MỤC LỤC

BÀI 1. DÃY SỐ

A. Tóm tắt kiến thức

1. Dãy số hữu hạn

- Mỗi hàm số $u:\{1;2;3;\ldots;m\}\to\mathbb{R}\left(m\in\mathbb{N}^*\right)$ được gọi là một dãy số hữu hạn.
- Dạng khai triển: $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_m$.
- Số u_1 gọi là số hạng đầu, số u_m gọi là số hạng cuối của dãy số.

2. Dãy số vô hạn

- Mỗi hàm số $u:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số).
- Dạng khai triển: $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_n,\ldots$
- Dãy số đó còn được viết tắt là (u_n).
- Số u_1 gọi là số hạng thứ nhất (hay số hạng đầu), số u_2 gọi là số hạng thứ hai, ..., số u_n gọi là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.

3. Cách cho một dãy số

- Ta có thể cho dãy số bằng một trong những cách sau:
- Liệt kê các số hạng của dãy số (với những dãy số hữu hạn và có ít số hạng).
- Diễn đạt bằng lời cách xác định mỗi số hạng của dãy số.
- Cho công thức của số hạng tổng quát của dãy số.
- Cho bằng phương pháp truy hồi.

4. Dãy số tăng, dãy số giảm

- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu $u_{n+1}>u_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu $u_{n+1}<u_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

5. Dãy số bị chặn

- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n\le M$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n\ge m$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.
- Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới; tức là tồn tại các số m và M sao cho $m\le u_n\le M$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

B. Phân dạng toán cơ bản

◆Dạng ❶: Xác định các số hạng của dãy số

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Viết năm số hạng đầu của mỗi dãy số có số hạng tổng quát u_n cho bởi công thức sau:

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}$

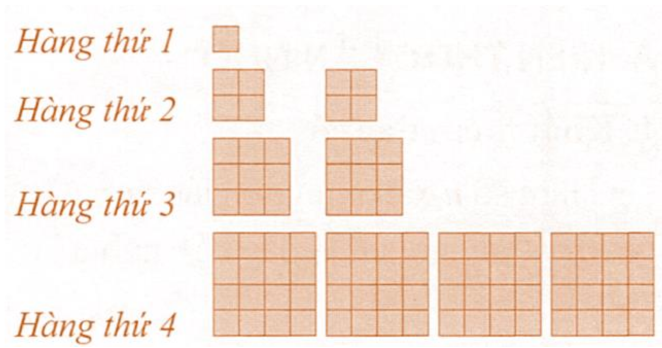
b) $u_n = \dfrac{2^n}{n}$

Lời giải

a) Năm số hạng đầu của dãy số (u_n) là: $-1; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{7}; -\dfrac{1}{9}$.

b) Năm số hạng đầu của dãy số (u_n) là: $2; 2; \dfrac{8}{3}; 4; \dfrac{32}{5}$.

Câu 2: Gọi u_n là tổng diện tích các hình vuông có ở hàng thứ n trong Hình (mỗi ô vuông nhỏ là 1 đơn vị diện tích).



a) Tính u_1, u_2, u_3, u_4.

b) Dự đoán công thức tính số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Lời giải

a) $u_1 = 1; u_2 = 8; u_3 = 27; u_4 = 64$.

b) Ta có: $u_1 = 1^3; u_2 = 2^3; u_3 = 3^3; u_4 = 4^3$. Do đó, dự đoán $u_n = n^3$.

Câu 3: (Xác định dãy số)

Viết năm số hạng đầu tiên của mỗi dãy số (u_n) sau:

a) $u_n = (-1)^{n+1} n^2$

b) $u_1 = 1, u_2 = 2, u_n = u_{n-1} \cdot u_{n-2} (n \geq 3)$.

Lời giải

a) Thay lần lượt $n = 1, 2, 3, 4, 5$ vào công thức của u_n ta có:

$u_1 = (-1)^2 \cdot 1^2 = 1; u_2 = (-1)^3 \cdot 2^2 = -4; u_3 = (-1)^4 \cdot 3^2 = 9; u_4 = (-1)^5 \cdot 4^2 = -16; u_5 = (-1)^6 \cdot 5^2 = 25.$

b) Thay lần lượt $n = 3, 4, 5$ vào công thức của u_n ta có:

$u_1=1; u_2=2; u_3=u_1.u_2=2; u_4=u_2.u_3=4; u_5=u_3.u_4=8.$

Câu 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n^2+3n+7}{n+1}$. Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số đó.

Lời giải

Năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) là:

$$u_1=\frac{1^2+3\cdot1+7}{1+1}=\frac{11}{2}; u_2=\frac{2^2+3\cdot2+7}{2+1}=\frac{17}{3}; u_3=\frac{2^2+3\cdot3+7}{3+1}=\frac{25}{4};$$
$$u_4=\frac{4^2+3\cdot4+7}{4+1}=7; u_5=\frac{5^2+3\cdot5+7}{5+1}=\frac{47}{6}.$$

◆Dạng ❷: Xét tính tăng, giảm của dãy số

☞Các ví dụ minh họa

Câu 5: Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n), biết:

a) $u_n=\dfrac{n-3}{n+2}$

b) $u_n=\dfrac{3^n}{2^n\cdot n!}$

c) $u_n=(-1)^n\cdot\left(2^n+1\right)$.

Lời giải

a) Ta có: $u_n=\dfrac{n-3}{n+2}=\dfrac{(n+2)-5}{n+2}=1-\dfrac{5}{n+2}$.

Xét $u_{n+1}-u_n=\left(1-\dfrac{5}{n+3}\right)-\left(1-\dfrac{5}{n+2}\right)=\dfrac{5}{n+2}-\dfrac{5}{n+3}=\dfrac{5}{(n+2)(n+3)}>0$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Do đó, $u_{n+1}>u_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

b) Nhận xét: $u_n>0$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Xét $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{3^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}:\dfrac{3^n}{2^n n!}=\dfrac{3}{2(n+1)}\le\dfrac{3}{4}<1$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Do đó, $u_{n+1}<u_n$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

c) Ta có: $u_1=-3; u_2=5; u_3=-9;\ldots$. Do đó, $u_1<u_2; u_2>u_3$. Vậy dãy số (u_n) không là dãy số tăng, không là dãy số giảm.

Câu 6: Cho dãy số (u_n) có năm số hạng đầu tiên lần lượt là: $-1;1;-1;1;-1$. Hãy dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

Lời giải

Năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) là:

$u_1=(-1)^1; u_2=(-1)^2; u_3=(-1)^3; u_4=(-1)^4; u_5=(-1)^5$. Do đó, dự đoán số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là $u_n=(-1)^n$.

Câu 7: Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$.

Lời giải

Ta có $u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) bị chặn dưới.

Ta lại có $u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}=\dfrac{2(n+2)-3}{n+2}=2-\dfrac{3}{n+2}<2, \forall n\in\mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) bị chặn trên.

Dãy số (u_n) vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới nên dãy số (u_n) bị chặn.

Câu 8: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n+1}{n+2}$.

Lời giải

Ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+2}{n+3}-\dfrac{n+1}{n+2}=\dfrac{(n+2)^2-(n+3)(n+1)}{(n+2)(n+3)}$

$=\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra $u_{n+1}>u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Vậy (u_n) là dãy số tăng.

Mặt khác, ta có: $u_n=\dfrac{n+1}{n+2}>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) bị chặn dưới;

$u_n=1-\dfrac{1}{n+2}<1, \forall n\in\mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) bị chặn trên.

Ta thấy dãy số (u_n) vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, suy ra dãy số (u_n) bị chặn. Vậy (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

Câu 9: (Xác định tính tăng, giảm, bị chặn của dãy số)

Xét tính tăng, giảm và tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{1-n}{n+1}$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &=\frac{1-(n+1)}{n+2}-\frac{1-n}{n+1}=-\frac{n}{n+2}-\frac{1-n}{n+1} \\ &=\frac{-n(n+1)-(1-n)(n+2)}{(n+2)(n+1)}=-\frac{2}{(n+2)(n+1)}<0, \forall \mathrm{n}\geq 1 \end{aligned}$$

Do đó (u_n) là dãy số giảm.

Do $u_n=\dfrac{1-n}{n+1}=\dfrac{-(n+1)+2}{n+1}=-1+\dfrac{2}{n+1}>-1, \forall n\geq 1$, nên dãy (u_n) bị chặn dưới.

