrt{3}$

b) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=7.$

c) $(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=-5+30\sqrt{3}$

d) $(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=5+30\sqrt{3}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

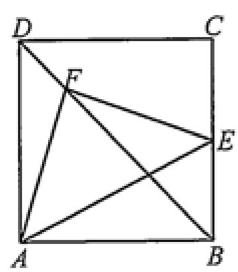
Ta có: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=3\cdot 4\cdot\cos 150^\circ=-6\sqrt{3}$.

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2=3^2-4^2=-7.$

$(3\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=3\vec{a}^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2=3|\vec{a}|^2-5\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2$

$=3\cdot 3^2-5(-6\sqrt{3})-2\cdot 4^2=-5+30\sqrt{3}.$

Câu 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Lấy E là trung điểm của BC, điểm F thoả mãn $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ Khi đó:



a) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}\overrightarrow{AD}.$

c) $\overrightarrow{EF}=\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$

d) Tam giác AEF vuông cân.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

Ta có: $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}.$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right) - \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$

Ta có: $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EF} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)$

$= \frac{-3}{16}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{3}{16}\overrightarrow{AD}^2 = 0 \Rightarrow AF \perp EF.$

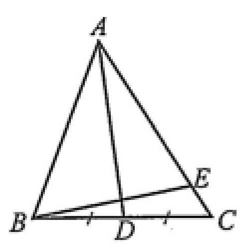
Ta có: $\overrightarrow{AF}^2 = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \frac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{9}{16}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2$.

$\overrightarrow{EF}^2 = \left(\frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)^2 = \frac{9}{16}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2$.

$\Rightarrow AF^2 = EF^2 = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2 \Rightarrow AF = EF$. Vậy tam giác AEF vuông cân tại F.

Chú ý: Ta có thể chứng minh tam giác AEF vuông bằng định lí Pythagore.

Câu 6. Cho tam giác ABC có có $AB = 4\sqrt{2}, AC = 6, BAC = 45^\circ$. Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng BC. Điểm E thoả mãn $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC} (k \in \mathbb{R})$ (Hình). Khi đó:



a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

b) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) $BC = 3\sqrt{5}$

d) $AD \perp BE$ khi $k = \frac{14}{15}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 4\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ = 24$.

b) Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Khi đó:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = 6^2 - 2 \cdot 24 + (4\sqrt{2})^2 = 20 \\
&\Rightarrow BC = 2\sqrt{5}. \\
\overrightarrow{AD}^2 &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\left[(4\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 24 + 6^2\right] = 29 \Rightarrow AD = \sqrt{29}.
\end{aligned}$$

c) Ta có: $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Từ đó, ta có:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}\left(k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{2}\left[24k + 6^2 \cdot k - (4\sqrt{2})^2 - 24\right]$$
$$= 30k - 28.$$

Khi đó $AD \perp BE \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \Leftrightarrow 30k - 28 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{14}{15}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC đều, đường cao AH. Khi đó:

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 30^\circ$

b) $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$

c) $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

d) $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = 130^\circ$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = BAC = 60^\circ$.

b) Ta có: $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$ do $AH \perp BC$.

c) Cách giải 1: Gọi D là điểm đối xứng với B qua C, ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$.

Khi đó: $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = ACD = 120^\circ$.

Cách giải 2: Áp dụng tính chất được rút ra từ định nghĩa:

$(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - (-\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - (\vec{a}, -\vec{b})$, ta được:

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

d) Ta có: $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ - BAH = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Câu 8. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 2 và góc B bằng 60°. Khi đó:

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$

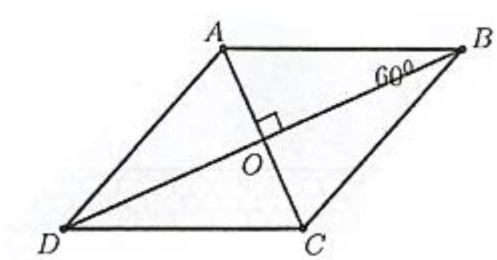
b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) = 30^\circ$

c) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 3$

d) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = -3$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng



Xét hình thoi $ABCD$ có $ABC = 60^\circ \Rightarrow BAD = 120^\circ$; tam giác ABC có

$AB = BC = 2, ABC = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh $2 \Rightarrow OB = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Ta có: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = BAC = 60^\circ$, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = 180^\circ - BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DA}|\cdot|\overrightarrow{DC}|\cos(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}) = DA\cdot DC\cdot\cos ADC = 2\cdot 2\cdot\cos 60^\circ = 2$;

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{BA} = -|\overrightarrow{BO}|\cdot|\overrightarrow{BA}|\cdot\cos ABO = -BO\cdot BA\cdot\cos 30^\circ = -\sqrt{3}\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -3.$

Câu 9. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, BC = 2a$. Khi đó:

a) $ACB = 60^\circ$

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = a^2$

c) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = 3a^2$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = -4a^2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Xét tam giác vuông ABC : $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$, $\cos ABC = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow ABC = 60^\circ \Rightarrow ACB = 30^\circ$.

Ta có: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = BA\cdot BC\cdot\cos ABC = a\cdot 2a\cdot\dfrac{1}{2} = a^2$.

Ta có: $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cos ACB$

$= -CB\cdot CA\cdot\cos 30^\circ = -2a\cdot a\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -3a^2$.

Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -a^2, \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} = -3a^2$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB} = -a^2 - 3a^2 = -4a^2$.

Câu 10. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, có cạnh a. Biết M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = a^2$

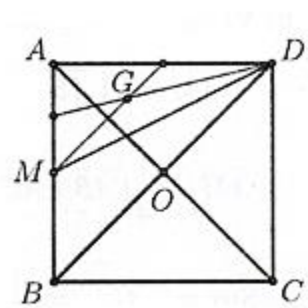
b) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{3}$

c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$

d) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=a^2$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng



Độ dài đường chéo hình vuông $ABCD$ cạnh a là $AC=BD=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

$=-AB\cdot AC\cdot\cos BAC=-a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=-a^2$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC})$

$=AM\cdot AC\cdot\cos CAM=\dfrac{a}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{DA}|\cdot|\overrightarrow{DB}|\cdot\cos(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=DA\cdot DB\cdot\cos ADB-\dfrac{1}{2}AD\cdot AC\cdot\cos CAD$

$=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ-\dfrac{1}{2}a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=a^2-\dfrac{1}{2}a^2=\dfrac{1}{2}a^2$.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

Do đó: $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})$

$=\underbrace{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}_{0}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cos ACB=a\cdot a\sqrt{2}\cos 45^\circ=a^2$

(trong đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ vì $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$).

