

MỤC LỤC

► BÀI 3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ.....	2
Ⓐ. Tóm tắt kiến thức	2
Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản.....	4
♦ Dạng 1: Dựa vào đồ thị để tính giá trị của hàm số, xét sự tương giao	4
♦ Dạng 2: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số lượng giác.....	5
♦ Dạng 3: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số	5
♦ Dạng 4: Vẽ đồ thị hàm số.....	7
♦ Dạng 5: Tìm tập xác định của hàm số.....	9
♦ Dạng 6: Ứng dụng	12
Ⓒ. Dạng toán rèn luyện.....	13
♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	14
♦ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai	29
♦ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	43

A. Tóm tắt kiến thức

1. Hàm số chẵn, hàm số lẻ

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D .
 - Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số chẵn nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.
 - Hàm số $y = f(x)$ được gọi là hàm số lẻ nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.
- ✓ Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng, đồ thị hàm số lẻ nhận gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

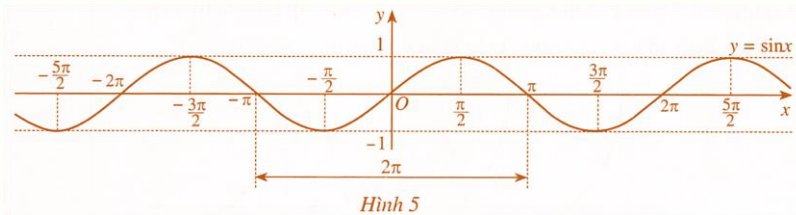
2. Hàm số tuần hoàn

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D . Hàm số $y = f(x)$ được gọi là tuần hoàn nếu tồn tại một số T khác 0 sao cho với mọi $x \in D$, ta có:
 - $x + T \in D$ và $x - T \in D$;
 - $f(x + T) = f(x)$.
- ✓ Số T dương nhỏ nhất (nếu có) thoả mãn các tính chất trên được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

3. Một số hàm số lượng giác cơ bản

a) Hàm số $y = \sin x$

- ✓ Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$; tập giá trị là đoạn $[-1; 1]$.
- ✓ Đồ thị hàm số $y = \sin x$ được biểu diễn ở Hình 5 :

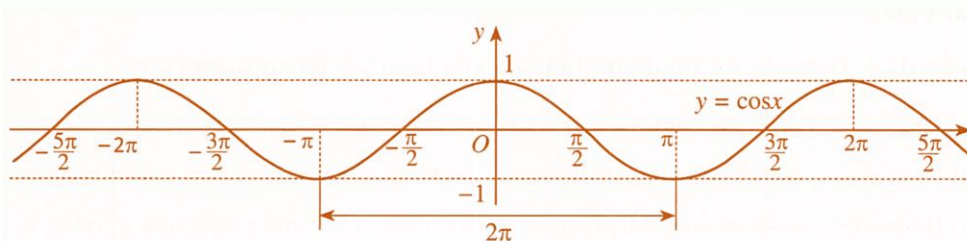


Hình 5

- ✓ Tính chất: Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc toạ độ O ; tuần hoàn chu kì 2π ; đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

b) Hàm số $y = \cos x$

- ✓ Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$; tập giá trị là đoạn $[-1; 1]$.
- ✓ Đồ thị hàm số $y = \cos x$ được biểu diễn ở Hình 6 :

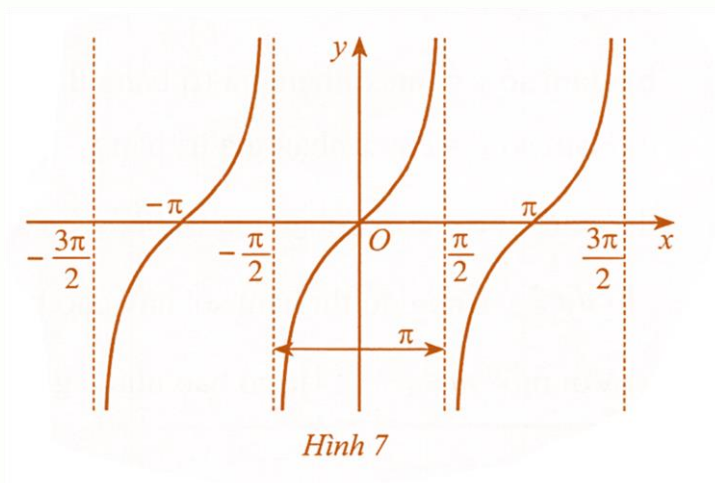


Hình 6

- ✓ Tính chất: Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn, có đồ thị đối xứng qua trục tung; tuần hoàn chu kỳ 2π ; đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

c) Hàm số $y = \tan x$

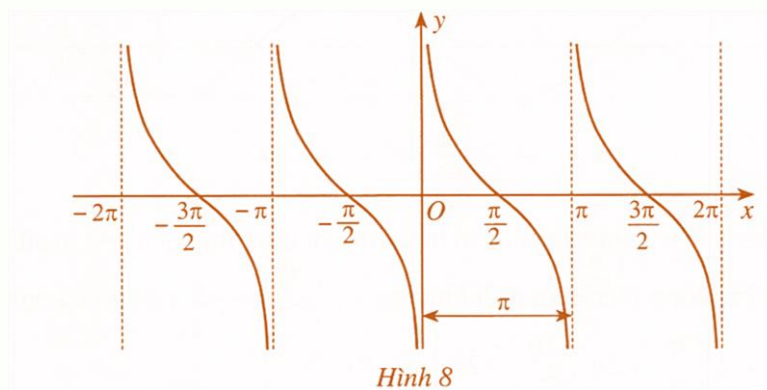
- ✓ Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- ✓ Đồ thị hàm số $y = \tan x$ được biểu diễn ở Hình 7:



- ✓ Tính chất: Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O ; tuần hoàn chu kỳ π ; đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

d) Hàm số $y = \cot x$

- ✓ Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- Đồ thị hàm số $y = \cot x$ được biểu diễn ở Hình 8 :



- ✓ Tính chất: Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ, có đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O ; tuần hoàn chu kỳ π ; nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

♦ Dạng 1: Dựa vào đồ thị để tính giá trị của hàm số, xét sự tương giao**☛ Các ví dụ minh họa****Câu 1:** Dùng đồ thị hàm số, tìm giá trị của x trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ để:

- a) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 1 ;
- b) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 0 ;
- c) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng -1 ;
- d) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng 0 .

Lời giảiTrên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$,

- a) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 1 với $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$.
- b) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị bằng 0 với $x \in \{-2\pi; -\pi; 0; \pi; 2\pi\}$.
- c) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng -1 với $x \in \{-\pi; \pi\}$.
- d) Hàm số $y = \cos x$ nhận giá trị bằng 0 với $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$.

Câu 2: Dùng đồ thị hàm số, hãy cho biết:

- a) Với mỗi $m \in [-1; 1]$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$;
- b) Với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có bao nhiêu giá trị $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$.

Lời giải

- a) Số giá trị $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ và đường thẳng $y = m$. Căn cứ vào đồ thị hàm số, với mỗi $m \in [-1; 1]$, có đúng một giá trị $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin \alpha = m$.
- b) Số giá trị $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ và đường thẳng $y = m$. Căn cứ vào đồ thị hàm số, với mỗi $m \in \mathbb{R}$, có đúng một giá trị $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan \alpha = m$.

♦Dạng ②: Xét sự đồng biến, nghịch biến của hàm số lượng giác

▣Các ví dụ minh họa

Câu 3: Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

a) $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right), \left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right)$;

b) $y = \cos x$ trên khoảng $(-20\pi; -19\pi), (-9\pi; -8\pi)$.

Lời giải

a) Ta có:

$\cdot \left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2} - 4\pi; \frac{\pi}{2} - 4\pi\right)$. Do hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số đó cũng đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right)$.

$- \left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 10\pi; \frac{3\pi}{2} + 10\pi\right)$. Do hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ nên hàm số đó cũng nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right)$.

b) Ta có:

$- (-20\pi; -19\pi) = (0 - 20\pi; \pi - 20\pi)$.

Do hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$ nên hàm số đó cũng nghịch biến trên khoảng $(-20\pi; -19\pi)$.

$- (-9\pi; -8\pi) = (-\pi - 8\pi; 0 - 8\pi)$.

Do hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ nên hàm số đó cũng đồng biến trên khoảng $(-9\pi; -8\pi)$.

♦Dạng ③: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số

▣Các ví dụ minh họa

Câu 4: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = \sin x \cdot \cos x$

b) $y = \tan x + \cot x$;

c) $y = \sin^2 x$.

Lời giải

a) Hàm số $y = f(x) = \sin x \cdot \cos x$ là hàm số lẻ vì:

- Tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -(\sin x \cdot \cos x) = -f(x)$.

b) Hàm số $y = g(x) = \tan x + \cot x$ là hàm số lẻ vì:

- Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

- $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $g(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -(\tan x + \cot x) = -g(x)$.

c) Hàm số $y = h(x) = \sin^2 x$ là hàm số chẵn vì:

- Tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

- $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-x \in \mathbb{R}$ và $h(-x) = \sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x = h(x)$.

Câu 5: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = \cos 2x$;

b) $y = \sin^3 x$;

c) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

d) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

Lời giải

a) Hàm số $y = \cos 2x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $\cos[2 \cdot (-x)] = \cos(-2x) = \cos 2x$. Do đó hàm số $y = \cos 2x$ là hàm số chẵn.

b) Hàm số $y = \sin^3 x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $\sin^3(-x) = (-\sin x)^3 = -\sin^3 x$. Do đó hàm số $y = \sin^3 x$ là hàm số lẻ.

c) Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ xác định khi và chỉ khi $x + \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, tức là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Suy ra hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Với mọi $x \in D$, ta có $-x \neq -k\pi, k \in \mathbb{Z}$, cũng có nghĩa là $-x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, hay $-x \in D$.

Mặt khác, ta lại có $\tan\left(-x + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2} + \pi\right) = -\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ là hàm số lẻ.

d) Hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$. Đặt $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Xét hai giá trị $\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{3} \in D$, ta thấy rằng:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0; f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vì $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ và $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ không phải là hàm số chẵn cũng không phải là hàm số lẻ.

Câu 6: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = x \sin 3x$

b) $y = \frac{1 + \cos 3x}{1 - \cos 3x}$

c) $y = x^3 \cos 2x$

d) $y = \sin x - \cos x$.

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Nếu kí hiệu $f(x) = x \sin 3x$ thì với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$-x \in \mathbb{R} \text{ và } f(-x) = (-x) \sin 3(-x) = x \sin 3x = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Nếu kí hiệu $f(x) = \frac{1 + \cos 3x}{1 - \cos 3x}$ thì với mọi $x \in D$, ta có:

$$-x \in D \text{ và } f(-x) = \frac{1 + \cos 3(-x)}{1 - \cos 3(-x)} = \frac{1 + \cos 3x}{1 - \cos 3x} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Nếu kí hiệu $f(x) = x^3 \cos 2x$ thì với mọi $x \in D$, ta có:

$$-x \in D \text{ và } f(-x) = (-x)^3 \cos 2(-x) = -x^3 \cos 2x = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

d) Nếu kí hiệu $f(x) = \sin x - \cos x$

$$\text{thì } f(-1) = \sin(-1) - \cos(-1) = -\sin 1 - \cos 1 \neq f(1) \text{ và } f(-1) \neq -f(1).$$

Vậy hàm số đã cho không là hàm số chẵn và cũng không là hàm số lẻ.

♦Dạng 4: Vẽ đồ thị hàm số

▣Các ví dụ minh họa

Câu 7: Cho hàm số $y = \cos x$ với $x \in [0; 3\pi]$.

a) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

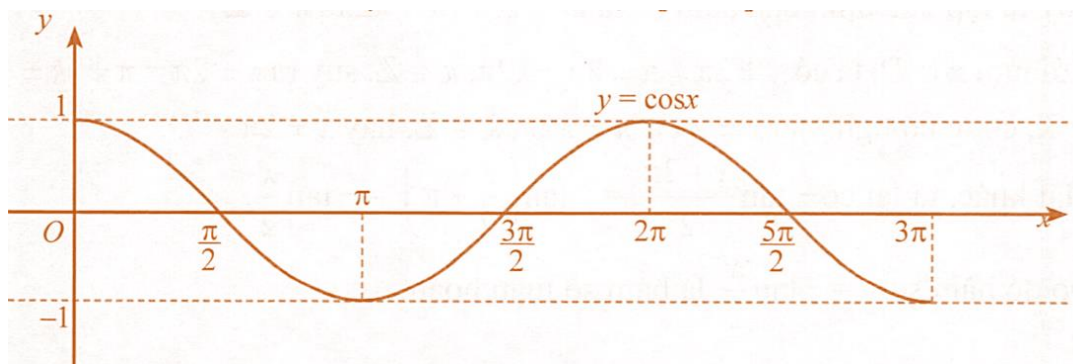
b) Hàm số đã cho đồng biến, nghịch biến trên những khoảng nào?

c) Tại các điểm nào thì giá trị của hàm số lớn nhất, nhỏ nhất?

d) Tìm các giá trị của $x \in [0; \pi]$ sao cho $\cos 3x \leq 0$.

