

## MỤC LỤC

|   |    |
|---|----|
| ▶ BÀI 4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN .....                 | 2  |
| Ⓐ. Tóm tắt kiến thức .....                                    | 2  |
| Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản.....                                 | 5  |
| ♦ Dạng 1: Phương trình $\sin x = m$ , không tham số.....      | 5  |
| ♦ Dạng 2: Phương trình $\cos x = m$ , không tham số.....      | 7  |
| ♦ Dạng 3: Phương trình $\tan x = m$ , không tham số.....      | 9  |
| ♦ Dạng 4: Phương trình $\cot x = m$ , không tham số.....      | 11 |
| ♦ Dạng 5: Giải phương trình và tìm nghiệm thỏa điều kiện..... | 12 |
| ♦ Dạng 6: Ứng dụng.....                                       | 19 |
| Ⓒ. Dạng toán rèn luyện.....                                   | 22 |
| ♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....       | 22 |
| ♦ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....                      | 35 |
| ♦ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....                   | 42 |

**A. Tóm tắt kiến thức**

**1. Phương trình tương đương**

- ✓ Hai phương trình được gọi là tương đương nếu chúng có cùng tập nghiệm.

**Chú ý:**

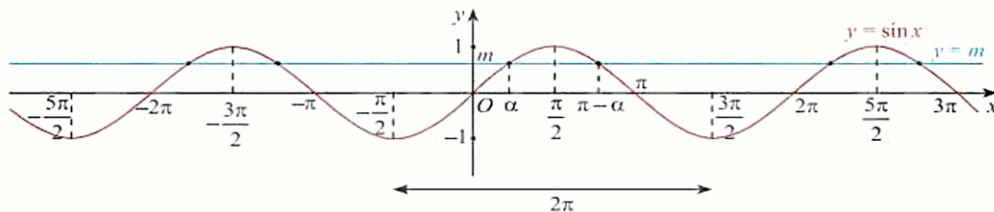
- ✓ Để giải phương trình, ta thường biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các phép biến đổi tương đương. Ta có một số phép biến đổi tương đương thường sử dụng sau:
- ✓ Cộng hoặc trừ hai vế của phương trình với cùng một số hoặc cùng một biểu thức mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
- ✓ Nhân hoặc chia hai vế của phương trình với cùng một số khác 0 hoặc cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0 mà không làm thay đổi điều kiện của phương trình.
- ✓ Để chỉ sự tương đương của các phương trình, người ta dùng kí hiệu " $\Leftrightarrow$ ".

**2. Phương trình  $\sin x = m$**

- ✓ Xét phương trình  $\sin x = m$ .
- ✓ Nếu  $|m| > 1$  thì phương trình vô nghiệm.
- ✓ Nếu  $|m| \leq 1$  thì phương trình có nghiệm:  

$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$
 và  $x = \pi - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,

với  $\alpha$  là góc thuộc  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  sao cho  $\sin \alpha = m$ .



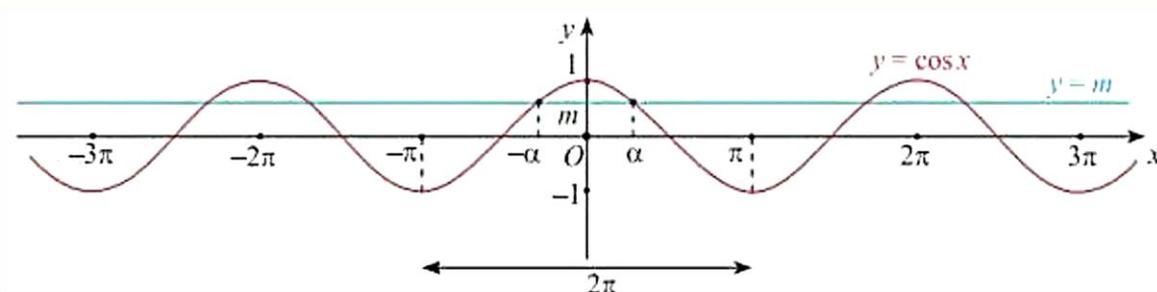
**Chú ý:**

- ✓ Một số trường hợp đặc biệt:
  - $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$
  - $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$
  - $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- ✓  $\sin u = \sin v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  hoặc  $u = \pi - v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- ✓  $\sin x = \sin a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$  hoặc  $x = 180^\circ - a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

### 3. Phương trình $\cos x = m$

- ✓ Xét phương trình  $\cos x = m$ .
- ✓ Nếu  $|m| > 1$  thì phương trình vô nghiệm.
- ✓ Nếu  $|m| \leq 1$  thì phương trình có nghiệm:  
$$x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$
  
và 
$$x = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z},$$

với  $\alpha$  là góc thuộc  $[0; \pi]$  sao cho  $\cos \alpha = m$ .

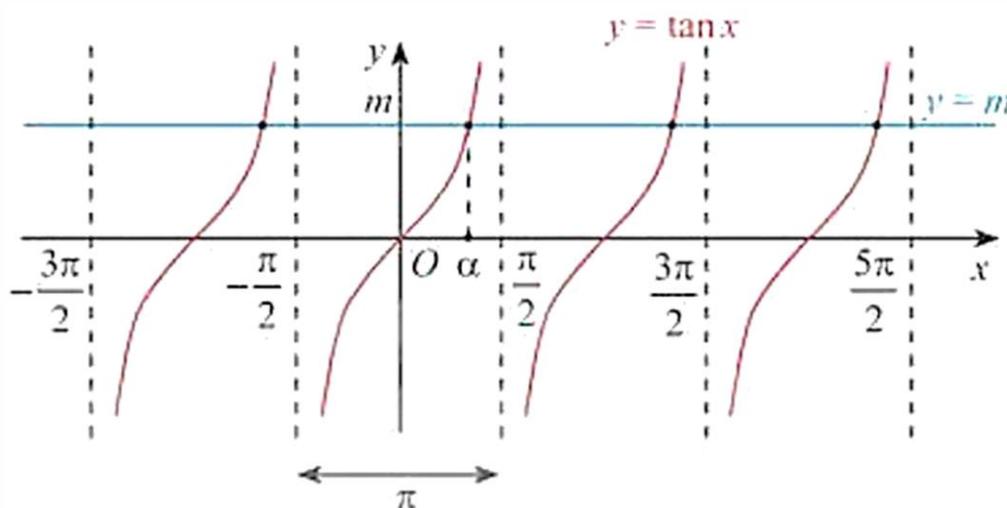


#### ✎ Chú ý:

- ✓ Một số trường hợp đặc biệt:
  - $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z};$
  - $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$
  - $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- ✓  $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  hoặc  $u = -v + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- ✓  $\cos x = \cos a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$  hoặc  $x = -a^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

### 4. Phương trình $\tan x = m$

- ✓ Với mọi số thực  $m$ , phương trình  $\tan x = m$  có nghiệm
- ✓  $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , với  $\alpha$  là góc thuộc  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  sao cho  $\tan \alpha = m$ .

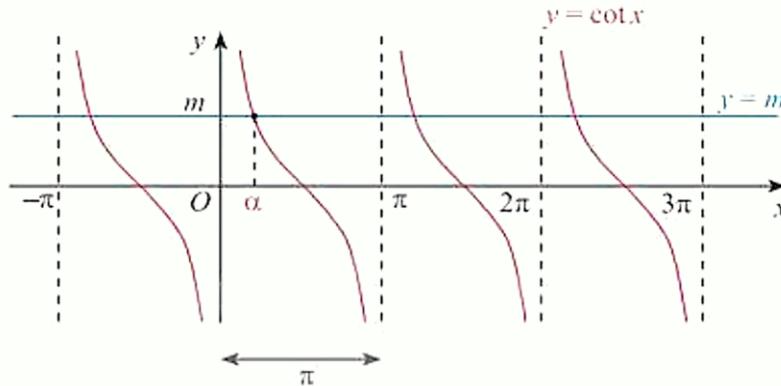


**Chú ý:**

$\tan x = \tan a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**5. Phương trình  $\cot x = m$**

- Với mọi số thực  $m$ , phương trình  $\cot x = m$  có nghiệm
- $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , với  $\alpha$  là góc thuộc  $(0; \pi)$  sao cho  $\cot \alpha = m$ .



**Chú ý:**

$\cot x = \cot a^\circ \Leftrightarrow x = a^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**6. Giải phương trình lượng giác bằng máy tính cầm tay**

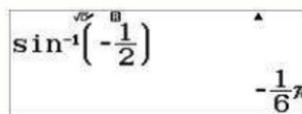
- Ta có thể giải phương trình lượng giác dạng  $\sin x = m, \cos x = m, \tan x = m$  và  $\cot x = m$  bằng máy tính cầm tay như trong ví dụ sau:
- Ví dụ 6. Sử dụng máy tính cầm tay để giải các phương trình sau:  
a)  $\sin x = -\frac{1}{2}$ . Kết quả ghi theo đơn vị radian.  
b)  $\cot x = 3$ . Kết quả ghi theo đơn vị độ.

**Lời giải**

**a) Chọn đơn vị đo góc là radian.**

- Ấn liên tiếp các phím

SHIFT sin (-), 1 □ 2 □ □



ta được một góc có sin bằng  $-\frac{1}{2}$  là  $-\frac{\pi}{6}$ .

Do đó, ta có các nghiệm của phương trình  $\sin x = -\frac{1}{2}$  là

$$x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**b) Chọn đơn vị đo góc là độ.**

- Ấn liên tiếp các phím

SHIFT tan 1 □ 3 □

$$\tan^{-1} \left( \frac{1}{3} \right)$$

18.43494882

ta được một góc có cotang bằng 3 là  $18,43^\circ$  (làm tròn đến hàng phần trăm).

- Do đó, ta có các nghiệm của phương trình  $\cot x = 3$  là

$$x \approx 18,43^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

 **Chú ý:**

- Để giải phương trình  $\cot x = m (m \neq 0)$ , ta giải phương trình  $\tan x = \frac{1}{m}$ .

**B. Phân dạng toán cơ bản**

♦ **Dạng 1: Phương trình  $\sin x = m$ , không tham số**

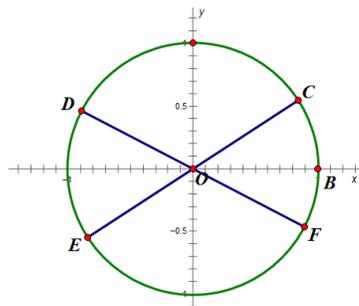
▣ **Các ví dụ minh họa**

**Câu 1:** Giải phương trình  $\sin\left(\frac{2x}{3} - 60^\circ\right) = 0$

**Lời giải**

Ta có:  $\sin\left(\frac{2x}{3} - 60^\circ\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{3} - 60^\circ = k180^\circ \Leftrightarrow x = 90^\circ + k270^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 2:** Xét đường tròn lượng giác như hình vẽ, biết  $\angle AOC = \angle AOF = 30^\circ$ .  $D, E$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $C, F$  qua gốc  $O$ . Nghiệm của phương trình  $2\sin x - 1 = 0$  được biểu diễn trên đường tròn lượng giác là những điểm nào?



