

## MỤC LỤC

▶ BÀI 2. CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC .....	2
Ⓐ. Tóm tắt kiến thức .....	2
Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản.....	3
♦ Dạng 1: Tính giá trị của các biểu thức chứa giá trị lượng giác .....	3
♦ Dạng 2: Giá trị lượng giác của góc lượng giác.....	7
♦ Dạng 3: Ứng dụng .....	11
Ⓒ. Dạng toán rèn luyện.....	12
♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	12
♦ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai .....	28
♦ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	40

**A. Tóm tắt kiến thức**

**1. Công thức cộng**

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ ;  $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ ;
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ ;  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ ;
- $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
- $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

(khi các biểu thức đều có nghĩa).

**2. Công thức nhân đôi**

- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ ;
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
- $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

(khi các biểu thức đều có nghĩa).

**3. Công thức hạ bậc**

- $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ ;
- $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$ .

**4. Công thức biến đổi tích thành tổng**

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin a \sin b = -\frac{1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$
- $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ .

**5. Công thức biến đổi tổng thành tích**

- $\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$ ;
- $\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}$
- $\cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$ ;
- $\sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}$ .

## B. Phân dạng toán cơ bản

### ♦ Dạng 1: Tính giá trị của các biểu thức chứa giá trị lượng giác

#### ☞ Các ví dụ minh họa

**Câu 1:** Cho  $\tan(a+b) = 3$ ,  $\tan(a-b) = 2$ . Tính  $\tan 2a$ ,  $\tan 2b$ .

#### Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan 2a = \tan[(a+b) + (a-b)] = \frac{\tan(a+b) + \tan(a-b)}{1 - \tan(a+b) \cdot \tan(a-b)} = \frac{3+2}{1-3 \cdot 2} = -1;$$

$$\tan 2b = \tan[(a+b) - (a-b)] = \frac{\tan(a+b) - \tan(a-b)}{1 + \tan(a+b) \cdot \tan(a-b)} = \frac{3-2}{1+3 \cdot 2} = \frac{1}{7}.$$

**Câu 2:** Cho  $\sin a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . Tính  $\cos 2a$ ,  $\cos 4a$ .

#### Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2 \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5};$$

$$\cos 4a = 2\cos^2 2a - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}.$$

**Câu 3:** Cho  $\cos 2x = \frac{1}{4}$ . Tính:

$$A = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right); B = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

#### Lời giải

$$A = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] + \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \cos 2x + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8}$$

$$B = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] - \cos\left[\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right] \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \left( \cos 2x - \cos \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{8}$$

**Câu 4:** Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $\sin \frac{7\pi}{12}$

b)  $\cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12}$

$$c) \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24}$$

**Lời giải**

$$a) \sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4};$$

$$b) \cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} = 2 \cos \frac{\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}}{2} \cos \frac{\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2};$$

c)

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} &= \frac{1}{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{24} - \frac{5\pi}{24} \right) - \cos \left( \frac{\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) - \cos \frac{\pi}{4} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

**Câu 5:** Không dùng máy tính, hãy tính:

a)  $\cos 165^\circ$  ;

b)  $\tan \frac{7\pi}{12}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \cos(165^\circ) &= \cos(120^\circ + 45^\circ) = \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \tan \left( \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{1 - 3} = -2 - \sqrt{3}$$

**Câu 6:** Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$A = \cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ; \quad B = \sin \frac{11\pi}{2} \cos \frac{5\pi}{2}.$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} A &= \cos 75^\circ \cdot \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \left[ \cos(75^\circ - 15^\circ) + \cos(75^\circ + 15^\circ) \right] \\ &= \frac{1}{2} (\cos 60^\circ + \cos 90^\circ) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \sin \frac{11\pi}{2} \cos \frac{5\pi}{2} = \frac{1}{2} \left[ \sin \left( \frac{11\pi}{2} - \frac{5\pi}{2} \right) + \sin \left( \frac{5\pi}{2} + \frac{11\pi}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sin \left( \frac{\pi}{2} \right) + \sin \left( \frac{4\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{-\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

**Câu 7:** Không dùng máy tính, tính giá trị của biểu thức sau

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{5\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9}}$$

**Lời giải**

$$A = \frac{\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{5\pi}{9}}{\cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9}} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{9}}{2 \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$$

**Câu 8:** Biết  $\sin a = \frac{1}{3}$  và  $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ . Hãy tính các giá trị lượng giác của góc  $2a$ .

**Lời giải**

Do  $\frac{\pi}{2} < a < \pi$  nên  $\cos a < 0$ .

$$\Rightarrow \cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Ta có: } \sin 2a = 2 \sin a \cos a = 2 \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9};$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9};$$

$$\tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-4\sqrt{2}}{9} : \frac{7}{9} = -\frac{4\sqrt{2}}{7};$$

$$\cot 2a = \frac{1}{\tan 2a} = -\frac{7}{4\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{8}.$$

**Câu 9:** Không dùng máy tính cầm tay. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24}$

b)  $\cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12}$

c)  $\frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}}$ .

**Lời giải**

a)  $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24} = \frac{1}{2} \left[ \sin \left( \frac{19\pi}{24} - \frac{37\pi}{24} \right) + \sin \left( \frac{19\pi}{24} + \frac{37\pi}{24} \right) \right]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[ \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\frac{7\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \left( -\sin\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } \cos\frac{41\pi}{12} - \cos\frac{13\pi}{12} &= -2\sin\frac{\frac{41\pi}{12} + \frac{13\pi}{12}}{2} \sin\frac{\frac{41\pi}{12} - \frac{13\pi}{12}}{2} = -2\sin\frac{9\pi}{4} \sin\frac{7\pi}{6} \\
&= 2\sin\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{c) } \frac{\tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{3\pi}{28}}{1 + \tan\frac{6\pi}{7} \tan\frac{3\pi}{28}} &= \frac{\tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{3\pi}{28}}{1 + \tan\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) \tan\frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{3\pi}{28}}{1 - \tan\frac{\pi}{7} \tan\frac{3\pi}{28}} \\
&= \tan\left(\frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{28}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1.
\end{aligned}$$

**Câu 10:** Không sử dụng máy tính, tính các giá trị lượng giác của góc  $105^\circ$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\
\sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\
\tan 105^\circ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}; \cot 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}
\end{aligned}$$

**Câu 10:** Cho  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $\cos 2\alpha$ ;

b)  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$

c)  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$

**Lời giải**

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ nên } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}.$$

$$\text{a) } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{169}.$$

$$\text{b) } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{3} = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{13}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12 - 5\sqrt{3}}{26}.$$

$$\text{c) Ta có } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}.$$

$$\text{Suy ra } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{12}{5} + 1}{1 - \left(-\frac{12}{5}\right) \cdot 1} = -\frac{7}{17}$$

**Câu 11:** Tính các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$ , biết  $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$  và  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = -\frac{7}{25} \text{ nên } 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{7}{25}.$$

$$\text{Suy ra } \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \text{ và } \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}.$$

$$\text{Mà } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \cos \alpha > 0 \text{ và } \sin \alpha > 0.$$

$$\text{Do đó } \cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ và } \sin \alpha = \frac{4}{5}. \text{ Suy ra } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\text{và } \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{3}{4}.$$

♦ **Dạng 2:** Giá trị lượng giác của góc lượng giác

☞ **Các ví dụ minh họa**

**Câu 1:** Cho  $\cos(a+2b) = 2\cos a$ . Chứng minh rằng:  $\tan(a+b)\tan b = \frac{-1}{3}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \cos(a+2b) = 2\cos a \Leftrightarrow \cos[(a+b)+b] = 2\cos[(a+b)-b]$$

$$\Leftrightarrow 3\sin(a+b) \cdot \sin b = -\cos(a+b) \cdot \cos b \Leftrightarrow \tan(a+b)\tan b = \frac{-1}{3}.$$

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$ , chứng minh rằng:

$$a) \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$$

(với điều kiện tam giác  $ABC$  không vuông);

$$b) \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1;$$

**Lời giải**

$$a) \text{ Do } A + B = \pi - C \text{ nên } \tan(A + B) = -\tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

$$b) \text{ Do } \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \text{ nên } \tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cot \frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$$

**Câu 3:** Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

$$a) \sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = \sin \alpha;$$

$$b) \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha;$$

$$c) \sin \alpha (2 \cos 4\alpha + 2 \cos 2\alpha + 1) = \sin 5\alpha;$$

$$d) \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

**Lời giải**

a)

$$\begin{aligned} & \sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) \\ &= (\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha) - (\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha) \quad b) \\ &= 2 \cos 60^\circ \sin \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4\alpha) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha \quad c) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sin \alpha (2 \cos 4\alpha + 2 \cos 2\alpha + 1) \\
&= 2 \sin \alpha \cos 4\alpha + 2 \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(-3\alpha) + \sin 5\alpha] + 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(-\alpha) + \sin 3\alpha] + \sin \alpha \\
&= (-\sin 3\alpha + \sin 5\alpha) + (-\sin \alpha + \sin 3\alpha) + \sin \alpha = \sin 5\alpha
\end{aligned}$$

$$d) \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta (1 + \tan \alpha \tan \beta)}{\cos \alpha \cos \beta (1 - \tan \alpha \tan \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

**Câu 4:** Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$$

$$b) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)};$$

$$c) \frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$$

**Lời giải**

$$a) \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha;$$

$$b) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{2\alpha}{2}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha}{\cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$c) \frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{4 \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

**Câu 5:** Chứng minh đẳng thức sau

$$\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a.$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
\sin^4 a + \cos^4 a &= (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2 \sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2 \cdot (\sin a \cos a)^2 \\
&= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{1 - \cos 4a}{2} \right) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a
\end{aligned}$$

**Câu 6:** Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) A = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$$

$$b) B = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ.$$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} a) A &= \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} = \left( \sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9} \\ &= 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0. \end{aligned}$$

$$b) \text{ Vì } \sin 78^\circ = \cos 12^\circ; \sin 66^\circ = \cos 24^\circ; \sin 42^\circ = \cos 48^\circ \text{ nên}$$

$$B = \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ.$$

Nhân hai vế với  $\cos 6^\circ$  và áp dụng công thức góc nhân đôi, ta được:

$$\cos 6^\circ \cdot B = \cos 6^\circ \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{16} \sin 96^\circ = \frac{1}{16} \sin (90^\circ + 6^\circ) = \frac{1}{16} \cos 6^\circ$$

$$\text{Vậy } B = \frac{1}{16}.$$

**Câu 7:** Chứng minh rằng:

$$a) \cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos \left( a + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$b) \sin a + \sqrt{3} \cos a = 2 \sin \left( a + \frac{\pi}{3} \right).$$