Câu 11. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, cạnh bằng a. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=2a^2$;

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=a^2$;

c) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=-a^2$;

d) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=a^2$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Do $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})=0^0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=AB\cdot DC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})=a\cdot a\cdot\cos 0^\circ=a^2$.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OC}$ cùng hướng, do đó $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})=BAO=45^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=AB\cdot OC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC})=a\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 45^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

c) Hai vectơ $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OC}$ ngược hướng, do đó $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OC})=180^\circ$.

Suy ra $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=CA\cdot OC\cdot\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OC})=a\sqrt{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 180^\circ=-a^2$.

d) Ta có: $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$ (trong đó $AC\perp BD\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$).

Ta có: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=CA\cdot CB\cdot\cos ACB=a\sqrt{2}\cdot a\cdot\cos 45^\circ=a^2$.

Vậy $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=a^2$.

Câu 12. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, biết $AD=a, BC=3a$ và cạnh $AB=2a$. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-4a^2$

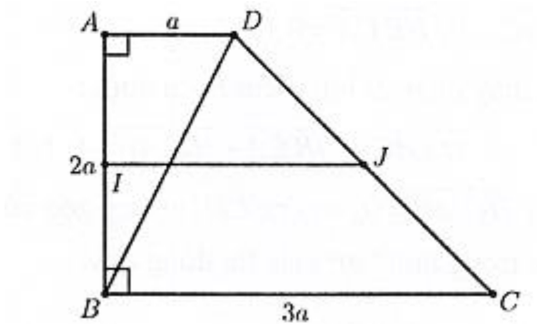
b) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=2a^2$

c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-2a^2$

d) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = 6a^2$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng



a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$. Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_{0}$

$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2 = -AB^2 = -4a^2$.

b) Tính $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$. Ta có: $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \cdot BD \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = BC \cdot BD \cdot \cos DBC$

$= BC \cdot BD \cdot \cos BDA = BC \cdot BD \cdot \dfrac{AD}{BD} = BC \cdot AD = 3a^3$.

(trong đó $DBC = BDA$ vì là hai góc so le trong).

c) Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$

$= -\overrightarrow{AB}^2 + 0 + 0 + BC \cdot AD \cdot \cos 0^0 = -AB^2 + 3a \cdot a \cdot 1 = -(2a)^2 + 3a^2 = -a^2$.

d) Tính $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ}$. Ta có:

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{IJ} = \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}}_{0} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IJ} = BC \cdot IJ \cdot \cos 0^0 = 3a \cdot 2a \cdot 1 = 6a^2$.

Câu 13. Cho tam giác đều ABC, đường cao AH. Khi đó:

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

c) $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right)=90^\circ$

d) $(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{AB})=120^\circ$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=BAC=60^\circ$.

b) Dựng hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$.

Suy ra: $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=BAD=180^\circ-ABC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

c) Tam giác ABC đều nên $AH\perp BC$. Suy ra $\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{BC}\right)=90^\circ$

d) Dựng hình bình hành $ABEH$, ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{HE}$.

Suy ra: $(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{AB})=(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HE})=AHE=180^\circ-BAH=180^\circ-30^\circ=150^\circ$.

Câu 14. Cho tam giác ABC đều có cạnh a, có trọng tâm G. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{4}$

c) $AGB=120^\circ$

c) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GC}=\dfrac{a^2}{6}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}a^2$

b) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AG}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AC})=AG\cdot AC\cdot\cos 30^\circ=\dfrac{1}{2}a^2$

c) Tam giác AGB có $\widehat{GAB}=\widehat{GBA}=30^{\circ} \Rightarrow \widehat{AGB}=120^{\circ}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=GA\cdot GB\cdot\cos\widehat{AGB}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}\cos 120^{\circ}=-\frac{a^2}{6}$$

Câu 15. Cho tam giác ABC có $AB=2a, AC=3a, \widehat{BAC}=60^{\circ}$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng BC. Điểm J thuộc đoạn AC thỏa mãn: $12AJ=7AC$. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4a^2$

b) $\overrightarrow{AI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

d) $AI\perp BJ$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cos\widehat{BAC}=2a\cdot 3a\cdot\cos 60^{\circ}=3a^2$

b) Do I là trung điểm BC nên $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ}=-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AB}^2+\frac{7}{12}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{7}{12}\overrightarrow{AC}^2\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(-4a^2+\frac{7}{12}\cdot 3a^2-3a^2+\frac{7}{12}\cdot 9a^2\right)=0$$

Vậy $AI\perp BJ$

⬩Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB=8a$; đáy nhỏ $CD=4a$; đường cao $AD=6a$; I là trung điểm của AD. Tính $(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})\cdot\overrightarrow{ID}$.

Trả lời:………………..

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, AC = 2\sqrt{3}a$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$.

Trả lời:.................

Câu 3. Cho $A(1;2)$ và $B(-1;3)$. Cho điểm $P(0,b)$.

Tính $\cos APB$ theo tung độ của P.

Trả lời:.................

Câu 4. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - kBC^2$. Vậy $k = ?$

Trả lời:.................

Câu 5. Cho hình vuông $ABCD$; E là trung điểm của AB, F là điểm sao cho $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Xác định vị trí của điểm M trên đường thẳng BC sao cho $EFM = 90^\circ$.

Trả lời:.................

Câu 6. Cho tam giác ABC cân tại $A; M$ là trung điểm của BC, H là hình chiếu của M trên $AC; E$ là trung điểm của MH. Tính $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}$

Trả lời:.................

Câu 7. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Biết M là trung điểm của BC.

Tính $\overrightarrow{AM}^2$?

Trả lời:.................

Câu 8. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Biết rằng AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Tính $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD}$ biết $AB = 2$.

Trả lời:.................

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm CD. Khi đó BMN là tam giác vuông cân tại đỉnh nào?

Trả lời:.................

Câu 10. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC, D là hình chiếu của H trên AC, M là trung điểm của HD. Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD}$

Trả lời:.................

