

MỤC LỤC

▶ BÀI 3. CẤP SỐ NHÂN	2
A. Tóm tắt kiến thức	2
B. Phân dạng toán cơ bản.....	2
♦ Dạng 1: Góc lượng giác	2
♦ Dạng 2: Giá trị lượng giác của góc lượng giác.....	3
♦ Dạng 3: Áp dụng tính chất của giá trị lượng giác.....	4
♦ Dạng 4: Ứng dụng	5
C. Dạng toán rèn luyện.....	7
♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	7
♦ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai	15
♦ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	22

A. Tóm tắt kiến thức

1. Cấp số nhân

- ✓ Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn) mà trong đó, kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số q không đổi, nghĩa là:

$$u_{n+1} = u_n \cdot q \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$
- ✓ Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.

2. Số hạng tổng quát

Định lí 1

- ✓ Nếu một cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 2$

3. Tổng n số hạng đầu của một cấp số nhân

Định lí 2

- ✓ Giả sử (u_n) là một cấp số nhân có công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, khi đó

$$S_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

✓ **Chú ý:** Khi $q = 1$ thì $S_n = n \cdot u_1$..

B. Phân dạng toán cơ bản

♦ Dạng 1: Chứng minh một dãy số là một cấp số nhân

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Chứng minh mỗi dãy số (u_n) với số hạng tổng quát như sau là cấp số nhân. Chỉ ra số hạng đầu u_1 và công bội q :

a) $u_n = \frac{-3}{4} \cdot 2^n$

b) $u_n = (-0,75)^n$.

Lời giải

a) Ta có: $u_1 = \frac{-3}{4} \cdot 2^1 = \frac{-3}{2}; u_n = \frac{-3}{4} \cdot 2^n = \frac{-3}{4} \cdot 2^{n-1} \cdot 2 = u_{n-1} \cdot 2$ với mọi $n \geq 2$. Vậy dãy số (u_n) đã cho là một cấp số nhân có $u_1 = \frac{-3}{2}$ và công bội $q = 2$.

b) Nhận thấy $u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_1 = (-0,75)^1 = -0,75$; $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{(-0,75)^n}{(-0,75)^{n-1}} = -0,75$ với mọi $n \geq 2$.

Vậy dãy số (u_n) đã cho là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = -0,75$ và công bội $q = -0,75$.

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 5$ và công bội $q = -2$. Tìm số hạng thứ sáu.

Lời giải

Ta có: $u_6 = u_1 \cdot q^5 = 5 \cdot (-2)^5 = -160$.

Câu 3: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 2$ và $u_2 = 10$. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

Lời giải

Áp dụng công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân, ta có: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$, suy ra $u_2 = u_1 \cdot q$, suy ra $10 = 2q$, suy ra $q = 5$.

Câu 4: Chứng tỏ rằng dãy số sau là cấp số nhân: $u_n = 3 \cdot 4^n$.

Tìm số hạng đầu và công bội của nó.

Lời giải

Với mọi $n \geq 2$, ta có $\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{3 \cdot 4^n}{3 \cdot 4^{n-1}} = 4$, tức là $u_n = 4u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$.

Vậy (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 12$, công bội $q = 4$.

• Dạng ②: Xác định số hạng và công bội của cấp số nhân

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 5: Cho cấp số nhân (u_n) với số hạng đầu $u_1 = -5$, công bội $q = 2$.

a) Tìm u_9 .

b) Số -320 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân trên?

c) Số 160 có phải là một số hạng của cấp số nhân trên không?

Lời giải

a) Ta có: $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = (-5) \cdot 2^{n-1}$. Do đó, $u_9 = -5 \cdot 2^8 = -1280$.

b) Ta có: $(-5) \cdot 2^{n-1} = -320 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 64 = 2^6 \Leftrightarrow n = 7$. Vậy số -320 là số hạng thứ 7 của (u_n) .

c) Do $u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = (-5) \cdot 2^{n-1} < 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên số 160 không là số hạng nào của (u_n) .

Câu 6: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 3, u_3 = \frac{27}{4}$. Tìm công bội q của (u_n) , biết $q > 0$.

Lời giải

Do $u_3 = u_1 \cdot q^2$ nên ta có: $\frac{27}{4} = 3 \cdot q^2$ hay $q^2 = \frac{9}{4}$. Mà $q > 0$. Suy ra $q = \frac{3}{2}$.

Câu 7: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_3 = 16$ và $u_2 + u_4 = 40$. Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân đó, biết $q > 1$.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có:
$$\begin{cases} u_1 \cdot q^2 = 16 \\ u_1(q + q^3) = 40 \end{cases}$$
. Vì $u_1 \cdot q^2 \neq 0$ nên u_1 và q khác 0.

$$\text{Suy ra: } \frac{q^2}{q+q^3} = \frac{16}{40} \Leftrightarrow \frac{q^2}{q+q^3} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 2q^3 - 5q^2 + 2q = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = 0 \\ q = 2 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Mà $q > 1$ nên $q = 2$. Thay $q = 2$ vào phương trình $u_1 \cdot q^2 = 16$, ta được $u_1 = 4$.