**Lời giải**

a) Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \cos \left( a + \frac{\pi}{4} \right) &= \sqrt{2} \left( \cos a \cos \frac{\pi}{4} - \sin a \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos a - \sin a) = \cos a - \sin a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \text{ Ta có } 2 \sin \left( a + \frac{\pi}{3} \right) &= 2 \left( \sin a \cos \frac{\pi}{3} + \cos a \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left( \frac{1}{2} \sin a + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a \right) \\ &= \sin a + \sqrt{3} \cos a. \end{aligned}$$

**Câu 8:** Chứng minh rằng trong mọi tam giác  $ABC$  ta đều có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

**Lời giải**

$$VT = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Mặt khác, trong tam giác  $ABC$ , ta có  $A+B+C = \pi$  nên  $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ . Từ đó suy ra:

$$\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}.$$

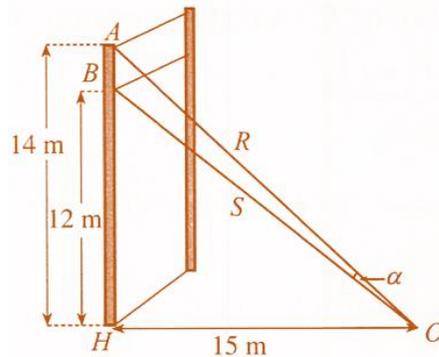
Vậy

$$\begin{aligned} VT &= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \\ &= 2 \cos \frac{C}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = VP \end{aligned}$$

### ♦ Dạng 3: Ứng dụng

#### ☞ Các ví dụ minh họa

**Câu 1:** Một sợi cáp  $R$  được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất  $14m$ . Một sợi cáp  $S$  khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất  $12m$ . Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột  $15m$  (Hình 3).



Hình 3

- Tính  $\tan \alpha$ , ở đó  $\alpha$  là góc giữa hai sợi cáp trên.
- Tính số đo góc  $\alpha$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

#### Lời giải

a) Ta có:  $\alpha = AOH - BOH$ .

Trong tam giác vuông  $AOH$ ,  $\tan AOH = \frac{AH}{OH} = \frac{14}{15}$ .

Trong tam giác vuông  $BOH$ ,  $\tan BOH = \frac{BH}{OH} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ .

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \tan(AOH - BOH) = \frac{\tan AOH - \tan BOH}{1 + \tan AOH \cdot \tan BOH} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{10}{131}.$$

b) Từ kết quả câu a ta có:  $\alpha \approx 4^\circ$ .

**Câu 2:** Trong vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức  $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ , trong đó  $t$  là thời điểm (tính bằng giây),  $x(t)$  là li độ của vật tại thời điểm  $t$ ,  $A$  là biên độ dao động ( $A > 0$ ) và  $\varphi \in [-\pi; \pi]$  là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hòa có phương trình:

$$x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}$$

$$x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}$$

Tìm dao động tổng hợp  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này

**Lời giải**

$$\begin{aligned}x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\left[2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}\right] = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

Biên độ là  $A = 2\sqrt{2}$ , pha ban đầu là  $\varphi = -\frac{\pi}{12}$

### ©. Dạng toán rèn luyện

♦ **Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn**

**Câu 1:** Tính  $\sin 105^\circ$  ta được:

A.  $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ .      B.  $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ .      C.  $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ .      D.  $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Có:  $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ$ .

$$\Rightarrow \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

**Câu 2:** Tính  $\tan 105^\circ$  ta được:

A.  $-(2+\sqrt{3})$ .      B.  $2+\sqrt{3}$ .      C.  $2-\sqrt{3}$ .      D.  $-(2-\sqrt{3})$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Cách 1: } \tan 105^\circ = \frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = -(2 + \sqrt{3}).$$

$$\text{Cách 2: } \tan 105^\circ = \tan(45^\circ + 60^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 60^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 60^\circ} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -(2 + \sqrt{3}).$$

**Câu 3:** Rút gọn biểu thức:  $\cos 54^\circ \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cos 86^\circ$ , ta được:

- A.  $\cos 50^\circ$ .      B.  $\cos 58^\circ$ .      C.  $\sin 50^\circ$ .      D.  $\sin 58^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:

$$\cos 54^\circ \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cos 86^\circ = \cos 54^\circ \cos 4^\circ - \sin 54^\circ \sin 4^\circ = \cos(54^\circ + 4^\circ) = \cos 58^\circ$$

**Câu 4:** Rút gọn biểu thức  $\cos(x + \frac{\pi}{4}) - \cos(x - \frac{\pi}{4})$  ta được

- A.  $\sqrt{2} \sin x$ .      B.  $-\sqrt{2} \sin x$ .      C.  $\sqrt{2} \cos x$ .      D.  $-\sqrt{2} \cos x$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có: } \cos(x + \frac{\pi}{4}) - \cos(x - \frac{\pi}{4}) = -2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$= -2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin x$$

**Câu 5:** Giá trị của biểu thức  $\cos \frac{37\pi}{12}$  bằng

- A.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .      B.  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .      C.  $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .      D.  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \cos \frac{37\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{12} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{12}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

**Câu 6:** Biểu thức  $M = \cos(-53^\circ) \cdot \sin(-337^\circ) + \sin(307^\circ) \cdot \sin(113^\circ)$  có giá trị bằng:

- A.**  $-\frac{1}{2}$ .      **B.**  $\frac{1}{2}$ .      **C.**  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .      **D.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ấn máy tính được đáp án A.

**Câu 7:** Rút gọn biểu thức:  $\sin(a-17^\circ) \cdot \cos(a+13^\circ) - \sin(a+13^\circ) \cdot \cos(a-17^\circ)$ ,

ta được

- A.**  $\sin 2a$ .      **B.**  $\cos 2a$ .      **C.**  $-\frac{1}{2}$ .      **D.**  $\frac{1}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin(a-17^\circ) \cdot \cos(a+13^\circ) - \sin(a+13^\circ) \cdot \cos(a-17^\circ) &= \sin[(a-17^\circ) - (a+13^\circ)] \\ &= \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Câu 8:** Giá trị của biểu thức  $\cos \frac{37\pi}{12}$  bằng

- A.**  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .      **B.**  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ .      **C.**  $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .      **D.**  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} \cos \frac{37\pi}{12} &= \cos\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\left(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

**Câu 9:** Rút gọn biểu thức:  $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$  ta được kết quả là

- A.** 0.      **B.**  $-\cos x$ .      **C.**  $-2\cos x$ .      **D.**  $\sin x - \cos x$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} \cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x &= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \cos x \\ &= -2\cos x. \end{aligned}$$

**Câu 10:** Khẳng định nào dưới đây **SAI**?

- A.**  $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$ .      **B.**  $\cos 2a = 2\cos a - 1$ .  
**C.**  $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ .      **D.**  $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ .

Lời giải

Chọn B

Có  $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$  nên **Chọn B** sai.

**Câu 11:** Gọi  $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$  thì:

- A.  $M = 1$ .      B.  $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $M = \frac{1}{4}$ .      D.  $M = 0$ .

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 = (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

**Câu 12:** Giá trị đúng của  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$  bằng

- A.  $\frac{1}{2}$ .      B.  $-\frac{1}{2}$ .      C.  $\frac{1}{4}$ .      D.  $-\frac{1}{4}$ .

Lời giải

Chọn B

Sử dụng máy tính dễ dàng có được đáp án B.

**Câu 13:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$ . Biết  $\cos a = \frac{1}{3}$ ,  $\cos b = \frac{1}{4}$ .

Giá trị  $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$  bằng

- A.  $-\frac{113}{144}$ .      B.  $-\frac{115}{144}$ .      C.  $-\frac{117}{144}$ .      D.  $-\frac{119}{144}$ .

Lời giải

Chọn D

Ta có :

$$\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{144}$$

**Câu 14:** Nếu biết  $\sin a = \frac{8}{17}$ ,  $\tan b = \frac{5}{12}$  và  $a, b$  đều là các góc nhọn và dương thì  $\sin(a-b)$  là:

- A.  $\frac{20}{220}$ .      B.  $-\frac{20}{220}$ .      C.  $\frac{21}{221}$ .      D.  $\frac{22}{221}$ .

Lời giải

Chọn C

Ta có  $a, b$  đều là các góc nhọn và dương.

$$\sin a = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos a = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}.$$

$$\tan b = \frac{5}{12} \Rightarrow \cos b = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{25}{144}}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin b = \tan b \cdot \cos b = \frac{5}{13}.$$

$$\Rightarrow \sin(a-b) = \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{21}{221}.$$

**Câu 15:** Nếu  $\tan x = 0.5$ ;  $\sin y = \frac{3}{5}$  ( $0 < y < 90^\circ$ ) thì  $\tan(x+y)$  bằng:

- A. 2.      B. 3.      C. 4.      D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$\tan x = 0.5 = \frac{1}{2}, \sin y = \frac{3}{5} \text{ (} 0 < y < 90^\circ \text{)} \Rightarrow \cos y = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan y = \frac{3}{4}.$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = 2.$$

**Câu 16:** Gọi  $M = \tan x - \tan y$  thì:

- A.  $M = \tan(x-y)$ .      B.  $M = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$ .  
 C.  $M = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cdot \cos y}$ .      D.  $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ .

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}.$$

**Câu 17:** Gọi  $M = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) - \sin(a+b) \cdot \sin(a-b)$  thì:

A.  $M = 1 - 2\cos^2 a$ .

B.  $M = 1 - 2\sin^2 a$ .

C.  $M = \cos 4a$ .

D.  $M = \sin 4a$ .

Lời giải

Chọn B

Ta có:  $M = \cos(a+b) \cdot \cos(a-b) - \sin(a+b) \cdot \sin(a-b)$ .

$$= \cos(a+b+a-b) = \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a.$$

Câu 18: Nếu  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$  thì  $\sin 2x$  bằng

A.  $\frac{3}{4}$

B.  $\frac{3}{8}$

C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D.  $\frac{-3}{4}$

Lời giải

Chọn D

Ta có  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{-3}{4}$

Câu 19: Biết  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$  là

A.  $P = 0$ .

B.  $P = -1$ .

C.  $P = \frac{1}{2}$ .

D.  $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Lời giải

Chọn B

Ta có  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$ .