Câu 11. Cho hai điểm A,B cố định có khoảng cách bằng a. Tập hợp điểm M sao cho:

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{3a^2}{4}$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

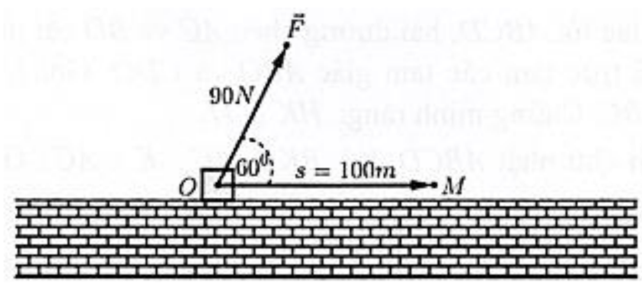
Trả lời:………………

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k. Tập hợp điểm M sao cho

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:………………

Câu 13. Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn $90\,N$ làm một vật dịch chuyển một đoạn $100\,m$. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60°. Tính công sinh ra bởi lực $\vec{F}$.



Trả lời:………………

Câu 14. Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO. Gọi I,J lần lượt là trung điểm AD và BC. Tính $\overrightarrow{HK}\cdot\overrightarrow{IJ}$?

Trả lời:………………

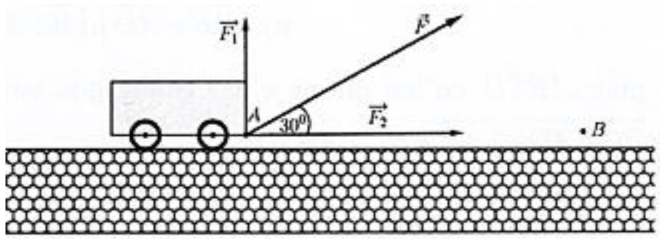
Câu 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK\perp AC, K\in AC$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AK và CD. Tìm số đo góc BMN.

Trả lời:………………

Câu 16. Cho đoạn $AB=20$. Tồn tại điểm M sao cho $T=3MA^2+2MB^2$ đạt giá trị bé nhất $T_{\min}$. Tính giá trị $T_{\min}$?

Trả lời:………………

Câu 17. Một chiếc xe được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn $50\,N$, di chuyển theo quãng đường từ A đến B có chiều dài $200\,m$. Cho biết góc hợp bởi lực $\vec{F}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng 30° và lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F_1},\vec{F_2}$. Tính công sinh ra bởi các lực $\vec{F},\vec{F_1},\vec{F_2}$?



Trả lời:.................

Câu 18. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC = 7cm$ và $BC = 14cm$.
Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$.

Trả lời:.................

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM = 1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN = 1$ và P là trung điểm BC. Tính $\cos MNP$.

Trả lời:.................

Câu 20. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính:
$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Trả lời:.................

Câu 21. Cho tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O) bán kính R, M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn (O). Tính $MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Trả lời:.................

Câu 22. Cho tam giác ABC vuông tại A, trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm B' và C' sao cho $AB \cdot AB' = AC \cdot AC'$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'C'}$

Trả lời:.................

Câu 23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Trả lời:.................

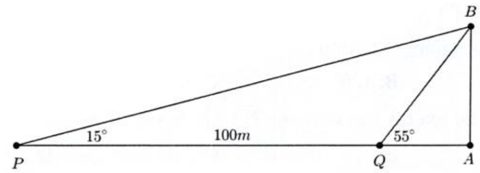
Câu 24. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = \sqrt{3}$ và $(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$. Tính $|\vec{a} + \vec{b}|$.

Trả lời:.................

Câu 25. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Tập hợp điểm M thỏa mãn
$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = a^2$ là đường tròn bán kính $R = ?$.

Trả lời:………………

Câu 26. Hai chiếc tàu thủy P và Q trên biển cách nhau $100m$ và thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $BPA = 15^{\circ}$ và $BQA = 55^{\circ}$. Tính chiều cao của tháp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Trả lời:………………

Câu 27. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có cạnh bằng a và $ABD = 60^{\circ}$. Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BI}$.

Trả lời:………………………..

Câu 28. Cho ΔABC đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $MA^2 + MB^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Câu 29. Cho ΔABC đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:………………………..

Câu 30. Cho ΔABC đều cạnh là 3. Điểm M thỏa mãn: $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời:………………………..

Câu 31. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC và H là trực tâm. Biết $\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = kBC^2$. Khi đó $k = ?$

Trả lời:……………………

Câu 32. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$. Tính $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Trả lời:……………………

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đáy lớn $AB = 8a$; đáy nhỏ $CD = 4a$; đường cao $AD = 6a$; I là trung điểm của AD. Tính $(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{ID}$.

Trả lời: $-18a^2$

Lời giải

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{ID}$$
$$= -\overrightarrow{IA}^2 + IB \cdot ID \cdot \cos BID$$
$$= -IA^2 - IB \cdot ID \cdot \cos BIA$$
$$= -IA^2 - IB \cdot ID \cdot \frac{IA}{IB}$$
$$= -IA^2 - IA^2 = -2IA^2 = -2 \cdot (3a)^2 = -18a^2.$$

Câu 2. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, AC = 2\sqrt{3}a$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$.

Trả lời: $\frac{-a^2}{2}$

Lời giải

Tam giác AMB có $AM = BM = AB$ nên là tam giác đều. Suy ra $MAB = 60^\circ$.

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{-a^2}{2}.$$

Câu 3. Cho $A(1;2)$ và $B(-1;3)$. Cho điểm $P(0,b)$.

Tính $\cos APB$ theo tung độ của P.

Trả lời: $\frac{b^2 - 5b + 5}{\sqrt{(b-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{(b-3)^2 + 1}}$

Lời giải

Vì P thuộc trục tung nên $P(0,b)$. Khi đó $\overrightarrow{PA} = (1; 2-b)$ và $\overrightarrow{PB} = (-1; 3-b)$.