Dãy (u_n) cũng bị chặn trên vì $u_n=-1+\dfrac{2}{n+1}\leq -1+\dfrac{2}{1+1}=0, \forall n\geq 1$.

Do đó (u_n) là dãy số bị chặn.

◆Dạng ❸: Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n^2+n}$ với bị chặn.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 10: Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{1}{n^2+n}$ bị chặn.

Lời giải

Ta có: $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới. Do $n^2+n \ge 2$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên $u_n \le \dfrac{1}{2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra dãy số (u_n) bị chặn trên. Vậy dãy số (u_n) bị chặn.

◆Dạng ❹: Ứng dụng

☞Các ví dụ minh họa

Câu 11: (Vận dụng thực tiễn)

Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng.

a) Gọi A_0 là số tiền bác Hưng đã gửi. Viết công thức tính lần lượt A_1, A_2, A_3. Từ đó dự đoán hệ thức truy hồi cho số dư A_n (tính theo đơn vị đồng) trong tài khoản của bác Hưng vào cuối năm thứ n.

b) Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm.

Lời giải

a) Vào cuối năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$A_1 = A_0(1+3\%) - 120000 = 1,03A_0 - 120000$ (đồng)

Vào cuối năm thứ hai, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$A_2 = A_1(1+3\%) - 120000 = 1,03A_1 - 120000$ (đồng)

Vào cuối năm thứ ba, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$A_3 = A_2(1+3\%) - 120000 = 1,03A_2 - 120000$ (đồng)

Tương tự, vào cuối năm thứ $n(n \ge 1)$, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$A_n = A_{n-1}(1+3\%) - 120000 = 1,03A_{n-1} - 120000$ (đồng)

b) Ta tính lần lượt A_1, A_2, A_3, A_4 :

$A_1 = 10180000;\quad A_2 = 10365400;$
$A_3 = 10556362;\quad A_4 = 10753053.$

Như vậy, số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm là 10753053 đồng.

Câu 12: Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là $0,5\%$ một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n.

Lời giải

a) Số tiền cả gốc và lãi chị Mai có được sau 1 tháng (khi chưa gửi thêm 6 triệu đồng) là: $100+100\cdot\dfrac{0,5}{100}=100\cdot 1,005=100,5$ (triệu đồng).

Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là: 100,5 + 6 = 106,5 (triệu đồng).

b) Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 2 tháng là:

$106,5\ 1,005+6=113,0325$ (triệu đồng). Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 3 tháng là:

$113,0325\ 1,005+6=119,5976625$ (triệu đồng).

c) Ta có: $P_1=100\cdot 1,005+6$;

$$\begin{aligned}P_2=P_1\cdot 1,005+6 &=(100\cdot 1,005+6)\cdot 1,005+6=100\cdot 1,005^2+6\cdot 1,005+6\\ P_3=P_2\cdot 1,005+6 &=\left(100\cdot 1,005^2+6\cdot 1,005+6\right)\cdot 1,005+6\\ &=100\cdot 1,005^3+6\cdot 1,005^2+6\cdot 1,005+6;\ldots\end{aligned}$$

Cứ như thế, ta dự đoán được công thức của P_n:

$$\begin{aligned}P_n &=100\cdot 1,005^n+6\cdot 1,005^{n-1}+6\cdot 1,005^{n-2}+\ldots+6\\ &=100\cdot 1,005^n+6\cdot\left(1,005^{n-1}+1,005^{n-2}+\ldots..+1\right).\end{aligned}$$

Ⓒ. Dạng toán rèn luyện

◆Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho dãy số (u_n) biết $u_1=2$ và $u_n=\dfrac{u_{n-1}+1}{2}$ với mọi $n\geq 2$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số lần lượt là:

A. $2;1;\dfrac{3}{2}$. **B.** $2;\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}$. **C.** $2;\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{4}$. **D.** $2;\dfrac{3}{2};2$.

Lời giải

Chọn C

Câu 2: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2+2}$. Số hạng u_{10} là:

A. $\dfrac{19}{12}$. **B.** $\dfrac{33}{34}$. **C.** $\dfrac{199}{102}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 3: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{n+1}{3n-2}$. Với $u_k = \dfrac{8}{19}$ là số hạng của dãy số thì k bằng:

A. 8. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Câu 4: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 3^n$. Số hạng u_{n+1} bằng:

A. $3^n.3$. **B.** 3^n+3. **C.** 3^n+1. **D.** $3(n+1)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 5: Trong các dãy số (u_n) được xác định như sau, dãy số giảm là:

A. $u_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$. **B.** $u_n = n^3$. **C.** $u_n = \dfrac{1}{3^{n+1}}$. **D.** $u_n = \sqrt{n}$.

Lời giải

Chọn C

Câu 6: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \cos n$. Dãy số (u_n) là:

A. Dãy số tăng. **B.** Dãy số giảm. **C.** Dãy số bị chặn. **D.** Dãy số bị chặn dưới, không bị chặn trên.

Lời giải

Chọn C

Câu 7: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_n = \dfrac{2^{n-1}+1}{n}$. Tìm số hạng thứ 10 của dãy số đã cho.

A. $51,2$. **B.** $51,3$. **C.** $51,1$. **D.** $102,3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_{10} = \dfrac{2^{10-1}+1}{10} = 51,3$.

Câu 8: Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^{n+1}\sqrt{n+1}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $u_8 = 3$. **B.** $u_8 = -3$. **C.** $u_8 = \sqrt{8}$. **D.** $u_8 = -\sqrt{8}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_8 = (-1)^{8+1}\sqrt{8+1} = -3$.

Câu 9: Cho dãy số (u_n) cho bởi công thức tổng quát $u_n = 3+4n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó u_5 bằng

A. 103. **B.** 23. **C.** 503. **D.** -97.

Lời giải

Chọn A

$u_n = 3+4n^2 \Rightarrow u_5 = 3+4.5^2 = 103$.

Câu 10: Cho dãy số (u_n) được cho bởi công thức tổng quát $u_n = 4+3n^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.Khi đó u_6 bằng:

A. 112. **B.** 652. **C.** 22. **D.** 503.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $u_n = 4+3n^2 \Rightarrow u_6 = 4+3.6^2 = 112$.

Câu 11: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 3^n$. Tính u_{n+1}?

A. $u_{n+1} = 3^n + 3$.. **B.** $u_{n+1} = 3.3^n$.. **C.** $u_{n+1} = 3^n + 1$.. **D.** $u_{n+1} = 3(n+1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_{n+1} = 3^{n+1} = 3.3^n$..

Câu 12: Dãy số (u_n) nào sau đây là dãy số tăng?

A. $u_n = 3^{-n}+1$. **B.** $u_n = \sin n$. **C.** $u_n = 2n-3$. **D.** $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_{n+1} - u_n = [2(n+1)-3] - (2n-3) = 2 > 0$.

Câu 13: Trong các dãy số (u_n) được cho bởi số hạng tổng quát sau đây, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **B.** $u_n = \sqrt{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. **D.** $u_n = \dfrac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Chọn D

Xét dãy số $u_n = \dfrac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Có $u_n > u_{n+1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2^n} > \dfrac{1}{2^{n+1}} \Leftrightarrow 2 > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy dãy số $u_n = \dfrac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ là dãy số giảm.

Câu 14: Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = n^2$. **B.** $u_n = 2n$. **C.** $u_n = n^3 - 1$. **D.** $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$.

Lời giải

Chọn D

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $n^2 < (n+1)^2$ nên A sai; $2n < 2(n+1)$ nên B sai; $n^3 - 1 < (n+1)^3 - 1$ nên C sai.

Với $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$ thì $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3}{(n-1).n} < 0$ nên dãy $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$ giảm.

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n-1$. Dãy số (u_n) là dãy số

A. Bị chặn trên bởi 1. **B.** Giảm.
C. Bị chặn dưới bởi 2. **D.** Tăng.

Lời giải

Chọn D

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 1 - (2n-1) = 2 > 0$ nên $u_{n+1} > u_n$ vậy dãy số (u_n) tăng.

Câu 16: Dãy số (u_n) nào sau đây là dãy số tăng:

A. $u_n = 3^{-n} + 1$. **B.** $u_n = \sin n$. **C.** $u_n = 2n-3$. **D.** $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Xét dãy số $u_n = 2n-3$

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - (2n-3) = 2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra dãy số (u_n) với $u_n = 2n-3$ là dãy số tăng.