Từ  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0$  nên  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ .

Do đó  $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3}$

$$= (2\cos^2 \alpha - 1) \cdot \frac{1}{2} + 2\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha = -1.$$

Câu 20: Biểu thức  $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$  có kết quả rút gọn bằng:

A.  $\sin 2\alpha$ .

B.  $\cos 2\alpha$ .

C.  $\tan 2\alpha$ .

D.  $\cot 2\alpha$ .

Lời giải

Chọn C

$$\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{2 \sin^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \cos^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2 \cos 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha.$$

**Câu 21:** Biểu thức  $\frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$  có kết quả rút gọn bằng:

- A.  $-\tan^4 \alpha$ .      B.  $\tan^4 \alpha$ .      C.  $-\cot^4 \alpha$ .      D.  $\cot^4 \alpha$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\begin{aligned} \frac{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} &= \frac{3 - 4(1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2(1 - 2 \sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2 \cos^2 \alpha - 1) + 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 1} \\ &= \frac{8 \sin^2 \alpha - 8 \sin^4 \alpha + 8 \sin^4 \alpha}{8 \cos^2 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 8 \cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha. \end{aligned}$$

**Câu 22:** Khi  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  thì biểu thức  $\frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha}$  có giá trị bằng.

- A.  $\frac{1}{3}$ .      B.  $\frac{1}{6}$ .      C.  $\frac{1}{9}$ .      D.  $\frac{1}{12}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4 \sin^2 \alpha} &= \frac{4 \sin^4 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha \Rightarrow \text{BT} = \tan^4 \left( \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

**Câu 23:** Nếu  $\tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$  thì biểu thức  $a \sin x + b \cos x$  bằng:

- A.  $a$ .      B.  $b$ .      C.  $\frac{a+b}{a}$ .      D.  $\frac{a+b}{b}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b} \text{ nên } \sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \frac{a}{b}}{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \frac{a^2}{b^2}}{1 + \frac{a^2}{b^2}} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2}.$$

$$\text{Vậy } a \sin x + b \cos x = \frac{2a^2b}{a^2 + b^2} + \frac{b^3 - a^2b}{a^2 + b^2} = b.$$

**Câu 24:** Nếu  $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$  thì giá trị của biểu thức  $\frac{\sin x}{2-3\cos x}$  bằng.

- A. 1.                      B. 2.                      C. 3.                      D. 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \text{ nên } \sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Vậy } \frac{\sin x}{2-3\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{2-\frac{9}{5}} = 4.$$

**Câu 25:** Biết  $\sin x = \frac{1}{3}$  và  $90^\circ < x < 180^\circ$  thì biểu thức  $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$  có giá trị bằng:

- A.  $2\sqrt{2}$ .                      B.  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .                      C.  $-2\sqrt{2}$ .                      D.  $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $\sin x = \frac{1}{3}$  và  $90^\circ < x < 180^\circ$ .

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{-4\sqrt{2}}{9}, \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{7}{9}.$$

$$\text{thay vào biểu thức ta được: } \frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x} = \frac{1-\frac{4\sqrt{2}}{9}+\frac{7}{9}}{1-\frac{4\sqrt{2}}{9}-\frac{7}{9}} = -2\sqrt{2}.$$

**Câu 26:** Rút gọn biểu thức  $P = \cos(120^\circ + x) + \cos(120^\circ - x) - \cos x$  ta được kết quả là:

- A. 0.                      B.  $-\cos x$ .                      C.  $-2\cos x$ .                      D.  $\sin x - \cos x$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:  $P = 2\cos 120^\circ \cos x - \cos x = -\cos x - \cos x = -2\cos x$ .

**Câu 27:** Tích số  $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$  bằng

- A.  $\frac{1}{16}$ .                      B.  $\frac{1}{8}$ .                      C.  $\frac{3}{16}$ .                      D.  $\frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\begin{aligned} \cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ &= \cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 120^\circ + \cos 20^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left( -\frac{\cos 10^\circ}{2} + \frac{\cos 30^\circ + \cos 10^\circ}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$

**Câu 28:** Cho biểu thức  $A = \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b$ . Hãy chọn kết quả đúng

- A.**  $A = 2 \cos a \cdot \sin b \cdot \sin(a+b)$ .      **B.**  $A = 2 \sin a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$ .  
**C.**  $A = 2 \cos a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$ .      **D.**  $A = 2 \sin a \cdot \sin b \cdot \cos(a+b)$ .

**Lời giải****Chọn D**

Ta có :

$$\begin{aligned} A &= \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b = \sin^2(a+b) - \frac{1 - \cos 2a}{2} - \frac{1 - \cos 2b}{2} \\ &= \sin^2(a+b) - 1 + \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = -\cos^2(a+b) + \cos(a+b)\cos(a-b) \\ &= \cos(a+b)[\cos(a-b) - \cos(a+b)] = 2 \sin a \sin b \cos(a+b). \end{aligned}$$

**Câu 29:** Cho  $M = 5 - 2 \sin^2 x$ . Khi đó giá trị lớn nhất của  $M$  là

- A.** 3.      **B.** 5.      **C.** 6.      **D.** 7.

**Lời giải****Chọn B**

Ta có:  $0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \in R \Leftrightarrow 0 \geq -2 \sin^2 x \geq -2, \forall x \in R \Leftrightarrow 5 \geq 5 - 2 \sin^2 x \geq 3, \forall x \in R$

Giá trị lớn nhất là 5.

**Câu 30:** Giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = 7 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$  là

- A.** -2.      **B.** 5.      **C.** 7.      **D.** 16.

**Lời giải****Chọn C**

$$M = 7(1 - \sin^2 x) - 2 \sin^2 x = 7 - 9 \sin^2 x$$

Ta có:  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -9 \sin^2 x \geq -9, \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow 7 \geq 7 - 2 \sin^2 x \geq -2.$$

Giá trị lớn nhất là 7.

**Câu 31:** Cho  $M = 6 \cos^2 x + 5 \sin^2 x$ . Khi đó giá trị lớn nhất của  $M$  là

- A. 1.                      B. 5.                      C. 6.                      D. 11.

Lời giải

Chọn C

$$M = 6(1 - \sin^2 x) + 5 \sin^2 x = 6 - \sin^2 x$$

Ta có:  $0 \leq \sin^2 x \leq 1, \forall x \in R$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -\sin^2 x \geq -1, \forall x \in R$$

$$\Leftrightarrow 6 \geq 6 - \sin^2 x \geq 5, \forall x \in R.$$

Giá trị lớn nhất là 6.

**Câu 32:** Biết  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$ , khi đó.

- A.  $\sin C = -\sin(A+B)$ .                      B.  $\cos C = \cos(A+B)$ .  
C.  $\tan C = \tan(A+B)$ .                      D.  $\cot C = -\cot(A+B)$ .

Lời giải

Chọn D

Vì  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  nên  $A+B+C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - (A+B)$ .

Do đó  $C$  và  $(A+B)$  là 2 góc bù nhau.

$$\Rightarrow \sin C = \sin(A+B); \cos C = -\cos(a+b); \tan C = -\tan(A+B); \cot C = \cot(A+B).$$

**Câu 33:** Biết  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$ , khi đó.

- A.  $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$ .                      B.  $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\cos\frac{C}{2}$ .  
C.  $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$ .                      D.  $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$ .

Lời giải

Chọn C

Vì  $A, B, C$  là các góc của tam giác  $ABC$  nên  $A+B+C = 180^\circ \Rightarrow C = 180^\circ - (A+B)$ .

$$\Rightarrow \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}. \text{ Do đó } \frac{C}{2} \text{ và } \frac{A+B}{2} \text{ là 2 góc phụ nhau.}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}; \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A+B}{2}; \tan \frac{C}{2} = \cot \frac{A+B}{2}; \cot \frac{C}{2} = \tan \frac{A+B}{2}.$$

**Câu 34:** Biết  $\cot x = \frac{3}{4}, \cot y = \frac{1}{7}$ ,  $x, y$  đều là góc dương, nhọn thì:

A.  $x + y = \frac{\pi}{4}$ .      B.  $x + y = \frac{2\pi}{3}$ .      C.  $x + y = \frac{3\pi}{4}$ .      D.  $x + y = \frac{5\pi}{6}$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\cot x = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan x = \frac{4}{3}; \cot y = \frac{1}{7} \Rightarrow \tan y = 7. t = \tan \frac{x}{2} = 2.$$

**Câu 35:** Nếu biết  $\begin{cases} \tan a + \tan b = 2 \\ \tan(a+b) = 4 \end{cases}$  thì các giá trị của  $\tan a, \tan b$  bằng:

A.  $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}$  hoặc ngược lại.      B.  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$  hoặc ngược lại.  
C.  $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$  hoặc ngược lại.      D.  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$  hoặc ngược lại.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \begin{cases} \tan a + \tan b = 2 \\ \tan(a+b) = 4 \end{cases}.$$

$$\text{từ } \tan(a+b) = 4 \Leftrightarrow \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = 4 \Rightarrow 2 = 4 - 4 \tan a \cdot \tan b \Rightarrow \tan a \cdot \tan b = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \tan a, \tan b \text{ theo thứ tự là nghiệm của phương trình } X^2 - 2X + \frac{1}{2} = 0.$$

$$\Rightarrow \tan a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan b = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ hoặc ngược lại.}$$

**Câu 36:** Hãy xác định hệ thức sai:

A.  $\sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \frac{\sin 4x}{4}$ .

B.  $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3 + \cos 4x}{4}$ .

$$\text{C. } \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\text{D. } \cot^2 x + \tan^2 x = \frac{2 \cos 4x + 6}{1 - \cos 4x}.$$