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 1.(-1) + (2-b)(3-b) = b^2 - 5b + 5$$

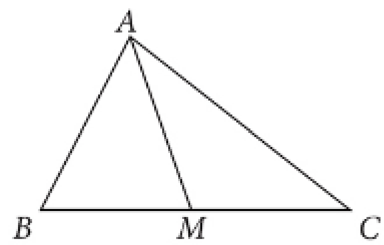
$$\cos APB = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} = \frac{b^2 - 5b + 5}{\sqrt{(b-2)^2 + 1} \cdot \sqrt{(b-3)^2 + 1}}.$$

Câu 4. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AM^2 - kBC^2$. Vậy $k = ?$

Trả lời: $\frac{1}{4}$

Lời giải

Ta có:



$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2-(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})^2}{4}$

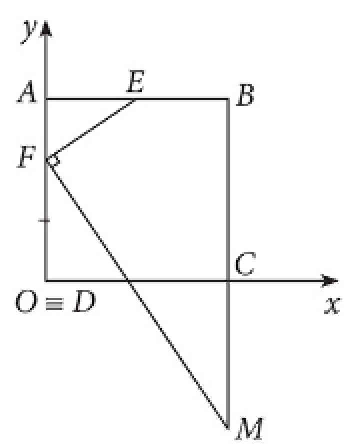
$=\frac{4AM^2-BC^2}{4}=AM^2-\frac{1}{4}BC^2.$

Câu 5. Cho hình vuông $ABCD$; E là trung điểm của AB, F là điểm sao cho $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. Xác định vị trí của điểm M trên đường thẳng BC sao cho $EFM=90^{\circ}$.

Trả lời: là điểm nằm trên phần kéo dài của BC về phía C sao cho $CM=\frac{5a}{6}$.

Lời giải

Gọi a là độ dài cạnh hình vuông.



Xét hệ trục toạ độ xOy sao cho $D\equiv O=(0;0), C=(a;0), A=(0;a)$.

Dễ thấy $E=\left(\frac{a}{2};a\right); F=\left(0;\frac{2a}{3}\right)$.

Giả sử $M=(a;y)\quad (y\in\mathbb{R})$. Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{FE}=\left(\dfrac{a}{2};\dfrac{a}{3}\right)\\ \overrightarrow{FM}=\left(a;y-\dfrac{2a}{3}\right)\end{cases}$

Vậy ta có biến đổi tương đương:

$EF\perp FM$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{FM}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a}{3}\left(y-\dfrac{2a}{3}\right)=0\Leftrightarrow y=\dfrac{-5a}{6}.$

Vậy $M\left(a;\dfrac{-5a}{6}\right)$.

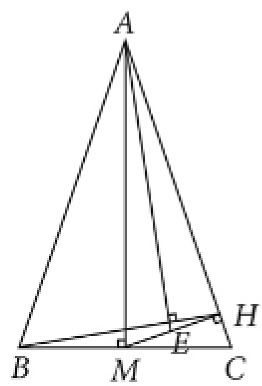
Từ đó M là điểm nằm trên phần kéo dài của BC về phía C sao cho $CM=\dfrac{5a}{6}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC cân tại $A;M$ là trung điểm của BC,H là hình chiếu của M trên $AC;E$ là trung điểm của MH. Tính $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}$

Trả lời: $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}=0$

Lời giải

Ta có biến đổi tích vô hướng như sau:



$2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BH}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AH})\cdot(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MH})$

$=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BM}$

$=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MH}+(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MH})\cdot\overrightarrow{BM}$

$=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MC}$

$=\overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MH}$

$=\overrightarrow{MH}^2+\overrightarrow{MH}^2=0.$

Suy ra $AE\perp BH$ (đpcm).

Suy ra $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BH}=0$

Câu 7. Cho tam giác ABC có $BC=a,CA=b,AB=c$. Biết M là trung điểm của BC.

Tính $\overrightarrow{AM}^2$?

Trả lời: $\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$

Lời giải

Vì M là trung điểm của BC, nên: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$;

$\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right)$. Mà $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$;

Suy ra: $\overrightarrow{AM}^2=\dfrac{1}{4}\left(c^2+2\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}+b^2\right)=\dfrac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}$.

(đây cũng là công thức để tính độ dài đường trung tuyến tam giác).

Câu 8. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Biết rằng AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Tính $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}$ biết $AB=2$.

Trả lời: 4

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AE}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{BE}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}.$

Vì AB là đường kính nửa đường tròn nên

$ADB=90^\circ,ACB=90^\circ\Rightarrow\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AD}=0.$

Khi đó: $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{AB}$

$=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2=AB^2=4$

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\dfrac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm CD. Khi đó BMN là tam giác vuông cân tại đỉnh nào?

Trả lời: vuông cân tại đỉnh M.

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b}$.

Khi đó: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})$

$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1}{4}(-\vec{a}+3\vec{b})$ và

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1}{4}(3\vec{a}+\vec{b})$.

Ta có: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{16}(-\vec{a}+3\vec{b})(3\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1}{16}\left(-3\vec{a}^2+3\vec{b}^2+8\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

$=\dfrac{1}{16}\left(-3AD^2+3AB^2+0\right)=0\Rightarrow MB\perp MN(1)$.

Hơn nữa: $\overrightarrow{MB}^2=\dfrac{1}{16}(-\vec{a}+3\vec{b})^2=\dfrac{1}{16}\left(\vec{a}^2+9\vec{b}^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\dfrac{1}{16}\left(AD^2+9AB^2-0\right)=\dfrac{5}{8}AB^2$;

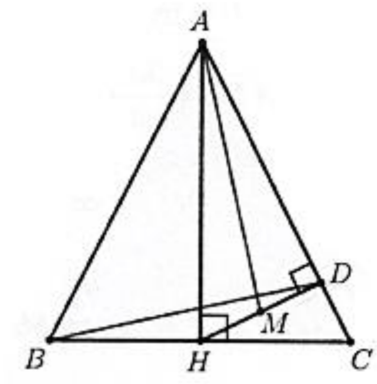
$\overrightarrow{MN}^2=\dfrac{1}{16}(3\vec{a}+\vec{b})^2=\dfrac{1}{16}\left(9\vec{a}^2+\vec{b}^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\dfrac{1}{16}\left(9AD^2+AB^2+0\right)=\dfrac{5}{8}AB^2$.

Suy ra $MB=MN$ (2). Từ (1) và (2) suy ra ΔBMN vuông cân tại đỉnh M.

Câu 10. Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung điểm của BC, D là hình chiếu của H trên AC, M là trung điểm của HD. Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}$

Trả lời: 0

Lời giải



Ta cần chứng minh: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=0$. Ta có: $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BH}+\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD};\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD})$

Do đó: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HD})$,

mà $\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}=0(\text{ do } AH\perp BC)\\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HD}=0(\text{ do } HD\perp AC)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{HC})$

$=\frac{1}{2}[\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD})\cdot\overrightarrow{HC}]$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HD}+\underbrace{\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{HC}}_{0}+\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{HC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}\cdot(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC})=\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

Vậy $AM\perp DB$.