Câu 17: Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n \sqrt{n}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn. **B.** Dãy số (u_n) là dãy số giảm.
C. Dãy số (u_n) là dãy số tăng. **D.** Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Lời giải

Chọn D

Dãy số $u_n = (-1)^n \sqrt{n}$ là dãy số không bị chặn vì $\lim |u_n| = \lim \sqrt{n} = +\infty$.

Câu 18: Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$. **B.** $u_n = 2n + \sin n$.
C. $u_n = n^2$. **D.** $u_n = n^3 - 1$.

Lời giải

Chọn A

Xét đáp án A, ta có $0 < u_n = \dfrac{2n+1}{n+1} < 2,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Câu 19: Xét các câu sau:

(1) Dãy $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ là dãy bị chặn.

(2) Dãy $1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{7}, \ldots, \dfrac{1}{2n-1}, \ldots$ là dãy bị chặn trên nhưng không bị chặn dưới.

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Chỉ có (2) đúng. **B.** Chỉ có (1) đúng.
C. Cả hai câu đều đúng. **D.** Cả hai câu đều sai.

Lời giải

Chọn D

Dãy $1,2,3,\ldots,n,\ldots$ là dãy bị chặn dưới, không bị chặn trên nên không phải dãy số bị chặn.

Dãy $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\ldots,\frac{1}{2n-1},\ldots$ là dãy bị chặn trên tại 1 và bị chặn dưới tại 0.

Do đó cả hai câu trên đều sai.

Câu 20: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{1}{n+2}$. Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. Dãy số (u_n) là dãy số giảm và bị chặn. .

B. Dãy số (u_n) là dãy số tăng và bị chặn trên.

C. Dãy số (u_n) là dãy số giảm và không bị chặn dưới.

D. Dãy số (u_n) là dãy số tăng và không bị chặn trên.

Lời giải

Chọn A

Ta có $u_n=\frac{1}{n+2}\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{(n+1)+2}=\frac{1}{n+3}$ suy ra $u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm (loại B, D).

Với $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ta có $u_n=\frac{1}{n+2}>0.$

và $n+2>1\Rightarrow u_n=\frac{1}{n+2}<1.$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

Câu 21: Cho dãy số (u_n) có $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$. Tìm mệnh đề đúng.

A. Dãy số (u_n) chỉ bị chặn dưới. **B.** Dãy số (u_n) tăng.

C. Dãy số (u_n) bị chặn. **D.** Dãy số (u_n) chỉ bị chặn trên.

Lời giải

Chọn C

Xét $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{n}{n+2}$.

Với $\forall n\geq 1\Rightarrow 0<u_n<1$. Vậy dãy (u_n) bị chặn.

Câu 22: Cho dãy số (U_n) có số hạng tổng quát $U_n=\frac{n-1}{n+2},(n\in N^*)$. Số hạng thứ 100 của dãy số là

A. $U_{100}=\frac{33}{34}$.. **B.** $U_{100}=\frac{37}{34}$.. **C.** $U_{100}=\frac{39}{34}$.. **D.** $U_{100}=\frac{35}{34}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $U_{100}=\frac{100-1}{100+2}=\frac{33}{34}$.

Câu 23: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{an^2}{n+1}$ (a hằng số). Hỏi u_{n+1} là số hạng nào sau đây?

A. $u_{n+1} = \dfrac{an^2}{n+2}$. **B.** $u_{n+1} = \dfrac{a.(n+1)^2}{n+2}$.

C. $u_{n+1} = \dfrac{a.(n+1)^2}{n+1}$. **D.** $u_{n+1} = \dfrac{a.n^2+1}{n+1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $u_{n+1} = \dfrac{a.(n+1)^2}{(n+1)+1} = \dfrac{a.(n+1)^2}{n+2}$.

Câu 24: Cho dãy số $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$.Năm số hạng đầu của dãy số là

A. $4,5,6,7,8.$. **B.** $4,16,32,64,128.$.

C. $4,6,9,13,18.$. **D.** $4,5,7,10,14.$

Lời giải

Chọn D

Ta có.

$u_2 = u_1 + 1 = 5$; $u_3 = u_2 + 2 = 7$; $u_4 = u_3 + 3 = 10$; $u_5 = u_4 + 4 = 14$.

Câu 25: Cho dãy số (u_n)xác định bởi $u_1 = 3; u_{n+1} = u_n + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị $u_1 + u_2 + u_3$ bằng

A. 18. **B.** 13. **C.** 15. **D.** 16.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_1 = 3$;

$u_2 = u_1 + 1 = 3 + 1 = 4$;

$u_3 = u_2 + 2 = 4 + 2 = 6$.

Suy ra $u_1 + u_2 + u_3 = 3 + 4 + 6 = 13.$.

Câu 26: Cho dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n+1}$. Số $\dfrac{37}{13}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số (u_n)?

A. 8. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Giả sử $u_n = \frac{37}{13}$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$, ta có: $\frac{n^2+1}{2n+1} = \frac{37}{13} \Leftrightarrow 13n^2 - 74n - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 6 \\ n = -\frac{4}{13} \end{array}\right.$.

Do $n \in \mathbb{N}^*$ nên $n = 6$.

Vậy số $\frac{37}{13}$ là số hạng thứ 6 dãy số (u_n).

Câu 27: Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 1$. Dãy số (u_n) là dãy số

A. Bị chặn trên bởi 1. **B.** Giảm.
C. Bị chặn dưới bởi 2. **D.** Tăng.

Lời giải

Chọn D

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có: $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 1 - (2n-1) = 2 > 0$ nên $u_{n+1} > u_n$ vậy dãy số (u_n) tăng.

Câu 28: Dãy số (u_n) nào sau đây là dãy số tăng:

A. $u_n = 3^{-n} + 1$. **B.** $u_n = \sin n$. **C.** $u_n = 2n - 3$. **D.** $u_n = \frac{n+2}{n+1}$.

Lời giải

Chọn C

Xét dãy số $u_n = 2n - 3$

$u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 3 - (2n-3) = 2 > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra dãy số (u_n) với $u_n = 2n - 3$ là dãy số tăng.

Câu 29: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{n^2 + n}$. Khẳng định nào sau đây là ***sai***?

A. Năm số hạng đầu của dãy là: $\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{20}; \frac{1}{30}$.

B. Là dãy số tăng.

C. Bị chặn trên bởi số $M = \frac{1}{2}$. **D.** Không bị chặn.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2 + (n+1)} - \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-2}{n(n+1)(n+2)} < 0$ với $n \geq 1$.

Do đó (u_n) là dãy giảm.

Câu 30: Trong các dãy số (u_n) được cho bởi số hạng tổng quát sau đây, dãy số nào là dãy số tăng?

A. $u_n=(-1)^{2n}(5^n+1), \forall n\in\mathbb{N}^*$. **B.** $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

C. $u_n=(-1)^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{n}, \forall n\in\mathbb{N}^*$. **D.** $u_n=\dfrac{n}{n^2+1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Lời giải

Chọn A

Xét dãy số $u_n=(-1)^{2n}(5^n+1), \forall n\in\mathbb{N}^*$

Có $u_n<u_{n+1}\Leftrightarrow 5^n+1<5^{n+1}+1\Leftrightarrow 1<5, \forall n\in\mathbb{N}^*$

Vậy dãy số $u_n=(-1)^{2n}(5^n+1), \forall n\in\mathbb{N}^*$ là dãy số tăng.

Câu 31: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=(2-a)n+a-2, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Dãy số (u_n) là dãy tăng khi và chỉ khi

A. $a\le 2$. **B.** $a\ge 2$. **C.** $a<2$. **D.** $a>2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_{n+1}=(2-a)(n+1)+a-2$.

Suy ra $u_{n+1}-u_n=(2-a)(n+1)+a-2-\left[(2-a)n+a-2\right]=2-a$.

Để (u_n) là dãy tăng thì $2-a>0\Leftrightarrow a<2$.

Câu 32: Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases}u_1=2;u_2=3\\u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n\end{cases}$ với $n\ge 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $u_n=2^{n-1}+1$.

B. (u_n) là dãy số tăng.

C. Năm số hạng đầu của dãy số là: $2, 3, 5, 9, 17$.

D. $u_n=\dfrac{n^2+5}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Từ công thức truy hồi ta có: $u_1=2; u_2=3; u_3=5; u_4=9; u_5=17$ ....