Lời giải

a) Ta có đồ thị của hàm số $y = \cos x$ trên đoạn $[0; 3\pi]$ như sau:



b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$, nghịch biến trên các khoảng $(0; \pi)$ và $(2\pi; 3\pi)$.

c) Giá trị của hàm số lớn nhất khi $x = 0$ và $x = 2\pi$.

Giá trị của hàm số nhỏ nhất khi $x = \pi$ và $x = 3\pi$.

d) Đặt $t = 3x$. Vì $0 \leq x \leq \pi$ nên $0 \leq t \leq 3\pi$.

Từ đồ thị của hàm số ở trên, ta có $\cos t \leq 0$ khi và chỉ khi $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$ hoặc $\frac{5\pi}{2} \leq t \leq 3\pi$.

Do đó $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ hoặc $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \cot x$ với $x \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.

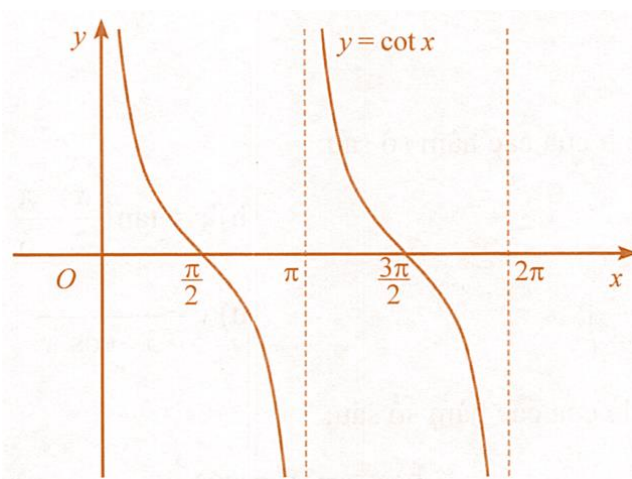
a) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Tìm các giá trị của x sao cho $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Tìm các giá trị của $x \in (0; \pi)$ sao cho $\cot 2x < \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a) Ta có đồ thị của hàm số $y = \cot x$ trên $(0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$ như sau:

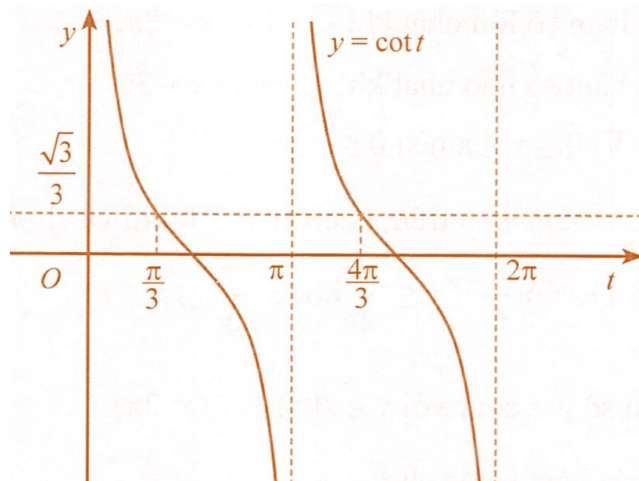


b) Với $x \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$ ta có $\cot x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi $x = \frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{4\pi}{3}$.

c) Đặt $t = 2x$. Vì $0 < x < \pi$ nên $0 < t < 2\pi$.

Hàm số $y = \cot t$ xác định khi $t \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Kết hợp với điều kiện $0 < t < 2\pi$, suy ra $t \in (0; \pi) \cup (\pi; 2\pi)$.



Từ đồ thị trên, ta có $\cot t < \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $\frac{\pi}{3} < t < \pi$ hoặc $\frac{4\pi}{3} < t < 2\pi$.

Do đó $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ hoặc $\frac{2\pi}{3} < x < \pi$.

Câu 9: Xét tính tuần hoàn của các hàm số sau:

a) $y = \sin 3x$

b) $y = x^2$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$. Nếu kí hiệu $f(x) = \sin 3x$ thì với mọi

$x \in D$, ta có $x + \frac{2\pi}{3} \in D$, $x - \frac{2\pi}{3} \in D$ và

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin 3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin(3x + 2\pi) = \sin 3x = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn. Chú ý rằng, chu kì của hàm số này là $\frac{2\pi}{3}$.

b) Kí hiệu $f(x) = x^2$. Nếu $f(x+T) = f(x)$ với mọi x thì $(x+T)^2 = x^2$ với mọi x . Chọn $x=0$ ta được $T^2 = 0$, hay $T = 0$. Vậy hàm số $y = x^2$ không tuần hoàn.

♦Dạng 5: Tìm tập xác định của hàm số

☛Các ví dụ minh họa

Câu 10: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$

b) $y = \frac{2x}{1 - \sin^2 x}$

$$c) y = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}};$$

$$d) y = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}.$$

Lời giải

a) Biểu thức $\frac{\sin x}{\cos x + 1}$ có nghĩa khi $\cos x \neq -1$ hay $x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$$

b) Biểu thức $\frac{2x}{1 - \sin^2 x}$ có nghĩa khi $1 - \sin^2 x \neq 0 \Leftrightarrow \cos^2 x \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) Biểu thức $\frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin x}}$ có nghĩa khi $\sin x \neq -1$ hay $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) Biểu thức $\sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$ có nghĩa khi $\sin x \neq 1$ hay $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Chú ý. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

- Ta gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D và kí hiệu là $M = \max_{x \in D} f(x)$ nếu $f(x) \leq M, \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ thoả mãn $f(x_0) = M$.

- Tương tự, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D và kí hiệu là $m = \min_{x \in D} f(x)$ nếu $f(x) \geq m, \forall x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ thoả mãn $f(x_0) = m$.

- Khi không nói rõ tập D ta sẽ hiểu là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất được lấy trên tập xác định của nó.

Nhận xét. Nếu tập giá trị của hàm số $y = f(x)$ là đoạn $[m; M]$ thì m và M tương ứng sẽ là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số.

Câu 11: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \cot 3x$

b) $y = \sqrt{1 - \cos 4x}$

$$c) y = \frac{\cos 2x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

$$d) y = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin 2x}}$$

Lời giải

a) Biểu thức $\cot 3x$ có nghĩa khi $\sin 3x \neq 0$ hay $x \neq k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

b) Biểu thức $\sqrt{1 - \cos 4x}$ có nghĩa với mọi x vì $\cos 4x \leq 1$ với mọi x . Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

c) Biểu thức $\frac{\cos 2x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{\cos 2x}{-\cos 2x}$ có nghĩa khi

$$\cos 2x \neq 0 \text{ hay } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

d) Biểu thức $\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin 2x}}$ có nghĩa khi $\sin 2x \neq 1$ hay $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 12: Tìm tập giá trị của các hàm số sau, từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chúng:

$$a) y = 2 + 3\sin x;$$

$$b) y = \frac{1 + 4\cos^2 x}{5}$$

$$c) y = 2 - 4\sin^2 x \cos^2 x$$

$$d) y = 2\sin^2 x - \cos 2x.$$

Lời giải

a) Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$ nên $-3 \leq 3\sin x \leq 3$, do đó $-1 \leq 2 + 3\sin x \leq 5$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $[-1; 5]$. Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là 5, đạt được khi $\sin x = 1$

hay $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 , đạt được khi $\sin x = -1$ hay

$$x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Vì $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ nên $0 \leq 4\cos^2 x \leq 4$, do đó $\frac{1}{5} \leq \frac{1+4\cos^2 x}{5} \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $\left[\frac{1}{5}; 1\right]$. Suy ra giá trị lớn nhất của

hàm số là 1, đạt được khi $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0$ hay $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\frac{1}{5}$, đạt được khi $\cos x = 0$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có $y = 2 - 4\sin^2 x \cos^2 x = 2 - \sin^2 2x = 1 + \cos^2 2x$. Vì $0 \leq \cos^2 2x \leq 1$ nên $1 \leq 1 + \cos^2 2x \leq 2$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $[1; 2]$. Suy ra, giá trị lớn nhất của hàm số là 2, đạt được khi $\cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$ hay $x = k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là 1, đạt được khi $\cos 2x = 0$ hay $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

d) Ta có $y = 2\sin^2 x - \cos 2x = 1 - 2\cos 2x$. Vì $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ nên $-1 \leq 1 - 2\cos 2x \leq 3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Vậy tập giá trị của hàm số là đoạn $[-1; 3]$. Suy ra, giá trị lớn nhất của hàm số là 3, đạt được khi $\cos 2x = -1$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1, đạt được khi $\cos 2x = 1$ hay $x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

♦ Dạng ⑥: Ứng dụng

☛ Các ví dụ minh họa

Câu 13: Một dao động điều hòa có phương trình li độ dao động là: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét, $\omega > 0$. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi

$t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hòa trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

a) $A = 3\text{cm}, \varphi = 0$;

b) $A = 3\text{cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;

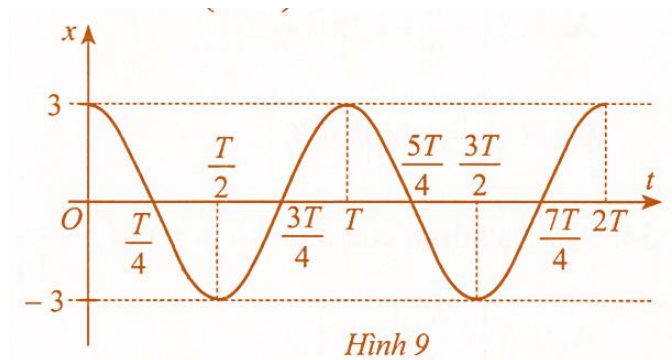
c) $A = 3\text{cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

a) Khi $A = 3\text{cm}, \varphi = 0$, ta có: $x = 3\cos(\omega t) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 9:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	3	0	-3	0	3

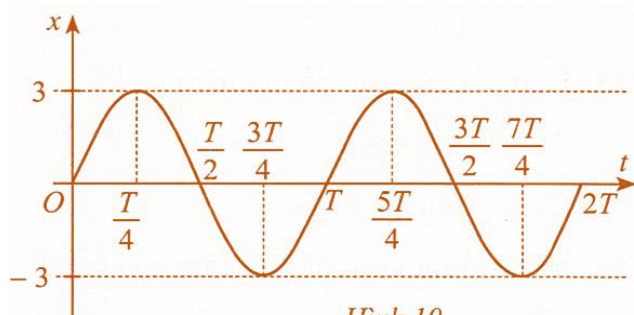


Hình 9

b) Khi $A = 3\text{cm}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 10:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	3	0	-3	0

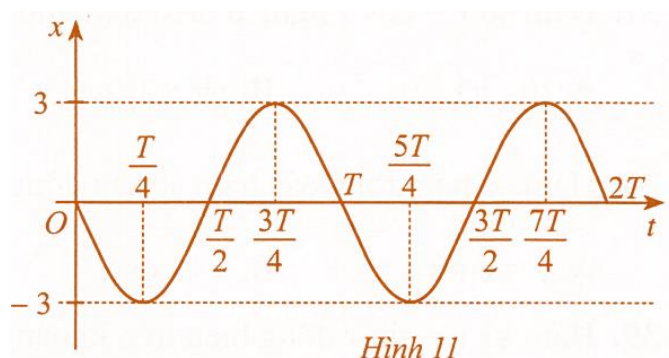


Hình 10

c) Khi $A = 3\text{cm}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 11 :

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	-3	0	3	0



Hình 11

♦Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$ là:

- A. $\emptyset$. B. $\mathbb{R}$. C. $[-1; +\infty)$. D. $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x}}$ là:

- A. $\mathbb{R}$. B. $\emptyset$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y = \tan x + \frac{1}{1 + \cot^2 x}$ là:

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 5: Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ?

- A. $y = -2 \cos x$. B. $y = -2 \sin x$. C. $y = \tan x - \cos x$. D. $y = -2 \sin x + 2$.

Lời giải

Chọn B

Câu 6: Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A. $y = \cos x + 5$. B. $y = \tan x + \cot x$. C. $y = \sin(-x)$. D. $y = \sin x - \cos x$.

Lời giải

Chọn A

Câu 7: Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng:

- A.** $(0; \pi)$. **B.** $(\pi; 2\pi)$. **C.** $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ **D.** $(-\pi; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 8: Hàm số nào trong các hàm số sau đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

- A.** $y = \sin x$. **B.** $y = \cos x$. **C.** $y = \tan x$. **D.** $y = \cot x$.