Câu 11. Cho hai điểm A,B cố định có khoảng cách bằng a. Tập hợp điểm M sao cho:

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{3a^2}{4}$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời: $R=a$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB ta có:

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\frac{3a^2}{4}\Leftrightarrow(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})=\frac{3a^2}{4}$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=\frac{3a^2}{4}\Leftrightarrow MI^2-IA^2=\frac{3a^2}{4}$

$$\overset{IA=\frac{a}{2}}{\Leftrightarrow} MI^2=\frac{a^2}{4}+\frac{3a^2}{4}\Leftrightarrow MI=a.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R=a$.

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k. Tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k$ là đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời: $R=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$

Lời giải

Gọi I là tâm của hình vuông $ABCD$

Ta có : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})\ =(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA})=\overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2=MI^2-IA^2$.

Hoàn toàn tương tự, ta có: $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=MI^2-IB^2$.

Khi đó: $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=k\Leftrightarrow 2MI^2-IA^2-IB^2=k\Leftrightarrow 2MI^2-2IA^2=k$

$$\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}+IA^2\Leftrightarrow MI^2=\frac{k}{2}+\frac{a^2}{2}\Leftrightarrow MI=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$$

(trong đó $IA^2=\left(\frac{AC}{2}\right)^2=\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}$).

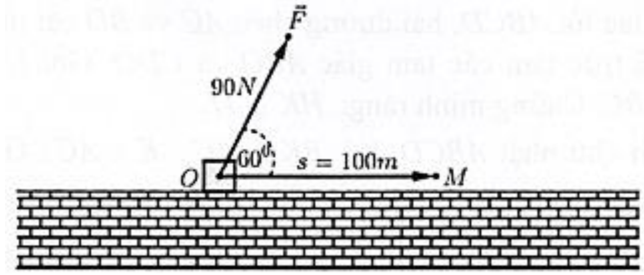
Nếu $k<-a^2$: Tập hợp điểm M là tập rỗng.

Nếu $k=-a^2$ thì $MI=0\Leftrightarrow M\equiv I$ (điểm M trùng với điểm I).

Nếu $k>-a^2$ thì $MI=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$.

Khi đó tập hợp điểm M là đường tròn tâm I, bán kính $R=\sqrt{\frac{k+a^2}{2}}$.

Câu 13. Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn $90\,N$ làm một vật dịch chuyển một đoạn $100\,m$. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc 60°. Tính công sinh ra bởi lực $\vec{F}$.



Trả lời: $4500J$

Lời giải

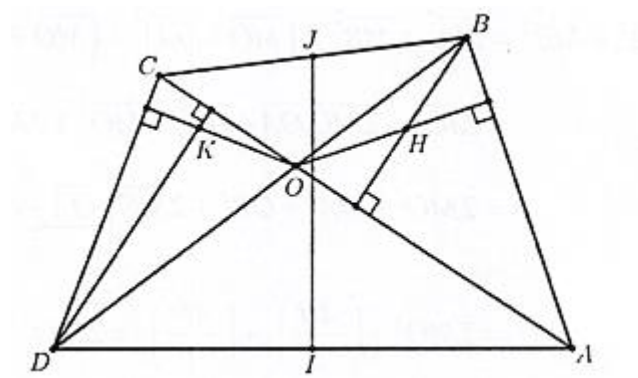
Đặt $OM = s$ là đoạn đường mà vật di chuyển được với O là điểm đặt vật ban đầu. Công sinh ra bởi lực $\vec{F}$ là:

$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{OM} = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{OM}| \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{OM}) = 90 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 4500J.$

Câu 14. Cho tứ giác lồi $ABCD$, hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABO và CDO. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AD và BC. Tính $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ}$?

Trả lời: 0

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CJ} \\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BJ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$.

Suy ra: $\overrightarrow{HK} \cdot 2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HK}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{DB}$

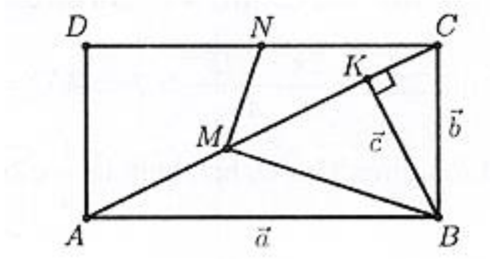
$= (\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DK})\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK})\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \vec{0} = 0$.

Vậy $\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$

Câu 15. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Kẻ $BK \perp AC, K \in AC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AK và CD. Tìm số đo góc BMN.

Trả lời: 90°

Lời giải



Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b}, \overrightarrow{BK}=\vec{c}$ và $BA=a, BC=b, BK=c$. Khi đó:

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}), \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c})+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}=\frac{1}{2}(2\vec{b}-\vec{c}).$$

Do đó: $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}(2\vec{b}-\vec{c})(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{4}\left(2\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}^{2}\right)$

$$=\frac{1}{4}[2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\vec{b}-\vec{a})\vec{c}+(\vec{b}-\vec{c})\vec{c}].$$

Ta thấy rằng: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ do $\vec{a}\perp\vec{b}; (\vec{b}-\vec{a})\vec{c}=\overrightarrow{AC}\cdot\vec{c}=0$

Do $AC \perp BK; (\vec{b}-\vec{c})\vec{c}=\overrightarrow{KC}\cdot\vec{c}=0$ do $CK \perp BK$.

Vì vậy $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BM}=0 \Rightarrow BMN=90^{\circ}$.

Câu 16. Cho đoạn $AB=20$. Tồn tại điểm M sao cho $T=3MA^{2}+2MB^{2}$ đạt giá trị bé nhất $T_{\min}$. Tính giá trị $T_{\min}$?

Trả lời: 480

Lời giải

Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA}+2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}.$$

Vậy điểm I thuộc đoạn AB và $IA=\frac{2}{5}\cdot AB=\frac{2}{5}\cdot 20=8, IB=12$.