Xét: $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n\Rightarrow u_n=\dfrac{3u_{n+1}-u_{n+2}}{2}$.

Vậy: $u_1=2=1+1=2^0+1$.

$u_2=3=2+1=2^1+1$.

$u_3=5=4+1=2^2+1$.

$u_4=9=8+1=2^3+1$.

$u_5=17=16+1=2^4+1$

…………

Vậy công thức tổng quát của dãy số là: $u_n = 2^{n-1} + 1$.

Qua đó ta thấy đáp án $u_n = \dfrac{n^2+5}{3}$ sai.

Câu 33: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Dãy số (u_n) là một dãy số giảm.

B. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.

C. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$.

D. Dãy số (u_n) là dãy số không bị chặn.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy dãy $\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$ là dãy số giảm và $\dfrac{\pi}{n+1} \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Mặt khác hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ nên (u_n) là dãy số giảm và bị chặn.

Câu 34: Dãy số nào trong các dãy số sau đây là dãy số bị chặn?

A. $(u_n),\ u_n = \dfrac{n}{n+1}\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B. $(u_n),\ u_n = n+1\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

C. $(u_n),\ u_n = -n\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

D. $(u_n),\ u_n = n^2\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

Chọn A

Xét dãy $(u_n),\ u_n = \dfrac{n}{n+1}; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Ta có $0 < n < n+1; \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 0 < \dfrac{n}{n+1} < 1; \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $0 < u_n < 1; \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra dãy số (u_n) bị chặn.

Xét dãy $(u_n),\ u_n = n+1; \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n = n+1 \geq 2; \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Xét dãy $(u_n),\ u_n = -n; \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n = -n \leq -1; \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên.

Xét dãy $(u_n),\ u_n = n^2; \forall n \in \mathbb{N}^*$ ta có $u_n = n^2 \geq 1; \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

Câu 35: Dãy số nào trong các dãy số sau đây là dãy số bị chặn trên?

A. $(u_n), u_n = n\ \forall n \in N^*$.

B. $(u_n), u_n = 2n+1\ \forall n \in N^*$.

C. $(u_n), u_n = n^2\ \forall n \in N^*$.

D. $(u_n), u_n = \dfrac{2n+3}{n+4}\ \forall n \in N^*$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(u_n), u_n = \dfrac{2n+3}{n+4} = \dfrac{2(n+4)-5}{n+4} = 2 - \dfrac{5}{n+4} < 2\ \forall n \in N^*$ nên dãy số bị chặn trên.

Câu 36: Cho dãy số (u_n) biết $u_n = \dfrac{n^2+3}{2n^2-1}$ với $n \in N^*$. Tìm số hạng u_5.

A. $u_5 = \dfrac{7}{4}$.. **B.** $u_5 = \dfrac{7}{9}$.. **C.** $u_5 = \dfrac{24}{51}$.. **D.** $u_5 = \dfrac{4}{7}$.

Lời giải

Chọn D

$u_5 = \dfrac{5^2+3}{2.5^2-1} = \dfrac{28}{49} = \dfrac{4}{7}$.

Câu 37: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -3 \\ u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + 1 \end{cases}$ với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Tìm số hạng u_4.

A. $u_4 = \dfrac{1}{2}$. **B.** $u_4 = 1$. **C.** $u_4 = \dfrac{11}{8}$. **D.** $u_4 = \dfrac{5}{88}$.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét: Dãy số (u_n) đã cho công thức truy hồi. Để tính u_4 ta lần lượt tính u_3, u_2.

$u_2 = \dfrac{1}{2}u_1 + 1 = \dfrac{1}{2}(-3) + 1 = \dfrac{-1}{2}$.

$u_3 = \dfrac{1}{2}u_2 + 1 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{-1}{2} + 1 = \dfrac{3}{4}$.

$u_4 = \dfrac{1}{2}u_3 + 1 = \dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4} + 1 = \dfrac{11}{8}$.

Mở rộng

Nếu đề Câu hỏi tìm công thức của số hạng tổng quát u_n ta làm như sau:

Đặt $u_n = v_n + 2$. Khi đó $v_1 = -3 - 2 = -5$.

$u_n = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + 1 \Rightarrow v_n + 2 = \dfrac{1}{2}(v_{n-1} + 2) + 1$ hay $v_n = \dfrac{1}{2}v_{n-1}$.

Vậy (v_n) là một cấp số nhân với công bội là $\dfrac{1}{2}$ và số hạng đầu tiên $v_1 = -5$.

Ta có $v_4 = v_1.q^3 = (-5).\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = -\dfrac{1}{8} \Rightarrow u_4 = -\dfrac{5}{8} + 2 = \dfrac{11}{8}$.

Câu 38: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n=\frac{n^2+3}{2n+1}$ với $n\ge 1$. Có bao nhiêu số hạng của dãy số có giá trị bằng $\frac{67}{17}$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $u_n=\frac{n^2+3}{2n+1}\Leftrightarrow\frac{n^2+3}{2n+1}=\frac{67}{17}\Leftrightarrow 17n^2-134n-16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=8\\ n=-\frac{2}{17}\end{array}\right.$

Vì $n\ge 1$ và $n\in\mathbb{N}$ nên $n=8$.

Vậy có 1 số hạng của dãy số có giá trị bằng $\frac{67}{17}$.

Câu 39: Trong các dãy số sau đây, dãy số nào là dãy số giảm?

A. Dãy (a_n), với $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. **B.** Dãy (b_n) với $b_n=\frac{n^2+1}{n}$.

C. Dãy (c_n), với $c_n=\frac{1}{n^3+1}$. **D.** Dãy (d_n), với $d_n=3.2^n$.

Lời giải

Chọn C

Dãy (a_n), với $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ có $a_1=-\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{1}{4}$ suy ra dãy (a_n) không phải là dãy số giảm.

Dãy (b_n) với $b_n=\frac{n^2+1}{n}$. Có $b_1=2$, $b_2=\frac{5}{2}$ suy ra dãy (b_n) không phải là dãy số giảm.

Dãy (d_n), với $d_n=3.2^n$. Có $d_1=6$, $d_2=12$ suy ra dãy (d_n) không phải là dãy số giảm.

Dãy (c_n), với $c_n=\frac{1}{n^3+1}$.

Ta có $c_n>0\quad\forall n\in N^*$ và $\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{n^3+1}{(n+1)^3+1}<1\Leftrightarrow c_{n+1}<c_n\quad\forall n\in N^*$.

Suy ra dãy (c_n) là dãy số giảm.

Câu 40: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=(a-5)n+5-a,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Dãy số (u_n) là dãy số giảm khi và chỉ khi

A. $a\le 5$. **B.** $a\ge 5$. **C.** $a<5$. **D.** $a>5$.

Lời giải

Chọn C

Xét $u_{n+1}-u_n=(a-5)(n+1)+5-a-\left[(a-5)n+5-a\right]=a-5$.

Để dãy số (u_n) là dãy giảm thì $a-5<0,\forall n\in\mathbb{N}^*\Leftrightarrow a<5,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Câu 41: Trong các dãy số sau, dãy số nào là dãy số giảm?

A. $u_n = 2n$. **B.** $u_n = n^3 - 1$. **C.** $u_n = n^2$. **D.** $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$

Lời giải

Chọn D

Xét đáp án $u_n = 2n$ có $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) - 2n = 2 > 0$ nên $u_{n+1} > u_n \ \forall n \geq 1 \Rightarrow$ dãy số tăng, loại.

Xét đáp án $u_n = n^3 - 1$ có $u_{n+1} - u_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = 3\left(n + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} > 0$ nên

$u_{n+1} > u_n \ \forall n \geq 1 \Rightarrow$ dãy số tăng, loại.

Xét đáp án $u_n = n^2$ có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2 > 1 \ \forall n \geq 1$ nên $u_{n+1} > u_n \ \forall n \geq 1 \Rightarrow$ dãy số tăng, loại.

Xét đáp án $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$ có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(n+1)+1}{(n+1)-1} - \dfrac{2n+1}{n-1} = \dfrac{2n+3}{n} - \dfrac{2n+1}{n-1} = \dfrac{-3}{n(n-1)} < 0$ $\forall n > 1$.

Nên $u_{n+1} < u_n \Rightarrow$ dãy số giảm.

Câu 42: Trong các dãy số (u_n) sau đây, dãy số nào bị chặn?

A. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. **B.** $u_n = n + \dfrac{1}{n}$. **C.** $u_n = \sqrt{n^2+1}$. **D.** $u_n = 3.2^n$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left|\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\right| = \dfrac{1}{2n+1} < \dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{2}$ nên dãy $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ bị chặn.

Câu 43: Dãy số (u_n) nào sau đây là dãy số bị chặn?

A. $u_n = 3^n - 2$. **B.** $u_n = \dfrac{2n+7}{n+3}$. **C.** $u_n = \dfrac{n^2+2}{n+3}$. **D.** $u_n = n^2 + 1$.

Lời giải

Chọn B

Xét dãy $u_n = \dfrac{2n+7}{n+3}$.

Có $u_n = \dfrac{2n+7}{n+3} = 2 + \dfrac{1}{n+3} > 2 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$ suy ra (u_n) bị chặn trên.

Đồng thời $u_n = 2 + \dfrac{1}{n+3} \leq 2 + \dfrac{1}{1+3} = \dfrac{9}{4} \ \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) bị chặn dưới.

Vậy (u_n) với $u_n = \dfrac{2n+7}{n+3}$ là dãy bị chặn.

Câu 44: Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = n^{n-1}$. **B.** $u_n = 2^n$.

C. $u_n = 2^{n+1}$. **D.** $u_n = 2$.

Lời giải

Chọn B

Từ công thức $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_2 = 2u_1 = 2.2 = 4 \\ u_3 = 2u_2 = 2.4 = 8 \end{cases}$.

Xét đáp án A với $n = 1 \longrightarrow u_1 = 1^{1-1} = 1^0 = 1 \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án C với $n = 1 \longrightarrow u_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4 \longrightarrow$ C loại.

Dễ thấy đáp án D không thỏa mãn.

Câu 45: Cho dãy số u_n, được xác định $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases}$. Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = \frac{1}{2} + 2\ n-1$. **B.** $u_n = \frac{1}{2} - 2\ n-1$.

C. $u_n = \frac{1}{2} - 2n$. **D.** $u_n = \frac{1}{2} + 2n$.

Lời giải

Chọn B

Từ công thức $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_2 = u_1 - 2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \\ u_3 = u_2 - 2 = -\frac{3}{2} - 2 = -\frac{7}{2} \end{cases}$.

Xét đáp án A với $n = 2 \longrightarrow u_2 = \frac{1}{2} + 2\ 2-1\ = \frac{5}{2} \longrightarrow$ A loại.

Xét đáp án B, ta thấy đều thỏa mãn.

Xét đáp án C với $n = 2 \longrightarrow u_2 = \frac{1}{2} - 2.2 = \frac{1}{2} - 4 = -\frac{7}{2} \longrightarrow$ C loại.

Xét đáp án D với $n = 1 \longrightarrow u_1 = \frac{1}{2} + 2.1 = \frac{5}{2} \longrightarrow$ D loại.

⬩Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{-n}{n+1}$. Khi đó:

a) Năm số hạng đầu tiên của dãy số là $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$

b) Số hạng u_{10}, u_{100} lần lượt là $-\frac{10}{11}; -\frac{100}{101}$

c) $-\frac{85}{86}$ là số hạng thứ 86 của dãy số (u_n)

d) $-\frac{99}{101}$ là một số hạng của dãy số (u_n)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Ta có: $u_1 = -\frac{1}{2}; u_2 = -\frac{2}{3}; u_3 = -\frac{3}{4}; u_4 = -\frac{4}{5}; u_5 = -\frac{5}{6}$.

b) Ta có: $u_{10} = -\frac{10}{11}, u_{100} = -\frac{100}{101}$.

c) Xét $-\frac{85}{86} = \frac{-n}{n+1} \Leftrightarrow 85n + 85 = 86n \Leftrightarrow n = 85$.

Vậy $-\frac{85}{86}$ là số hạng thứ 85 của dãy (u_n).

d) Xét $-\frac{99}{101} = \frac{-n}{n+1} \Leftrightarrow 99n + 99 = 101n \Leftrightarrow n = \frac{99}{2} \notin \mathbb{N}^*$ (loại).

Vậy $-\frac{99}{101}$ không phải là số hạng của dãy số (u_n).

Câu 2. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 1$. Khi đó:

a) Bố số hạng đầu tiên của dãy số lần lượt là $-1; 2; 5; 8;$

b) Số hạng thứ năm của dãy là 13

c) Công thức số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 2n - 3$.

d) 101 là số hạng thứ 35 của dãy số đã cho.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Ta có: $u_1 = -1; u_2 = u_1 + 3 = 2; u_3 = u_2 + 3 = 5; u_4 = u_3 + 3 = 8;$.

b) $u_5 = u_4 + 3 = 11$

b) Từ giả thiết, ta có: $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_2 = u_1 + 3 \\ u_3 = u_2 + 3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n = u_{n-1} + 3 \end{cases}$.

Cộng theo vế toàn bộ các đẳng thức trên và triệt tiêu các số hạng giống nhau ở hai vế, ta có:

$u_n = -1 + 3(n-1) = 3n - 4.$

Vậy công thức số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n = 3n - 4$.

Xét $101 = 3n - 4 \Rightarrow n = 35$.

Vậy 101 là số hạng thứ 35 của dãy số đã cho.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$. Khi đó:

a) Số hạng đầu tiên của dãy số là 1

b) Số hạng $u_2 = \dfrac{5}{4}; u_3 = \dfrac{7}{5}$

c) Số hạng $u_4 = \dfrac{3}{2}; u_5 = \dfrac{11}{7}$

d) Số $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ 252 của dãy số (u_n)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) b) c) Ta có: $u_1 = 1; u_2 = \dfrac{5}{4}; u_3 = \dfrac{7}{5}; u_4 = \dfrac{3}{2}; u_5 = \dfrac{11}{7}$.

d) Xét $\dfrac{2n+1}{n+2} = \dfrac{167}{84} \Leftrightarrow 84(2n+1) = 167(n+2) \Leftrightarrow n = 250$.

Vậy $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ 250 của dãy số (u_n).

Câu 4. Cho dãy số (u_n) được xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. Khi đó:

a) Năm số hạng đầu của dãy số là: $u_1 = 2; u_2 = 7; u_3 = 12; u_4 = 17; u_5 = 22$.

b) Số hạng tổng quát của dãy (u_n) là $u_n = 5n - 3$

c) Số hạng u_{50} bằng 247

d) 512 là số hạng thứ 102 của dãy (u_n)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Năm số hạng đầu của dãy số là: $u_1=2;u_2=7;u_3=12;u_4=17;u_5=22$.

b) Ta có: $\begin{cases} u_1=2 \\ u_2=u_1+5 \\ u_3=u_2+5 \\ u_4=u_3+5 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_n=u_{n-1}+5 \end{cases}$.

Cộng theo vế toàn bộ đẳng thức trên rồi triệt tiêu các số hạng giống nhau ở hai vế, ta được:
$u_n=2+(n-1)5=5n-3$.

c) Số hạng thứ 50 của dãy số là: $u_{50}=5\cdot 50-3=247$.

d) Xét $5n-3=512 \Rightarrow n=103$.

Vậy số 512 là số hạng thứ 103 của dãy số (u_n).

Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$. Khi đó:

a) Số hạng thứ 2021 là $\frac{2021}{4040}$

b) Số hạng thứ 2022 là $\frac{2022}{4043}$

c) Số hạng thứ 2023 là $\frac{2023}{4047}$

b) Số hạng thứ 2024 là $\frac{2024}{4049}$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

Với k là số nguyên dương, ta có:

$$\frac{1}{(2k-1)\cdot(2k+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{(2k+1)-(2k-1)}{(2k-1)\cdot(2k+1)}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)}-\frac{1}{(2k+1)}\right).$$

Khi đó: $u_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(2n-1)}-\frac{1}{(2n+1)}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{(2n+1)}\right]=\frac{n}{2n+1}$.

Vậy $u_n=\frac{n}{2n+1}$, với mọi $n\in\mathbb{N}^*$.

Áp dụng công thức số hạng tổng quát ta có:

$u_{2021}=\frac{2021}{2.2021+1}=\frac{2021}{4043}$

$u_{2022}=\frac{2022}{2.2022+1}=\frac{2022}{4045}$

$u_{2023}=\frac{2023}{2.2023+1}=\frac{2023}{4047}$.

$u_{2024}=\frac{2024}{2.2024+1}=\frac{2024}{4049}$.