**Lời giải****Chọn A**

$$2 \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nhìn vào hình vẽ ta thấy điểm biểu diễn Điểm  $C$ , điểm  $D$ .

**Câu 3:** Giải phương trình  $\sin x = 1$

**Lời giải**

Ta có:  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 4:** Giải phương trình  $\sin x = \frac{1}{2}$

**Lời giải**

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

**Câu 5:** Giải phương trình  $\sin 2x = 1$

**Lời giải**

Ta có:  $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 6:** Giải phương trình  $\sin x = 1$

**Lời giải**

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 7:** Giải phương trình  $\sin 2x = \sin x$

**Lời giải**

Ta có:

$$\sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pi - x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**Câu 8:** Giải phương trình  $\sin x = -1$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 9:** Phương trình  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$  có hai họ nghiệm có dạng  $x = \alpha + k\pi$  và  $x = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\left(-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0 < \beta < \frac{3\pi}{4}\right)$ . Khi đó: Tính  $\beta^2 - \alpha^2$ ?

### Lời giải

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{7\pi}{12}, \alpha = -\frac{\pi}{12} \Rightarrow \beta^2 - \alpha^2 = \frac{\pi^2}{3}.$$

**Câu 10:** Với  $k \in \mathbb{Z}$ , phương trình  $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$  có nghiệm là

### Lời giải

$$\text{Ta có } \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

**Câu 11:** Tìm nghiệm của phương trình  $1 + \sin x = 0$  trên đoạn  $[3\pi; 5\pi]$ .

### Lời giải

$$\text{Ta có } 1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } x \in [3\pi; 5\pi] \Rightarrow \begin{cases} 3\pi \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 5\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{2}.$$

**Câu 12:** Phương trình  $\sin 2x = -\sin \frac{\pi}{3}$  có nghiệm  $\alpha, \beta$  với  $-\frac{\pi}{4} < \alpha, \beta < \frac{3\pi}{4}$ . Giá trị  $\alpha.\beta$  bằng:

### Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin 2x = -\sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \pi + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$  ta có nghiệm của phương trình là:  $x = -\frac{\pi}{6}$ ;  $x = \frac{2\pi}{3}$

$$\text{Khi đó } \alpha.\beta = \left(-\frac{\pi}{6}\right) \cdot \left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^2}{9}.$$

♦ **Dạng 2: Phương trình  $\cos x = m$ , không tham số**

▣ **Các ví dụ minh họa**

**Câu 13:** Giải phương trình  $\cos(x + 30^\circ) = \frac{1}{2}$

### Lời giải

Ta có:  $\cos(x + 30^\circ) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 30^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x + 30^\circ = -60^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k360^\circ \\ x = -90^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 14:** Giải phương trình  $\cos x = -\frac{1}{2}$

**Lời giải**

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

**Câu 15:** Giải phương trình  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**Lời giải**

Ta có:  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 16:** Giải phương trình  $2\cos x - \sqrt{3} = 0$

**Lời giải**

Ta có  $2\cos x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 17:** Tất cả các nghiệm của phương trình  $\cos 2x = 0$  là

**Lời giải**

$$\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 18:** Giải phương trình  $2\cos x + \sqrt{3} = 0$  là

**Lời giải**

Ta có:  $2\cos x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 19:** Giải phương trình  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

**Lời giải**

Ta có  $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 20:** Giải phương trình  $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \\ x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình trên là } S = \left\{ -\frac{3\pi}{8} + k\pi; \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Câu 21:** Giải phương trình  $3\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 3\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}..$$

**Câu 22:** Giải phương trình  $\cos 2x - \sin x = 0$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \cos 2x - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \sin x \Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{2} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 23:** Giải phương trình:  $2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{13\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

♦ **Dạng 3:** Phương trình  $\tan x = m$ , không tham số

▣ **Các ví dụ minh họa**

**Câu 24:** Giải phương trình  $\tan 2x + \sqrt{3} = 0$

**Lời giải**

$$\tan 2x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 25:** Giải phương trình  $\tan x = 1$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 26:** Giải phương trình  $\tan(2x) = \tan 80^\circ$ .

**Lời giải**

$$\tan(2x) = \tan 80^\circ \Leftrightarrow 2x = 80^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 40^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 27:** Cho phương trình  $\tan x = \tan 2x$ . Tập nghiệm  $S$  của phương trình là

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \tan x = \tan 2x \Leftrightarrow x = 2x + k\pi \Leftrightarrow x = -k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 28:** Giải phương trình  $\tan x + 1 = 0$  là

**Lời giải**

$$\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 29:** Giải phương trình  $\sqrt{3} + 3\tan x = 0$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 30:** Giải phương trình  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\begin{aligned} \tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} &\Leftrightarrow \tan(3x - 30^\circ) = \tan(-30^\circ) \\ &\Leftrightarrow 3x - 30^\circ = -30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = k60^\circ, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Câu 31:** Nghiệm của phương trình  $\sqrt{3} + 3\tan x = 0$  là

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sqrt{3} + 3\tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 32:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\tan x = \tan \frac{3\pi}{8}$  trên  $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \tan x = \tan \frac{3\pi}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Với } x \in \left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right), \text{ ta có } \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{8} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{8} < k < \frac{13}{8} \text{ suy ra } k \in \{0; 1\}.$$

Vậy trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ , phương trình đã cho có hai nghiệm.

**Câu 33:** Nghiệm của phương trình  $\tan 3x = \tan x$  là

**Lời giải**

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} (*)$$

Ta có  $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

So điều kiện, phương trình đã cho có họ nghiệm :  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 34:** Giải phương trình  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$  có tập nghiệm là

**Lời giải**

$$\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 3x - 30^\circ = -30^\circ + k \cdot 180^\circ \Leftrightarrow 3x = k \cdot 180^\circ \Leftrightarrow x = k \cdot 60^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 35:** Nghiệm của phương trình  $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$  là

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{3}\cos x \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 36:** Giải phương trình  $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$  có nghiệm là

**Lời giải**

$$\text{ĐK: } \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi$$

$$\text{Ta có } \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

♦ **Dạng 4: Phương trình  $\cot x = m$ , không tham số**

▣ **Các ví dụ minh họa**

**Câu 37:** Giải phương trình  $\sqrt{3}\cot x - 3 = 0$

**Lời giải**

$$\sqrt{3}\cot x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 38:** Giải phương trình  $\cot 2x = 0$

**Lời giải**

$$\cot 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 39:** Giải phương trình  $\cot(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  (với  $k \in \mathbb{Z}$ )

**Lời giải**

$$\text{Giải phương trình } \cot(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot(x + 45^\circ) = \cot 60^\circ \Leftrightarrow x + 45^\circ = 60^\circ + k180^\circ$$

$$\Leftrightarrow x = 15^\circ + k180^\circ \text{ (với } k \in \mathbb{Z}\text{)}.$$

**Câu 40:** Nghiệm của phương trình  $\cot 3x = -1$  là

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \cot 3x = -1 \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 3x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z}\text{)} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \text{ (} k \in \mathbb{Z}\text{)}.$$

**Câu 41:** Giải phương trình  $\cot 2x = \cot 20^\circ$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \cot 2x = \cot 20^\circ \Leftrightarrow 2x = 20^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 10^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

**Câu 42:** Giải phương trình  $\cot(2x - 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ta được

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \cot(2x - 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} &\Leftrightarrow \cot(2x - 20^\circ) = \cot 60^\circ \Leftrightarrow 2x - 20^\circ = 60^\circ + k180^\circ \\ &\Leftrightarrow x = 40^\circ + k90^\circ \text{ (} k \in \mathbb{Z}\text{)}. \end{aligned}$$

**Câu 43:** Giải phương trình  $\cot 3x = \cot x$

**Lời giải**

$$\text{ĐKXĐ: } \begin{cases} \sin 3x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{3} \\ x \neq k\pi \end{cases}$$

Giải phương trình tương đương:

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$$

Kết hợp điều kiện ta được các nghiệm của phương trình:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

**Câu 44:** Giải phương trình  $2\cot x - \sqrt{3} = 0$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } 2\cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z}\text{)}$$

**♦ Dạng 5: Giải phương trình và tìm nghiệm thỏa điều kiện**

**▣ Các ví dụ minh họa**

**Câu 45:** Giải phương trình:

a)  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c)  $\tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$d) \sqrt{3} \cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1$$

**Lời giải**

$$a) \text{ Do } \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ nên } \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$b) \text{ Do } \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ nên } \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k4\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k4\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \quad 25$$

$$c) \text{ Do } \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ nên } \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}) \quad d) \sqrt{3} \cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Do } \cot\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ nên } \cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 46:** Tìm nghiệm của phương trình:

$$a) \sin\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) = 0 \text{ với } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right);$$

$$b) \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \text{ với } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

**Lời giải**

$$a) \sin\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{2\pi}{5} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Do } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \text{ nên } \frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{5} < k < \frac{17}{5}.$$

$$\text{Mà } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{2; 3\}. \text{ Vậy } x \in \left\{\frac{4\pi}{5}; \frac{13\pi}{10}\right\}.$$

$$b) \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi.$$

$$\text{Do } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ nên } -\frac{\pi}{2} < -\frac{5\pi}{6} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < k < \frac{2}{3}.$$

Mà  $k \in \mathbb{Z}$  nên không có giá trị nào của  $k$  thoả mãn. Vậy phương trình không có nghiệm trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Câu 47:** Giải phương trình:

a)  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$

b)  $\sin 2x = \cos 3x$ ;

c)  $\cos^2 2x = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

**Lời giải**

$$\text{a) } \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

b)  $\sin 2x = \cos 3x$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 3x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + k\frac{2\pi}{5} \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}). \text{ c)}$$

$$\cos^2 2x = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1 + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{2} \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x = -(2x + \frac{\pi}{3}) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 48:** Giải các phương trình lượng giác sau:

a)  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b)  $\cos(2x - 30^\circ) = -1$ ;

c)  $3\sin(-2x + 17^\circ) = 4$

d)  $\cos\left(3x - \frac{7\pi}{12}\right) = \cos\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$ ;

e)  $\sqrt{3}\tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$

$$g) \cot\left(\frac{x}{3} + \frac{2\pi}{5}\right) = \cot \frac{\pi}{5}.$$

**Lời giải**

$$a) x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z};$$

$$b) x = 105^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z};$$

c) Phương trình vô nghiệm;

$$d) x = \frac{5\pi}{24} + k \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$e) x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$g) x = -\frac{3\pi}{5} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 49:** Giải các phương trình lượng giác sau:

$$a) \cos(2x + 10^\circ) = \sin(50^\circ - x)$$

$$b) 8\sin^3 x + 1 = 0;$$

$$c) (\sin x + 3)(\cot x - 1) = 0$$

$$d) \tan(x - 30^\circ) - \cot 50^\circ = 0.$$

**Lời giải**

$$a) \cos(2x + 10^\circ) = \sin(50^\circ - x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x + 10^\circ) = \cos(x + 40^\circ)$$

$$\Leftrightarrow 2x + 10^\circ = x + 40^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \vee 2x + 10^\circ = -x - 40^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \vee x = -\frac{1}{3} \cdot 50^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là

$$x = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = -\frac{1}{3} \cdot 50^\circ + k120^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

$$b) 8\sin^3 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x = -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  và  $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

$$c) (\sin x + 3)(\cot x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x + 3 = 0 \text{ hoặc } \cot x - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow \sin x = -3$  hoặc  $\cot x = 1$ . Phương trình  $\sin x = -3$  vô nghiệm.