Lời giải

Chọn C

$$\text{A. } \sin x \cdot \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \sin x \cdot \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = \frac{\sin 4x}{4}.$$

$$\text{B. } \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{3 + \cos 4x}{4}.$$

$$\text{C. } \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

$$\text{D. } \cot^2 x + \tan^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} = \frac{\frac{3 + \cos 4x}{4}}{\frac{1 - \cos 4x}{8}} = \frac{2 \cos 4x + 6}{1 - \cos 4x}.$$

Câu 37: Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

$$\text{A. } \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}.$$

$$\text{B. } 4 \sin a \cdot \cos a (1 - 2 \sin^2 a) = \sin 4a.$$

$$\text{C. } \cos 4a = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1. \quad \text{D. } \cos 4a - 4 \cos 2a + 3 = 8 \cos^4 a.$$

Lời giải

Chọn D

$$\text{A. } \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} = \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x}.$$

$$\text{B. } 4 \sin a \cdot \cos a (1 - 2 \sin^2 a) = 2 \sin 2a \cdot \cos 2a = \sin 4a.$$

$$\text{C. } \cos 4a = 2 \cos^2 2a - 1 = 2(2 \cos^2 a - 1)^2 - 1 = 8 \cos^4 a - 8 \cos^2 a + 1.$$

$$\text{D. } \cos 4a - 4 \cos 2a + 3 = 2(1 - 2 \sin^2 a)^2 - 1 - 4(1 - 2 \sin^2 a) + 3 = 8 \sin^4 a.$$

Câu 38: Nếu  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  thì giá trị của  $\cos 4\alpha$  là:

$$\text{A. } \frac{527}{625}.$$

$$\text{B. } -\frac{527}{625}.$$

$$\text{C. } \frac{524}{625}.$$

$$\text{D. } -\frac{524}{625}.$$

Lời giải

**Chọn B**

$$\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{-7}{25} \Rightarrow \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2\frac{49}{625} - 1 = \frac{98 - 625}{625} = \frac{-527}{625}.$$

**Câu 39:** Nếu  $\sin a - \cos a = \frac{1}{5}$  ( $135^\circ < a < 180^\circ$ ) thì giá trị đúng của  $\tan 2a$  là:

- A.  $-\frac{20}{7}$ .      B.  $\frac{20}{7}$ .      C.  $\frac{24}{7}$ .      D.  $-\frac{24}{7}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\sin a - \cos a = \frac{1}{5} \Rightarrow 1 - \sin 2a = \frac{1}{25} \Rightarrow \sin 2a = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos 2a = \sqrt{1 - \frac{576}{625}} = \frac{7}{25} \Rightarrow \tan 2a = \frac{24}{7}.$$

**Câu 40:** Trong các mệnh đề sau. Mệnh đề nào *sai*.

A.  $4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin \frac{3\alpha}{2}$ .

B.  $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{16}$ .

C.  $4 \sin \frac{a}{3} \cdot \sin \frac{\pi+a}{3} \cdot \sin \frac{\pi-a}{3} = \sin a$ .

D.  $4 \cos \frac{a}{3} \cdot \cos \frac{\pi+a}{3} \cdot \cos \frac{\pi-a}{3} = \cos a$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

A.  $4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \left[ \sin 30^\circ + \sin \left(\alpha - 30^\circ\right) \right] \cdot \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$   
 $= \sin \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos \left(\frac{3\alpha}{2} - 90^\circ\right) - \cos \left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ\right) = \cos \left(90^\circ - \frac{3\alpha}{2}\right) = \sin \frac{3\alpha}{2}$ .

B.  $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 70^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 10^\circ$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{4} [\cos 120^\circ + \cos 20^\circ] \cdot \cos 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left[-\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\right] \cdot \cos 10^\circ$   
 $= \frac{-\sqrt{3}}{8} \cdot \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{8} \cos 30^\circ + \frac{\sqrt{3}}{10} \cos 10^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16}$ .

C.  $4 \sin \frac{a}{3} \cdot \sin \frac{\pi+a}{3} \cdot \sin \frac{\pi-a}{3} = 2 \sin \frac{a}{3} \left[ \cos \frac{2a}{3} - \cos \frac{2\pi}{3} \right]$ .

$$= 2 \cos \frac{2a}{3} \cdot \sin \frac{a}{3} + \sin \frac{a}{3} = \sin a - \sin \frac{a}{3} + \sin \frac{a}{3} = \sin a.$$

$$\text{D. } 4 \cos \frac{a}{3} \cdot \cos \frac{\pi+a}{3} \cdot \cos \frac{\pi-a}{3} = 2 \cos \frac{a}{3} \left[ \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{2a}{3} \right].$$

$$= -\cos \frac{a}{3} + 2 \cos \frac{2a}{3} \cdot \cos \frac{a}{3} = -\cos \frac{a}{3} + \cos a + \cos \frac{a}{3} = \cos a.$$

Chỉ có B sai.

**Câu 41:** Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

$$\text{A. } \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2 \sin 2x + \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{B. } \sin \frac{\pi}{5} \cdot \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} \right).$$

$$\text{C. } \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos 2x = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{8}.$$

$$\text{D. } 8 \cos x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = 2(\cos 2x - \cos 4x - \cos 6x + 1).$$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{C. } \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos 2x = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} - \cos 2x \right) \cos 2x.$$

$$= \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{2} \cos^2 2x = \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{4}.$$

**Câu 42:** Trong các hệ thức sau, hệ thức nào **sai**?

$$\text{A. } 3 + 4 \cos^2 x = 4 \sin(x - 60^\circ) \cdot \sin(x + 60^\circ).$$

$$\text{B. } \sin^2 x - 3 = 4 \cos(x + 30^\circ) \cdot \cos(x + 150^\circ).$$

$$\text{C. } 3 - \cot^2 x = \frac{4 \sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \sin \left( 2x + \frac{\pi}{6} \right)}{\cos^2 x}.$$

$$\text{D. } \tan^2 a - \tan^2 b = \frac{\sin(a+b) \cdot \sin(a-b)}{\cos^2 a \cdot \cos^2 b}.$$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\begin{aligned} \text{A. } 3 + 4\cos^2 x &= 3 - 2(1 + \cos 2x) = 1 - 2\cos 2x = 2\left(\frac{1}{2} - \cos 2x\right) = 2(\cos 60^\circ - \cos 2x) \\ &= -4\sin(30^\circ + x) \cdot \sin(30^\circ - x) = 4\sin(x + 30^\circ) \cdot \sin(x - 30^\circ). \end{aligned}$$

**Câu 43:** Biểu thức  $\sin^2 x + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$  không phụ thuộc vào  $x$  và có kết quả rút gọn bằng:

A.  $\frac{2}{3}$ .                      B.  $\frac{3}{2}$ .                      C.  $\frac{3}{4}$ .                      D.  $\frac{4}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\begin{aligned} &\sin^2 x + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \\ &= \sin^2 x + \left(\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos x + \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin x\right)^2 + \left(\sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos x - \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin x\right)^2 \\ &= \sin^2 x + 2\sin^2 \frac{2\pi}{3} \cdot \cos^2 x + 2\cos^2 \frac{2\pi}{3} \cdot \sin^2 x \\ &= \sin^2 x + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \cos^2 x + 2 \cdot \frac{1}{4} \sin^2 x = \frac{3}{2}(\sin^2 x + \cos^2 x) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

**Câu 44:** Nếu biết  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$  ( $0 < \alpha < 90^\circ$ ),  $\tan b = -\frac{1}{3}$  ( $90^\circ < b < 180^\circ$ ) thì  $\cos(2a - b)$  có giá trị đúng bằng:

A.  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .                      C.  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\begin{aligned} \tan \alpha = \frac{1}{2} &\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{4}{5} \\ \tan b = -\frac{1}{3} \quad (90^\circ < b < 180^\circ) &\Rightarrow \cos b = \frac{-4}{\sqrt{1 + (-\frac{1}{3})^2}} = \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \Rightarrow \sin b = \tan b \cdot \cos b &= \frac{-1}{3} \cdot \frac{-3}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \Rightarrow \cos(2a - b) = \cos 2a \cos b + \sin 2a \sin b &= \frac{3}{5} \cdot \frac{-3}{\sqrt{10}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{-1}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

**Câu 45:** Cho  $M = 3\sin x + 4\cos x$ . Chọn khẳng định đúng.

- A.  $M \leq 5$ .      B.  $M > 5$ .      C.  $M \geq 5$ .      D.  $-5 \leq M \leq 5$ .

Lời giải

Chọn D

$$M = 5 \left( \frac{3}{5} \sin x + \frac{4}{5} \cos x \right) = 5 \sin(x+a) \text{ với } \cos a = \frac{3}{5}; \sin a = \frac{4}{5}.$$

Ta có:  $-1 \leq \sin(x+a) \leq 1$

$$\Leftrightarrow -5 \leq 5 \sin(x+a) \leq 5.$$

**Câu 46:** Giá trị lớn nhất của  $M = \sin^4 x + \cos^4 x$  bằng

- A. 1.      B. 2.      C. 3.      D. 4.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } M = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$$

Vì  $0 \leq \sin^2 x \leq 1$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \leq 1.$$

Nên giá trị lớn nhất là 1.

**Câu 47:** Giá trị nhỏ nhất của  $M = \sin^4 x + \cos^4 x$  là

- A. 0.      B.  $\frac{1}{4}$ .      C.  $\frac{1}{2}$ .      D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$M = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi  $x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 48:** Một tam giác  $ABC$  có các góc  $A, B, C$  thỏa mãn  $\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2} = 0$

thì tam giác đó có gì đặc biệt?

- A. Không có gì đặc biệt.      B. Tam giác đó vuông.