Ta có : $T = 3MA^2 + 2MB^2 = 3\overrightarrow{MA}^2 + 2\overrightarrow{MB}^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

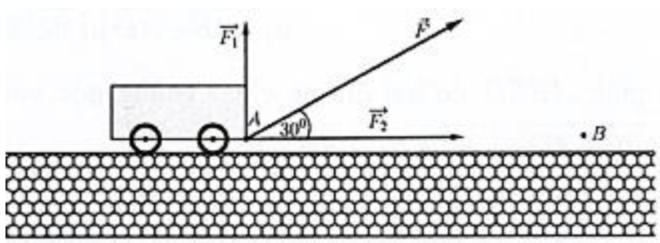
$$= 3\overrightarrow{MI}^2 + 6\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}^2 + 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB}^2$$
$$= 5MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\underbrace{3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}}_{\vec{0}}) = 5MI^2 + 3IA^2 + 2IB^2.$$

Ta có $\left(3IA^2 + 2IB^2\right)$ là hằng số do ba điểm A, B, I cố định.

Do đó: T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow 5MI^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ bé nhất $\Leftrightarrow$ Điểm M trùng với điểm I .

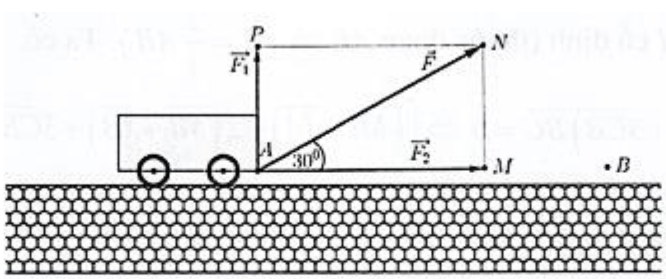
Khi đó giá trị T nhỏ nhất là : $T_{\min} = 3IA^2 + 2IB^2 = 3 \cdot 8^2 + 2 \cdot 12^2 = 480$.

Câu 17. Một chiếc xe được kéo bởi một lực $\vec{F}$ có độ lớn $50\,N$, di chuyển theo quãng đường từ A đến B có chiều dài $200\,m$. Cho biết góc hợp bởi lực $\vec{F}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng 30° và lực $\vec{F}$ được phân tích thành hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$. Tính công sinh ra bởi các lực $\vec{F}, \vec{F_1}, \vec{F_2}$?



Trả lời: $5000\sqrt{3}\,J$; $0; 5000\sqrt{3}\,J$

Lời giải



Đặt $\vec{F} = \overrightarrow{AN}, \vec{F_1} = \overrightarrow{AP}, \vec{F_2} = \overrightarrow{AM}$.

Khi đó $AMNP$ là hình bình hành, mà $AM \perp AP$ nên $AMNP$ là hình chữ nhật.

Ta có : $AN = 50, AM = AN \cdot \cos 30^\circ = 50 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$,

$AP = MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = 25.$

Lực $\vec{F}$ sinh ra công $A=|\vec{F}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos 30^\circ=50\cdot 200\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5000\sqrt{3}\,J$.

Lực $\vec{F_1}$ có độ lớn $25N$ và tạo với phương dịch chuyển góc 90° nên công sinh ra là

$A_1=\left|\vec{F_1}\right|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos 90^\circ=0\,J$.

Lực $\vec{F_2}$ có độ lớn $25\sqrt{3}\,N$ và tạo với phương dịch chuyển góc 0° nên công sinh ra là

$A_2=\left|\vec{F_2}\right|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos 0^0=25\sqrt{3}\cdot 200\cdot 1=5000\sqrt{3}\,J$.

Câu 18. Cho tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AC=7\,cm$ và $BC=14\,cm$.

Tính côsin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$.

Trả lời: $-\frac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=180^\circ-(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=180^\circ-ACB$.

Mà $\cos(ACB)=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$ nên $ACB=60^\circ$.

Vậy $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=180^\circ-60^\circ=120^\circ$ hay $\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=\cos 120^\circ=-\frac{1}{2}$

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 3. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $BM=1$, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho $DN=1$ và P là trung điểm BC. Tính $\cos MNP$.

Trả lời: $\frac{13}{5\sqrt{10}}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{NP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Suy ra $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}=\frac{2}{9}\cdot 9+\frac{1}{2}\cdot 9=\frac{13}{2}$

Mặt khác $|\overrightarrow{NM}|=\sqrt{10}, |\overrightarrow{NP}|=\frac{5}{2}\Rightarrow\cos MNP=\frac{13}{5\sqrt{10}}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Tính: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}$.

Trả lời: 0

Lời giải

Vì M là trung điểm BC nên:

$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}(1)$

Tương tự ta có: $2\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}(2)$,

$2\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}(3)$

Cộng từng vế (1), (2), (3) được:

$2\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ hay $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ (đpcm).

Câu 21. Cho tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O) bán kính R, M là điểm bất kỳ nằm trên đường tròn (O). Tính $MA^2+MB^2+MC^2$.

Trả lời: $2a^2$

Lời giải

Tam giác đều ABC cạnh a nội tiếp đường tròn (O) bán kính R nên O là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ và $R=OA=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2=2a^2$

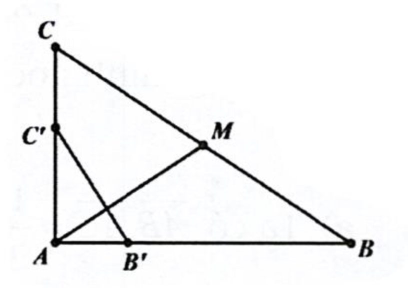
$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2=2a^2$$
$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MO}^2+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=2a^2$$
$$\Leftrightarrow 6R^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\vec{0}=2a^2 \Leftrightarrow 6\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2=2a^2$$

Vậy $MA^2+MB^2+MC^2=2a^2$.

Câu 22. Cho tam giác ABC vuông tại A, trên hai cạnh AB và AC lần lượt lấy hai điểm B' và C' sao cho $AB\cdot AB'=AC\cdot AC'$. Gọi M là trung điểm của BC. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'C'}$

Trả lời: 0

Lời giải



Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

Do đó, $2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'C'}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB'}\right)$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB'}=0-AB\cdot AB'+AC\cdot AC'=0$

Câu 23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=a$ và $AD=a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD. Tính $\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Trả lời: 0

Lời giải

Ta có: $AC=BD=\sqrt{2a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

Suy ra

$\overrightarrow{BK}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=-a^2+0+0+\frac{1}{2}(a\sqrt{2})^2=0.$

Câu 24. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Biết $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=\sqrt{3}$ và $(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$. Tính $|\vec{a}+\vec{b}|$.