Phương trình  $\cot x = 1$  có nghiệm là  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy phương trình có các nghiệm là  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$$d) \tan(x - 30^\circ) - \cot 50^\circ = 0 \Leftrightarrow \tan(x - 30^\circ) = \cot 50^\circ \Leftrightarrow \tan(x - 30^\circ) = \tan 40^\circ$$

$$\Leftrightarrow x - 30^\circ = 40^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = 70^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là  $x = 70^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 50:** Giải các phương trình lượng giác sau:

$$a) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

$$b) 2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0;$$

$$c) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2 x - 1 = 0$$

**Lời giải**

$$a) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} - x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là  $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

b)

$$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0 \Leftrightarrow 2(1 - \sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = 2 \vee \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  và  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$$c) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} = 2x + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } 3x - \frac{\pi}{4} = -2x + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{20} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có các nghiệm là  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  và  $x = \frac{\pi}{20} + k\frac{2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 51:** Tìm tập xác định của hàm số lượng giác  $y = \frac{\sin x - 2\cos 3x}{\sin x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}$ .

**Lời giải**

Hàm số xác định khi và chỉ khi  $\sin x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$ .

$$\text{Ta có } \sin x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{hoặc} \quad x = \pi + 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{hoặc}$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Do đó  $\sin x + \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \neq 0$  khi và chỉ khi  $x \neq \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$  và  $x \neq -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 52:** Tìm các nghiệm của mỗi phương trình sau trong khoảng  $(-\pi; \pi)$ .

$$a) \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

$$b) 2\cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$$

$$c) \tan\left(x + \frac{\pi}{9}\right) = \tan \frac{4\pi}{9}$$

**Lời giải**

$$a) x \in \left\{ -\frac{7\pi}{18}; \frac{5\pi}{18}; \frac{17\pi}{18} \right\}$$

$$b) x \in \left\{ -\frac{17\pi}{24}; -\frac{13\pi}{24}; \frac{7\pi}{24}; \frac{11\pi}{24} \right\};$$

$$c) x \in \left\{ -\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}$$

**Câu 53:** Tìm hoành độ các giao điểm của đồ thị các hàm số sau:

$$a) y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ và } y = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right);$$

$$b) y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ và } y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

**Lời giải**

$$a) x = \frac{7\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$b) x = \frac{5\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \frac{\pi}{48} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 54:** Tìm hoành độ các giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \sin 3x - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$  với trục hoành.

**Lời giải**

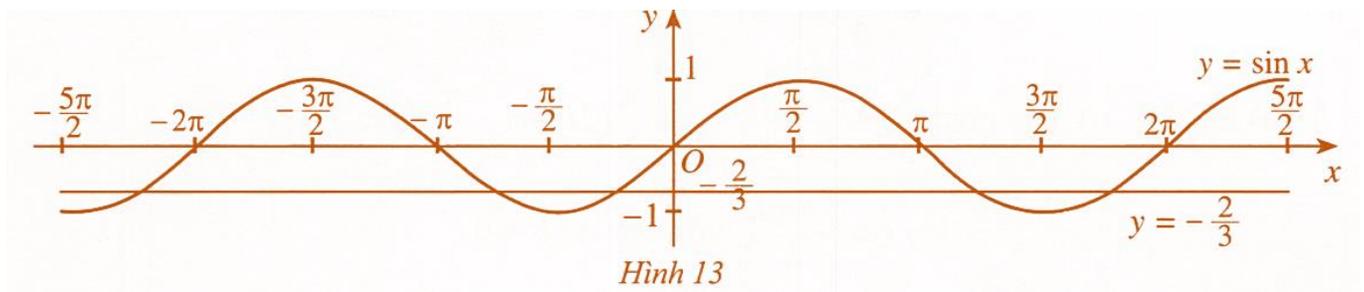
$$x = -\frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ và } x = \frac{5\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 55:** Dùng đồ thị hàm số  $y = \sin x, y = \cos x$  để xác định số nghiệm của phương trình:

$$3\sin x + 2 = 0 \text{ trên khoảng } \left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right).$$

**Lời giải**

Vẽ đồ thị hai hàm số  $y = \sin x$  và  $y = -\frac{2}{3}$  trên khoảng  $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$  (Hình 13):

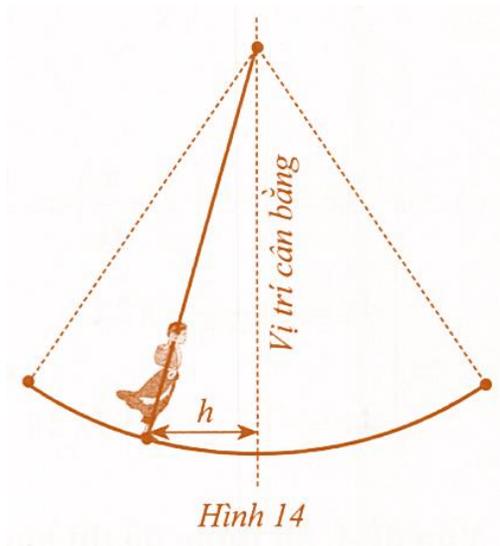


Số nghiệm của phương trình  $3\sin x + 2 = 0$  hay  $\sin x = -\frac{2}{3}$  trên khoảng  $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$  là số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \sin x$  trên khoảng  $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$  và đường thẳng  $y = -\frac{2}{3}$ . Dựa vào đồ thị, đường thẳng  $y = -\frac{2}{3}$  cắt đồ thị hàm số  $y = \sin x$  trên khoảng  $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$  tại 5 điểm phân biệt nên phương trình  $3\sin x + 2 = 0$  có 5 nghiệm phân biệt trên khoảng  $\left(-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ .

♦Dạng ⑥: Ứng dụng

▣Các ví dụ minh họa

**Câu 56:** Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 14). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách  $h(m)$  từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian  $t(s)$  (với  $t \geq 0$ ) bởi hệ thức  $h = |d|$  với  $d = 3 \cos \left[ \frac{\pi}{3}(2t-1) \right]$ , trong đó ta quy ước  $d > 0$  khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và  $d < 0$  trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian  $t$  nào thì khoảng cách  $h$  là  $3m; 0m$  ?



Hình 14

Lời giải

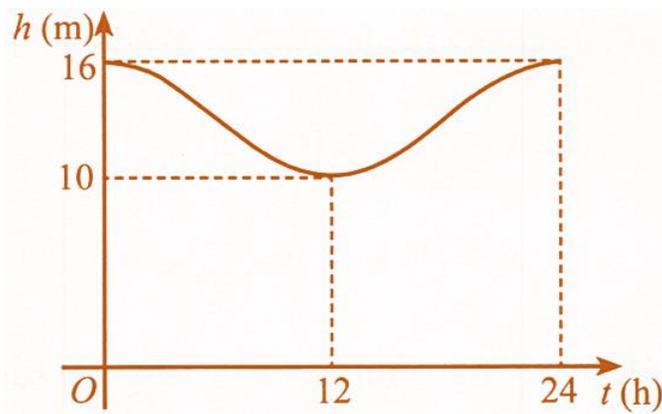
Do  $-1 \leq \cos \left[ \frac{\pi}{3}(2t-1) \right] \leq 1$  nên  $-3 \leq 3 \cos \left[ \frac{\pi}{3}(2t-1) \right] \leq 3$  hay  $-3 \leq d \leq 3$ . Do đó,  $0 \leq |d| \leq 3$ .

Vậy  $h = 3$  khi  $|d| = 3$  hay  $\cos \left[ \frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = \pm 1 \Leftrightarrow \sin \left[ \frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1+3k}{2}$

với  $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ ;  $h = 0$  khi  $|d| = 0$  hay  $\cos \left[ \frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow t = \frac{5+6k}{4}$  với  $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ .

**Câu 57:** Mực nước cao nhất tại một cảng biển là  $16m$  khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là  $10m$ . Đồ thị ở Hình 15 mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm.



Hình 15

Biết chiều cao của mực nước  $h(m)$  theo thời gian  $t(h)$  ( $0 \leq t \leq 24$ ) được cho bởi công thức

$$h = m + a \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) \text{ với } m, a \text{ là các số thực dương cho trước.}$$

a) Tìm  $m, a$ .

b) Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là  $11,5m$ .

### Lời giải

a) Chiều cao của mực nước cao nhất là  $m+a$  khi  $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=1$  và thấp nhất bằng  $m-a$  khi

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=-1. \text{ Theo giả thiết, ta có: } \begin{cases} m+a=16 \\ m-a=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13 \\ a=3. \end{cases}$$

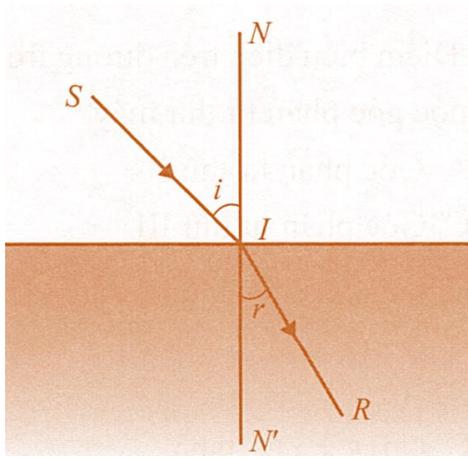
b) Từ câu a ta có công thức:  $h=13+3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ . Do chiều cao của mực nước là  $11,5m$  nên

$$13+3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=11,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12}t = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi}{12}t = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 + 24k \\ t = -8 + 24k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Ứng với hai thời điểm trong ngày ta có  $t=8$  (h) và  $t=16$  (h).