Lời giải

Chọn C

Câu 9: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

- A.** $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. **B.** $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.
C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$. **D.** $x \neq k\pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ xác định khi $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y = \tan 2x$ là?

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 11: Tập xác định của hàm số $y = \frac{2 \sin x + 1}{1 - \cos x}$ là

- A.** $x \neq k2\pi$. **B.** $x \neq k\pi$. **C.** $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. **D.** $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi: $1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$.

Câu 12: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin 3x}{\cos x + 2}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **D.** $D = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Chọn D

Điều kiện: $\cos x + 2 \neq 0$ (luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R}$).

Câu 13: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

A. $y = -\sin x$. **B.** $y = \cos x$. **C.** $y = -\cot x$. **D.** $y = \tan x$.

Lời giải

Chọn B

Với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$: Khi giá trị của x tăng thì giá trị tương ứng của hàm số $y = \cos x$ giảm

$\Rightarrow$ Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Câu 14: Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

A. $y = \sin x$. **B.** $y = \cos x$. **C.** $y = \tan x$. **D.** $y = \cot x$.

Lời giải

Chọn C

Câu 15: Trên khoảng nào sau đây thì hàm số $y = \cos x$ đồng biến?

A. $(-\pi; 0)$. **B.** $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$. **C.** $(0; \pi)$. **D.** $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 16: Tìm mệnh đề đúng.

A. Hàm số $y = \cot x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$.

B. Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

C. Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $(\pi; 2\pi)$.

D. Hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 17: Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

A. $y = \cos x$. **B.** $y = \tan x$. **C.** $y = \cot x$. **D.** $y = \sin x$.

Lời giải

Chọn B

Câu 18: Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

A. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số lẻ. **B.** Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
C. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ. **D.** Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Lời giải

Chọn A

Ta có các kết quả sau:

- + Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.
- + Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.
- + Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
- + Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

Câu 19: Chọn khẳng định sai về tính chẵn, lẻ của hàm số.

A. Hàm số $y = \cot x$ là hàm lẻ. **B.** Hàm số $y = \sin x$ là hàm lẻ.
C. Hàm số $y = \cos x$ là hàm chẵn. **D.** Hàm số $y = \tan x$ là hàm chẵn.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \tan x$ là hàm lẻ vì $\tan(-x) = -\tan x$

Câu 20: Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x \cdot \cos 2x$. **B.** $y = (x^2 + 1) \cdot \sin x$. **C.** $y = \frac{\cos x}{1 + x^2}$. **D.** $y = \frac{\tan x}{1 + x^2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{\cos x}{1 + x^2}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$\bullet \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$\bullet \forall x \in D: f(-x) = \frac{\cos(-x)}{1 + (-x)^2} = \frac{\cos x}{1 + x^2} = f(x)$$

Vậy hàm số f là hàm chẵn.

Câu 21: Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ trên tập xác định của nó?

A. $y = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$. **B.** $y = \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$. **C.** $y = \frac{\cos x}{x + x^2}$. **D.** $y = \frac{\tan x}{1 + \sin^2 x}$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x) = \frac{\tan x}{1 + \sin^2 x}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

• $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

• $\forall x \in D: f(-x) = \frac{\tan(-x)}{1 + \sin^2(-x)} = \frac{-\tan x}{1 + \sin^2 x} = -f(x)$

Vậy hàm số f là hàm lẻ.

Câu 22: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. **B.** $y = \tan x$. **C.** $y = \sin x$. **D.** $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ (theo định nghĩa).

Câu 23: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

A. $y = \tan x$. **B.** $y = x \cot x$. **C.** $y = x \sin x$. **D.** $y = \frac{1}{x}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 24: Chọn khẳng định **sai**.

A. Hàm số $y = \tan x + \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

B. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

C. Hàm số $y = \cot x + \tan x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

D. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Nên khẳng định **sai** là **D**.

Câu 25: Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ bằng bao nhiêu?

- A.** $T = 4\pi$. **B.** $T = 2\pi$. **C.** $T = \pi$. **D.** $T = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ bằng $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Câu 26: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số tuần hoàn?

- A.** $y = \sin x$. **B.** $y = x + \sin x$. **C.** $y = x \cdot \cos x$. **D.** $y = \frac{\sin x}{x}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = \sin x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Câu 27: Hàm số $y = 3 - 5\sin x$ có giá trị lớn nhất bằng

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 5 \geq -5\sin x \geq -5$.

$\Rightarrow 3 + 5 \geq 3 - 5\sin x \geq -5 + 3$.

$\Leftrightarrow 8 \geq 3 - 5\sin x \geq -2$.

$\Rightarrow y_{\max} = 8$ khi $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy $y_{\max} = 8$ khi $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 28: Tập giá trị của hàm số $y = \cot x$ là

- A.** $(-\infty; 0)$. **B.** $[-1; 1]$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 29: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 7$.

- A.** $\max y = -7$. **B.** $\max y = 4$. **C.** $\max y = 3$. **D.** $\max y = -4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -10 \leq y \leq -4$. Do đó $\max y = -4$.

Câu 30: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin x + 5$ là

- A.** 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

* Ta có: $\forall x \in \mathbb{R} : \sin x \geq -1 \rightarrow y \geq 3$. Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = 3$.

Câu 31: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \cos 2x$.

- A.** $[-1;1]$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $[-2;2]$. **D.** $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn A

Câu 32: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sin x - 1$.

- A.** $[0;1]$. **B.** $[-1;0]$. **C.** $[-2;0]$. **D.** $[2;0]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 0$.

Vậy tập giá trị của hàm số $y = \sin x - 1$ là $T = [-2;0]$.

Câu 33: Tập giá trị của hàm số $y = 4 \sin x$ là

- A.** $[-1;1]$. **B.** $[-2;2]$. **C.** $[-6;6]$. **D.** $[-4;4]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -4 \leq y \leq 4, \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy tập giá trị của hàm số $y = 4 \sin x$ là $[-4;4]$.

Câu 34: Tập giá trị của hàm số $y = 2 \sin 2x + 3$ là

- A.** $1;5$. **B.** $-2;3$. **C.** $2;3$. **D.** $0;1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Do } -1 \leq \sin 2x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin 2x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 \sin 2x + 3 \leq 5.$$

Câu 35: Tập giá trị của hàm số $y = \sin 3x$ là

- A.** $[-3;3]$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $(-3;3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $-1 \leq \sin 3x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Nên hàm số $y = \sin 3x$ có tập giá trị là $T = [-1;1]$.

Câu 36: Tập giá trị của hàm số $y = \sin x$ là

- A.** $\mathbb{R}$. **B.** $[0;1]$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $(-1;1)$.

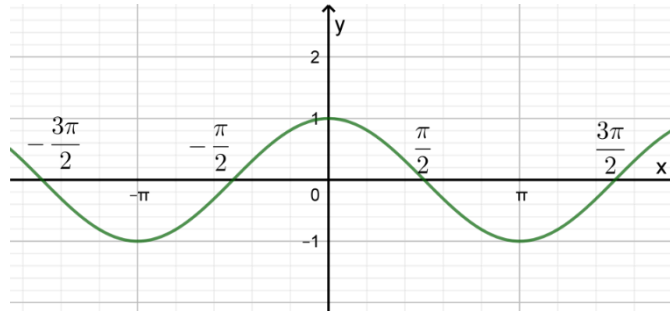
Lời giải

Chọn C

Vì $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên tập giá trị của hàm số là $[-1; 1]$.

Câu 37: Cho đồ thị hàm số $f(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hỏi tịnh tiến đồ thị hàm số $f(x)$ theo vector

$\vec{v} = \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ thì được đồ thị hàm số



- A.** $y = \tan x$. **B.** $y = \sin x$. **C.** $y = \cos x$. **D.** $y = \cot x$.

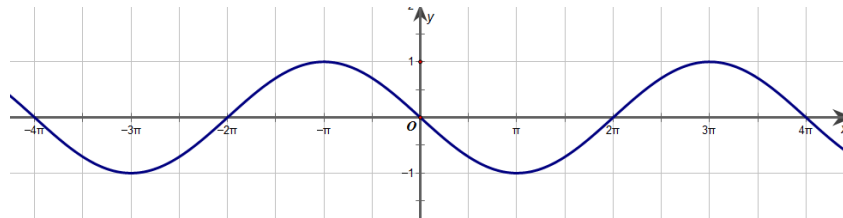
Lời giải

Chọn B

Theo hình vẽ thì đồ thị trong hình là của hàm số $y = \cos x$. Khi tịnh tiến theo vector

$\vec{v} = \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$ thì ta được đồ thị của hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$.

Câu 38: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D .



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = \sin \frac{x}{2}$. **B.** $y = \cos \frac{x}{2}$. **C.** $y = -\cos \frac{x}{4}$. **D.** $y = \sin\left(-\frac{x}{2}\right)$.

Lời giải

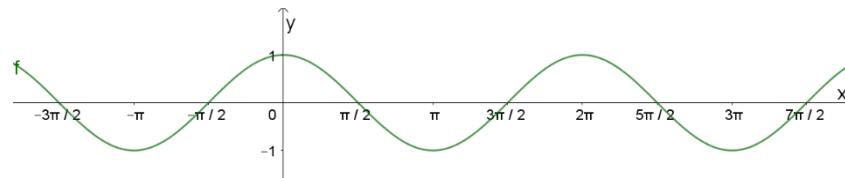
Chọn D

ĐTHS đi qua điểm $(\pi; -1)$ nên ta chọn đáp án

D.

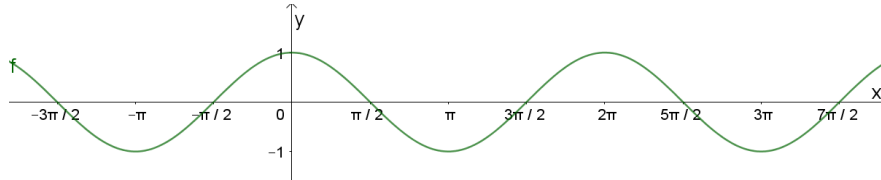
Câu 39: Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án $A, B, C,$

D.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = 1 + \sin 2x$. **B.** $y = \cos x$. **C.** $y = -\sin x$. **D.** $y = -\cos x$



Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

- A.** $y = 1 + \sin 2x$.
B. $y = \cos x$.
C. $y = -\sin x$.
D. $y = -\cos x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \cos x$.

Câu 40: Đồ thị của hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ đi qua điểm nào sau đây?

- A.** $M\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$. **B.** $N\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **C.** $P\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$. **D.** $Q(0; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Với $x = 0 \Rightarrow y = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 41: Cho các hàm số sau.

(I) $y = -x^3 + 3x - 4$ (II) $y = -x^4 + 3x - 4 + \frac{x+1}{x^2+1}$

(III) $y = \sin x$ (IV) $y = \tan x + \cot x$

Có bao nhiêu hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$?

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

+ Hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$ là hàm đa thức nên có tập xác định là $\mathbb{R}$.

+ Do $x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = -x^4 + 3x - 4 + \frac{x+1}{x^2+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

+ Hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

+ Hàm số $y = \tan x + \cot x$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$
($k \in \mathbb{Z}$).

Nên hàm số $y = \tan x + \cot x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Vậy có 3 hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 42: Tập xác định của hàm số $y = -\tan x$ là:

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = -\tan x$ xác định khi: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 43: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2019}{\sin x}$.

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. **B.** $D = \mathbb{R}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 44: Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{1 - \cos x}$

- A.** $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **B.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **D.** $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Đk: $1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 45: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x}{\sin x - 1}$?

A. $\mathbb{R}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vậy tập xác định của hàm số là: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 46: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{1 - \cos x} + \cot x$?

A. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $(-\infty; 1]$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $[-1; 1] \setminus \{0\}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} 1 - \cos x \geq 0 (\forall x) \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos x \geq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq 1 \\ x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Tập xác định của hàm số } D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Câu 47: Tập xác định D của hàm số $y = \tan x + \cot x$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Lời giải

Chọn B

Điều kiện để hàm số $y = \tan x + \cot x$ xác định là $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2},$
 $k \in \mathbb{Z}.$

Câu 48: Xét hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; 0]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$; đồng biến trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}; 0]$
- B.** Hàm số đã cho nghịch biến trên các đoạn $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$ và $[-\frac{\pi}{2}; 0]$
- B.** Hàm số đã cho nghịch biến trên các đoạn $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$ và $[-\frac{\pi}{2}; 0]$
- C.** Hàm số đã cho đồng biến trên các đoạn $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$ và $[-\frac{\pi}{2}; 0]$
- D.** Hàm số đã cho đồng biến trên đoạn $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$; nghịch biến trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}; 0]$

Lời giải

Chọn A

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-\pi; \pi]$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$y = \sin x$	0	-1	0	1	0

Khi đó, hàm số nghịch biến trên đoạn $[-\pi; -\frac{\pi}{2}]$; đồng biến trên đoạn $[-\frac{\pi}{2}; 0]$

Câu 49: Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $y = \sin x$ là hàm số nghịch biến trên $(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4})$.
- B.** $y = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$.
- C.** $y = \sin x$ là hàm số nghịch biến trên $(0; \frac{2\pi}{3})$.
- D.** $y = \tan x$ là hàm số nghịch biến trên $(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4})$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đường tròn lượng giác ta thấy $y = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $(0; \pi)$ nên $y = \cos x$ là hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Câu 50: Xét hàm số $y = \cos x$ với $x \in [-\pi; \pi]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\pi; 0)$ và đồng biến trên $(0; \pi)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.
- C. Hàm số đồng biến trên $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên $(0; \pi)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên $(0; \pi)$.