Trả lời: $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$

Lời giải

Ta có $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\vec{b}}=\sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})}=\sqrt{7-2\sqrt{3}}$

Câu 25. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Tập hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=a^2$ là đường tròn bán kính $R=?$.

Trả lời: $R=a$

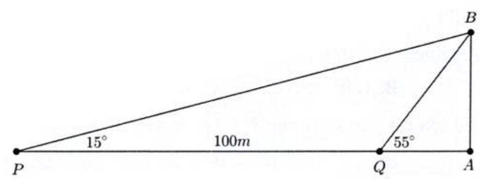
Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MD}=a^2 \Leftrightarrow MO^2-OA^2+MO^2-OB^2=a^2 \Leftrightarrow MO^2=a^2$

$$\Leftrightarrow MO=a\left(OA=OB=\frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm O, bán kính $R=a$.

Câu 26. Hai chiếc tàu thủy P và Q trên biển cách nhau $100m$ và thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB ở trên bờ biển. Từ P và Q người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới các góc $BPA=15^\circ$ và $BQA=55^\circ$. Tính chiều cao của tháp (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Trả lời: $\approx 33m$

Lời giải

$$\frac{BQ}{PQ}=\frac{\sin BPQ}{\sin PBQ}=\frac{\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}\Rightarrow BQ=\frac{PQ\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

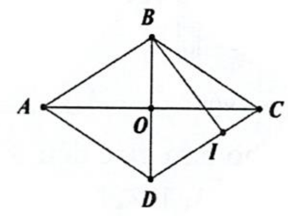
$$\frac{AB}{BQ}=\sin 55^\circ\Rightarrow AB=BQ\sin 55^\circ=\frac{PQ\sin 15^\circ}{\sin 40^\circ}\cdot\sin 55^\circ\approx 33m.$$

Câu 27. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có cạnh bằng a và $ABD=60^\circ$. Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BI}$.

Trả lời: $\frac{a^2}{2}$

Lời giải

Do $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng a và $ABD=60^\circ$ nên ABD và BCD là các tam giác đều cạnh a.



Ta có:

$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AO}\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DI})=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{AO}\cdot\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot a\cdot\cos 30^\circ=\frac{a^2}{2}$$

Câu 28. Cho ΔABC đều cạnh là 3 . Điểm M thỏa mãn: $MA^2+MB^2=18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời: $R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Gọi I là trung điểm AB. Đưa về vectơ bằng cách chèn điểm I vào tính ra

$$2MI^2+IA^2+IB^2=18\Leftrightarrow MI^2=\frac{27}{4}\Leftrightarrow MI=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Vậy quỷ tích điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Câu 29. Cho ΔABC đều cạnh là 3 . Điểm M thỏa mãn: $MA^2+MB^2+MC^2=18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời: $R=\sqrt{2}$

Lời giải

Gọi G là trong tâm tam giác ABC suy ra $GA=GB=GC=\sqrt{3}$

Chèn G vào biến đổi suy ra $3ME^2+GA^2+GB^2+GC^2=18\Leftrightarrow ME^2=2\Leftrightarrow ME=\sqrt{2}$

Vậy quỷ tích điểm M là đường tròn tâm E bán kính $R=\sqrt{2}$.

Câu 30. Cho ΔABC đều cạnh là 3 . Điểm M thỏa mãn: $2MA^2+MB^2+MC^2=18$, khi đó tập hợp điểm M thuộc đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Trả lời: $R=\dfrac{\sqrt{183}}{8}$

Lời giải

Gọi N là điểm thỏa mãn $2\cdot\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ và D là trung điểm BC. Suy ra N là trung điểm

$AD.NA=ND=AD:2=\dfrac{3\sqrt{3}}{4};NB=NC=\dfrac{\sqrt{39}}{4}$;

Chèn N vào đề ta được $4MN^2+2NA^2+NB^2+NC^2=18$ suy ra $MN=\dfrac{\sqrt{183}}{8}$

Vậy tập hợp điểm M thỏa đường tròn tâm N bán kính $R=MN=\dfrac{\sqrt{183}}{8}$

Câu 31. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC và H là trực tâm. Biết $\overrightarrow{MH}\cdot\overrightarrow{MA}=kBC^2$. Khi đó $k=?$

Trả lời: $\dfrac{1}{4}$

Lời giải

Ta có M là trung điểm BC

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}),\overrightarrow{HM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{HM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HC})$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HC})=\frac{1}{4}[\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BC})]$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC})$$
$$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB})=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\cdot)=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}^2=\frac{1}{4}BC^2$$

Câu 32. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB^2+CD^2=BC^2+AD^2$. Tính $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}$

Trả lời: 0

Lời giải

$AB^2+CD^2=BC^2+AD^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{CD}^2=\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{AD}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{BC}^2=0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{BD}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{DB}(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC})=0$

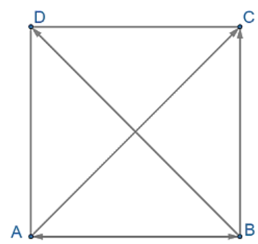
$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC})=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC})=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\cdot 2\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

Câu 33: Cho hình vuông *ABCD* có cạnh bằng a. Tính các tích vô hướng:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

Lời giải



Ta có: $AC=BD=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$

$AB\perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a\cdot a\cdot\cos45^\circ=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right)=a\sqrt{2}\cdot a\cdot\cos135^\circ=-a^2$

$AC\perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

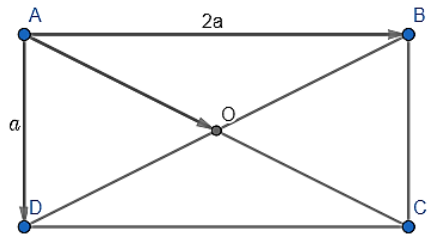
Chú ý: $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Câu 34: Cho hình chữ nhật *ABCD* có tâm *O* và cho *AD* = a, *AB* = 2a. Tính:

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO}$;   b) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

a)



$$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$$
$$= \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$$
$$\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right) = \cos OAB =$$
$$\cos CAB = \frac{AB}{AC} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AO}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right)$$
$$= AB \cdot \frac{1}{2} AC \cdot \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right)$$
$$= 2a \cdot \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2a^2$$

b) $AB \perp AD \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$

Câu 35: Cho ba điểm *O*, *A*, *B* thẳng hàng và *OA* = a, *OB* = b. Tinh tích vô hướng $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ trong hai trường hợp:

a) Điểm *O* nằm ngoài đoạn thẳng *AB*; b) Điểm *O* nằm trong đoạn thẳng *AB.*

Lời giải

a) Ta có:

Ta thấy hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 0^\circ$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = a \cdot b \cdot \cos 0^\circ = ab$$

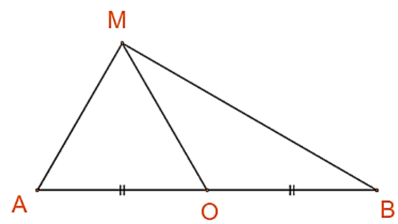
b) Ta có:

Ta thấy hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ ngược hướng nên $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 180^\circ$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = a \cdot b \cdot \cos 180^\circ = -ab$$

Câu 36: Cho đoạn thẳng AB có O là trung điểm và cho điểm M tuỳ ý. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - OA^2$.

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$

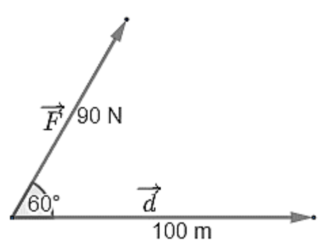
$$\Rightarrow \overrightarrow{MO}^2-\overrightarrow{OA}^2=\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MA}$$

(đpcm)

Câu 37: Một người dùng một lực $\vec{F}$ có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100 m. Biết lực $\vec{F}$ hợp với hướng dịch chuyển một góc $60°$. Tính công sinh bởi lực $\vec{F}$.

Lời giải



Công sinh bởi lực $\vec{F}$ được tính bằng công thức

$$A=\vec{F}\cdot\vec{d}=|\vec{F}|\cdot|\vec{d}|\cdot\cos\left(\vec{F},\vec{d}\right)=90\cdot100\cdot\cos60^\circ=4500(\text{ J})$$

Vậy công sinh bởi lực $\vec{F}$ có độ lớn bằng 4500 (J)

Câu 38: Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4,\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30^\circ$

b) $|\vec{a}|=5,|\vec{b}|=6,\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^\circ$

c) $\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=3,\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

d) $\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=3,\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng

Lời giải

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos30^\circ=12\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=5\cdot6\cdot\cos120^\circ=30\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-15$

c) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng nên $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=0^\circ$

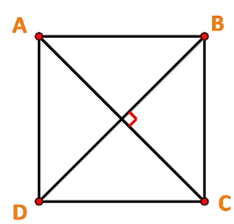
$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3\cdot\cos0^\circ=6.1=6$

d) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng nên $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=180^\circ$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3\cdot\cos180^\circ=6\cdot(-1)=-6$.

Câu 39: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$



Lời giải

a) Ta có: $AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2a^2}=a\sqrt{2}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos BAC=a^2\sqrt{2}\cos45^\circ=a^2$.

b) Dễ thấy: $AC\perp BD\Rightarrow\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}\right)=90^\circ$

$\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=AC\cdot BD\cdot\cos90^\circ=AC\cdot BD\cdot0=0$.

Câu 40: Cho tam giác ABC. Chứng minh: $AB^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$

Lời giải

$$AB^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$$
$$= \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{0} = 0.$$

Câu 41: Cho hai vectơ có độ dài lần lượt là 3 và 4 và có tích vô hướng là -6. Tính góc giữa hai vectơ đó.

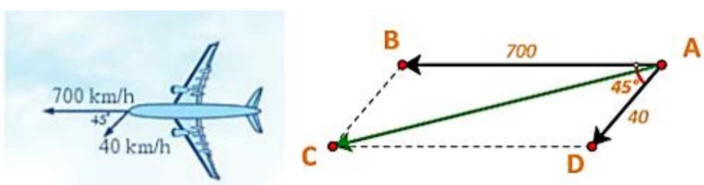
Lời giải

Ta cho: $|\vec{a}| = 3; |\vec{b}| = 4$ và $\vec{a}\cdot\vec{b} = -6$

Ta có công thức:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = 3\cdot 4\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -6 \Rightarrow 3\cdot 4\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = -6 \Rightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \left(\vec{a},\vec{b}\right) = 120^\circ$$

Câu 42: Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 700 km/h thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 40 km/h (Hình 68). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị km/h.)



Lời giải

Vẽ vecto $\overrightarrow{AB}$ là vecto vận tốc của máy bay, $\overrightarrow{AD}$ là vecto vận tốc của gió.

Khi đó vecto vận tốc mới của máy bay là $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Dựng hình bình hành ABC**D**. Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác ABC, ta có:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos B$

Mà $AB = 700, BC = AD = 40, \hat{B} = 135^\circ$

$$\Rightarrow AC^2 = 700^2 + 40^2 - 2.700.40\cdot\cos 135^\circ \approx 531197,98$$
$$\Leftrightarrow AC \approx 728,83$$

Vậy tốc độ mới của máy bay là $728,83\text{ km/h}$.

Câu 43: Cho tam giác nhọn ABC, kẻ đường cao AH. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$ b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}$

Lời giải

Ta có: $AH\perp CB\Rightarrow\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)=90^\circ\Leftrightarrow\cos\left(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{CB}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB}=0$

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AH}=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{HB}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Câu 44: Cho tam giác ABC có $AB=2, AC=3, BAC=60^\circ$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC.

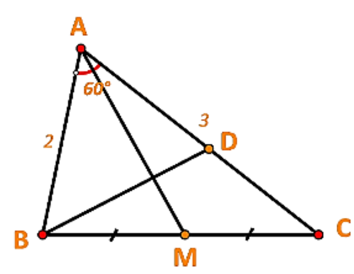
Điểm D thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=\dfrac{7}{12}\overrightarrow{AC}$.

a) Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

b) Biểu diễn $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BD}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

c) Chứng minh $AM\perp BD$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot3\cdot\cos BAC=6\cdot\cos60^\circ=3$

b)Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$ (do M là trung điểm của BC)

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$+)\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{7}{12}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

c) Ta có:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{7}{12}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \frac{7}{24}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{7}{24}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= -\frac{1}{2}AB^2 + \frac{7}{24}AC^2 - \frac{5}{24}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + \frac{7}{24} \cdot 3^2 - \frac{5}{24} \cdot 3 = 0$$