C. Tam giác đó đều.

D. Tam giác đó cân.

### Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} - \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sin \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos^3 \frac{B}{2}}.$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{A}{2}\right) = \tan \frac{B}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{B}{2}\right) \Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} = \tan \frac{B}{2} \Leftrightarrow \frac{A}{2} = \frac{B}{2} \Leftrightarrow A = B.$$

♦ Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai

**Câu 1.** Cho biết  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Khi đó:

a)  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b)  $\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

c)  $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$

d)  $\cot 2\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{8}$

### Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên  $\cos \alpha < 0$ .

$$\text{Ta có: } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}; \cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$$

**Câu 2.** Cho biết  $\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Khi đó:

a)  $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$

$$\text{b) } \sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{c) } \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{d) } \cot \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	---------------	---------------	----------------

Vì  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  nên  $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$ .

$$\text{Ta có: } \cos 2\alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 2\sin^2 \alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{4};$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{10}{16}} = -\frac{\sqrt{6}}{4};$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

**Câu 3.** Cho biết  $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Khi đó:

$$\text{a) } \cos \alpha < 0$$

$$\text{b) } \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\text{c) } \tan \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\text{d) } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{48 - \sqrt{3}}{11}$$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	----------------	---------------	---------------

Vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0$ .

$$\text{Ta có } \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}.$$

$$\text{Ta có: } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha}.$$

$$\text{Suy ra: } \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\frac{3}{4} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}.$$

**Câu 4.** Cho biết  $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ . Khi đó:

a)  $\cos \alpha > 0$

b)  $\cos \alpha = \frac{5}{13}$

c)  $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$

d)  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{5 - \sqrt{3}}{26}$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	----------------	----------------	---------------

Ta có:  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha$

$$= \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{6\sqrt{3}}{13}.$$

Vì  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \cos \alpha > 0$ .

Ta có  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{13}$ .

Suy ra:  $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} - \frac{6\sqrt{3}}{13} = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$ .

**Câu 5.** Cho biết  $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  và  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ; khi đó:

a)  $\cos x > 0$

b)  $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

c)  $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6} - 3}{8}$ .

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Vì  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  nên  $\cos x > 0$ .

$$\text{Ta có: } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6} - 3}{6}.$$

**Câu 6.** Cho biết  $\cos x = -\frac{12}{13}$  và  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ ; khi đó:

a)  $\sin x > 0$

b)  $\sin x = -\frac{5}{13}$

c)  $\cot x = \frac{5}{12}$

d)  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	----------------	---------------	----------------

Vì  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  nên  $\sin x < 0$ .

$$\text{Ta có: } \cos x = -\frac{12}{13} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}.$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$$

**Câu 7.** Cho biết  $\tan x = \sqrt{2}$  và  $0 < x < 90^\circ$ . Khi đó:

a)  $\cos x > 0$

b)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c)  $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

d)  $\cos(x - 30^\circ) = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	----------------	----------------	---------------

Vì  $0 < x < 90^\circ$  nên  $\cos x > 0$ .

Ta có:  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Mặt khác:  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \tan x \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

$$\cos(x - 30^\circ) = \cos x \cos 30^\circ + \sin x \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}$$

**Câu 8.** Biết  $\sin a = \frac{8}{17}$ ,  $\tan b = \frac{5}{12}$  và  $a, b$  là các góc nhọn. Khi đó:

a)  $\tan a = \frac{8}{15}$

b)  $\sin(a - b) = \frac{21}{221}$

c)  $\cos(a + b) = \frac{14}{22}$

d)  $\tan(a + b) = \frac{17}{14}$ .

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	----------------	---------------	---------------

Vì  $a, b$  là các góc nhọn nên  $\cos a > 0, \cos b > 0$ .

Ta có:  $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{15}{17} \Rightarrow \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{8}{15}$ ;

$\cos b = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 b}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin b = \cos b \tan b = \frac{5}{13}$ . Khi đó:

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{21}{221}$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{15}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{8}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{140}{221}$$

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{8}{15} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{171}{140}$$

**Câu 9.** Biết  $0 < a, b < \frac{\pi}{2}$ ,  $a + b = \frac{\pi}{4}$  và  $\tan a \tan b = 3 - 2\sqrt{2}$ . Khi đó:

a)  $\tan a + \tan b = -2 + 2\sqrt{2}$ .

b)  $\tan a = -1 + \sqrt{2}$

c)  $\tan b = -1 - \sqrt{2}$

d)  $\tan a - \tan b = -2 - 2\sqrt{2}$ .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \Rightarrow \tan a + \tan b = \tan(a+b)(1 - \tan a \tan b) \text{ mà } a+b = \frac{\pi}{4} \text{ và}$$

$$\tan a \tan b = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \tan a + \tan b = \tan \frac{\pi}{4} [1 - (3 - 2\sqrt{2})] = -2 + 2\sqrt{2}.$$

Đặt  $S = \tan a + \tan b$ ;  $P = \tan a \tan b$ .

Khi đó  $\tan a, \tan b$  là nghiệm của phương trình

$$X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - (2\sqrt{2} - 2)X + 3 - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow X = -1 + \sqrt{2}. \text{ Suy ra } \tan a = \tan b = -1 + \sqrt{2}.$$

**Câu 10.** Biết  $\tan \alpha = 2$ . Khi đó:

a)  $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$

b)  $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$

c)  $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$

d)  $\tan 2\alpha = -\frac{4}{3}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

Ta có:  $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{\tan^2 \alpha + 1} - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$ ;

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \tan \alpha \cos^2 \alpha = \frac{2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{4}{5}; \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{4}{3}.$$

**Câu 11.** Biết  $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Khi đó:

a)  $\cos \alpha < 0$

b)  $2\sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{5}$

c)  $\cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

d)  $\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  nên  $\cos \alpha < 0$ . Ta có hệ: 
$$\begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{25 \cos^2 \alpha} + \cos^2 \alpha = 1 \\ \sin \alpha = -\frac{2}{5 \cos \alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 \cos^4 \alpha - 25 \cos^2 \alpha + 4 = 0 \\ \sin \alpha = -\frac{2}{5 \cos \alpha} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos^2 \alpha = \frac{4}{5} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \\ \sin \alpha = -\frac{2}{5 \cos \alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \sin \alpha = -\frac{2}{5 \cos \alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

**Câu 12.** Cho  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Khi đó:

a)  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

b)  $\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

c)  $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{6}$

d)  $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{6}$

**Lời giải**

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

$$\sin \alpha = \frac{2}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

Ta có:  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

Vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha - \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{-\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{6}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{-\sqrt{10} + 2\sqrt{2}}{6}.$$

**Câu 13.** Cho  $\cot x = -\sqrt{3}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ . Khi đó:

a)  $\sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

b)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{10}$

c)  $\sin\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) = \frac{-\sqrt{10}}{5}$

d)  $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	---------------	----------------	----------------

$$\cot x = -\sqrt{3}, \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x = 1 + (-\sqrt{3})^2 = 10 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{10} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{Vì } \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \text{ nên } \sin x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\cos x = \cot x \cdot \sin x = -\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{\sqrt{30}}{10}.$$

$$\sin\left(\frac{4\pi}{3} - x\right) = \sin\frac{4\pi}{3}\cos x - \cos\frac{4\pi}{3}\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{30}}{10}\right) - \frac{-1}{2} \cdot \frac{-\sqrt{10}}{10} = \frac{-\sqrt{10}}{5}$$

$$\tan x = \frac{1}{\cot x} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan x + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan x \cdot \tan\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{-\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3}}{1 - \frac{-\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

**Câu 14.** Biết:  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  và  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Khi đó:

a)  $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{9}$

b)  $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$

$$c) \tan 2\alpha = \frac{\sqrt{2}}{7}$$

$$d) \cot 2\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
--------	---------	--------	--------

Ta có:  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  và  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Vì  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  nên  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{7} : \frac{7}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{7}{9} : \frac{4\sqrt{2}}{7} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$$

**Câu 15.** Cho  $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ ,  $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$ , khi đó:

$$a) \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$b) \sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{21}}{25}$$

$$c) \cos 2\alpha = -\frac{17}{25}$$

$$d) \tan 2\alpha = \frac{-4\sqrt{21}}{17}$$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

$$\cos \alpha = \frac{2}{5}, 2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{Vì } 2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2} \text{ nên } \sin \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{\sqrt{21}}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4\sqrt{21}}{25}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{5}\right)^2 = -\frac{17}{25}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{4\sqrt{21}}{25} : \frac{-17}{25} = \frac{-4\sqrt{21}}{17}$$

**Câu 16.** Biết:  $\cos 2\alpha = \frac{5}{9}, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Khi đó:

a)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{28}}{9}$

b)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{53}}{9}$

c)  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{371}}{53}$

d)  $\cot \alpha = \frac{\sqrt{371}}{14}$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	----------------	---------------	----------------

Ta có:  $\cos 2\alpha = \frac{5}{9}, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2}{2} = \frac{28}{81} \Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{28}}{9}$$

Vì  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  nên  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{28}}{9}$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{28}}{9}\right)^2 = \frac{53}{81} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{53}}{81}$$

Vì  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$  nên  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{53}}{9}$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\sqrt{371}}{53}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{371}}{14}$$

**Câu 17.** Biến đổi được các biểu thức sau về dạng tích số. Khi đó:

a)  $\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cdot \cos 3x$

b)  $\sin 3x + \sin 2x = 2 \sin 2x \cos \frac{x}{2}$ ;

c)  $\cos 4x - \cos x = -2 \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2}$

d)  $\sin 5x - \sin x = 2 \cos 3x \sin 2x$

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	---------------	----------------	----------------

a)  $\cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cdot \cos x$

b)  $\sin 3x + \sin 2x = 2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ;

c)  $\cos 4x - \cos x = -2 \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{3x}{2}$

d)  $\sin 5x - \sin x = 2 \cos 3x \sin 2x$

**Câu 18.** Cho  $\sin x = \frac{1}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$ . Khi đó:

a)  $\sin 2x = \frac{4\sqrt{6}}{5}$ .

b)  $\cos 2x = \frac{23}{25}$

c)  $\tan 2x = \frac{20\sqrt{6}}{3}$

d)  $\cot 2x = \frac{23\sqrt{6}}{120}$

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Sai</b>
---------------	----------------	---------------	---------------

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{2} < 2x < 2\pi \Rightarrow \pi < 2x < 2\pi \Rightarrow \sin 2x < 0.$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$$

$$\sin x = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{5}.$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{2} < 2x < 2\pi \Rightarrow \pi < 2x < 2\pi \Rightarrow \cos 2x > 0.$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{25} = \frac{23}{25}.$$

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{-\frac{4\sqrt{6}}{5}}{\frac{23}{25}} = -\frac{20\sqrt{6}}{3}, \cot 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\frac{23}{25}}{-\frac{4\sqrt{6}}{5}} = -\frac{23\sqrt{6}}{120}.$$

**Câu 19.** Cho  $\cos x = \frac{1}{5}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$ . Khi đó:

a)  $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

b)  $\cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

c)  $\tan \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

d)  $\cot \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	---------------	----------------	----------------

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} > 0.$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \frac{x}{2} > 0.$$

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{5}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{5}}{\frac{\sqrt{15}}{5}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\cot \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{5}}{\frac{\sqrt{10}}{5}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

♦ **Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 1:** Cho  $\sin x = \frac{1}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . Tính  $\cot 2x$ .