Câu 6. Cho dãy số $(u_n):\begin{cases}u_1=2023;u_2=2024\\2u_{n+1}=u_n+u_{n+2}\end{cases}$ với $n\ge 1$. Khi đó:

a) Dãy $(v_n):v_n=u_n-u_{n-1}$ là dãy không đổi.

b) Biểu thị u_n qua u_{n-1} ta được $u_n=u_{n-1}+1$

c) Ta có $u_3=2025$

d) Ta có $u_{2024}=4044$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Ta có: $2u_{n+1}=u_n+u_{n+2}\Rightarrow u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n\Rightarrow v_{n+2}=v_{n+1}$

Tương tự, ta chứng minh được $v_{n+1}=\ldots=v_2=1$, hay dãy (v_n) là dãy không đổi.

b) Ta có: $u_n-u_{n-1}=1\Rightarrow u_n=u_{n-1}+1$

Suy ra $u_n=(u_n-u_{n-1})+(u_{n-1}-u_{n-2})+\ldots+(u_2-u_1)+u_1$

$=1+1+\ldots+1+u_1=n-1+2023=n+2022.$

Khi đó $u_{2024}=4046$

Câu 7. Cho dãy số (u_n) được xác định $\begin{cases}u_1=2\\u_{n+1}-u_n=2n-1\end{cases}$. Khi đó:

a) Ta có $u_2=3$

b) Ta có $u_4=11$

c) Ta có $u_{2024}=4092536$

d) Ta có $u_{2023}=4088482$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

Ta có:

$u_{n+1}-u_n=2n-1\Rightarrow u_{n+1}=u_n+2n-1$

$u_2=2+2.1-1=3$

Khi đó: $u_3=3+2.2-1=6$

$u_4=6+2.3-1=11$

Suy ra: $u_n=2+(n-1)^2$

c) Ta có $u_{2024}=4092531$

d) Ta có $u_{2023}=4088486$

Câu 8. Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$. Khi đó:

a) Số hạng $u_1=\frac{1}{2}$

b) Số hạng $u_3=\frac{3}{4}$

c) $\frac{10}{11}$ là số hạng thứ 11 của dãy số

d) $u_{2023}+u_{2024}>2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

Ta có: $\begin{cases}\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3.4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\end{cases}$

Suy ra: $u_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số là: $u_n=\frac{n}{n+1}$.

a) Số hạng $u_1=\frac{1}{2}$

b) Số hạng $u_3=\frac{3}{4}$

c) $\frac{10}{11}$ là số hạng thứ 10 của dãy số

d) $u_{2023}+u_{2024}<2$

Câu 9. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=1-\frac{1}{n}$. Khi đó:

a) Ta có $u_3=\frac{2}{3}$

b) $u_7-u_8=\frac{1}{56}$

c) $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{n(n+1)}$

d) Dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Ta có $u_3=\frac{2}{3}$

b) $u_7-u_8=-\frac{1}{56}$

c) Ta có: $u_{n+1}-u_n=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}>0,\forall n\geq 1.$

Suy ra $u_{n+1}>u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

d) Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\frac{n}{4^n}$. Khi đó:

a) Ta có $u_n=\frac{n}{4^n}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$

b) Ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1,\forall n\geq 1$

c) Ta có $u_{2024} < u_{2023}$

d) Dãy số (u_n) là dãy số tăng

Lời giải

a) Sai	**b) Đúng**	**c) Đúng**	**d) Sai**

Nhận xét: $u_n = \frac{n}{4^n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{4^{n+1}} : \frac{n}{4^n} = \frac{n+1}{4n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n} < 1, \forall n \geq 1$.

Suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Khi đó:

a) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+2}}$

b) $\frac{u_{2024}}{u_{2023}} < 1$

c) $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

d) Dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Lời giải

a) Sai	**b) Đúng**	**c) Đúng**	**d) Đúng**

Nhận xét: $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

$$= \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} = \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}.$$

Vì $0 < \sqrt{n+1} + \sqrt{n} < \sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}$ nên $\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} < 1$

hay $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=\dfrac{n+1}{n+2}$. Khi đó:

a) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+3)(n+2)}$

b) $u_{n+1}<u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$

c) Dãy số (u_n) là dãy số giảm

d) Dãy (u_n) là dãy số bị chặn.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

Xét $u_{n+1}-u_n=\dfrac{n+2}{n+3}-\dfrac{n+1}{n+2}=\dfrac{n^2+4n+4-\left(n^2+4n+3\right)}{(n+3)(n+2)}=\dfrac{1}{(n+3)(n+2)}>0$.

Suy ra $u_{n+1}>u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ta có: $u_n=\dfrac{n+1}{n+2}>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Mặt khác: $u_n=\dfrac{n+1}{n+2}=\dfrac{(n+2)-1}{n+2}=1-\dfrac{1}{n+2}<1, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Do đó: $0<u_n<1, \forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy (u_n) là dãy số bị chặn.

Câu 13. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n=n+\dfrac{1}{n}$. Khi đó:

a) $u_{n+1}>u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$

b) Dãy số (u_n) là dãy số tăng

c) $u_n\ge 1, \forall n\in\mathbb{N}^*$

d) Dãy số đã cho bị chặn trên

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

Với mọi số nguyên dương n, ta có:

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= n+1+\frac{1}{n+1}-\left(n+\frac{1}{n}\right) \\ &= 1-\frac{1}{(n+1)n}=\frac{(n+1)n-1}{(n+1)n}>0 (\text{vì } (n+1)n>1, \forall n\ge 1). \end{aligned}$$

Suy ra $u_{n+1}>u_n, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Vì vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $n, \frac{1}{n}$, ta được:

$n+\frac{1}{n} \geq 2\sqrt{n \cdot \frac{1}{n}}=2$ hay $u_n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vì vậy dãy số đã cho bị chặn dưới.

Câu 14. Bà Hoa gửi vào một ngân hàng số tiền 200 triệu đồng với lãi suất 5% một năm theo hình thức lãi kép, kì hạn 1 tháng. Số tiền (triệu đồng) của bà Hoa sau n tháng được tính theo công thức $T_n=200\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^n$. Khi đó:

a) Sau 1 tháng, số tiền bà Hoa nhận được là khoảng $200,83$ (triệu đồng)

b) Sau 2 tháng, số tiền bà nhận được là khoảng $201,67$ (triệu đồng);

c) Sau 14 tháng, số tiền bà nhận được là khoảng $211,99$ (triệu đồng).

d) Sau 17 tháng, số tiền bà nhận được là khoảng $215,65$ (triệu đồng).

Lời giải

a) Đúng	**b) Đúng**	**c) Đúng**	**d) Sai**

Sau 1 tháng, số tiền bà Hoa nhận được là: $T_1=200\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^1 \approx 200,83$ (triệu đồng)

Sau 2 tháng, số tiền bà nhận được là: $T_2=200\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^2 \approx 201,67$ (triệu đồng);

Sau 14 tháng, số tiền bà nhận được là: $T_{14}=200\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{14} \approx 211,99$ (triệu đồng).

Sau 17 tháng, số tiền bà nhận được là: $T_{17}=200\left(1+\frac{0,05}{12}\right)^{17} \approx 214,65$ (triệu đồng).

◆Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính tổng 6 số hạng đầu của dãy số (u_n), biết $u_n=3n-1$.

Lời giải

Tổng 6 số hạng đầu của dãy số (u_n) là 57.

Câu 2: Cho dãy số (u_n) biết $u_1=2$ và $u_n=\sqrt{2+u_{n-1}^2}$ với mọi $n \geq 2$. Viết năm số hạng đầu của dãy số và dự đoán công thức của số hạng tổng quát u_n.

Lời giải

Năm số hạng đầu của dãy số (u_n) là $2; \sqrt{6}; 2\sqrt{2}; \sqrt{10}; 2\sqrt{3}$.

Dự đoán công thức số hạng tổng quát $u_n=\sqrt{2(n+1)}$.

Câu 3: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hàm số $y=\frac{2x-1}{2x^2+1}$ có đồ thị (C). Với mỗi số nguyên dương n, gọi A_n là giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $x=n$. Xét dãy số (u_n), biết u_n là tung độ của điểm A_n. Hãy tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

Lời giải

$u_n=\frac{2n-1}{2n^2+1}$.