Câu 51: Cho hàm số $y = \sin x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$ và nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right) (k \in \mathbb{Z})$.

Do đó đáp án D đúng.

Cách 2: Dùng chức năng Table(Mode 7) của MTCT để khảo sát SBT trên từng khoảng.

Câu 52: Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Cả hai hàm số $y = -\sin 2x$ và $y = -1 + \cos 2x$ đều nghịch biến.
- B. Cả hai hàm số $y = -\sin 2x$ và $y = -1 + \cos 2x$ đều đồng biến.
- C. Hàm số $y = -\sin 2x$ nghịch biến, hàm số $y = -1 + \cos 2x$ đồng biến.
- D. Hàm số $y = -\sin 2x$ đồng biến, hàm số $y = -1 + \cos 2x$ nghịch biến.

Lời giải

Chọn A

Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 2x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = \sin 2x$ đồng biến, $y = -1 + \cos 2x$ nghịch biến.

Vậy cả hai hàm số $y = -\sin 2x$ và $y = -1 + \cos 2x$ đều nghịch biến.

Câu 53: Trong các hàm số sau có bao nhiêu hàm số là hàm số chẵn trên tập xác định của nó?

$$y = \tan 2x, y = \sin^{2018} x, y = \cos(x + 3\pi), y = |\cot x|.$$

A. 2.

B. 4.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \tan 2x$ có

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Ta có: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = \tan(-2x) = -\tan 2x = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = \tan 2x$ là hàm số lẻ.

Hàm số $y = \cos(x + 3\pi) = -\cos x$ là hàm số chẵn.

Tương tự, kiểm tra được các hàm số $y = \sin^{2018} x$; $y = |\cot x|$ là các hàm số chẵn trên tập xác định của nó.

Câu 54: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = x \cdot \sin x$. B. $y = \tan x$.

C. $y = 1 - \sin x$. D. $y = \cos x \cdot \sin x$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = x \cdot \sin x = f(x)$

$$D = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$f(-x) = -x \cdot \sin(-x) = x \cdot \sin x = f(x)$$

Nên $f(x)$ là hàm số chẵn.

Câu 55: Hàm số nào sau đây là hàm số lẻ trên tập xác định của nó?

A. $y = \cos x$.

B. $y = x \sin x$.

C. $y = -\sin x \cos 2x$.

D. $y = \sin^2 x$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = -\sin x \cos 2x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = -[\sin(-x) \cos(-2x)] = -(-\sin x \cos 2x) = -f(x)$$

Vậy $y = -\sin x \cos 2x$ hàm số lẻ.

Câu 56: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$?

A. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. **B.** $y = \tan x$.

C. $y = \sin x$.

D. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ là hàm số chẵn trên $\mathbb{R}$ (theo định nghĩa).

Câu 57: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có đồ thị đối xứng qua trục tung?

A. $y = \tan x$. **B.** $y = \cos x$. **C.** $y = \sin x$. **D.** $y = \cot x$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên có đồ thị đối xứng qua trục tung.

Câu 58: Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng:

A. $\left(\frac{9\pi}{2}; \frac{11\pi}{2}\right)$

B. $\left(\frac{11\pi}{2}; \frac{13\pi}{2}\right)$.

C. $(10\pi; 11\pi)$.

D. $(9\pi; 10\pi)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 59: Số giá trị $\alpha \in [-\pi; 2\pi]$ sao cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

♦Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 60: Cho hàm số $f(x) = \tan 2x - 1$. Khi đó:

- a) Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{8}$ bằng 0
b) Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{3}$ bằng $-\sqrt{3} - 1$
c) Có ba giá trị x thuộc $[0; \pi]$ khi hàm số đạt giá trị bằng -2 .
d) Hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) b) Ta có:

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\sqrt{3} - 1$$

c) Ta có : $f(x) = -2 \Leftrightarrow \tan 2x - 1 = -2 \Leftrightarrow \tan 2x = -1$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên $x \in \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right\}$ (khi đó $k=1; k=2$).

d) Tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Với mọi $x \in D$, ta có: $x \pm \frac{\pi}{2} \in D$ và

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = \tan(2x + \pi) - 1 = \tan 2x - 1 = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 61: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$. Khi đó;

- a) Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$
b) $f(-\pi) = -f(\pi)$
c) $f(-x) = f(x)$
d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$. Với mọi $x \in D$, ta có:

$$-x \in D \text{ và } f(-x) = \sin^2(-x) + \cos(-x) - 1 = \sin^2 x + \cos x - 1 = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 62: Cho hàm số $f(x) = \tan x - x$. Khi đó:

- a) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
- c) $f(-x) = -f(x)$
- d) Hàm số đối xứng với nhau qua trục Oy

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Với mọi $x \in D$, ta có: $-x \in D$ và

$$f(-x) = \tan(-x) - (-x) = -\tan x + x = -(\tan x - x) = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 63: Cho hàm số $f(x) = |x| \sin x$. Khi đó:

- a) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- b) $f(-\pi) = -f(\pi)$
- c) Hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0;0)$
- d) $f(-x) = -f(x)$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------------	----------------	----------------	----------------

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in D$, ta có: $-x \in D$ và $f(-x) = |-x| \sin(-x) = -|x| \sin x = -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 64: Cho hàm số $f(x) = |\tan x| + |x^3 - 3x|$. Khi đó:

- a) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- b) $f(-\pi) = -f(\pi)$.
- c) Hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0;0)$
- d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Với mọi $x \in D$, ta có:

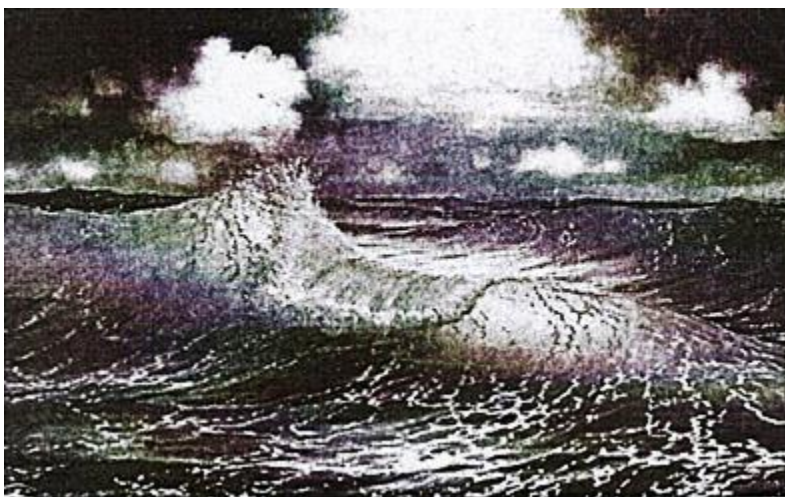
$$-x \in D \text{ và } f(-x) = |\tan(-x)| + |(-x)^3 - 3(-x)| = |\tan x| + |x^3 - 3x| = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 65: Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số $h(t) = 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.

- a) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3(cm)
- b) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75(cm)
- c) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây
- d) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây

(Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Khi $t = 5$, ta có: $h(5) = 75 \sin\left(\frac{\pi \cdot 5}{8}\right) \approx 69,3(\text{cm})$.

b) Khi $t = 20$, ta có: $h(20) = 75 \sin\left(\frac{\pi \cdot 20}{8}\right) = 75(\text{cm})$.

c) d) Ta có: $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1 \Rightarrow 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 75$ hay $h(t) \leq 75$.

Giá trị lớn nhất của $h(t)$ là 75, khi đó $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)=1 \Rightarrow \frac{\pi t}{8}=\frac{\pi}{2}+k2\pi(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t=4+16k(k \in \mathbb{Z})$.

Vì $t \in [0;30] \Rightarrow t \in \{4;20\}$ (ứng với k bằng 0 và 1).

Vậy tại các thời điểm 4 giây hoặc 20 giây (trong 30 giây đầu tiên) thì con sóng đạt chiều cao cực đại (là 75cm).

Câu 66: Tìm được tập giá trị các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

a) Hàm số $y=3\sin x$ có tập giá trị là $T=[-3;3]$.

b) Hàm số $y=2\cos x-1$ có tập giá trị là $T=[-3;1]$.

c) Hàm số $y=2030-4\cos x$ có tập giá trị là $T=[2026;2034]$.

d) Hàm số $y=\sin^2 x+4\sin x-1$ có tập giá trị là $T=[-3;3]$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\sin x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq y \leq 3$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T=[-3;3]$.

b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2\cos x \leq 2 \Rightarrow -2-1 \leq 2\cos x-1 \leq 2-1 \Rightarrow -3 \leq y \leq 1$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T=[-3;1]$.

c) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 4 \geq -4\cos x \geq -4$
 $\Rightarrow 4+2030 \geq -4\cos x+2030 \geq -4+2030 \Rightarrow 2034 \geq y \geq 2026$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T=[2026;2034]$.

d) Ta có: $y=\sin^2 x+4\sin x-1=\sin^2 x+4\sin x+4-5=(\sin x+2)^2-5$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sin x+2 \leq 3$

$\Rightarrow 1^2 \leq (\sin x+2)^2 \leq 3^2 \Rightarrow 1^2-5 \leq (\sin x+2)^2-5 \leq 3^2-5 \Rightarrow -4 \leq y \leq 4$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T=[-4;4]$.

Câu 67: Cho các hàm số sau $f(x)=2|\cos x|$; $g(x)=1-3\sin^2 x$. Khi đó:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 2

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 0

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng 2

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ bằng -2

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\cos x| \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2|\cos x| \leq 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2, khi đó $\cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0, khi đó $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) d) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -3\sin^2 x \geq -3 \Rightarrow 1 \geq 1 - 3\sin^2 x \geq -2$
hay $1 \geq y \geq -2$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 1, khi đó $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -2, khi đó $\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 68: Cho các hàm số sau $f(x) = \sin x$ và $g(x) = \cos x$. Khi đó:

a) Hàm số $f(x) = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$.

c) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.

d) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{25\pi}{6}; \frac{13\pi}{3}\right)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Hàm số $f(x) = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vì $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right) \subset \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right)$.

b) Hàm số $g(x) = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$.

Vì $\frac{25\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 4\pi, \frac{13\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 4\pi$, đồng thời $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right) \subset \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $g(x) = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)$, suy ra hàm số cũng nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{25\pi}{6}; \frac{13\pi}{3}\right)$.

Câu 69: Cho hàm số $f(x) = 2\cos x + 1$ và $g(x) = \sin x + \tan x$. Khi đó:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $g(x)$ là hàm không tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) b) Tập xác định hàm số: $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in D$ thì $x \pm 2\pi \in D$ và $f(x+2\pi) = 2\cos(x+2\pi) + 1 = 2\cos x + 1 = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

c) d) Tập xác định hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Với mọi $x \in D$ thì $x \pm 2\pi \in D$ và $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + \tan(x+2\pi) = \sin x + \tan x = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 70: Cho hàm số $f(x) = \tan x$ và $g(x) = \cot^2 x - \frac{\sin 2x}{2}$. Khi đó:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Hàm số $f(x)$ là hàm không tuần hoàn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Hàm số $g(x)$ là hàm tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) b) Tập xác định hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Với mọi $x \in D$ thì $x \pm \pi \in D$ và $f(x+\pi) = \tan(x+\pi) = \tan x = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

c) d) Tập xác định hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Với mọi $x \in D$ thì $x \pm \pi \in D$ và

$$f(x+\pi) = \cot^2(x+\pi) - \frac{\sin 2(x+\pi)}{2} = \cot^2 x - \frac{\sin 2x}{2} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 71: Cho hàm số $f(x) = 2 + 3\cos x$ và $g(x) = \sin x + \cos x$. Khi đó:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 5

b) Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng $-\sqrt{2}$

d) Hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\cos x \leq 3 \Rightarrow -1 \leq 2 + 3\cos x \leq 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5, khi đó $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1, khi đó $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) d) Ta có: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\sqrt{2}$, khi đó $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\sqrt{2}$, khi đó $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 72: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2 - \sin x}$ và $g(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x + 2$. Khi đó:

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng $\sqrt{3}$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 1

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng 4

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ bằng 0

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \geq -\sin x \geq -1 \Rightarrow 3 \geq 2 - \sin x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{3} \geq \sqrt{2 - \sin x} \geq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\sqrt{3}$, khi đó $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 1, khi đó $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) d) Ta có: $\sqrt{3} \sin x - \cos x + 2 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x\right) + 2 = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 2 \leq 4.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, khi đó $\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0, khi đó $\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = -1$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 73: Tìm được tập xác định của hàm số. Khi đó:

a) Hàm số $y = \cot \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$ xác định khi $x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

b) Hàm số $y = \sqrt{\sin x - 1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

c) Hàm số $y = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

d) Hàm số $y = \tan 2x + \cot 2x$ xác định khi $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số: $D = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 2$ (đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$).