**Câu 58:** Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số  $\frac{\sin i}{\sin r}$ , với  $i$  là góc tới và  $r$  là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là  $45^\circ$  thì góc khúc xạ bằng  $30^\circ$ . Khi góc tới là  $60^\circ$  thì góc khúc xạ là bao nhiêu?



Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

**Lời giải**

Vì  $\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin r}$  nên  $\sin r = \frac{\sin 60^\circ \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ . Suy ra  $r = 37,76^\circ$ .

**Câu 59:** Một quả bóng được ném xiên một góc  $\alpha$  ( $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ) từ mặt đất với tốc độ  $v_0$  (m/s). Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức  $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}$ .

- a) Tính khoảng cách  $d$  khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu  $10\text{m/s}$  và góc ném là  $30^\circ$  so với phương ngang.  
 b) Nếu tốc độ ban đầu của bóng là  $10\text{m/s}$  thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách  $d$  là  $5\text{m}$  ?

**Lời giải**

- a)  $d = 5\sqrt{3} \approx 8,66(\text{m})$ ;  
 b)  $d = 5 \Leftrightarrow \frac{10^2 \cdot \sin 2\alpha}{10} = 5 \Leftrightarrow 10 \sin 2\alpha = 5 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$   
 $\Leftrightarrow 2\alpha = 30^\circ$  hoặc  $2\alpha = 150^\circ \Leftrightarrow \alpha = 15^\circ$  hoặc  $\alpha = 75^\circ$ .

**Câu 60:** Chiều cao  $h$ (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm  $t$  giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức  $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$ .

- a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?  
 b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao  $40\text{m}$  lần đầu tiên?

**Lời giải**

- a)  $50\text{m}$ ;  
 b)  $12,5$  giây.

©. Dạng toán rèn luyện

♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 61: Tập nghiệm của phương trình  $\sin x = -1$  là

- A.  $\left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      B.  $\left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
C.  $\left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      D.  $\left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Lời giải

**Chọn C**

Ta có phương trình  $\sin x = -1 \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Câu 62: Phương trình  $\sin 2x = \frac{1}{2}$  có tập nghiệm là

- A.  $S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      B.  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
C.  $C = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      D.  $S = \left\{ \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Lời giải

**Chọn A**

$$PT \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 63: Nghiệm của phương trình  $\sin 2x = 1$  là

- A.  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .      B.  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ .      C.  $x = \frac{k\pi}{2}$ .      D.  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

Lời giải

**Chọn A**

Ta có:  $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

Câu 64: Nghiệm của phương trình lượng giác  $\sin x = 5$  là

- A.  $x \in \mathbb{R}$ .      B.  $x = \pm \arcsin 5 + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .  
C.  $\begin{cases} x = \arcsin 5 + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin 5 + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .      D.  $x \in \emptyset$ .

Lời giải

**Chọn D**

Phương trình  $\sin x = m$  chỉ có nghiệm khi và chỉ khi  $|m| \leq 1$ .

Nên phương trình đã cho vô nghiệm.

**Câu 65:** Phương trình  $2\cos x - 1 = 0$  có một nghiệm là

- A.**  $x = \frac{\pi}{4}$ .      **B.**  $x = \frac{\pi}{6}$ .      **C.**  $x = \frac{\pi}{3}$ .      **D.**  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Thay lần lượt 4 giá trị của  $x$  ở 4 phương án vào phương trình, ta nhận được đáp án C.

**Câu 66:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = -\frac{1}{2}$  là

- A.**  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$ .      **B.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$ .  
**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ .      **D.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 67:** Phương trình  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có tập nghiệm là

- A.**  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      **B.**  $\left\{ x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
**C.**  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      **D.**  $\left\{ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 68:** Tính  $\alpha$  biết  $\cos \alpha = 1$ :

- A.**  $\alpha = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).      **B.**  $\alpha = k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
**C.**  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).      **D.**  $\alpha = -\pi + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 69:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = -\frac{1}{2}$  là

**A.**  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$

**B.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi.$

**C.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi.$

**D.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi.$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$

Vậy phương trình có các nghiệm là:  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 70:** Phương trình  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  có tập nghiệm là

**A.**  $\left\{x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

**B.**  $\left\{x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

**C.**  $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

**D.**  $\left\{x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có  $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 71:** Giải phương trình  $\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0.$

**A.**  $x = \frac{\pi}{3} + k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**B.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**D.**  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**Lời giải**

**Chọn C**

$\sqrt{3} \tan 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 72:** Phương trình nào sau đây có nghiệm?

**A.**  $\cos x = -\frac{3}{2}.$     **B.**  $\sin x = \sqrt{2}.$     **C.**  $\tan x = 3.$     **D.**  $\cos^2 x - 3 = 0.$

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì phương trình  $\tan x = a$  luôn có nghiệm.

**Câu 73:** Giải phương trình  $\tan(2x) = \tan 80^\circ.$  Kết quả thu được là

**A.**  $x = 80^\circ + k180^\circ.$

**B.**  $x = 40^\circ + k90^\circ.$

C.  $x = 40^\circ + k45^\circ$ .

D.  $x = 40^\circ + k180^\circ$ .

Lời giải

**Chọn B**

Ta có  $\tan(2x) = \tan 80^\circ \Leftrightarrow 2x = 80^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 40^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 74:** Phương trình  $\tan x = \tan \varphi, (\varphi \in \mathbb{R})$  có nghiệm là

A.  $x = \varphi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = \varphi + k2\pi ; x = \pi - \varphi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \varphi + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \varphi + k2\pi ; x = -\varphi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Lời giải

**Chọn C**

Ta có :  $\tan x = \tan \varphi \Leftrightarrow x = \varphi + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 75:** Nghiệm của phương trình  $\tan 2x + \sqrt{3} = 0$  là

A.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

Lời giải

**Chọn D**

$\tan 2x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \tan 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 76:** Tập nghiệm của phương trình  $\tan x + 1 = 0$  là

A.  $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

B.  $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

C.  $S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D.  $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Lời giải

**Chọn C**

$\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 77:** Nghiệm của phương trình  $\sqrt{3} \cot x - 3 = 0$  là

A.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Lời giải

**Chọn C**

$\sqrt{3} \cot x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 78:** Phương trình  $\cot(x+45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  có nghiệm là (với  $k \in \mathbb{Z}$ )

- A.**  $15^\circ + k180^\circ$ .    **B.**  $30^\circ + k180^\circ$ .    **C.**  $45^\circ + k180^\circ$ .    **D.**  $60^\circ + k180^\circ$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\begin{aligned} \text{Phương trình } \cot(x+45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} &\Leftrightarrow \cot(x+45^\circ) = \cot 60^\circ \Leftrightarrow x+45^\circ = 60^\circ + k180^\circ \\ &\Leftrightarrow x = 15^\circ + k180^\circ \text{ (với } k \in \mathbb{Z} \text{)}. \end{aligned}$$

**Câu 79:** Tập nghiệm của phương trình  $\cot 2x = 0$  là

- A.**  $\left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .                      **B.**  $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
**C.**  $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .                      **D.**  $\left\{ \frac{\pi}{4} + k4\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\cot 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

**Câu 80:** Tất cả các nghiệm của phương trình  $\cot x = \cot \alpha$  là

- A.**  $x = \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .                      **B.**  $x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
**C.**  $x = \alpha + k\pi$ .                      **D.**  $x = \pm\alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 81:** Mệnh đề nào sau đây đúng với mọi số nguyên  $k$ ?

- A.**  $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k2\pi$ .    **B.**  $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + k\pi$ .  
**C.**  $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k$ .        **D.**  $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Áp dụng công thức giải phương trình lượng giác cơ bản, có:  
 $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$

**Câu 82:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x - m = 2$  có nghiệm?

- A.**  $m \leq -3$ .                      **B.**  $-3 \leq m \leq 1$ .  
**C.**  $m \geq 1$ .                      **D.**  $-3 \leq m \leq -1$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Phương trình } \sin x - m = 2 \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow -1 \leq 2 + m \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1.$$

**Câu 83:** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x - m = 1$  có nghiệm.

- A.  $m \geq 1$ .      B.  $m \leq 0$ .      C.  $-2 \leq m \leq 0$ .      D.  $0 \leq m \leq 1$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1 \quad (1)$$

$$\text{Phương trình (1) có nghiệm} \Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

**Câu 84:** Phương trình  $\cos x - m = 0$  vô nghiệm khi giá trị tham số  $m$  thỏa mãn.

- A.  $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$ .      B.  $-1 \leq m \leq 1$ .      C.  $m > 1$ .      D.  $m < -1$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } \cos x - m = 0 \Leftrightarrow \cos x = m.$$

$$\text{Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi } m \notin [-1; 1] \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}.$$

**Câu 85:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x - m = 1$  có nghiệm?

- A.  $-2 \leq m \leq 0$ .      B.  $m \leq 0$ .  
C.  $m \geq 1$ .      D.  $0 \leq m \leq 1$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có } \sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1.$$

$$\text{Khi đó YCBT} \Leftrightarrow -1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

**Câu 86:** Phương trình  $\sin x = m$  vô nghiệm khi và chỉ khi

- A.  $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$ .      B.  $-1 \leq m \leq 1$ .      C.  $m < -1$ .      D.  $m > 1$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Do } -1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên phương trình } \sin x = m \text{ vô nghiệm khi và chỉ khi } \begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}.$$

**Câu 87:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x = m$  có nghiệm thực

- A.  $m \geq 0$ .      B.  $-1 \leq m \leq 1$ .      C.  $-1 < m < 1$ .      D.  $m > 0$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Do } -1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \text{ nên phương trình } \sin x = m \text{ có nghiệm khi và chỉ khi } -1 \leq m \leq 1.$$

**Câu 88:** Phương trình  $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$ ?

- A. 4.      B. 3.      C. 2.      D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{8} + l\pi \end{cases} \text{ với } k, l \in \mathbb{Z}.$$

Trên khoảng  $(0; \pi)$  ta có 2 nghiệm thỏa mãn tương ứng  $k=1$  và  $l=0$ .