Câu 4: Cho dãy số (u_n), biết $u_n=\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{4}\right]$.

a) Viết bốn số hạng đầu của dãy số.

b) Chứng minh rằng $u_{n+4}=u_n$ với mọi $n\geq 1$.

c) Tính tổng 12 số hạng đầu của dãy số.

Lời giải

a) $\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $u_{n+4}=\sin\left[(2n+7)\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{4}+2\pi\right]=\sin\left[(2n-1)\frac{\pi}{4}\right]=u_n,\forall n\geq 1$

c) Tổng 12 số hạng của dãy số là: $u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots.+u_{12}$

$=3(u_1+u_2+u_3+u_4)=3\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=0.$

Câu 5: Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số (u_n), biết:

a) $u_n=2n+3$;

b) $u_n=3^n-n$;

c) $u_n=\frac{\sqrt{n}}{2^n}$

d) $u_n=\sin n$.

Lời giải

a) Dãy số tăng.

b) Dãy số tăng.

c) Dãy số giảm.

d) Không là dãy số tăng, không là dãy số giảm.

Câu 6: Cho dãy số (u_n) biết $u_n=\frac{an+2}{n+1}$ với a là số thực. Tìm a để dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Lời giải

Câu 7: Ta có: $u_{n+1}-u_n=\frac{a(n+1)+2}{n+2}-\frac{an+2}{n+1}=\frac{a-2}{(n+2)(n+1)}>0\Leftrightarrow a>2$. Vậy (u_n) là dãy số tăng khi $a>2$ Viết năm số hạng đầu tiên của mỗi dãy số (u_n) sau:

a) $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$

b) $u_1=1, u_n=n-u_{n-1}(n\geq 2)$.

Lời giải

a) $u_1=(-1)^0\cdot\frac{1}{2.1-1}=1;\quad u_2=(-1)^1\cdot\frac{2}{2.2-1}=-\frac{2}{3}; u_3=(-1)^2\cdot\frac{3}{2\cdot 3-1}=\frac{3}{5}$; $u_4=(-1)^3\cdot\frac{4}{2.4-1}=-\frac{4}{7}; u_5=(-1)^4\cdot\frac{5}{2.5-1}=\frac{5}{9}$.

b) $u_1=1; u_2=2-u_1=1;\quad u_3=3-u_2=2; u_4=4-u_3=2;\quad u_5=5-u_4=3$.

Câu 8: Xét tính tăng, giảm của mỗi dãy số sau:

a) $u_n=n^2+n+1$

b) $u_n=\frac{2n+5}{n+2}$

c) $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}$

Lời giải

a) Ta có $u_{n+1}-u_n=(n+1)^2+n+1+1-\left(n^2+n+1\right)=2n+3>0, \forall n\geq 1$, nên (u_n) là dãy số tăng.

b) Ta có

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{2(n+1)+5}{n+3}-\frac{2n+5}{n+2}=\frac{2n+7}{n+3}-\frac{2n+5}{n+2}\\&=\frac{(2n+7)(n+2)-(2n+5)(n+3)}{(n+2)(n+3)}=\frac{-1}{(n+2)(n+3)}<0,\forall\, \mathrm{n}\geq 1\end{aligned}$$

nên (u_n) là dãy số giảm.

c) Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}-\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}=\frac{(-1)^n}{(n+1)^2+1}+\frac{(-1)^n}{n^2+1}$

$$=(-1)^n\left(\frac{1}{(n+1)^2+1}+\frac{1}{n^2+1}\right)$$

Rõ ràng hiệu này dương hay âm phụ thuộc vào n, cụ thể là dương khi n chẵn và âm khi n lẻ. Do đó dãy số (u_n) không tăng cũng không giảm.

Câu 9: Xét tính bị chặn của các dãy số sau:

a) $u_n = \dfrac{n}{2n+1}$

b) $u_n = n^2 + n - 1$;

c) $u_n = -n^2 + 1$.

Lời giải

a) Ta có $u_n = \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{\frac{1}{2}(2n+1) - \frac{1}{2}}{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(2n+1)}$.

Suy ra $\dfrac{1}{3} \le u_n \le \dfrac{1}{2}$, với mọi $n \ge 1$.

Do đó (u_n) là dãy số bị chặn.

b) Ta có dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi 1 với mọi $n \ge 1$.

c) Ta có dãy số (u_n) bị chặn trên bởi 1 với mọi $n \ge 1$.

Câu 10: Để tính xấp xỉ giá trị $\sqrt{p}$, người ta có thể dùng dãy số cho bởi hệ thức truy hồi sau:

$$u_1 = k, u_n = \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{p}{u_{n-1}}\right), \forall n \ge 2,$$

ở đó k là một giá trị dự đoán ban đầu của $\sqrt{p}$.

Sử dụng hệ thức truy hồi này, hãy tính xấp xỉ các giá trị sau bằng cách tính u_5 và tính sai số tuyệt đối khi so với giá trị tính bằng máy tính cầm tay (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ năm).

a) $\sqrt{5}$ (lấy $k = 3$);

b) $\sqrt{8}$ (lấy $k = 3$).

Lời giải

a) Với $p = 5 \Rightarrow \sqrt{5} \approx 2{,}23607$. Nếu ta chọn $u_1 = 3$ thì ta có bảng giá trị sau:

$u_1 = 3 \quad u_2 = 2{,}3333 \quad u_3 = 2{,}2381 \quad u_4 = 2{,}2361 \quad u_5 = 2{,}2361.$

Sai số tuyệt đối khoảng $0{,}00003$.

b) Với $p = 8$ thì $\sqrt{8} \approx 2{,}82843$.

Nếu ta chọn $u_1 = 3$ thì ta có bảng giá trị sau

$u_1 = 3 \quad u_2 = 2{,}8333 \quad u_3 = 2{,}8284 \quad u_4 = 2{,}8284 \quad u_5 = 2{,}8284.$

Sai số tuyệt đối khoảng $0{,}00003$.

Câu 11: Cho dãy số (u_n) xác định bằng hệ thức truy hồi

$u_1=1, u_{n+1}=u_n+(n+1)$.

a) Mỗi số hạng của dãy số này gọi là một số tam giác. Viết bảy số tam giác đầu.

b) Biết rằng $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. Hãy chứng tỏ công thức của số hạng tổng quát là $u_{n+1}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

c) Chứng minh rằng $u_{n+1}+u_n=(n+1)^2$, tức là tổng của hai số tam giác liên tiếp là một số chính phương.

Lời giải

a) Bảy số tam giác đầu là

$u_1=1 \quad u_2=3 \quad u_3=6 \quad u_4=10 \quad u_5=15 \quad u_6=21 \quad u_7=28.$

Ta nhận thấy $u_2=1+2, u_3=1+2+3, u_4=1+2+3+4, \ldots$

b) Ta có: $u_{n+1}=1+2+\ldots+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

c) Theo công thức ở câu b) ta có:

$u_{n+1}+u_n=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}+\dfrac{n(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)(n+2+n)}{2}=(n+1)^2.$

Vậy tổng của hai số tam giác liên tiếp là một số chính phương.

Câu 12: Chứng minh rằng:

a) Dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+1}$ bị chặn dưới;

b) Dãy số (u_n) với $u_n=-n^2-n$ bị chặn trên;

c) Dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n+1}{n+2}$ bị chặn.

Lời giải

a) Ta có: $\sqrt{n^2+1}\geq\sqrt{2}\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn dưới.

b) Ta có: $-n^2-n\leq-2\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn trên.

Câu 13: c) Ta có: $0<\dfrac{2n+1}{n+2}<2\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên dãy số (u_n) bị chặn.Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{n+1}{2n+1}$.

Số $\dfrac{8}{15}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy số?

Lời giải

$\dfrac{n+1}{2n+1}=\dfrac{8}{15}$, suy ra $15n+15=16n+8$, suy ra $n=7$. Vậy $\dfrac{8}{15}$ là số hạng thứ bảy của dãy số.

Câu 14: Dự đoán công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = -2 - \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

Lời giải

$u_1 = -2; u_2 = -\frac{3}{2}; u_3 = -\frac{4}{3}; u_4 = -\frac{5}{4}; \ldots$ Ta dự đoán được $u_n = -\frac{n+1}{n}$.

Câu 15: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases} (n \geq 1)$.

Tìm số hạng thứ năm của dãy số đó.

Lời giải

Ta có: $u_2 = u_1 + 1 = 5; u_3 = u_2 + 2 = 7; u_4 = u_3 + 3 = 10$.