Vậy tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \neq l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq l\frac{\pi}{2} \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; l\frac{\pi}{2} \mid k, l \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 74: Cho các hàm số $f(x) = \sqrt{3-2\sin x}$; và $g(x) = \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \cos x$, khi đó:

- a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.
- b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm tuần hoàn.
- c) Hàm số $g(x)$ xác định khi $x \neq k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm không tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 3-2\sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{3}{2}$ (đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$).

Vì vậy tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in D$ thì $x \pm 2\pi \in D$ và $f(x+2\pi) = \sqrt{3-2\sin(x+2\pi)} = \sqrt{3-2\sin x} = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

c) d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vì vậy tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Với mọi $x \in D$ thì $x \pm 2\pi \in D$ và

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \tan \frac{x+2\pi}{2} - \frac{1}{3} \cos(x+2\pi) \\ &= \tan \left(\frac{x}{2} + \pi \right) - \frac{1}{3} \cos x = \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \cos x = f(x). \end{aligned}$$

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 75: Cho các hàm số sau: $f(x) = \sqrt{5-3\sin^2 x}$; $g(x) = \tan x - x \cos x$. Khi đó:

- a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.
- b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số lẻ.
- c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

a) b) Tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = \sqrt{5-3\sin^2(-x)} = \sqrt{5-3\sin^2 x} = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) d) Tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = \tan(-x) - (-x)\cos(-x) = -\tan x + x\cos x = -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 76: Cho các hàm số sau: $f(x) = 2\cos 3x - 1$; $g(x) = |2\sin x + 2| + |2\sin x - 2|$. Khi đó:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) b) Xét $y = f(x) = 2\cos 3x - 1$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có: $f(-x) = 2\cos(-3x) - 1 = 2\cos 3x - 1 = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) d) Xét $y = f(x) = |2\sin x + 2| + |2\sin x - 2|$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có: $f(-x) = |2\sin(-x) + 2| + |2\sin(-x) - 2| = |-2\sin x + 2| + |-2\sin x - 2|$
 $= |-2\sin x + 2| + |-2\sin x - 2| = |2\sin x - 2| + |2\sin x + 2| = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 77: Cho các hàm số sau: $f(x) = 3\sin^3 x$; $g(x) = -5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Khi đó:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) b) Xét $y = f(x) = 3\sin^3 x$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có: $f(-x) = 3\sin^3(-x) = -3\sin^3 x = -f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) d) Xét $y = f(x) = -5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -5\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -5\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-5\sqrt{3}}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{12}\right) = -5\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{12}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{12}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{cases}$$

Do đó hàm số đã cho không chẵn, không lẻ.

Câu 78: Tìm được tập xác định các hàm số sau. Khi đó:

a) Hàm số $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ xác định $\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$

b) Hàm số $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Hàm số $y = \cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ xác định $x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

d) Hàm số $y = \frac{\cot x}{\sqrt{3}\tan x - 3}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) Hàm số $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ xác định $\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq \pi + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Hàm số $y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$ xác định $\Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

c) Hàm số $y = \cot\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$ xác định $\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d) Hàm số $y = \frac{\cot x}{\sqrt{3} \tan x - 3}$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \sqrt{3} \tan x - 3 \neq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ \tan x \neq \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{3} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 79: Tìm được tập xác định của các hàm số sau. Khi đó:

a) Hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ có tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

b) Hàm số $y = \frac{1}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1}$ xác định khi: $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq -1$

c) Hàm số $y = \frac{\tan x + 2}{3\sin x} + 1$ có tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) Hàm số $y = \frac{3}{\sin^4 x - \cos^4 x}$ xác định khi: $\sin 2x \neq 0$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) Hàm số xác định khi: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

b) Hàm số xác định khi:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{3} \neq \pi + k2\pi,$$

$$\Leftrightarrow 2x \neq \frac{4\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) $y = \frac{\tan x + 2}{3\sin x} + 1$

Hàm số xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) $y = \frac{3}{\sin^4 x - \cos^4 x}$

Hàm số xác định khi: $\sin^4 x - \cos^4 x \neq 0 \Leftrightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow -\cos 2x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 80: Tìm được tập xác định của các hàm số sau. Khi đó:

a) Hàm số $y = \tan x + \cot 2x$ xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

b) Hàm số $y = \sqrt{\pi - \cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

c) Hàm số $y = \sqrt{4 - \sin^2 x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

d) Hàm số $y = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x - 1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) $y = \tan x + \cot 2x$

Hàm số xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $y = \sqrt{\pi - \cos x}$

Hàm số xác định khi $\pi - \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

c) $y = \sqrt{4 - \sin^2 x}$

Hàm số xác định khi $4 - \sin^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x < 4 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (vì ta có $0 \leq \sin^2 x \leq 1 < 4, \forall x \in \mathbb{R}$).

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

d) $y = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x - 1}$

Hàm số xác định khi $\begin{cases} \sin x - 1 \geq 0 \\ \cos x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 1 \\ \cos x \geq 1 \end{cases}$

Ta có : $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$ vô lý (vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên $\sin x, \cos x$ không thể đồng thời bằng 1).

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \emptyset$.

Câu 81: Cho hàm số $y = 3 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, khi đó:

- a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2
- c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4
- d) Tập giá trị của hàm số là $T = [2; 4]$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
$y = 3 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$			

Ta có: hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$-1 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq -1 \Leftrightarrow 4 \geq 3 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 2 \Leftrightarrow 4 \geq y \geq 2$$

Vậy giá trị của hàm số là $T = [2; 4]$.

Câu 82: Tìm được tập xác định của các hàm số sau. Khi đó:

- a) Hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định khi: $x \neq \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$
- b) Hàm số $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi: $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$
- c) Hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- d) Hàm số $y = \frac{\tan 3x}{\cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Hàm số xác định

$$\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow 2x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}.$

d) Hàm số xác định

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

♦Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 83: Tìm tập giá trị của hàm số: $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x$

Lời giải

$$y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x.$$

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}.$

$$\text{Ta có } y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x = 5 + 2\sin 4x.$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin 4x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin 4x \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 5 + 2 \sin 4x \leq 7 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 7.$$

Vậy giá trị của hàm số là $T = [3; 7]$.

Câu 84: Tìm tập giá trị của hàm số: $y = \sin^6 x + \cos^6 x$

Lời giải

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x$$

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x.$$

$$\text{Do } 0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{3}{4} \sin^2 2x \geq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 \geq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \geq y \geq \frac{1}{4}.$$

Vậy giá trị của hàm số là $T = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

Câu 85: Tìm tập giá trị của hàm số: $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3$;

Lời giải

$$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3$$

$$\text{Ta có } y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3 = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) + 3 = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3.$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$$

Vậy giá trị của hàm số là $T = [1; 5]$.

Câu 86: Tìm tập giá trị của hàm số: $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$

Lời giải

$$y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$$

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 2 = -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \geq -(\sin x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4.$$

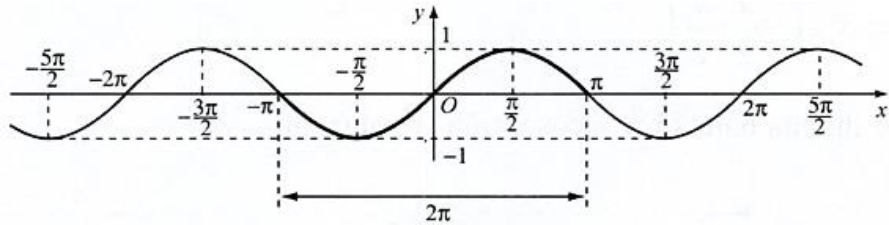
Vậy giá trị của hàm số là $T = [0; 4]$.

Câu 87: Tìm tập giá trị của hàm số: $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Lời giải

$$y = \sin x \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right].$$

Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ như sau:



Dựa vào đồ thị trên, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ xét trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ là:

x	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\sin x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy tập giá trị của hàm số là $T = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right]$.

Câu 88: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x + 4}$.

Lời giải

Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x + 4} \Leftrightarrow y(\sin x + 2\cos x + 4) = 2\sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (y-2)\sin x + (2y-1)\cos x = -4y.$$

Điều kiện để tồn tại cặp $(x; y)$ là $(y-2)^2 + (2y-1)^2 \geq (-4y)^2$

$$\Leftrightarrow -11y^2 - 8y + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4 - \sqrt{71}}{11} \leq y \leq \frac{-4 + \sqrt{71}}{11}.$$

Vậy miền giá trị hàm số là $T = \left[\frac{-4 - \sqrt{71}}{11}; \frac{-4 + \sqrt{71}}{11}\right]$.

Câu 89: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau: $y = \tan x + 2\sin x$

Lời giải

$$y = f(x) = \tan x + 2\sin x$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ta có: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \tan(-x) + 2\sin(-x) = -\tan x - 2\sin x = -f(x) \\ \Rightarrow f(-x) &= -f(x), \forall x \in D \end{aligned}$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ trên D .

Câu 90: Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau: $y = \sin^2 x + \cos x$

Lời giải

$$y = f(x) = \sin^2 x + \cos x$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}$$

Ta có: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sin^2(-x) + \cos(-x) = \sin^2(x) + \cos(x) = f(x) \\ \Rightarrow f(-x) &= f(x), \forall x \in D. \end{aligned}$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn trên D .

Câu 91: Tìm tất cả các giá trị m để hàm số sau có tập xác định $\mathbb{R}$.

a) $y = \sqrt{x^2 + m}$.

b) $y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m}$

Lời giải

a) $y = \sqrt{x^2 + m}$.

Điều kiện xác định: $x^2 + m \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq -m$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow -m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

b) $y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m}$

Điều kiện xác định: $\cos x + m \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -m$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -m < -1 \\ -m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$.

Câu 92: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

Lời giải

$$y = f(x) = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 1.$$

TXD: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \leq \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 1 \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_{\text{Max}}(x) = 1 \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f_{\text{Min}}(x) = -3 \Leftrightarrow \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 93: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$.

Lời giải

$$y = f(x) = \sqrt{1 + \sin x} - 3.$$

Do $\sin x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 + \sin x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{1 + \sin x} - 3 \leq \sqrt{2} - 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq f(x) \leq \sqrt{2} - 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_{\text{Min}}(x) = -3 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f_{\text{Max}}(x) = \sqrt{2} - 3 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 94: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = 2 + 2 \cos x + \cos^2 x$

Lời giải

$$y = f(x) = 2 + 2 \cos x + \cos^2 x = (\cos x + 1)^2 + 1$$

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Nên $0 \leq 1 + \cos x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \leq (1 + \cos x)^2 + 1 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$

$$f_{\text{Min}}(x) = 1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f_{\text{Max}}(x) = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 95: Tìm x để hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có: $\cos^2 x \geq 0 \Rightarrow -\cos^2 x \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x \leq 1$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\cos^2} \leq 1 \Leftrightarrow -3\sqrt{1-\cos^2} \geq -3 \Leftrightarrow 1-3\sqrt{1-\cos^2} \geq -2 \\ \Leftrightarrow y \geq -2.$$

$$(\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow 1-\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{1+\cos 2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.)$$

Vậy tại $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì y đạt giá trị nhỏ nhất bằng -2 .

Câu 96: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\cot(3x+\pi)}$

Lời giải

$$y = \frac{1}{\cot(3x+\pi)}. \text{ Điều kiện xác định:}$$

$$\begin{cases} \cot(3x+\pi) \neq 0 \\ 3x+\pi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+\pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x \neq -\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}; k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 97: Tìm giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{\frac{m-1}{m}} - 2\cos 4x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

$$\text{Để hàm số } y = \sqrt{\frac{m-1}{m}} - 2\cos 4x \text{ xác định trên } \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{m} - 2\cos 4x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{2m} \geq \cos 4x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{2m} \geq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0.$$

Câu 98: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 2x^2 - \cos 3x$.

b) $y = |x| \sin x$.