**Câu 89:** Giải phương trình  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\text{A. } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{B. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{C. } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{D. } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

**Câu 90:** Phương trình  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$  có hai họ nghiệm có dạng  $x = \alpha + k\pi$  và  $x = \beta + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$

$\left(-\frac{\pi}{4} < \alpha < 0 < \beta < \frac{3\pi}{4}\right)$ . Khi đó: Tính  $\beta^2 - \alpha^2$ ?

$$\text{A. } \frac{\pi^2}{3}. \quad \text{B. } \frac{-\pi^2}{3}. \quad \text{C. } \frac{25\pi^2}{72}. \quad \text{D. } \frac{-25\pi^2}{72}.$$

Lời giải

Chọn A

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{7\pi}{12}, \alpha = -\frac{\pi}{12} \Rightarrow \beta^2 - \alpha^2 = \frac{\pi^2}{3}.$$

**Câu 91:** Với  $k \in \mathbb{Z}$ , phương trình  $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$  có nghiệm là

**A.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .    **B.**  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .    **C.**  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .    **D.**  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

**Câu 92:** Tìm nghiệm của phương trình  $1 + \sin x = 0$  trên đoạn  $[3\pi; 5\pi]$ .

**A.**  $3\pi$ .    **B.**  $-\frac{\pi}{2}$ .    **C.**  $\frac{9\pi}{2}$ .    **D.**  $\frac{7\pi}{2}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Vì  $x \in [3\pi; 5\pi] \Rightarrow \begin{cases} 3\pi \leq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \leq 5\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{2}$ .

**Câu 93:** Tập nghiệm của phương trình:  $2 \cos x + \sqrt{3} = 0$  là:

**A.**  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .    **B.**  $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
**C.**  $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .    **D.**  $\left\{ \pm \frac{5\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $2 \cos x + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 94:** Tập nghiệm của phương trình  $3 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  là

**A.**  $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .    **B.**  $\left\{ \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
**C.**  $\left\{ \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .    **D.**  $\left\{ \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $3 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$ .

**Câu 95:** Nghiệm của phương trình  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$  là

**A.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**B.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**C.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**D.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có:  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

**Câu 96:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = \frac{1}{2}$  là

**A.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**B.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**C.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**D.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:  $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 97:** Tìm tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**A.** 
$$S = \left\{ -\frac{3\pi}{8} + k2\pi; \frac{3\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**B.** 
$$S = \left\{ -\frac{3\pi}{8} + k\pi; \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{C. } S = \left\{ \frac{3\pi}{8} + k\pi; \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$\text{D. } S = \left\{ \frac{3\pi}{8} + k2\pi; \frac{\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } \cos 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \\ x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của phương trình trên là } S = \left\{ -\frac{3\pi}{8} + k\pi; \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

**Câu 98:** Nghiệm của phương trình  $\sqrt{3} + 3 \tan x = 0$  là

$$\text{A. } x = \frac{\pi}{3} + k\pi. \quad \text{B. } x = \frac{\pi}{2} + k2\pi. \quad \text{C. } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi. \quad \text{D. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \sqrt{3} + 3 \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 99:** Phương trình  $\tan 3x = \tan x$  có nghiệm là

$$\text{A. } x = k\pi. \quad \text{B. } x = k2\pi. \quad \text{C. } x = k\frac{\pi}{2}. \quad \text{D. } x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Ta có: } \tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện ta được } x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 100:** Phương trình  $\tan x = \sqrt{3}$  có bao nhiêu nghiệm trong khoảng  $(0; \pi)$ ?

$$\text{A. } 3. \quad \text{B. } 2. \quad \text{C. } 0. \quad \text{D. } 1.$$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Để } x \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{3} + k\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < k < \frac{2}{3}. \text{ Mà } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm trong khoảng  $(0; \pi)$ .

**Câu 101:** Nghiệm của phương trình  $\tan 3x = \tan x$  là

**A.**  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .   **B.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .   **D.**  $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \end{cases} \quad (*)$$

Ta có  $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

So điều kiện, phương trình đã cho có họ nghiệm :  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 102:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\tan x = \tan \frac{3\pi}{8}$  trên  $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ .

**A.** 2.

**B.** 3.

**C.** 4.

**D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\tan x = \tan \frac{3\pi}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Với  $x \in \left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ , ta có  $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{8} + k\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{8} < k < \frac{13}{8}$  suy ra  $k \in \{0; 1\}$ .

Vậy trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$ , phương trình đã cho có hai nghiệm.

**Câu 103:** Chọn đáp án **sai** trong các câu sau:

**A.**  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .

**B.**  $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ .

**C.**  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k\pi$ .

**D.**  $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  đúng.

$\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  đúng.

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  sai. Đúng là  $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  đúng.

Vậy chọn đáp án

**C.**

**Câu 104:** Giải phương trình  $\cot 2x = \cot 20^\circ$ .

**A.**  $x = 10^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

**B.**  $x = 10^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = 20^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

**D.**  $x = 20^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $\cot 2x = \cot 20^\circ \Leftrightarrow 2x = 20^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 10^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}$

**Câu 105:** Phương trình  $\cot 3x = \cot x$  có các nghiệm là:

**A.**  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**B.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ . **D.**  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{ĐKXD: } \begin{cases} \sin 3x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{3} \\ x \neq k\pi \end{cases}$$

Phương trình tương đương:

$$\frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \frac{\cos x}{\sin x} \Leftrightarrow \sin x \cos 3x - \cos x \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$$

Kết hợp điều kiện ta được các nghiệm của phương trình:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

**Câu 106:** Giải phương trình  $\cot(2x - 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  ta được

**A.**  $x = 40^\circ + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

**B.**  $x = 40^\circ + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $x = 40^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

**D.**  $x = 40^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\begin{aligned} \cot(2x - 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} &\Leftrightarrow \cot(2x - 20^\circ) = \cot 60^\circ \Leftrightarrow 2x - 20^\circ = 60^\circ + k180^\circ \\ &\Leftrightarrow x = 40^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

**Câu 107:** Phương trình  $2 \cot x - \sqrt{3} = 0$  có nghiệm là

**A.**  $x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$       **B.**  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z}).$       **D.**  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $2 \cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 108:** Tìm  $m$  để phương trình  $\cos x - 2m + 1 = 0$  có nghiệm.

**A.**  $m > -\frac{1}{2}.$       **B.**  $0 < m < 1.$       **C.**  $0 \leq m \leq 1.$       **D.**  $m \geq -\frac{1}{2}.$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\cos x - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 2m - 1$  có nghiệm khi và chỉ khi

$$-1 \leq 2m - 1 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2m \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 1.$$

**Câu 109:** Phương trình  $m \cdot \cos x - 1 = 0$  có nghiệm khi  $m$  thỏa mãn điều kiện

**A.**  $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 1 \end{cases}.$       **B.**  $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 1 \end{cases}.$       **C.**  $m \geq -1$       **D.**  $m \geq 1.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Để thấy với  $m = 0$  thì phương trình đã cho vô nghiệm.

Với  $m \neq 0$ , ta có:  $m \cdot \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{m}$  (1).

Phương trình đã cho có nghiệm  $\Leftrightarrow$  phương trình (1) có nghiệm  $\Leftrightarrow$

$$\left| \frac{1}{m} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{|m|} \leq 1 \Leftrightarrow |m| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện } m \neq 0 \text{)}.$$

**Câu 110:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = m$  có nghiệm.

**A.**  $-1 \leq m \leq 1$       **B.**  $m \leq 1.$   
**C.**  $m \geq 0.$       **D.**  $0 \leq m \leq 1.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $0 \leq \cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$ . Để phương trình có nghiệm thì  $0 \leq m \leq 1$ .

♦Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

**Câu 111:** Cho phương trình lượng giác  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$  (\*). Khi đó:

- a) Phương trình (\*) tương đương  $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$
- b) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có 3 nghiệm
- c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(0; \pi)$  bằng  $\frac{3\pi}{2}$
- d) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{11\pi}{12}$

Lời giải

|        |        |         |         |
|--------|--------|---------|---------|
| a) Sai | b) Sai | c) Đúng | d) Đúng |
|--------|--------|---------|---------|

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{-\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$0 < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{-\pi}{12} + k\pi < \pi \\ 0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{12} \\ x = \frac{7\pi}{12} \end{cases}.$$

**Câu 112:** Cho phương trình lượng giác  $\tan(2x - 15^\circ) = 1$  (\*). Khi đó:

- a) Phương trình (\*) có nghiệm  $x = 30^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$
- b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-30^\circ$
- c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(-180^\circ; 90^\circ)$  bằng  $180^\circ$
- d) Trong khoảng  $(-180^\circ; 90^\circ)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $60^\circ$

Lời giải

|         |        |        |        |
|---------|--------|--------|--------|
| a) Đúng | b) Sai | c) Sai | d) Sai |
|---------|--------|--------|--------|

$$\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

$$-180^\circ < x < 90^\circ \Rightarrow -180^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = \{-2; -1; 0\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -150^\circ \\ x = -60^\circ \\ x = 30^\circ \end{cases}$$

**Câu 113:** Cho phương trình lượng giác  $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  (\*). Khi đó

- a) Phương trình (\*) tương đương  $\cot 3x = \cot\left(\frac{-\pi}{6}\right)$
- b) Phương trình (\*) có nghiệm  $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$
- c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  bằng  $\frac{-5\pi}{9}$
- d) Phương trình có nghiệm dương nhỏ nhất bằng  $\frac{2\pi}{9}$

**Lời giải**

|               |               |                |                |
|---------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|---------------|----------------|----------------|

$$\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\left(\frac{-\pi}{3}\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{-\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} < 0 (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{-7}{6} < k < \frac{1}{3} \Rightarrow k = \{-1; 0\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{9} \\ x = \frac{-4\pi}{9} \end{cases}.$$

**Câu 114:** Cho phương trình lượng giác  $2\cos x = \sqrt{3}$ , khi đó:

- a) Phương trình có nghiệm  $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
- b) Trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  phương trình có 4 nghiệm
- c) Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  bằng  $\frac{25\pi}{6}$
- d) Trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{13\pi}{6}$

**Lời giải**

|               |               |                |                |
|---------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|---------------|----------------|----------------|

Ta có:  $2\cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$

Vì  $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  nên  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}.$

Vậy nghiệm  $x$  thoả mãn đề bài là:  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}.$

**Câu 115:** Cho phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$  (\*), vậy:

a) Phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$

b) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có 2 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(0; \pi)$  bằng  $\frac{7\pi}{6}$

d) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{5\pi}{6}$

### Lời giải

|                |                |               |                |
|----------------|----------------|---------------|----------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Đúng</b> |
|----------------|----------------|---------------|----------------|

$$\text{Ta có: } \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}). \text{ Vì } x \in (0; \pi) \text{ nên } x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$  là  $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}$ .