**Lời giải**

Cho  $\sin x = \frac{1}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ . Tính  $\cot 2x$ .

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{2} < 2x < 2\pi \Rightarrow \pi < 2x < 2\pi \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x > 0 \\ \tan 2x < 0 \end{cases}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2 \cdot \frac{1}{25} = \frac{23}{25}$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \pi \Rightarrow \cos x < 0$$

$$\sin x = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right) = -\frac{4\sqrt{6}}{5}$$

$$\cot 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\frac{23}{25}}{-\frac{4\sqrt{6}}{5}} = -\frac{23\sqrt{6}}{120}$$

**Câu 2:** Cho các góc  $\alpha, \beta$  thỏa mãn  $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi$ ,  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\cos \beta = -\frac{2}{3}$ .

Tính  $\sin(\alpha + \beta)$ .

**Lời giải**

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi \Rightarrow \begin{cases} \cos \alpha < 0 \\ \sin \beta > 0 \end{cases}.$$

Ta có  $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ;  $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

Suy ra  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$ .

Vậy  $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$ .

**Câu 3:** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$ . Tính  $\cos \alpha$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}$ .  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  nên  $\cos \alpha < 0$ . Vậy  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ .

**Câu 4:** Cho  $\sin \alpha = -\frac{1}{3}$ , với  $(180^\circ < \alpha < 270^\circ)$ . Tính  $\cos \alpha$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sin \alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ . Vì  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$  nên  $\cos \alpha > 0$  do đó  $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

**Câu 5:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$ . Biết  $\cos a = \frac{1}{3}$ ;  $\cos b = \frac{1}{4}$ . Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \cos(a+b)\cos(a-b).$$

**Lời giải**

Ta có:  $\sin^2 a = 1 - \cos^2 a = \frac{8}{9}$ ;  $\sin^2 b = 1 - \cos^2 b = \frac{15}{16}$ .

$$\begin{aligned} P &= (\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\cos a \cos b + \sin a \sin b) \\ &= (\cos a \cos b)^2 - (\sin a \sin b)^2 = \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} = -\frac{119}{144} \end{aligned}$$

**Câu 6:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$  với  $\tan a = \frac{1}{7}$  và  $\tan b = \frac{3}{4}$ . Tính  $a + b$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{7} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}} = 1$ , suy ra  $a + b = 45^\circ$

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$  có:  $\tan B \sin^2 C = \tan C \sin^2 B$ . Khi đó tam giác  $ABC$  cân tại đỉnh nào?

### Lời giải

Ta có  $0 < A, B, C < 180^\circ$ .

$$\text{Từ giả thiết, ta có: } \frac{\sin B}{\cos B} \sin^2 C = \frac{\sin C}{\cos C} \sin^2 B \Leftrightarrow \frac{1}{\cos B} \sin C = \frac{1}{\cos C} \sin B$$

$$\Leftrightarrow \sin C \cos C = \sin B \cos B \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2C = \frac{1}{2} \sin 2B$$

$$\Leftrightarrow 2C = 2B + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 2C = 2B \text{ (do } B, C \text{ là các góc của tam giác)} \Leftrightarrow B - C = 0 \Leftrightarrow B = C$$

Vậy tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .

**Câu 8:** Rút gọn  $C = \tan 3x - \tan x - \frac{2 \sin x}{\cos 3x}$

### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } C &= \tan 3x - \tan x - \frac{2 \sin x}{\cos 3x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} - \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos 3x} \\ &= \frac{\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x}{\cos 3x \cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos 3x} = \frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos 3x} \\ &= \frac{2 \sin x \cos x}{\cos 3x \cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos 3x} = \frac{2 \sin x}{\cos 3x} - \frac{2 \sin x}{\cos 3x} = 0. \end{aligned}$$

**Câu 9:** Biến đổi thành tổng biểu thức sau:  $4 \sin 3x \sin 2x \cos x$ .

### Lời giải

$$\begin{aligned} 4 \sin 3x \sin 2x \cos x &= 4(\sin 3x \cos x) \sin 2x = 4 \cdot \frac{1}{2} (\sin 4x + \sin 2x) \sin 2x \\ &= 2 \sin 4x \sin 2x + 2 \sin^2 2x = (\cos 2x - \cos 6x) + 2 \left( \frac{1 - \cos 4x}{2} \right) = \cos 2x - \cos 4x - \cos 6x + 1. \end{aligned}$$

**Câu 10:** Biết rằng  $\cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = k \cos 3x$ , khi đó  $k = ?$

### Lời giải

$$\begin{aligned} \cos x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) &= \frac{1}{2} \cos x \left( \cos \frac{2\pi}{3} + \cos 2x \right) \\ &= \frac{1}{2} \cos x \cos 2x - \frac{1}{4} \cos x = \frac{1}{4} (\cos 3x + \cos x) - \frac{1}{4} \cos x = \frac{1}{4} \cos 3x \end{aligned}$$

**Câu 11:** Biết rằng  $\sin 5x - 2 \sin x (\cos 4x + \cos 2x) = k \sin x$ , khi đó  $k = ?$

### Lời giải

$$\begin{aligned} \sin 5x - 2 \sin x (\cos 4x + \cos 2x) &= \sin 5x - 2 \sin x \cos 4x - 2 \sin x \cos 2x \\ &= \sin 5x - (\sin 5x - \sin 3x) - (\sin 3x - \sin x) = \sin x \end{aligned}$$

**Câu 12:** Cho  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức sau:  $A = (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} A &= \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \\ &= 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta = 2 + 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 + 2 \cos \frac{\pi}{3} = 3 \end{aligned}$$

**Câu 13:** Cho  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$ . Tính giá trị của biểu thức sau:  $B = (\cos \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \beta - \sin \alpha)^2$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} B &= \cos^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \cos \alpha \sin \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \beta \\ &= 2 + 2 \sin \beta \cos \alpha - 2 \cos \beta \sin \alpha \\ &= 2 + 2 \sin(\beta - \alpha) = 2 + 2 \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

**Câu 14:** Rút gọn biểu thức  $\sin 6a \cot 3a - \cos 6a$ ;

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin 6a \cot 3a - \cos 6a &= 2 \sin 3a \cos 3a \frac{\cos 3a}{\sin 3a} - (2 \cos^2 3a - 1) \\ &= 2 \cos^2 3a - (2 \cos^2 3a - 1) = 1 \text{ (không phụ thuộc } a \text{)}. \end{aligned}$$

**Câu 15:** Rút gọn biểu thức  $(\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } (\tan a - \tan b) \cot(a - b) - \tan a \tan b &= \frac{\tan a - \tan b}{\tan(a - b)} - \tan a \tan b \\ &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} - \tan a \tan b = 1 + \tan a \tan b - \tan a \tan b = 1 \end{aligned}$$

(không phụ thuộc  $a$ ).

**Câu 16:** Biến đổi thành tích biểu thức  $\frac{\sin 7a + \sin 5a}{\sin 7a - \sin 5a}$ ;

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \frac{\sin 7a + \sin 5a}{\sin 7a - \sin 5a} = \frac{2 \sin 6a \cos a}{2 \cos 6a \sin a} = \tan 6a \cot a.$$

**Câu 17:** Biến đổi thành tổng biểu thức  $\sin x \sin 2x \sin 3x$ .

### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin x \sin 2x \sin 3x &= (\sin 3x \sin x) \sin 2x = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \sin 2x \\ &= \frac{1}{2}(\sin 2x \cos 2x - \sin 2x \cos 4x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2}(\sin 6x - \sin 2x) \right] \\ &= \frac{1}{4}(\sin 4x - \sin 6x + \sin 2x) \end{aligned}$$

**Câu 18:** Biết  $\tan^2 x + \cot^2 x + 2 = \frac{a}{\sin^2 2x}$  tìm  $a$ ?

### Lời giải

$$\begin{aligned} \tan^2 x + \cot^2 x + 2 &= \frac{4}{\sin^2 2x} \Leftrightarrow (\tan^2 x + 1) + (\cot^2 x + 1) = \frac{4}{\sin^2 2x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} &= \frac{4}{\sin^2 2x} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} &= \frac{4}{\sin^2 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} = \frac{4}{\sin^2 2x} \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 2x} = \frac{4}{\sin^2 2x} \end{aligned}$$

**Câu 19:** Biết  $\sin^6 x + \cos^6 x = a + \frac{3}{8} \cos 4x$  tìm  $a$ ?

### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \\ &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = 1 - \frac{3}{8}(1 - \cos 4x) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} \cos 4x. \end{aligned}$$

**Câu 20:** Biết  $\frac{3 - 4 \cos 2a + \cos 4a}{3 + 4 \cos 2a + \cos 4a} = k \tan^4 a$  tìm  $k$ ?

### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{3 - 4 \cos 2a + \cos 4a}{3 + 4 \cos 2a + \cos 4a} &= \frac{2 \cos^2 2a - 4 \cos 2a + 2}{2 \cos^2 2a + 4 \cos 2a + 2} = \frac{2(\cos^2 2a - 2 \cos 2a + 1)}{2(\cos^2 2a + 2 \cos 2a + 1)} \\ &= \frac{(1 - \cos 2a)^2}{(1 + \cos 2a)^2} = \frac{[1 - (1 - 2 \sin^2 a)]^2}{[1 + (2 \cos^2 a - 1)]^2} = \frac{4 \sin^4 a}{4 \cos^4 a} = \tan^4 a. \end{aligned}$$

**Câu 21:** Cho tam giác  $ABC$ . Biết  $\sin A + \sin B + \sin C = k \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ , tìm  $k$ ?

### Lời giải

$$\begin{aligned}
VT &= \sin A + \sin B + \sin C \\
&= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\
&= 2 \sin \frac{\pi-C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{\pi-C}{2} \cos \frac{C}{2} \\
&= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2} \\
&= 2 \cos \frac{C}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) \\
&= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot 2 \cos \frac{A-B+A+B}{4} \cdot \cos \frac{A-B-A-B}{4} \\
&= 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{-B}{2} = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}
\end{aligned}$$

Vậy  $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$ .