Lời giải

a) $y = f(x) = 2x^2 - \cos 3x$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = 2(-x)^2 - \cos(-3x) = 2x^2 - \cos(3x) = f(x).$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in D.$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) $y = |x| \sin x$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = |-x| \sin(-x) = -|x| \sin(x) = -f(x). \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in D.$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 99: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số:

a) $y = 3\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 4$

b) $y = \sin x + \cos x$

Lời giải

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = 3\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 4$

Ta có: $0 + 4 \leq 3\sin^2\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 4 \leq 3 + 4 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 7$. Suy ra $y_{\min} = 4$ và $y_{\max} = 7$.

b) $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1, \forall x \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}. \text{ Suy ra } y_{\min} = -\sqrt{2} \text{ và } y_{\max} = \sqrt{2}.$$

Câu 100: Tính chu kỳ các hàm số

a) $y = 2 \sin 2x$.

b) $y = \cos 3x$.

Lời giải

a) $y = 2 \sin 2x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $x \in D \Rightarrow x \pm \pi \in D$

$$f(x + \pi) = 2 \sin[2(x + \pi)] = 2 \sin(2x + 2\pi) = 2 \sin 2x = f(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với $T = \pi$.

b) $y = \cos 3x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $x \in D \Rightarrow x \pm \frac{2\pi}{3} \in D$

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \cos(3x + 2\pi) = \cos 3x = f(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với $T = \frac{2\pi}{3}$.

Câu 101: Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \sqrt{1 + \sin 3x}$;

b) $y = \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$

c) $y = \frac{\sqrt{1 + \cos 2x}}{\sin x}$

d) $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$

e) $y = \frac{1}{1 + \sin x \cos x}$

g) $y = \sqrt{\cos x - 1}$

Lời giải

a) $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

c) $\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

d) $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\mathbb{R}$.

g) $\{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 102: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y = \sin 2x$

b) $y = |\sin x|$;

c) $y = \tan^2 x$

d) $y = \sqrt{1 - \cos x}$

e) $y = \tan x + \cot x$

g) $y = \sin x \cdot \cos 3x$

Lời giải

- a) Hàm số lẻ.
- b) Hàm số chẵn.
- c) Hàm số chẵn.
- d) Hàm số chẵn.
- e) Hàm số lẻ.
- g) Hàm số lẻ.

Câu 103: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

- a) $y = 3\sin x + 5$
- b) $y = \sqrt{1 + \cos 2x} + 3$;
- c) $y = 4 - 2\sin x \cos x$
- d) $y = \frac{1}{4 - \sin x}$.

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $-1 \leq \sin x \leq 1$. Do đó, $2 \leq 3\sin x + 5 \leq 8$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 8 khi $\sin x = 1$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$; giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2 khi $\sin x = -1$ hay $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $3 + \sqrt{2}$ khi $\cos 2x = 1$ hay $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$; giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 3 khi $\cos 2x = -1$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Ta có: $y = 4 - 2\sin x \cdot \cos x = 4 - \sin 2x$.

Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5 khi $\sin 2x = -1$ hay $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$; giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 3 khi $\sin 2x = 1$ hay $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{1}{3}$ khi $\sin x = 1$ hay $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$; giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\frac{1}{5}$ khi $\sin x = -1$ hay $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 104: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = -\frac{2}{\sin 3x}$

$$\text{b) } y = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right);$$

$$\text{c) } y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{d) } y = \frac{1}{3 - \cos^2 x}.$$

Lời giải

$$\text{a) } y = -\frac{2}{\sin 3x} \text{ xác định khi } \sin 3x \neq 0, \text{ tức là } 3x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hay } x \neq k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{k\frac{\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\text{b) } y = \tan\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ xác định khi } \frac{x}{2} - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \text{ hay } x \neq \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{4\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\text{c) } y = \cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ xác định khi } 2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hay } x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$$\text{d) Vì } -1 \leq \cos x \leq 1 \text{ nên } \cos^2 x \leq 1 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra } \cos^2 x \neq 3 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Do đó hàm số } y = \frac{1}{3 - \cos^2 x} \text{ xác định với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Câu 105: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = 2 + 3|\cos x|$$

$$\text{b) } y = 2\sqrt{\sin x} + 1;$$

$$\text{c) } y = 3\cos^2 x + 4\cos 2x;$$

$$\text{d) } y = \sin x + \cos x.$$

Lời giải

$$\text{a) Vì } 0 \leq |\cos x| \leq 1 \text{ nên } 0 \leq 3|\cos x| \leq 3, \text{ do đó } 2 \leq 2 + 3|\cos x| \leq 5 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 5, đạt được khi $|\cos x| = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$

và giá trị nhỏ nhất của hàm số là 2, đạt được khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Điều kiện $\sin x \geq 0$. Vì $0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1$ nên $0 \leq 2\sqrt{\sin x} \leq 2$, do đó $1 \leq 2\sqrt{\sin x} + 1 \leq 3$ với mọi x thoả mãn $0 \leq \sin x \leq 1$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 3, đạt được khi $\sin x = 1$ hay

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là 1, đạt được khi $\sin x = 0$ hay $x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{c) Ta có } y = 3\cos^2 x + 4\cos 2x = 3 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + 4\cos 2x = \frac{3}{2} + \frac{11}{2}\cos 2x.$$

$$\text{Vì } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \text{ nên } -\frac{11}{2} \leq \frac{11}{2}\cos 2x \leq \frac{11}{2},$$

$$\text{do đó } -4 = \frac{3}{2} - \frac{11}{2} \leq \frac{3}{2} + \frac{11}{2}\cos 2x \leq \frac{3}{2} + \frac{11}{2} = 7 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 7, đạt được khi $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z})$

và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -4, đạt được khi $\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

$$\text{d) Ta có } y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{ nên } -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}, \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hay } x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $-\sqrt{2}$, đạt được khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ hay } x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 106: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = \frac{\cos 2x}{x^3}$$

$$\text{b) } y = x - \sin 3x;$$

$$\text{c) } y = \sqrt{1 + \cos x}$$

$$\text{d) } y = 1 + \cos x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right)$$

Lời giải

. a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nếu kí hiệu $f(x) = \frac{\cos 2x}{x^3}$ thì với mọi $x \in D$, ta có

$$-x \in D \text{ và } f(-x) = \frac{\cos 2(-x)}{(-x)^3} = -\frac{\cos 2x}{x^3} = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$. Nếu kí hiệu $f(x) = x - \sin 3x$ thì với mọi $x \in D$, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = (-x) - \sin 3(-x) = -x + \sin 3x = -(x - \sin 3x) = -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Nếu kí hiệu $f(x) = \sqrt{1 + \cos x}$ thì với mọi $x \in D$, ta có $-x \in D$ và $f(-x) = \sqrt{1 + \cos(-x)} = \sqrt{1 + \cos x} = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Nếu kí hiệu $f(x) = 1 + \cos x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = 1 - \cos x \cos 2x$ thì với mọi $x \in D$ ta có $-x \in D$ và $f(-x) = 1 - \cos(-x) \cos 2(-x) = 1 - \cos x \cos 2x = f(x)$. Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 107: Xét tính tuần hoàn của các hàm số sau:

a) $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ với $A > 0$;

b) $y = A \tan(\omega x + \varphi)$ với $A > 0$;

c) $y = 3 \sin 2x + 3 \cos 2x$

d) $y = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$. Nếu kí hiệu $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ thì với mọi $x \in D$, ta có $x + \frac{2\pi}{\omega} \in D, x - \frac{2\pi}{\omega} \in D$ và $f\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A \sin\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = A \sin(\omega x + 2\pi + \varphi) = A \sin(\omega x + \varphi) = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn. Chú ý rằng, chu kì của hàm số này là $\frac{2\pi}{\omega}$.

Tương tự, hàm số $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ cũng tuần hoàn chu kì $\frac{2\pi}{\omega}$.

b) Nếu kí hiệu D là tập xác định của hàm số $f(x) = A \tan(\omega x + \varphi)$ thì với mọi $x \in D$, ta có:

$x + \frac{\pi}{\omega} \in D, x - \frac{\pi}{\omega} \in D$ và $f\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) = A \tan\left(\omega\left(x + \frac{\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = A \tan(\omega x + \pi + \varphi) = A \tan(\omega x + \varphi) = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn. Chú ý rằng, chu kì của hàm số này là $\frac{\pi}{\omega}$.

Chú ý. Tương tự, hàm số $y = A \cot(\omega x + \varphi)$ cũng tuần hoàn chu kì $\frac{\pi}{\omega}$.

c) Ta có $3 \sin 2x + 3 \cos 2x = 3\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Theo câu a, hàm số $y = 3 \sin 2x + 3 \cos 2x$ tuần hoàn chu kì π .

d) Ta có

$$3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 3 \cdot 2\sin\frac{\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} \cos\frac{\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{2} = 3\sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{12}\right)$$

Vậy theo câu a, hàm số $y = 3\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là hàm số tuần hoàn chu kì π .

Câu 108: Với giá trị nào của x , mỗi đẳng thức sau đúng?

a) $\tan x \cot x = 1$;

b) $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

c) $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

d) $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$.

Lời giải

a) Đẳng thức $\tan x \cot x = 1$ đúng với mọi x khi $\tan x$ và $\cot x$ có nghĩa, tức là

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sin x \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Đẳng thức $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ đúng với mọi x khi $\cos x \neq 0$, tức là $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

c) Đẳng thức $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ đúng với mọi x khi $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) Đẳng thức $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ đúng với mọi x khi

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2\sin x \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 109: Từ đồ thị hàm số $y = \cos x$, hãy vẽ các đồ thị hàm số sau:

a) $y = -\cos x$

b) $y = |\cos x|$;

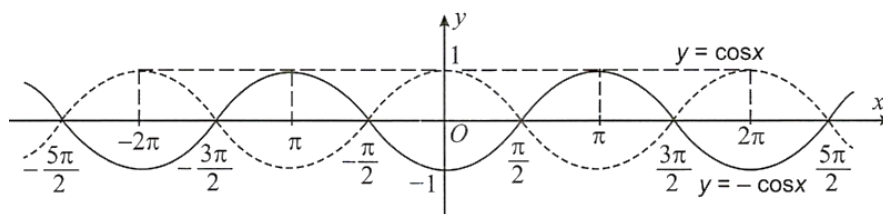
c) $y = \cos x + 1$;

d) $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải

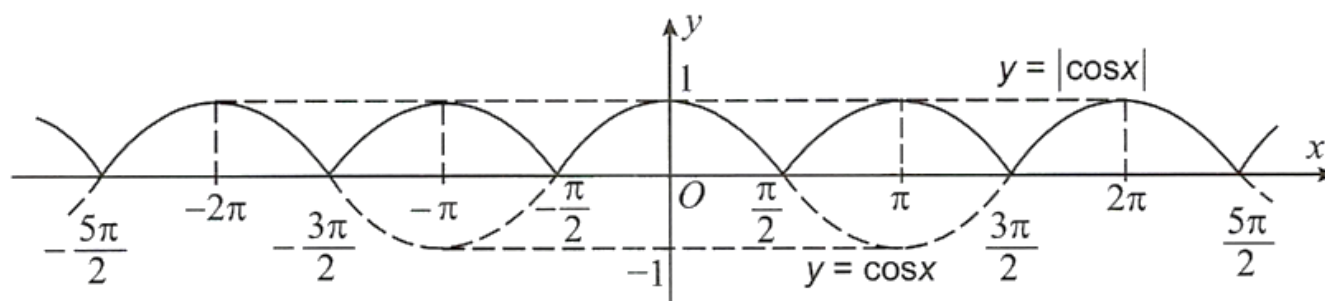
a) Lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = \cos x$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $y = -\cos x$.

Trong hình trên, đồ thị hàm số $y = \cos x$ là đường nét đứt còn đồ thị hàm số $y = -\cos x$ là đường nét liền.