**Câu 116:** Cho phương trình lượng giác  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

a) Phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{2\pi}{9}$

c) Trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  phương trình đã cho có 3 nghiệm

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  bằng  $\frac{7\pi}{9}$

### Lời giải

|               |                |               |                |
|---------------|----------------|---------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|----------------|---------------|----------------|

$$\text{Ta có: } \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  nên  $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{9}$ .

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Câu 117:** Cho phương trình lượng giác  $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ , khi đó:

a) Phương trình có nghiệm  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{3}$

c) Khi  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$  thì phương trình có ba nghiệm

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$  bằng  $\frac{\pi}{6}$

**Lời giải**

|               |               |               |                |
|---------------|---------------|---------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|---------------|---------------|----------------|

Phương trình tương đương với:  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

Vì  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-7\pi}{12} < \frac{k\pi}{2} < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-7}{6} < k < \frac{2}{3}$

Do  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k \in \{-1; 0\}$ .

Với  $k = -1$  thì  $x = \frac{-\pi}{6}$ , với  $k = 0$  thì  $x = \frac{\pi}{3}$ .

Vậy  $x = \frac{-\pi}{6}$  và  $x = \frac{\pi}{3}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 118:** Cho phương trình lượng giác  $\sin x = -\frac{1}{2}$ , khi đó:

a) Phương trình tương đương  $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

b) Phương trình có nghiệm là:  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{3}$

d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng  $(-\pi; \pi)$  là ba nghiệm

**Lời giải**

|               |                |               |               |
|---------------|----------------|---------------|---------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Sai</b> |
|---------------|----------------|---------------|---------------|

Ta có:  $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - (-\frac{\pi}{6}) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{6}$

Khi  $x \in (-\pi; \pi)$  phương trình có hai nghiệm

**Câu 119:** Cho phương trình lượng giác  $2 \sin x = \sqrt{2}$ , khi đó:

a) Phương trình tương đương  $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$

b) Phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

c) Phương trình có nghiệm dương nhỏ nhất bằng  $\frac{\pi}{4}$

d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  là hai nghiệm

**Lời giải**

|                |               |                |               |
|----------------|---------------|----------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|---------------|----------------|---------------|

Ta có:  $2 \sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Phương trình có nghiệm dương nhỏ nhất bằng  $\frac{\pi}{4}$

Số nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  là một nghiệm

**Câu 120:** Cho phương trình lượng giác  $2 \sin \left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0$ , khi đó:

a) Phương trình tương đương  $\sin \left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin \left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) Phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{4}$

d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng  $(-\pi; \pi)$  là hai nghiệm

**Lời giải**

|               |               |                |                |
|---------------|---------------|----------------|----------------|
| <b>a) Sai</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Đúng</b> |
|---------------|---------------|----------------|----------------|

$$\text{Ta có: } 2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{4}$

Số nghiệm của phương trình trong khoảng  $(-\pi; \pi)$  là hai nghiệm

**Câu 121:** Cho phương trình lượng giác  $\sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x) = 0$ , vậy:

a) Phương trình tương đương với  $\sin(45^\circ - 2x) = \sin 45^\circ$

b) Đồ thị hàm số  $y = \sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x)$  cắt trục hoành tại điểm gốc tọa độ

c) Phương trình có nghiệm là:  $x = -k180^\circ; x = -45^\circ - k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

d) Trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  phương trình đã cho có một nghiệm

**Lời giải**

|                |                |                |               |
|----------------|----------------|----------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|----------------|----------------|---------------|

Ta có:

$$\sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(45^\circ - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(45^\circ - 2x) = \sin 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 45^\circ - 2x = 45^\circ + k360^\circ \\ 45^\circ - 2x = 180^\circ - 45^\circ + k360^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k180^\circ \\ x = -45^\circ - k180^\circ \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = -k180^\circ; x = -45^\circ - k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

Trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  phương trình đã cho có hai nghiệm

**Câu 122:** Cho hai đồ thị hàm số  $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  và  $y = \sin x$ , khi đó:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$

b) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là  $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

c) Khi  $x \in [0; 2\pi]$  thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm

d) Khi  $x \in [0; 2\pi]$  thì tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:  $\left(\frac{5\pi}{8}; \sin \frac{5\pi}{8}\right), \left(\frac{7\pi}{8}; \sin \frac{7\pi}{8}\right)$ .

**Lời giải**

|                |                |               |               |
|----------------|----------------|---------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Đúng</b> | <b>c) Sai</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|----------------|---------------|---------------|

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

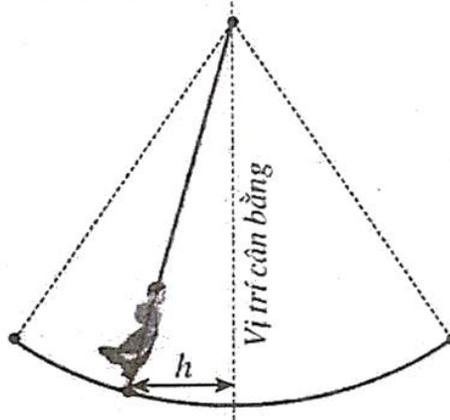
Vì  $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}\right\}$ .

Với  $x = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow y = \sin \frac{3\pi}{8} \approx 0,92$  với  $x = \frac{11\pi}{8} \Rightarrow y = \sin \frac{11\pi}{8} \approx -0,92$ .

Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:  $\left(\frac{3\pi}{8}; \sin \frac{3\pi}{8}\right), \left(\frac{11\pi}{8}; \sin \frac{11\pi}{8}\right)$ .

**Câu 123:** Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $x = 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)$ ; trong

đó  $t$  là thời gian được tính bằng giây và quãng đường  $h = |x|$  được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng. Khi đó:



a) Vật ở xa vị trí cân bằng nhất nghĩa là  $h = 1,5m$ .

b) Trong 10 giây đầu tiên, có hai thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất

c) Khi vật ở vị trí cân bằng thì  $\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0$

d) Trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng 4 lần?

**Lời giải**

|                |               |                |               |
|----------------|---------------|----------------|---------------|
| <b>a) Đúng</b> | <b>b) Sai</b> | <b>c) Đúng</b> | <b>d) Sai</b> |
|----------------|---------------|----------------|---------------|

Ta có  $h = |x| = \left|1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)\right| \leq 1,5$ .

a) Vật ở xa vị trí cân bằng nhất nghĩa là  $h = 1,5m$ .

$$\text{Khi đó } \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t\pi}{4} = k2\pi \\ \frac{t\pi}{4} = \pi + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8k \\ t = 4 + 8k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Vậy trong 10 giây đầu tiên thì vật ở xa vị trí cân bằng nhất tại các thời điểm  $t = 0, t = 4, t = 8$  (giây).

c) Khi vật ở vị trí cân bằng thì  $x = 0 \Leftrightarrow 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{t\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 2 + 4k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Vậy trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật ở vị trí cân bằng tại các thời điểm  $t = 2, t = 6, t = 10, t = 14, t = 18$  (giây); tức là có 5 lần vật qua vị trí cân bằng.

**♦ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 1:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác:  $\cos(x + 30^\circ) + 1 = 0$

**Lời giải**

Ta có:  $\cos(x + 30^\circ) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x + 30^\circ) = -1$

$$\Leftrightarrow x + 30^\circ = 180^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = 150^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = 150^\circ + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 2:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác:  $\cos(75^\circ - x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Lời giải**

Ta có:  $\cos(75^\circ - x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos(75^\circ - x) = \cos 135^\circ$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 75^\circ - x = 135^\circ + k360^\circ \\ 75^\circ - x = -135^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -60^\circ - k360^\circ \\ x = 210^\circ - k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm:  $x = -60^\circ - k360^\circ; x = 210^\circ - k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 3:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác:  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**Lời giải**

Ta có:  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 4:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác:  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**Lời giải**

Ta có:  $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan(3x - 30^\circ) = \tan(-30^\circ)$

$$\Leftrightarrow 3x - 30^\circ = -30^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = k60^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = k60^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 5:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác:  $\sqrt{3} \tan \frac{\pi x}{2} = 3$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\sqrt{3} \tan \frac{\pi x}{2} = 3 \Leftrightarrow \tan \frac{\pi x}{2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \frac{\pi x}{2} = \tan \frac{\pi}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} + 2k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{2}{3} + 2k (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 6:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cot 3x = \cot(\pi - x)$ ;

**Lời giải**

Điều kiện:  $\begin{cases} \sin 3x \neq 0 \\ \sin(\pi - x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k \frac{\pi}{3} \\ x \neq \pi - l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$

Ta có:  $\cot 3x = \cot(\pi - x) \Leftrightarrow 3x = \pi - x + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ .

Kết hợp với điều kiện suy ra nghiệm phương trình là:

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 7:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cot\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{3}$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \cot\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \cot\left(x - \frac{\pi}{5}\right) = \cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{30} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 8:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin\left(2x - \frac{1}{3}\right) + \sin x = 0$

**Lời giải**

$$\sin\left(2x - \frac{1}{3}\right) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{1}{3}\right) = -\sin x \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{1}{3}\right) = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{3} = -x + k2\pi \\ 2x - \frac{1}{3} = \pi + x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{1}{3} + \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{1}{9} + k\frac{2\pi}{3}; x = \frac{1}{3} + \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 9:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin(\pi - x) - \cos x = 0$ ;

**Lời giải**

$$\sin(\pi - x) - \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin(\pi - x) = \cos x \Leftrightarrow \sin(\pi - x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi - x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ \pi - x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \emptyset \\ x = \frac{\pi}{4} - k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{4} - k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 10:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\tan 3x = \cot x$

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \quad (k, l \in \mathbb{Z}). \\ x \neq l\pi \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \tan 3x = \cot x \Leftrightarrow \tan 3x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}).$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm là: } x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 11:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{18}\right) = 0$

**Lời giải**

$$\sin x \sin\left(x - \frac{\pi}{18}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin\left(x - \frac{\pi}{18}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x - \frac{\pi}{18} = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm là: } x = k\pi; x = \frac{\pi}{18} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 12:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin 4x + \cos(180^\circ - 3x) = 0$ .