Do đó, số hạng thứ năm của dãy số là $u_5 = u_4 + 4 = 14$.

Câu 16: Xét tính bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n = (-1)^n$.

Lời giải

Ta có $-1 \leq u_n \leq 1$, suy ra (u_n) là dãy bị chặn.

Câu 17: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau:

a) $u_n = \dfrac{2n-13}{3n-2}$

b) $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{n+1}$

c) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+n+n^2}}$

Lời giải

a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2n-11}{3n+1} - \dfrac{2n-13}{3n-2} = \dfrac{35}{(3n+1)(3n-2)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số tăng.

Mặt khác, ta có: $u_n = \dfrac{2}{3} - \dfrac{35}{3(3n-2)}$, suy ra $-11 \leq u_n < \dfrac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra (u_n) là dãy số bị chặn.

b) Ta có:

$$u_{n+1}-u_n = \frac{(n+1)^2+3(n+1)+1}{n+2}-\frac{n^2+3n+1}{n+1}=\frac{n^2+5n+5}{n+2}-\frac{n^2+3n+1}{n+1}$$
$$=\frac{\left(n^2+5n+5\right)(n+1)-\left(n^2+3n+1\right)(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{n^2+3n+3}{(n+1)(n+2)}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra $u_{n+1}>u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số tăng.

Mặt khác, ta có $u_n>\frac{n^2+2n+1}{n+1}=n+1\geq 2,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số bị chặn dưới.

c) Ta có $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}}=\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)+1}}=\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2+3n+3}}<1,\forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra $u_{n+1}<u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số giảm.

Mặt khác, ta có $0<u_n<\frac{1}{\sqrt{3}},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số bị chặn.

Câu 18: Xét tính tăng, giảm của các dãy số (u_n) cho bởi số hạng tổng quát u_n sau:

a) $u_n=n-\sqrt{n^2-1}$

b) $u_n=\frac{n+(-1)^n}{n^2}$

c) $u_n=\frac{3^n-1}{2^n}$.

Lời giải

a) Ta có: $u_{n+1}-u_n=(n+1)-\sqrt{(n+1)^2-1}-\left(n+\sqrt{n^2-1}\right)$

$=1-\sqrt{(n+1)^2-1}-\sqrt{n^2-1}<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ Suy ra (u_n) là dãy số giảm.

b) Ta có: $u_1=0;u_2=\frac{3}{4};u_3=\frac{2}{9}$, suy ra $\begin{cases}u_2>u_1\\u_3<u_2\end{cases}$.

Do đó, (u_n) là dãy số không tăng, không giảm.

c) Ta có $u_{n+1}-u_n=\frac{3^n+1}{2^{n+1}}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Do đó, (u_n) là dãy số tăng.

Câu 19: Xét tính tăng, giảm và bị chặn của dãy số (u_n) với $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.

Lời giải

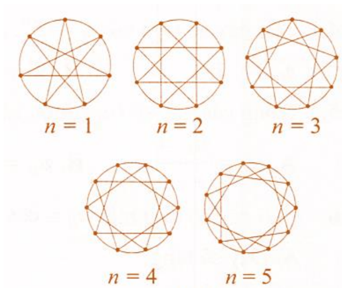
Ta có: $u_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}; u_{n+1}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}$.

Suy ra $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^2}>0, \forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra (u_n) là dãy số tăng.

Do $u_n<1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}=2-\frac{1}{n}$, suy ra $1<u_n<2, \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Suy ra (u_n) là dãy số bị chặn.

Câu 20: Với mỗi số nguyên dương n, lấy $n+6$ điểm cách đều nhau trên đường tròn. Nối mỗi điểm với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn đó để tạo thành các ngôi sao như Hình 1. Gọi u_n là số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao thì ta được dãy số (u_n).



Hình 1

Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n.

Lời giải

Ta thấy đường tròn được chia thành $n+6$ cung bằng nhau và mỗi cung có số đo bằng $\left(\frac{360}{n+6}\right)^\circ$.

Do mỗi điểm được nối với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn nên góc ở đỉnh của mỗi ngôi sao là góc nội tiếp chắn $n+6-2.3=n$ cung bằng nhau đó. Suy ra số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao là $u_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{360}{n+6}\cdot n=\frac{180n}{n+6}$.

Câu 21: Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

Lời giải

Giá trị của máy photocopy sau 1 năm sử dụng là

$T_1=50\cdot 75\%=37,5$ (triệu đồng).

Giá trị của máy photocopy sau 2 năm sử dụng là

$T_2=T_1\cdot 75\%=28,125$ (triệu đồng).

Giá trị của máy photocopy sau 3 năm sử dụng là

$T_3=T_2\cdot 75\%=21,0938$ (triệu đồng).

Giá trị của máy photocopy sau 4 năm sử dụng là

$T_4 = T_3 \cdot 75\% = 15{,}8203$ (triệu đồng).

Giá trị của máy photocopy sau 5 năm sử dụng là

$T_5 = T_4 \cdot 75\% = 11{,}8652$ (triệu đồng).

Chú ý. Tổng quát, giá trị của máy photocopy sau n năm sử dụng là

$T_n = T_1 \cdot (0{,}75)^{n-1}$ (triệu đồng).

Câu 22: Nếu tỉ lệ lạm phát là $3{,}5\%$ mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức

$A_n = 2{,}5 \cdot (1{,}035)^n$ (tỉ đồng)

Tìm giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa.

Lời giải

Giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm là

$A_5 = 2{,}5 \cdot (1{,}035)^5 = 2{,}9692$ (tỉ đồng).

Câu 23: Bác An gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 3 tháng, với lãi suất 3% một năm. Số tiền (triệu đồng) cả vốn lẫn lãi mà bác An nhận được sau n quý (mỗi quý là 3 tháng) sẽ là

$$A_n = 200\left(1+\frac{0{,}03}{4}\right)^n, n = 0,1,2,\ldots$$

a) Viết ba số hạng đầu của dãy số.

b) Tìm số tiền bác An nhận được sau 2 năm.

Lời giải

a) Ba số hạng đầu của dãy số là $A_1 = 201{,}5; A_2 = 203{,}0113; A_3 = 204{,}5338$.

b) Chú ý rằng 2 năm bằng 8 quý, tức là $n = 8$. Do đó, sau 2 năm số tiền bác An nhận được là $A_8 = 212{,}3198$ triệu đồng.

Câu 24: Vi khuẩn E.Coli sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn E.Coli phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E.Coli trong cơ thể? Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn E.Coli duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E.Coli trong cơ thể?

Lời giải

Giả sử ban đầu có 1 vi khuẩn E.Coli.

Sau 20 phút lần một, số vi khuẩn là $1 \cdot 2 = 2$.

Sau 20 phút lần hai, số vi khuẩn là $2\cdot 2=2^2$.

Sau 20 phút lần ba, số vi khuẩn là $2^2\cdot 2=2^3$.

Sau 20 phút lần bốn, số vi khuẩn là $2^3\cdot 2=2^4$.

Tương tự như vậy sau 12 giờ (bằng $3\cdot 12$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$2^{3\cdot 12}=2^{36}\approx 6,87\cdot 10^{10}(con)$.

Sau 48 giờ (bằng $3\cdot 48=144$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$2^{144}\approx 2,23\cdot 10^{43}(con)$.

Câu 25: Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1,0\times 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0\times 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.

a) Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.

b) Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

Lời giải

a) Gọi $u_0=1,0\cdot 10^9$ là số vi khuẩn tại thời điểm ban đầu và u_n là số vi khuẩn trước lần dùng thuốc thứ n.

Do mỗi liều thuốc được sử dụng sau bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0\cdot 10^8$ vi khuẩn và giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25% nên ta có

$u_{n+1}=\left(u_n-4,0\cdot 10^8\right)+25\%.u_n=1,25u_n-4,0\cdot 10^8.$

b) Ta tính u_5 như sau:

$u_1=1,0\cdot 10^9;$

$u_2=1,25u_1-4,0\cdot 10^8=8,5\cdot 10^8$

$u_3=1,25u_2-4,0\cdot 10^8=6,625\cdot 10^8;$

$u_4=1,25u_3-4,0\cdot 10^8=4,28125\cdot 10^8;$

$u_5=1,25u_4-4,0\cdot 10^8=1,3515625\cdot 10^8.$

Vậy số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm là 135156250 con.