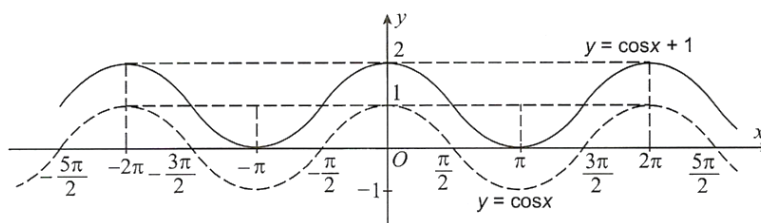


b) Ta có $y = |\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{khi } \cos x \geq 0 \\ -\cos x & \text{khi } \cos x < 0 \end{cases}$

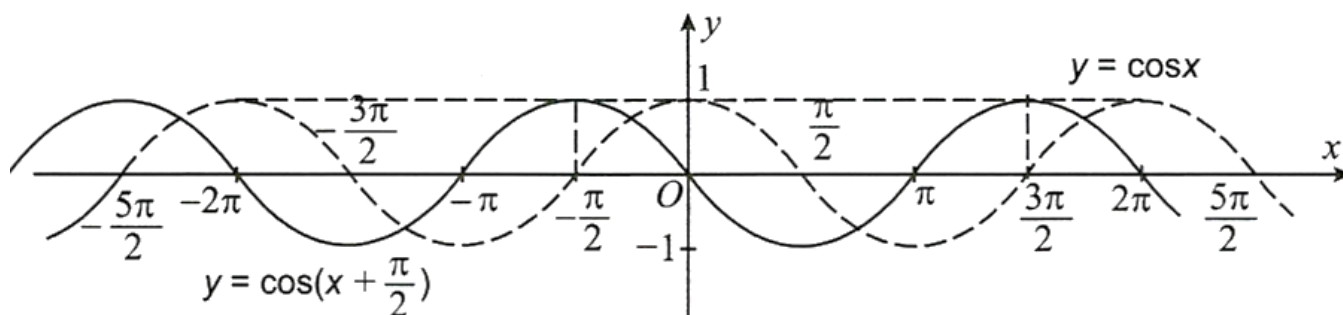
Từ đó, để vẽ đồ thị hàm số $y = |\cos x|$ đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$, sau đó giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = \cos x$ ở phía trên trục Ox và lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị hàm số $y = \cos x$ ở phía dưới trục Ox . Trong hình dưới đây, đồ thị hàm số $y = |\cos x|$ là đường nét liền.



c) Để vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x + 1$, đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$, sau đó dịch chuyển đồ thị này dọc theo trục Oy lên phía trên 1 đơn vị, ta được đồ thị hàm số $y = \cos x + 1$. Trong hình dưới đây, đồ thị hàm số $y = \cos x + 1$ là đường nét liền.



d) Để vẽ đồ thị hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ đầu tiên ta vẽ đồ thị hàm số $y = \cos x$, sau đó dịch chuyển đồ thị này dọc theo trục Ox sang bên trái $\frac{\pi}{2}$ đơn vị ta sẽ được đồ thị hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. Trong hình vẽ dưới đây đồ thị hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ là đường nét liền.



Chú ý rằng $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ nên đồ thị hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ cũng có thể có được bằng cách lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = \sin x$ qua trục Ox .

Câu 110: Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

- a) $y = \frac{\sin 3x}{x}$
- b) $y = -5x^2 + \cos \frac{x}{2}$
- c) $y = x\sqrt{1 + \cos 2x}$;
- d) $y = \cot x - \frac{2}{\sin x}$
- e) $y = |x| + \tan x$
- g) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin 3x}{x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ thoả mãn điều kiện $-x \in D$ với mọi $x \in D$.

$$\text{Ta có } \frac{\sin[3(-x)]}{-x} = \frac{\sin(-3x)}{-x} = \frac{-\sin 3x}{-x} = \frac{\sin 3x}{x}.$$

Vậy hàm số $y = \frac{\sin 3x}{x}$ là hàm số chẵn.

b) Tập xác định của hàm số $y = -5x^2 + \cos \frac{x}{2}$ là $D = \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $-x \in D$ với mọi $x \in D$.

$$\text{Ta có } -5(-x)^2 + \cos\left(\frac{-x}{2}\right) = -5x^2 + \cos \frac{x}{2}.$$

Vậy hàm số $y = -5x^2 + \cos \frac{x}{2}$ là hàm số chẵn.

c) Tập xác định của hàm số $y = x\sqrt{1 + \cos 2x}$ là $D = \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện $-x \in D$ với mọi $x \in D$.

$$\text{Ta có } (-x)\sqrt{1 + \cos(-2x)} = -x\sqrt{1 + \cos 2x}.$$

Vậy hàm số $y = x\sqrt{1 + \cos 2x}$ là hàm số lẻ.

d) Tập xác định của hàm số $y = \cot x - \frac{2}{\sin x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ thoả mãn điều kiện $-x \in D$ với mọi $x \in D$.

$$\text{Ta có } \cot(-x) - \frac{2}{\sin(-x)} = -\cot x + \frac{2}{\sin x} = -\left(\cot x - \frac{2}{\sin x}\right).$$

Vậy hàm số $y = \cot x - \frac{2}{\sin x}$ là hàm số lẻ.

e) Tập xác định của hàm số $y = |x| + \tan x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ thoả mãn điều kiện $-x \in D$ với mọi $x \in D$.

Đặt $f(x) = |x| + \tan x$. Xét hai giá trị $\frac{\pi}{4}$ và $-\frac{\pi}{4}$ thuộc D , ta có: $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left|\frac{\pi}{4}\right| + \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 1$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \left|-\frac{\pi}{4}\right| + \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 1$.

Do $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ nên $y = |x| + \tan x$ không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

g) Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ không thoả mãn điều kiện $-x \in D$ với mọi $x \in D$ vì $-\frac{\pi}{4} \in D$ mà $\frac{\pi}{4} \notin D$.

Vậy hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ không là hàm số chẵn cũng không là hàm số lẻ.

Câu 111: Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = 5 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$

b) $y = |\sin 3x| - 1$;

c) $y = 2\tan x + 3$;

d) $y = \sqrt{1 - \sin x} + 2$;

Lời giải

a) $[3; 7]$;

b) $[-1; 0]$;

c) $\mathbb{R}$;

d) $[2; 2 + \sqrt{2}]$.

Câu 112: Cho hàm số $y = \sin x$ với $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

a) Vẽ đồ thị hàm số đã cho.

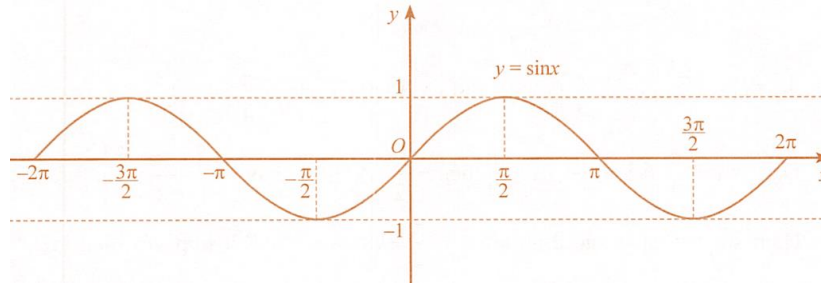
b) Tìm các giá trị của $x \in \left[-\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}\right]$ sao cho $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = -1$.

c) Tìm các giá trị của $x \in \left[-\frac{9\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right]$ sao cho $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

d) Tìm m để có bốn giá trị $\alpha \in [-2\pi; 2\pi]$ phân biệt thoả mãn $\sin \alpha = m$.

Lời giải

a) Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ như sau:



b) Đặt $t = \frac{\pi}{3} - x$. Vì $-\frac{5\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{3}$ nên $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

Từ đồ thị của hàm số ở trên, ta có:

$\sin t = -1$ khi và chỉ khi $t = -\frac{\pi}{2}$ hoặc $t = \frac{3\pi}{2}$. Do đó $x = \frac{5\pi}{6}$ hoặc $x = -\frac{7\pi}{6}$.

c) Đặt $t = 2x + \frac{\pi}{4}$. Vì $-\frac{9\pi}{8} \leq x \leq \frac{7\pi}{8}$ nên $-2\pi \leq t \leq 2\pi$.

Từ đồ thị của hàm số ở trên, ta có:

$\sin t > 0$ khi và chỉ khi $-2\pi < t < -\pi$ hoặc $0 < t < \pi$.

Do đó $-\frac{9\pi}{8} < x < -\frac{5\pi}{8}$ hoặc $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{3\pi}{8}$.

d) Có bốn giá trị $\alpha \in [-2\pi; 2\pi]$ thỏa mãn $\sin \alpha = m$ khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = \sin \alpha$ tại bốn điểm. Từ đồ thị hàm số ở trên, ta thấy điều này xảy ra khi và chỉ khi $-1 < m < 0$ hoặc $0 < m < 1$.

Câu 113: Cho hàm số $y = \tan x$ với $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

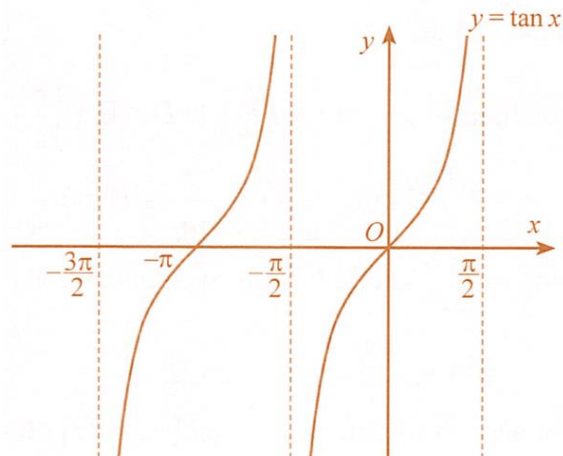
a) Vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Tìm các giá trị của $x \in \left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ sao cho $\sqrt{3} \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$.

c) Tìm các giá trị của $x \in \left[-\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$ sao cho $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

a) Ta có đồ thị của hàm số $y = \tan x$ với $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ như sau:

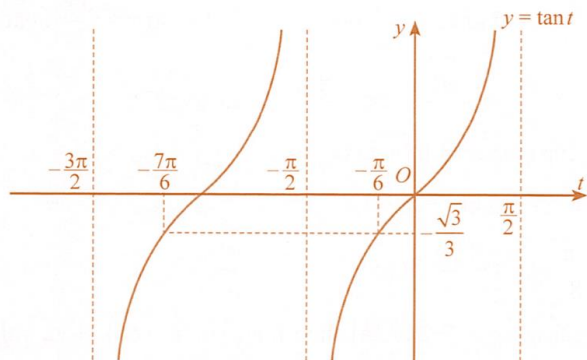


b) Ta có $\sqrt{3}\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0$ khi và chỉ khi $\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}$. Vì $-\frac{7\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{4}$ nên $-\frac{3\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$, hay $t\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Hàm số $y=\tan t$ xác định khi $t\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. Kết hợp với điều kiện $t\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, suy ra $t\in\left(-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Đồ thị hàm số $y=\tan t$ với $t\in\left(-\frac{3\pi}{2};-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ như sau:



Từ đồ thị hàm số trên, ta có:

$\tan t = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $t = -\frac{7\pi}{6}$ hoặc $t = -\frac{\pi}{6}$.

Do đó $x = -\frac{17\pi}{12}$ hoặc $x = -\frac{5\pi}{12}$.

c) Đặt $t=2x+\frac{\pi}{6}$. Vì $-\frac{5\pi}{6}\leq x\leq\frac{\pi}{6}$ nên $-\frac{3\pi}{2}\leq t\leq\frac{\pi}{2}$, hay $t\in\left[-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Tương tự câu b, từ đồ thị hàm số trên, ta có:

$\tan t \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $-\frac{7\pi}{6}\leq t < -\frac{\pi}{2}$ hoặc $-\frac{\pi}{6}\leq t < \frac{\pi}{2}$.

Do đó $-\frac{2\pi}{3} \leq x < -\frac{\pi}{3}$ hoặc $-\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{6}$.

Câu 114: Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

a) $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\frac{19\pi}{2}; -\frac{17\pi}{2}\right), \left(-\frac{13\pi}{2}; -\frac{11\pi}{2}\right)$

b) $y = \cos x$ trên khoảng $(19\pi; 20\pi), (-30\pi; -29\pi)$.

Lời giải

a) Hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{19\pi}{2}; -\frac{17\pi}{2}\right)$; đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{13\pi}{2}; -\frac{11\pi}{2}\right)$.

b) Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(19\pi; 20\pi)$; nghịch biến trên khoảng $(-30\pi; -29\pi)$.

Câu 115: Từ đồ thị hàm số $y = \cos x$, cho biết:

a) Có bao nhiêu giá trị của x trên đoạn $[-5\pi; 0]$ để $\cos x = 1$;

b) Có bao nhiêu giá trị của x trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{3\pi}{2}\right)$ để $\cos x = 0$.

Lời giải

a) 3 giá trị.

b) 2 giá trị.

Câu 116: Từ đồ thị hàm số $y = \sin x$, tìm:

a) Các giá trị của x để $\sin x = \frac{1}{2}$;

b) Các khoảng giá trị của x để hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị dương.