**Lời giải**

$$\sin 4x + \cos(180^\circ - 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x - \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = \sin(90^\circ - 3x) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 90^\circ - 3x + k360^\circ \\ 4x = 180^\circ - 90^\circ + 3x + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{90^\circ}{7} + k\frac{360^\circ}{7} \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ x = 90^\circ + k360^\circ \end{cases}$$

**Câu 13:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$ .

**Lời giải**

$$2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$$

Điều kiện:  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow 2(2\cos^2 x - 1)\cos x - 8\cos^2 x + 7\cos x = 1 \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x + 5\cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Câu 14:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\tan x + \cot x = -\frac{2}{\sin x}$

**Lời giải**

$$\tan x + \cot x = -\frac{2}{\sin x} \left( x \neq k\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = -\frac{2}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x \sin x} = -\frac{2}{\sin x} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 15:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cot x + \sin x \left( 1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{4} \right) = 4$ .

**Lời giải**

$$\cot x + \sin x \left( 1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{4} \right) = 4.$$

Điều kiện:  $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \cos \frac{x}{2} \neq 0$ .

$$\frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \cdot \frac{\cos x \cos \frac{x}{2} + \sin x \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cos \frac{x}{2}} = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 4 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 16:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sqrt{3}\sin^2 x - \sin x \cos x = 0$ .

**Lời giải**

$$\sqrt{3}\sin^2 x - \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x(\sqrt{3}\tan x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 17:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin 2x = \sqrt{2} \sin(x + \pi) + \cos(2x + \pi)$ .

**Lời giải**

$$\sin 2x = \sqrt{2} \sin(x + \pi) + \cos(2x + \pi) \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin(x + \pi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = x + \pi + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 18:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $4\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + 3\sin^2 \frac{x}{2} = 3$ .

**Lời giải**

$$4\cos^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + 3\sin^2 \frac{x}{2} = 3$$

Trường hợp 1:  $\cos^2 \frac{x}{2} = 0$ , không thỏa phương trình.

Trường hợp 2:  $\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$ , chia hai vế của phương trình cho  $\cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$ , ta được:

$$4 + \tan \frac{x}{2} + 3 \tan^2 \frac{x}{2} = 3 \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{x}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 19:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cos x \cdot \cos 5x = \cos 2x \cdot \cos 4x$ .

**Lời giải**

$$\cos x \cdot \cos 5x = \cos 2x \cdot \cos 4x \Leftrightarrow \cos 6x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 2x \Leftrightarrow \cos 4x = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 2x + k2\pi \\ 4x = -2x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 20:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $2\cos x \cdot \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$ .

**Lời giải**

$$2\cos x \cdot \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \cos 3x = 1 + 2\cos^2 x - 1 + \cos 3x \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 21:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\tan(2x + 30^\circ) + \tan 20^\circ = 0$ .

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện: } 2x + 30^\circ \neq 90^\circ + k180^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq 30^\circ + k90^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow \tan(2x + 30^\circ) = \tan(-20^\circ) \Leftrightarrow 2x + 30^\circ = -20^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = -25^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 22:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cos^3 2x - \sin^3 2x = \sin 2x - \cos 2x$ .

**Lời giải**

$$\cos^3 2x - \sin^3 2x = \sin 2x - \cos 2x.$$

Trường hợp 1:  $\cos \frac{x}{2} = 0$ , không thỏa phương trình.

Trường hợp 2:  $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ , chia hai vế của phương trình cho  $\cos^3 \frac{x}{2} \neq 0$ , ta được

$$1 - \tan^3 x = \tan x(1 + \tan^2 x) - (1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 23:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $5 \tan x - 2 \cot x - 3 = 0$ .

**Lời giải**

Điều kiện:  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

$$5 \tan^2 x - 2 - 3 \tan x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = \frac{-2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan\left(\frac{-2}{5}\right) + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 24:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cot 3x = \tan \frac{2\pi}{5}$ .

**Lời giải**

$$\cot 3x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5}\right) \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{10} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{30} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 25:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\frac{1}{\tan x + \cot 2x} = \frac{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)}{\cot x - 1}$ .

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x \neq k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \sqrt{2} \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi (L) \\ x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

**Câu 26:** Tìm  $m$  để các phương trình lượng giác sau có nghiệm:  $2 \sin 3x = m - 1$ .

**Lời giải**

$$2 \sin 3x = m - 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \frac{m-1}{2}.$$

Điều kiện có nghiệm:  $-1 \leq \frac{m-1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$ .

**Câu 27:** Tìm  $m$  để các phương trình lượng giác sau có nghiệm:  $3\sin^2 x + \sin 2x - m\cos^2 x = 0$ .

**Lời giải**

$$3\sin^2 x + \sin 2x - m\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (m-1)\cos x = 3m+2.$$

Trường hợp 1:  $m=1, \cos x = 2$  (loại).

Trường hợp 2:  $m \neq 1, \cos x = \frac{3m+2}{m-1}$ .

$$\left| \frac{3m+2}{m-1} \right| \leq 1 \Leftrightarrow (3m-2)^2 - (m-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{2} \leq m \leq \frac{-1}{4}.$$

**Câu 28:** Tìm  $m$  để các phương trình lượng giác sau có nghiệm:  $m \tan x + 2 = m$ .

**Lời giải**

$$m \tan x + 2 = m \Leftrightarrow \tan x = \frac{m-2}{m}$$

Điều kiện có nghiệm:  $m \neq 0$ .

**Câu 29:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sqrt{3} \sin 3x - \cos 3x = 2$ ;

**Lời giải**

Ta có:  $a = \sqrt{3}, b = -1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ .

Chia hai vế phương trình cho 2, ta được:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x - \frac{1}{2} \cos 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x \cos \frac{\pi}{6} - \cos 3x \sin \frac{\pi}{6} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin \left( 3x - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{2\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 30:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\tan x + 2 \cot x = 3$ ;

**Lời giải**

Điều kiện: 
$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Phương trình tương đương

$$\tan x + 2 \frac{1}{\tan x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \tan^2 x - 3 \tan x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = 2 \end{cases}$$

Với  $\tan x = 1$  thì  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$  (thỏa mãn điều kiện).

Với  $\tan x = 2$  thì  $x \approx 1,1 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$  (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x \approx 1,1 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 31:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ ;

**Lời giải**

$$\text{Ta có } 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Với  $\sin x = 1$  thì  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

$$\text{Với } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 32:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin 2x - \cos x - 2\sin x + 1 = 0$ .

**Lời giải**

Phương trình đã cho  $\Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \cos x - 2\sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) - (2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x - 1 = 0 \\ 2\sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Với  $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ ;

$$\text{Với } \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = k2\pi; x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 33:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$ ;

**Lời giải**

Ta có:  $a = \sqrt{3}, b = -1 \Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = 2$ .

Vậy phương trình tương đương:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 34:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$ ;

**Lời giải**

Ta có:  $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2\cos^2 x - 1) - 3\cos x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = k2\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 35:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin 7x \cdot \sin x = \sin 5x \cdot \sin 3x$ ;

**Lời giải**

Ta có:  $\sin 7x \sin x = \sin 5x \sin 3x \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 6x - \cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)$

$$\Leftrightarrow \cos 6x = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = 2x + k2\pi \\ 6x = -2x + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \frac{\pi}{2} \\ x = k \frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = k \frac{\pi}{2}; x = k \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 36:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin^2 x - \sin 2x + 7\cos^2 x = 3$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\sin^2 x - \sin 2x + 7\cos^2 x = 3 \Leftrightarrow \sin^2 x - 2\sin x \cos x + 7\cos^2 x = 3$ .

Trường hợp 1:  $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$ .

Thay  $\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin^2 x = 1 \end{cases}$  vào phương trình:  $1 = 3$  (sai), suy ra  $\cos x = 0$  không thoả mãn.

Trường hợp 2:  $\cos x \neq 0$ , chia hai vế phương trình cho  $\cos^2 x$ , ta được:

$$\tan^2 x - 2\tan x + 7 = 3(1 + \tan^2 x)$$

$$\Leftrightarrow -2\tan^2 x - 2\tan x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ \tan x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \approx -1, 1 + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm là:  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x \approx -1,1 + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 37:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\sin x - m = 1$  có nghiệm.

**Lời giải**

Ta có:  $\sin x - m = 1 \Leftrightarrow \sin x = m + 1$ .

Điều kiện để phương trình có nghiệm là:  $-1 \leq m + 1 \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0$ .

Vậy  $-2 \leq m \leq 0$  thoả mãn đề bài.

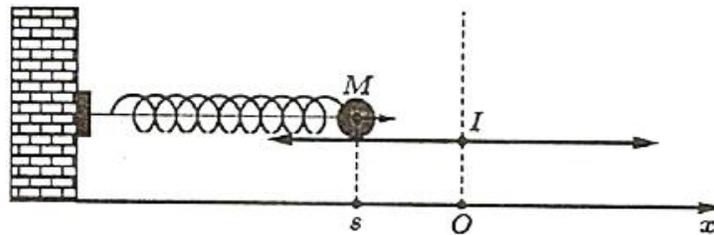
**Câu 38:** Một vật  $M$  được gắn vào đầu lò xo và dao động quanh vị trí cân bằng  $I$ , biết rằng  $O$  là hình chiếu vuông góc của  $I$  trên trục  $Ox$ , toạ độ điểm  $M$  trên  $Ox$  tại thời điểm  $t$

(giây) là đại lượng  $s$  (đơn vị:  $cm$ ) được tính bởi công thức  $s = 8,6 \sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right)$

a) Tìm khoảng cách từ vật đến vị trí cân bằng tại thời điểm  $t = 3$  giây.

b) Thời điểm nào trong khoảng 2 giây đầu tiên thì  $s = 4,3cm$ ?

(Các kết quả gần đúng trong bài được làm tròn đến hàng phần trăm)



**Lời giải**

a) Khi  $t = 3$  thì  $s = 8,6 \sin\left(8.3 + \frac{\pi}{2}\right) \approx 3,65(cm)$ .

Vậy vật cách vị trí cân bằng một khoảng xấp xỉ  $3,65cm$ .

b) Khi  $s = 4,3$  thì  $8,6 \sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) = 4,3 \Rightarrow \sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 8t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4} \\ t = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì  $t \in (0; 2)$  nên có 5 giá trị  $t$  thoả mãn là:  $t_1 \approx 0,65s; t_2 \approx 1,44s; t_3 \approx 0,13s; t_4 \approx 0,92s; t_5 \approx 1,7s$ .