**Câu 22:** Rút gọn biểu thức sau:  $A = \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x}$

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} \\
&= \frac{(\sin 3x + \sin x) + (\sin 4x + \sin 2x)}{(\cos 3x + \cos x) + (\cos 4x + \cos 2x)} = \frac{2 \sin 2x \cos x + 2 \sin 3x \cos x}{2 \cos 2x \cos x + 2 \cos 3x \cos x} \\
&= \frac{2 \cos x (\sin 2x + \sin 3x)}{2 \cos x (\cos 2x + \cos 3x)} = \frac{2 \sin \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{5x}{2}
\end{aligned}$$

**Câu 23:** Rút gọn biểu thức sau:  $B = \frac{\sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2 \cos 4x + \cos 5x}$ .

**Lời giải**

**Câu 24:** Cho  $\cot \alpha = 3$ . Tính  $A = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{12 \sin^3 \alpha + 4 \cos^3 \alpha}$ .

**Lời giải**

$$A = \frac{3 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}{12 \sin^3 \alpha + 4 \cos^3 \alpha} = \frac{\frac{1}{\sin^2 \alpha} (3 - 2 \cot \alpha)}{12 + 4 \cot^3 \alpha} = (1 + \cot^2 \alpha) \frac{3 - 2 \cot \alpha}{12 + 4 \cot^3 \alpha} = -\frac{1}{4}$$

**Câu 25:** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính  $C = \frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + 2 \cos^3 \alpha}$ .

**Lời giải**

$$C = \frac{\sin \alpha}{\sin^3 \alpha + 2 \cos^3 \alpha} = \frac{\tan \alpha \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}}{\tan^3 \alpha + 2} = \frac{\tan \alpha (1 + \tan^2 \alpha)}{\tan^3 \alpha + 2} = \frac{2(1 + 2^2)}{2^3 + 2} = 1.$$

**Câu 26:** Cho  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$  và  $\cos \alpha \neq \cos \beta$ . Tính  $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$ .

**Lời giải**

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} = -\cot \frac{\alpha + \beta}{2} = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

**Câu 27:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = c, AC = b, AB = c$ , thỏa  $\frac{-1 + \cos(\pi + B)}{\sin(\pi - A - C)} = -\frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$ .

Hỏi tam giác  $ABC$  là tam giác gì?

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \frac{-1 + \cos(\pi + B)}{\sin(\pi - A - C)} = -\frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} &\Leftrightarrow \frac{-1 - \cos B}{\sin(\pi - (A + C))} = -\frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} &\Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1 + \cos B}{\sin B}\right)^2 = \left(\frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}\right)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a + c)^2}{4a^2 - c^2} &\Leftrightarrow \frac{(1 + \cos B)^2}{1 - \cos^2 B} = \frac{(2a + c)^2}{4a^2 - c^2} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c} \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} - 1 = \frac{2a + c}{2a - c} - 1 &\Leftrightarrow 2ac \cdot \cos B = c^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b. \end{aligned}$$

**Câu 28:** Cho  $\cos a = 0,2$  với  $\pi < a < 2\pi$ . Tính  $\sin \frac{a}{2}, \cos \frac{a}{2}, \tan \frac{a}{2}$ .

**Lời giải**

Do  $\pi < a < 2\pi$  nên  $\frac{\pi}{2} < \frac{a}{2} < \pi$ . Suy ra,  $\sin \frac{a}{2} > 0, \cos \frac{a}{2} < 0$ .

Ta có:  $\sin^2 \left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2} = 0,4$ .

Vậy  $\sin \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \cos \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{15}}{5}, \tan \frac{a}{2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$ .

**Câu 29:** Không sử dụng máy tính, tính các giá trị lượng giác của góc  $105^\circ$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned}\cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\ \tan 105^\circ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{6}}; \cot 105^\circ = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}\end{aligned}$$

**Câu 30:** Cho  $\cos 2x = -\frac{4}{5}$ , với  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ .

Tính  $\sin x, \cos x, \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

**Lời giải**

Vì  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$  nên  $\sin x > 0, \cos x > 0$ . Áp dụng công thức hạ bậc, ta có

$$\begin{aligned}\sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}}. \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}.\end{aligned}$$

Theo công thức cộng, ta có

$$\begin{aligned}\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}}. \\ \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) &= \cos 2x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}\end{aligned}$$

**Câu 31:** Tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $A = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$

b)  $B = \sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$ .

**Lời giải**

a)  $A = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}\right) - \sin \frac{5\pi}{9}$   
 $= 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0$ .

b) Vì  $\sin 78^\circ = \cos 12^\circ; \sin 66^\circ = \cos 24^\circ; \sin 42^\circ = \cos 48^\circ$  nên

$$B = \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ.$$

Nhân hai vế với  $\cos 6^\circ$  và áp dụng công thức góc nhân đôi, ta được:

$$\cos 6^\circ \cdot B = \cos 6^\circ \sin 6^\circ \cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 48^\circ = \frac{1}{16} \sin 96^\circ = \frac{1}{16} \sin(90^\circ + 6^\circ) = \frac{1}{16} \cos 6^\circ$$

$$\text{Vậy } B = \frac{1}{16}.$$

**Câu 32:** Cho  $\tan \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Tính  $\sin a, \cos a, \tan a$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \frac{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{2 \tan \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2} = \frac{\cos^2 \frac{a}{2} - \sin^2 \frac{a}{2}}{\sin^2 \frac{a}{2} + \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{a}{2}}{1 + \tan^2 \frac{a}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = 2\sqrt{2}.$$

**Câu 33:** Cho  $\cos(a+2b) = 2 \cos a$ . Chứng minh rằng:  $\tan(a+b) \tan b = \frac{-1}{3}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \cos(a+2b) = 2 \cos a \Leftrightarrow \cos[(a+b)+b] = 2 \cos[(a+b)-b]$$

$$\Leftrightarrow 3 \sin(a+b) \cdot \sin b = -\cos(a+b) \cdot \cos b \Leftrightarrow \tan(a+b) \tan b = \frac{-1}{3}.$$

**Câu 34:** Không dùng máy tính cầm tay. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24}$

b)  $\cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12}$

c)  $\frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}}$ .

**Lời giải**

$$\text{a) } \sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24} = \frac{1}{2} \left[ \sin \left( \frac{19\pi}{24} - \frac{37\pi}{24} \right) + \sin \left( \frac{19\pi}{24} + \frac{37\pi}{24} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + \sin \frac{7\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \left( -\sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12} &= -2 \sin \frac{\frac{41\pi}{12} + \frac{13\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{41\pi}{12} - \frac{13\pi}{12}}{2} = -2 \sin \frac{9\pi}{4} \sin \frac{7\pi}{6} \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}} &= \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \left( \pi - \frac{\pi}{7} \right) \tan \frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 - \tan \frac{\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}} \\ &= \tan \left( \frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{28} \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1. \end{aligned}$$

**Câu 35:** Cho  $\cos \alpha = \frac{11}{61}$  và  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ , tính giá trị của các biểu thức sau:

a)  $\sin \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right)$

b)  $\cot \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right)$

c)  $\cos \left( 2\alpha + \frac{\pi}{3} \right)$

d)  $\tan \left( \frac{3\pi}{4} - 2\alpha \right)$

### Lời giải

a) Vì  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  nên  $\sin \alpha < 0$ .

Do đó,  $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left( \frac{11}{61} \right)^2} = -\frac{60}{61}$ .

Suy ra

$$\sin \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{61} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left( -\frac{60}{61} \right) = \frac{11 + 60\sqrt{3}}{122}.$$

b) Ta có  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{60}{61}}{\frac{11}{61}} = -\frac{60}{11}$ .

Do đó  $\cot \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\tan \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right)} = \frac{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}}{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \left( -\frac{60}{11} \right) \cdot 1}{\left( -\frac{60}{11} \right) + 1} = -\frac{71}{49}.$

$$c) \text{ Ta có } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{11}{61}\right)^2 - 1 = -\frac{3479}{3721};$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{60}{61}\right) \cdot \frac{11}{61} = -\frac{1320}{3721}. \text{ Suyra}$$

$$\begin{aligned} \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3479}{3721} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1320}{3721}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{-3479 + 1320\sqrt{3}}{7442}. \end{aligned}$$

$$d) \text{ Ta có } \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{1320}{3721}}{-\frac{3479}{3721}} = \frac{1320}{3479}.$$

$$\text{Suy ra } \tan\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\tan \frac{3\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan \frac{3\pi}{4} \tan 2\alpha} = \frac{-1 - \frac{1320}{3479}}{1 + (-1) \cdot \frac{1320}{3479}} = -\frac{4799}{2159}.$$

**Câu 36:** Rút gọn các biểu thức sau:

a)  $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x$

b)  $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x};$

c)  $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}$

d)  $\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y.$

**Lời giải**

a)  $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x = \sin x \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x)$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$$

b)  $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x} = \frac{\frac{1}{2}(\sin x + \sin 5x) + \frac{1}{2}[\sin(-5x) + \sin 7x]}{\sin 4x}$

$$= \frac{\sin x + \sin 5x - \sin 5x + \sin 7x}{2\sin 4x} = \frac{\sin x + \sin 7x}{2\sin 4x}$$

$$= \frac{2\sin 4x \cos 3x}{2\sin 4x} = \cos 3x;$$

c)  $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \frac{(\cos x + \cos 3x) - \cos 2x}{(\sin x + \sin 3x) - \sin 2x} = \frac{2\cos 2x \cos x - \cos 2x}{2\sin 2x \cos x - \sin 2x}$

$$= \frac{\cos 2x(2 \cos x - 1)}{\sin 2x(2 \cos x - 1)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x;$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y &= \frac{2(\sin x \cos y + \cos x \sin y)}{2 \cos x \cos y} - \tan y \\ &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} - \tan y = \tan x + \tan y - \tan y \\ &= \tan x. \end{aligned}$$

**Câu 37:** Cho  $\sin \alpha + \cos \alpha = m$ . Tìm  $m$  để  $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

Vì  $-1 \leq \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$  nên  $-\sqrt{2} \leq \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}$ . Suy ra  $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$ .

$$\text{Ta lại có } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \sin 2\alpha.$$

$$\text{Suy ra } \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = m^2 - 1.$$

Khi đó,  $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$  hay  $m^2 - 1 = -\frac{3}{4}$ , suy ra  $m = \frac{1}{2}$  hoặc  $m = -\frac{1}{2}$  (thỏa mãn điều kiện).