Lời giải

a) Giá trị của x để $\sin x = \frac{1}{2}$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sin x$ và đường thẳng

$y = \frac{1}{2}$. Dựa vào đồ thị, ta có $\sin x = \frac{1}{2}$ khi $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

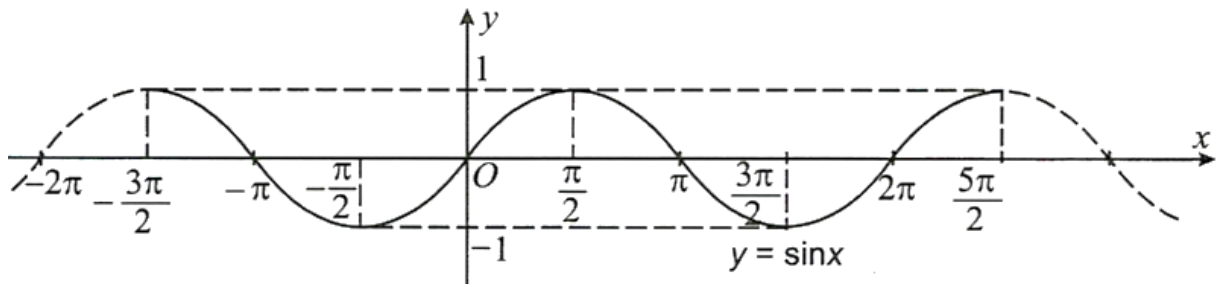
b) Hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị dương tương ứng với phần đồ thị hàm số đó nằm phía trên trục hoành. Dựa vào đồ thị, ta có hàm số $y = \sin x$ nhận giá trị dương khi $x \in (k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$

Câu 117: Từ đồ thị hàm số $y = \sin x$, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ sao cho:

a) $\sin x = 0$;

b) $\sin x > 0$.

Lời giải

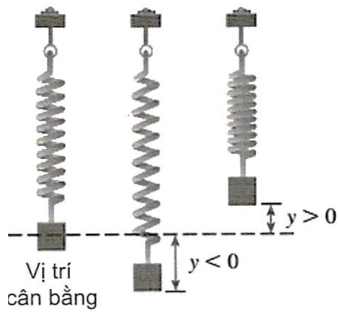


a) Trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ đồ thị hàm số $y = \sin x$ cắt trục Ox tại bốn điểm $x = -\pi, x = 0, x = \pi$ và $x = 2\pi$. Suy ra phương trình $\sin x = 0$ có bốn nghiệm trên đoạn $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ là $x = -\pi, x = 0, x = \pi$ và $x = 2\pi$.

b) Bất phương trình $\sin x > 0$ là tìm những khoảng giá trị của x mà đồ thị hàm số $y = \sin x$ nằm phía trên trục Ox . Từ đó, ta được tập nghiệm của bất phương trình $\sin x > 0$ trên đoạn

$$\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right] \text{ là } S = \left(-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right) \cup (0; \pi) \cup \left(2\pi; \frac{5\pi}{2}\right).$$

Câu 118: Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25\sin 4\pi t$ ở đó y được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây.



- Tìm chu kì dao động của con lắc lò xo.
- Tìm tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây.
- Tìm khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc.

Lời giải

a) Hàm số $y = 25\sin 4\pi t$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$. Suy ra chu kì dao động của con lắc lò xo (tức là khoảng thời gian để con lắc thực hiện được một dao động toàn phần) là $T = \frac{1}{2}$ giây.

b) Vì chu kì dao động của con lắc là $T = \frac{1}{2}$ giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là $f = \frac{1}{T} = 2 \text{ Hz}$.

c) Vì phương trình dao động của con lắc là $y = 25\sin 4\pi t$, nên biên độ dao động của nó là $A = 25 \text{ cm}$. Từ đó, khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là $2A = 50 \text{ cm}$.

Câu 119: Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao $40m$ in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$

ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

a) Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.

b) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

c) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Lời giải

a) - Tại thời điểm 8 giờ sáng ta có $t = 8 - 6 = 2$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 8 giờ sáng là $S(2) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 2 \right) \right| = 40\sqrt{3}(m)$.

- Tại thời điểm 12 giờ trưa ta có $t = 12 - 6 = 6$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 12 giờ trưa là $S(6) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 6 \right) \right| = 0(m)$.

Tại thời điểm 12 giờ trưa, Mặt Trời chiếu thẳng đứng từ trên đầu xuống nên toàn bộ toà nhà được chiếu xuống móng của toà nhà.

- Tại thời điểm 2 giờ chiều ta có $t = 14 - 6 = 8$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 2 giờ chiều là $S(8) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 8 \right) \right| = \frac{40\sqrt{3}}{3}(m)$.

- Tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối, ta có $t = \left(17 + \frac{3}{4} \right) - 6 = \frac{39}{4}$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối là $S\left(\frac{39}{4}\right) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot \frac{39}{4} \right) \right| \approx 59,86(m)$.

b) Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà khi

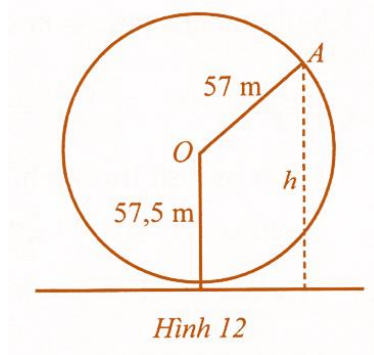
$$S(t) = 40 \Leftrightarrow 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right| = 40 \Leftrightarrow \cot \frac{\pi}{12} t = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} t = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = \pm 3 + 12k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 \leq t \leq 12$ nên $t = 3$ hoặc $t = 9$, tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

c) Khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối thì $t \rightarrow 12$, vì vậy $\frac{\pi}{12} t \rightarrow \pi$, do đó $\cot \frac{\pi}{12} t \rightarrow -\infty$. Như vậy, bóng của toà nhà sẽ tiến ra vô cùng.

Câu 120: Một vòng quay trò chơi có bán kính $57m$, trục quay cách mặt đất $57,5m$, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức:

$h(t) = 57 \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$) (Hình 12).



- Tính chu kì của hàm số $h(t)$?
- Khi $t = 0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?
- Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là $86m$?

Lời giải

- Vì vòng quay trò chơi quay mỗi vòng hết 15 phút nên chu kì của hàm số $h(t)$ bằng 15 phút.
- Khi $t = 0$ thì $h = 57 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 57,5 = 0,5(m)$. Vậy khi đó khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng $0,5m$.
- Khi quay một vòng, cabin ở vị trí cao nhất khi $\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ hay $t = 7,5$ (phút); cabin đạt được chiều cao là $86m$ lần đầu tiên khi $t = 5$ (phút).

Câu 121: Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:

$p(t) = 120 + 15 \cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

- Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.
- Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

Lời giải

- Hàm số $p(t)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có $t \pm \frac{1}{75} \in \mathbb{R}$ và

$$p\left(t + \frac{1}{75}\right) = 120 + 15 \cos(150\pi t + 2\pi) = 120 + 15 \cos 150\pi t = p(t).$$

Do đó $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Vì $-1 \leq \cos 150\pi t \leq 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $105 \leq p(t) \leq 135$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

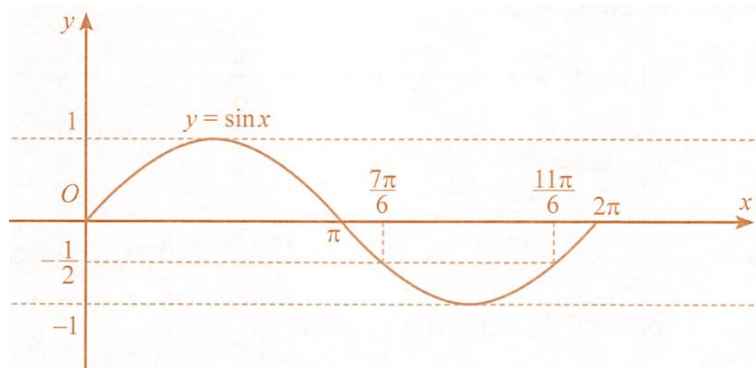
Vậy chỉ số huyết áp của người đó là $135/105$.

Câu 122: Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \leq -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Trong 4 giây đầu, ta có $0 \leq t \leq 4$, suy ra $0 \leq \frac{\pi}{2}t \leq 2\pi$.

Đặt $x = \frac{\pi}{2}t$, khi đó $x \in [0; 2\pi]$. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ như sau:



Dựa vào đồ thị trên đoạn $[0; 2\pi]$, ta có:

$s \leq -\frac{3}{2}$ khi $3\sin x \leq -\frac{3}{2}$ hay $\sin x \leq -\frac{1}{2}$, suy ra $\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$.

Do đó $\frac{7}{3} \leq t \leq \frac{11}{3}$.

Câu 123: Tìm m để hàm số $y = \sqrt{m - 2\sin x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow m - 2\sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 2\sin x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 2$.

Vậy $m \geq 2$ thỏa mãn đề bài.

Lưu ý: Giả sử hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất trên tập K là $\text{Max}_{x \in K} f(x)$, có giá trị nhỏ nhất trên tập K là $\text{Min}_{x \in K} f(x)$. Khi đó:

- $m \geq f(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \geq \text{Max}_{x \in K} f(x)$.

- $m > f(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m > \text{Max}_{x \in K} f(x)$.

- $m \leq f(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \leq \text{Min}_{x \in K} f(x)$.

$$-m < f(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m < \min_{x \in K} f(x).$$

Câu 124: Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2\sin x + 3\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{2\sin x + 3\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-2)\sin x - (y+3)\cos x = 1-2y.$$

Điều kiện để tồn tại cặp số $(x; y)$ là $(y-2)^2 + (y+3)^2 \geq (1-2y)^2$

$$\Leftrightarrow -2y^2 + 6y + 12 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{33}}{2} \leq y \leq \frac{3+\sqrt{33}}{2}.$$

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $\frac{3-\sqrt{33}}{2} + \frac{3+\sqrt{33}}{2} = 3.$

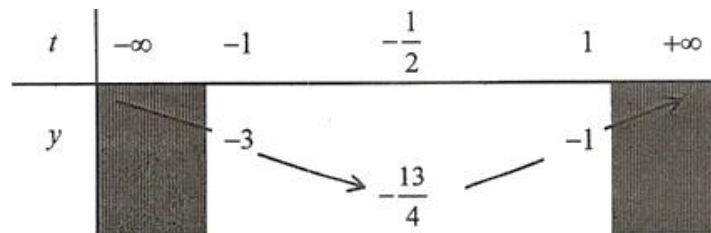
Câu 125: Tìm giá trị lớn nhất (Max y) và giá trị nhỏ nhất (Min y) của hàm số $y = \sin^2 x + \sin x - 3$

Lời giải

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$. Ta có: $y = t^2 + t - 3.$

Đây là hàm bậc hai với $a=1, b=1 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$. Vì $a > 0$ nên bề lõm parabol tương ứng sẽ hướng lên trên.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: Max $y = -1$, khi đó $t = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

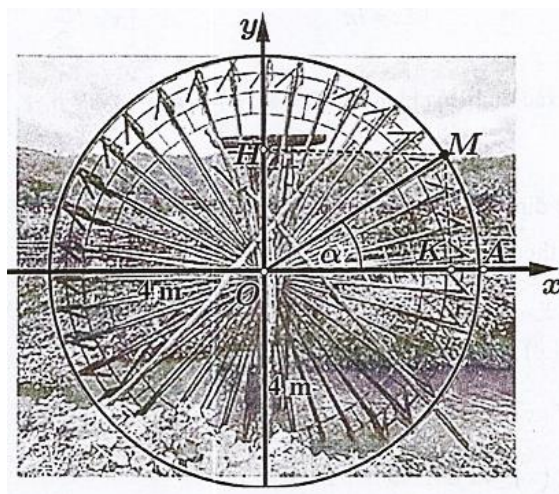
Tương tự Min $y = -\frac{13}{4}$, khi đó $t = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 126: Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O , bán kính là $4m$. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O; 4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t = 0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



Lời giải

Ta có: $h(x) = 4 + 4\sin \alpha$.

Khi M ở vị trí cao nhất so với mặt nước (tức là $h(x) = 8$) thì $\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ (vì chỉ xét 1 vòng quay đầu tiên).

Thời gian thực hiện của guồng nước là: $t = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 40}{2\pi} = 10$ (giây).

Câu 127: Số giờ có ánh sáng của thành phố T ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm

không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và

$0 < t \leq 365$. Bạn An muốn đi tham quan thành phố T nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

$$\text{Do } \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] \geq -1 \Rightarrow 3 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] \geq -3$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 12 \geq 9 \Rightarrow d(t) \geq 9.$$

Vậy thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi và chỉ khi:

$$\sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow t-80 = 182 \left(-\frac{1}{2} + 2k \right) \Leftrightarrow t = 364k - 11, k \in \mathbb{Z}.$$

Mặt khác: $0 \leq 364k - 11 \leq 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364} \leq k \leq \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1$ (do $k \in \mathbb{Z}$)

$$\Rightarrow t = 364 - 11 = 353$$

Vậy thành phố T có ít giờ ánh sáng Mặt Trời nhất là 9 giờ khi $t = 353$, tức là vào ngày thứ 353 trong năm.