**Câu 39:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x = 0$

**Lời giải**

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-x) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = -x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi + x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 40:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ;

**Lời giải**

$$\cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{3\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} - x + k2\pi \\ x - \frac{3\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{3\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 0x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \text{ (VL)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{17\pi}{24} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

**Câu 41:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos 2x = 0$ ;

**Lời giải**

$$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 2x + k2\pi \\ x - \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ -x - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{7\pi}{6} - k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

**Câu 42:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

**Lời giải**

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6} + 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2x + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6} - 2x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0x = \frac{13\pi}{12} + k2\pi \text{ (VL)} \\ 4x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{7\pi}{48} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 43:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$ ;

**Lời giải**

$$\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \frac{\pi}{3} - x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{m\pi}{2} \\ x \neq -\frac{\pi}{6} - m\pi \end{cases}, m \in \mathbb{Z}.$$

$$PT \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Kết hợp với điều kiện ta suy ra phương trình có một họ nghiệm  $x = \frac{-\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 44:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$ ;

**Lời giải**

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + m\pi \\ \frac{\pi}{3} + x \neq m\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{2\pi}{3} + m\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + m\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{2\pi}{3} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

$$PT \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) \Leftrightarrow \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 45:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0 &\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\cot\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cot\left(-2x - \frac{\pi}{4}\right) &\Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2x + \frac{\pi}{4}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \frac{\pi}{2} + 2x + \frac{\pi}{4} + k\pi &\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Câu 46:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $4\sin^2 x - 1 = 0$ ;

**Lời giải**

$$4\sin^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

**Câu 47:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cos^2 2x = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \cos^2 2x = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1 - \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 4x = 1 - \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = -\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos(\pi - 4x).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{6} - k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

**Câu 48:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $|\cos 2x| = 1$ ;

**Lời giải**

$$|\cos 2x| = 1 \Leftrightarrow \cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 4x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow 4x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z},$$

**Câu 49:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**

$$\left| \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow |\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 50:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $2\sin 2x \cdot \cos 2x = 0$ ;

**Lời giải**

$$2\sin 2x \cdot \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 51:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cos^2 x = \sin^2 x$ ;

**Lời giải**

$$\cos^2 x = \sin^2 x \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 52:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $3\sin x = 4\sin^3 x$ ;

**Lời giải**

$$3\sin x = 4\sin^3 x \Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 53:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cos x = 1 + 4\cos^3 x$ ;

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \cos x = 1 + 4\cos^3 x &\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos 3x = -1 \Leftrightarrow 3x = \pi + k2\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Câu 54:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ ;

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x = \sqrt{2} &\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Câu 55:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin^4 x - \cos^4 x + 1 = 0$ ;

**Lời giải**

$$\begin{aligned} \sin^4 x - \cos^4 x + 1 = 0 &\Leftrightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = -1 \\ &\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = -1 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

**Câu 56:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{1}{2} = 0$ .

**Lời giải**

$$\sin^4 x + \cos^4 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 57:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2}$ ;

**Lời giải**

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{6} \cdot \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 58:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3} \cos x - \sin x$ .

**Lời giải**

Ta đưa phương trình đã cho về dạng phương trình cơ bản sau:

$$\cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = \sqrt{3} \cos x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \Leftrightarrow \cos \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = -(x + \frac{\pi}{6}) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{18} + k \frac{2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 59:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cos^2 x + \cos x = 0$ ;

**Lời giải**

$$\cos^2 x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 60:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ ;

**Lời giải**

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 2\sin x - (\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x(\sin x - 1) - (\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

**Câu 61:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\tan^2 x + (\sqrt{3}-1)\tan x - \sqrt{3} = 0$

**Lời giải**

$$\tan^2 x + (\sqrt{3}-1)\tan x - \sqrt{3} = 0 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } \tan x = t, \left( x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

$$\text{Phương trình (1) trở thành: } t^2 + (\sqrt{3}-1)t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t = 1 \vee t = -\sqrt{3}$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Với } t = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan \left( -\frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

So với điều kiện phương trình nhận cả hai nghiệm.

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi, x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 62:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3$ .

**Lời giải**

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \cot x + 3 \quad (1)$$

$$(1). \text{ Điều kiện } \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$$

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \cot^2 x = \cot x + 3 \Leftrightarrow \cot^2 x - \cot x - 2 = 0 \quad (1')$$

$$\text{Đặt } t = \cot x. \text{ Phương trình (1')} \text{ trở thành: } t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = 2$$

$$\text{Với } t = -1 \Leftrightarrow \cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow \cot x = 2 \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ (với } \tan \alpha = 2)$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình: } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Câu 63:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\left( \cot \frac{x}{3} - 1 \right) \left( \cot \frac{x}{2} + 1 \right) = 0$

**Lời giải**

$$\left(\cot \frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin \frac{x}{3} \neq 0 \\ \sin \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} \neq k\pi \\ \frac{x}{2} \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k3\pi \\ x \neq k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{3} - 1 = 0 \\ \cot \frac{x}{2} + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot \frac{x}{3} = 1 \\ \cot \frac{x}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \frac{x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện các nghiệm này thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm:  $x = \frac{3\pi}{4} + k3\pi, x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 64:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\tan(x - 30^\circ)\cos(2x - 150^\circ) = 0$ ;

**Lời giải**

$$\tan(x - 30^\circ)\cos(2x - 150^\circ) = 0 \quad (1)$$

Điều kiện:  $\cos(x - 30^\circ) \neq 0 \Leftrightarrow x - 30^\circ \neq 90^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x \neq 120^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$ .

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \tan(x - 30^\circ) = 0 \\ \cos(2x - 150^\circ) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 30^\circ = k180^\circ \\ 2x - 150^\circ = 90^\circ + k360^\circ \\ 2x - 150^\circ = -90^\circ + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 30^\circ + k180^\circ \\ x = 120^\circ + k180^\circ \\ x = 30^\circ + k180^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

So với điều kiện nghiệm  $x = 120^\circ + k180^\circ$  (loại).

Vậy phương trình có nghiệm:  $x = 30^\circ + k180^\circ, (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 65:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $(3 \tan x + \sqrt{3})(2 \sin x - 1) = 0$ ;

**Lời giải**

$$(3 \tan x + \sqrt{3})(2 \sin x - 1) = 0 \quad (1)$$

Điều kiện  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \tan x + \sqrt{3} = 0 \\ 2 \sin x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

So với điều kiện các nghiệm này thỏa mãn.

Vì tập các giá trị  $\left\{x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$  là tập con của tập các giá trị  $\left\{x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

Vậy phương trình có các nghiệm:  $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 66:** Tìm nghiệm phương trình lượng giác  $\cos 2x \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ .

**Lời giải**

$$\cos 2x \cdot \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện } \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

So với điều kiện nghiệm  $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  thỏa mãn.

**Câu 67:** Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , chọn điểm có tọa độ  $(O; y_0)$  là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là:  $y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$ ; trong đó:

-  $g$  là gia tốc trọng trường (thường được chọn là  $9,8m/s^2$ );

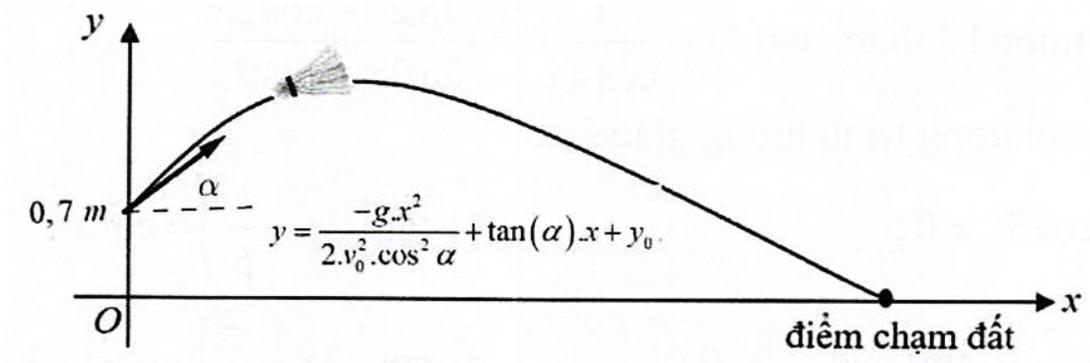
-  $\alpha$  là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);

-  $v_0$  là vận tốc ban đầu của cầu;

-  $y_0$  là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol.

Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là  $6,68m$ . Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? ( biết cầu rời mặt vợt ở độ cao  $0,7m$  so với mặt đất và vận tốc xuất phát của cầu là  $8m/s$ , bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng).



### Lời giải

Với  $g = 9,8 m/s^2$ , vận tốc ban đầu  $v_0 = 8 m/s$ , phương trình quỹ đạo của cầu:

$$y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$

Khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là  $6,68 m$ ; nghĩa là  $x = 6,68 m$ .

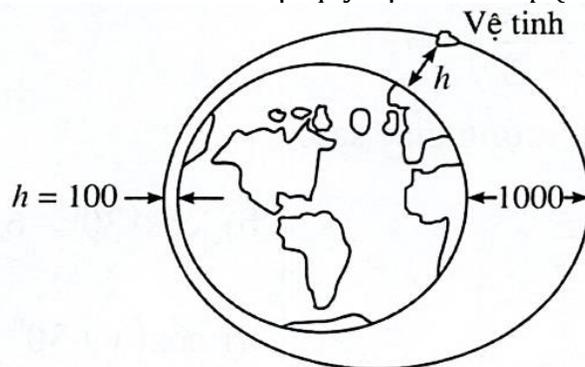
$$\text{Ta có: } \frac{-9,8 \cdot (6,68)^2}{128 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot (6,68) + 0,7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-9,8 \cdot (6,68)^2}{128} (1 + \tan^2 \alpha) + \tan(\alpha) \cdot (6,68) + 0,7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha \approx 1,378 \\ \tan \alpha \approx 0,576 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \approx 54,04^\circ \\ \alpha \approx 29,97^\circ \end{cases}$$

Vậy người chơi đã phát cầu một góc gần  $54^\circ$  hoặc gần  $30^\circ$  so với mặt đất.

**Câu 68:** Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao  $h$  (tính bằng kilômet) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức

$$h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t. \text{ Trong đó } t \text{ là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo.}$$

Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất  $250 km$ . Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó?

### Lời giải

Ta có phương trình:  $550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t = 250 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50} t = -\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{50} t \approx 2,3 + k2\pi \\ \frac{\pi}{50} t \approx -2,3 + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 36,61 + k100 \\ t \approx -36,61 + k100 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, tại thời điểm  $t \approx 36,61$  (phút) thì ta có thể thực hiện thí nghiệm đó.