**Câu 38:** Cho  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\cos \beta = \frac{12}{13}$  và  $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$ . Tính giá trị của biểu thức  $\sin(\alpha + \beta)$  và  $\cos(\alpha - \beta)$ .

**Lời giải**

$$\text{Vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ nên } \cos \alpha > 0. \text{ Do đó, } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì } 0^\circ < \beta < 90^\circ \text{ nên } \sin \beta > 0. \text{ Do đó, } \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Khi đó, } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65};$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{63}{65}.$$

**Câu 39:** Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm  $t$  giây được cho bởi công thức  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , trong đó  $x(t)(\text{cm})$  là li độ của vật tại thời điểm  $t$  giây,  $A$  là biên độ dao động ( $A > 0$ ) và  $\varphi \in [-\pi; \pi]$  là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$$x_1(t) = 3 \cos \left( \frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3} \right) (\text{cm}) \text{ và } x_2(t) = 3 \cos \left( \frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{6} \right) (\text{cm}).$$

a) Xác định phương trình của dao động tổng hợp  $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ .

b) Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp trên.

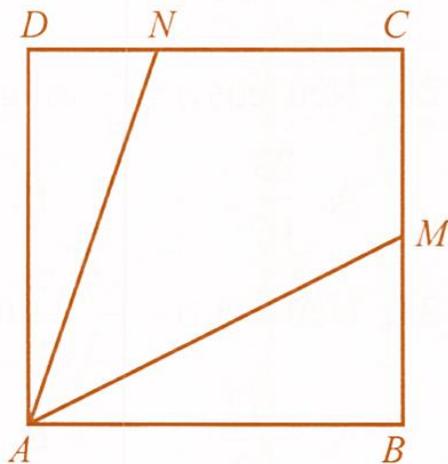
**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 3 \cdot 2 \cos\left(\frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2}\right) \cos\left(\frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2}\right) \\ &= 6 \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right) = 3\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Vậy phương trình của dao động tổng hợp là  $x(t) = 3\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right)$ .

b) Dao động tổng hợp trên có biên độ là  $A = 3\sqrt{2} \text{ cm}$  và pha ban đầu là  $\varphi = \frac{\pi}{12}$ .

**Câu 40:** Trên một mảnh đất hình vuông  $ABCD$ , bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí  $A$  chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc  $C$ . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia  $AM$  và  $AN$ , ở đó các điểm  $M, N$  lần lượt thuộc các cạnh  $BC, CD$  sao cho  $BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC$



Hình 4

a) Tính  $\tan(BAM + DAN)$ .

b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

**Lời giải**

a) Trong tam giác vuông  $ABM$ ,  $\tan BAM = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$ .

Trong tam giác vuông  $ADN$ ,  $\tan DAN = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}$ .

$$\text{Do đó, } \tan(BAM + DAN) = \frac{\tan BAM + \tan DAN}{1 - \tan BAM \tan DAN} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

b) Do  $\tan(BAM + DAN) = 1$  nên  $BAM + DAN = 45^\circ$ .

Suy ra  $MAN = 90^\circ - (BAM + DAN) = 45^\circ$ .

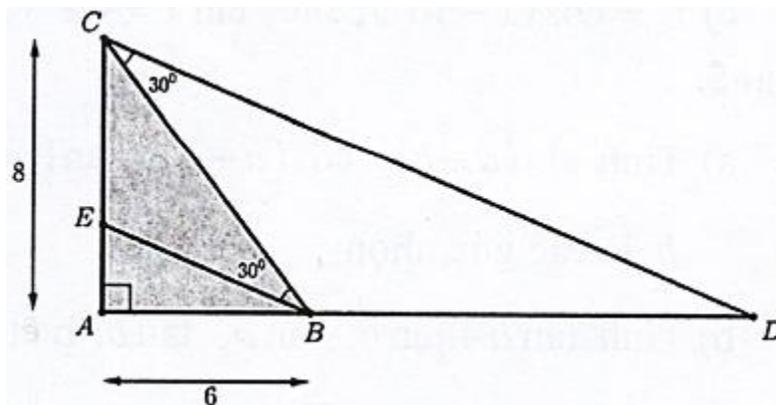
Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng  $45^\circ$ .

**Câu 41:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có cạnh  $AB = 6, AC = 8$ . Điểm  $E$  thuộc đoạn  $AC$  sao cho  $CBE = 30^\circ$ , điểm  $D$  thuộc tia đối của tia  $BA$  sao cho  $BCD = 30^\circ$ .

a) Tìm  $\tan ACD$ , từ đó tính độ dài đoạn  $AD$ .

b) Tính  $\tan ABE$ , từ đó tính độ dài cạnh  $AE$ .

(Các kết quả trong bài được làm tròn đến hàng phần trăm).



**Lời giải**

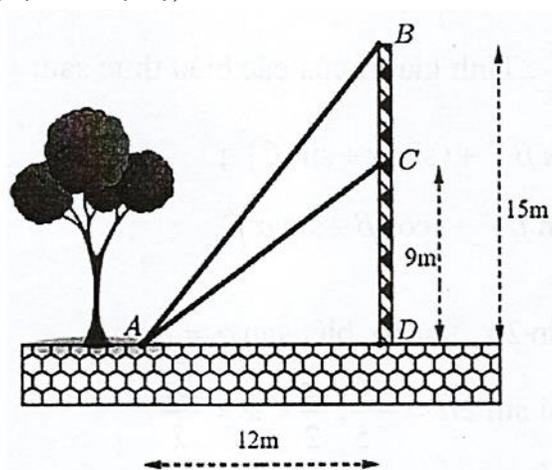
$$\text{a) } \tan ACD = \tan(ACB + 30^\circ) = \frac{\tan ACB + \tan 30^\circ}{1 - \tan ACB \tan 30^\circ} = \frac{\frac{6}{8} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{6}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{48 + 25\sqrt{3}}{39}$$

$$\text{Tam giác } ACD \text{ vuông tại } A \text{ có: } AD = AC \tan ACD = 8 \cdot \frac{48 + 25\sqrt{3}}{39} \approx 18,73.$$

$$\text{b) } \tan ABE = \tan(ABC - 30^\circ) = \frac{\tan ABC - \tan 30^\circ}{1 + \tan ABC \tan 30^\circ} = \frac{\frac{8}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{8}{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$$

$$\text{Tam giác } ABE \text{ vuông tại } A \text{ có: } AE = AB \tan ABE = 6 \cdot \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11} \approx 2,56.$$

**Câu 42:** Từ một vị trí  $A$ , người ta buộc hai sợi cáp  $AB$  và  $AC$  đến một cái trụ cao  $15m$ , được dựng vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí  $D$ . Biết  $CD=9m$  và  $AD=12m$ . Tìm góc nhọn  $\alpha = BAC$  tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng  $\alpha$  (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).



### Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \tan(BAD - CAD) \\ &= \frac{\tan BAD - \tan CAD}{1 + \tan BAD \tan CAD} = \frac{\frac{15}{12} - \frac{9}{12}}{1 + \frac{15}{12} \cdot \frac{9}{12}} = \frac{8}{31}. \end{aligned}$$

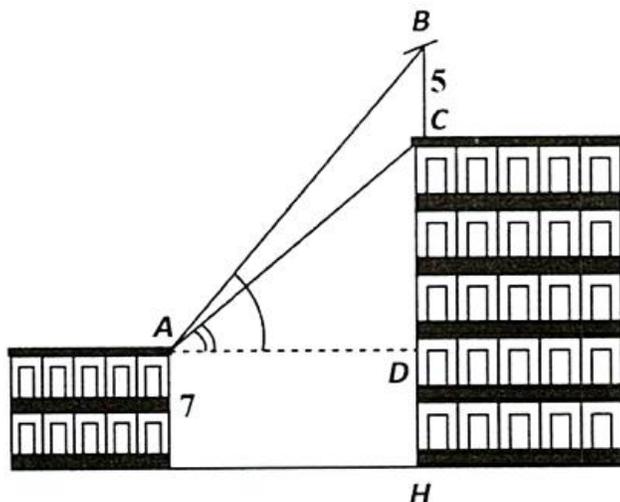
Vì vậy  $\alpha \approx 14,47^\circ$ .

$$B = \frac{\sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2 \cos 4x + \cos 5x} = \frac{2 \sin 3x \cos x + 2 \sin 3x}{2 \cos 4x \cos x + 2 \cos 4x} = \frac{2 \sin 3x (\cos x + 1)}{2 \cos 4x (\cos x + 1)} = \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$$

**Câu 43:** Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao  $5m$ . Từ vị trí quan sát  $A$  cao  $7m$  so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh  $B$  và chân  $C$  của cột ăng-ten dưới góc  $\alpha$  và  $\beta$  so với phương nằm ngang. Biết chiều cao của tòa nhà là  $18,9m$ , hai tòa nhà cách nhau  $10m$ .

a) Tính  $\tan \alpha$ ;

b) Tính góc  $\alpha$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



### Lời giải

a) Ta có:  $AD = 10m$

$$CD = 18,9 - 7 = 11,9m$$

$$BD = BC + CD = 11,9 + 5 = 16,9m$$

$$\tan \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{16,9}{10}$$

$$b) \tan \alpha = \frac{16,9}{10} \Rightarrow \alpha = 59^\circ.$$

**Câu 44:** Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , trong đó  $t$  là thời điểm (tính bằng giây),  $x(t)$  là li độ của vật tại thời điểm  $t$ ,  $A$  là biên độ dao động ( $A > 0$ ) và  $\varphi \in [-\pi; \pi]$  là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) (cm), x_2(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right) (cm). \text{ Tìm dao động tổng hợp}$$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$  và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

### Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3 \cdot 2 \left[ \cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \right] \\ &= 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right) \end{aligned}$$

Vậy biên độ của dao động là  $6 \cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$ . Pha ban đầu của chuyển động là  $\frac{5\pi}{24}$ .