Vậy (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 4$ và công bội $q = 2$.

Câu 8: Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) có $u_4 - u_2 = 54$ và $u_5 - u_3 = 108$.

Lời giải

Gọi số hạng đầu của cấp số nhân là u_1 và công bội là q .

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^3 - u_1 \cdot q = 54 \\ u_1 \cdot q^4 - u_1 \cdot q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q \cdot (q^2 - 1) = 54 \\ u_1 \cdot q^2 \cdot (q^2 - 1) = 108. \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{q} = \frac{54}{108} = \frac{1}{2}, \text{ suy ra } q = 2.$$

Với $q = 2$, ta có $8u_1 - 2u_1 = 54$, suy ra $6u_1 = 54$, suy ra $u_1 = 9$.

Câu 9: Tìm x để $x-1, x$ và $x+2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Lời giải

Do $x-1, x$ và $x+2$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân nên

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x+2}{x}$$

Do đó $x^2 = (x+2)(x-1)$, tức là $x = 2$.

Thử lại, ta có ba số tìm được là 1, 2, 4 thỏa mãn bài toán. Vậy $x = 2$.

♦ **Dạng ③: Tính tổng số hạng đầu của cấp số nhân**

☞ **Các ví dụ minh họa**

Câu 10: Cho một cấp số nhân (u_n) có các số hạng đều không âm và thỏa mãn $u_2 = 6$ và $u_4 = 24$. Tính tổng của 12 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

Lời giải

Gọi công bội của cấp số nhân là q .

Ta có $u_4 = u_2 \cdot q^2$ hay $24 = 6 \cdot q^2$, suy ra $q = -2$ hoặc $q = 2$. Do cấp số nhân có các số hạng không âm nên $q = 2$.

Khi đó, cấp số nhân (u_n) có $u_1 = \frac{u_2}{q} = \frac{6}{2} = 3$.

Ta có: $S_{12} = \frac{u_1(1-q^{12})}{1-q} = \frac{3(1-2^{12})}{1-2} = 12285$.

Câu 11: Tính tổng: $S = 10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^{20}$.

Lời giải

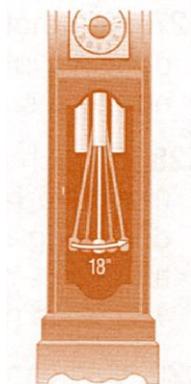
Nhận thấy S là tổng 20 số hạng đầu của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 10$ và công bội

$q = 10$. Vậy $S = \frac{10 \cdot (1-10^{20})}{1-10} = \frac{10^{21} - 10}{9}$.

♦ **Dạng 4: Ứng dụng**

☞ **Các ví dụ minh họa**

Câu 12: Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46cm (H. 2.1).



Hình 2.1

Sau mỗi lần đu liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là bao nhiêu?

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu?

(Kết quả tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

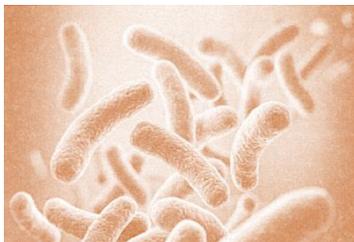
Gọi u_n là độ dài cung tròn ở lần thứ n khi con lắc dao động. Do lần một, quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46cm , sau mỗi lần dao động liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó nên dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 46$ và công bội $q = 0,98$.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 q^9 = 46 \cdot 0,98^9 \approx 38,35(\text{cm})$.

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là

$$S_{15} = u_1 \frac{1-q^{15}}{1-q} = 46 \cdot \frac{1-0,98^{15}}{1-0,98} \approx 601,29(cm).$$

Câu 13: Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong ống nghiệm, cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu ban đầu có 200 vi khuẩn, tính số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 2 giờ.



Lời giải

Ta có: 2 giờ = 120 phút = 6.20 phút. Do đó, sau 2 giờ vi khuẩn phân đôi 6 lần.

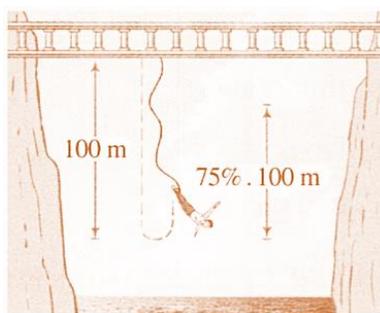
Gọi u_n là số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau lần phân đôi thứ $n-1$.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1 = 200$ và $q = 2$.

Ta có $u_7 = u_1 \cdot q^6 = 200 \cdot 2^6 = 12800$.

Vậy sau 2 giờ, trong ống nghiệm có 12800 vi khuẩn.

Câu 14: Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100m. Giả sử sau mỗi lần rơi xuống, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ cao bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3).



Hình 3

Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên, tính từ lúc bắt đầu nhảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi $u_1(m)$ là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ nhất, ta có: $u_1 = 100$; $v_1(m)$ là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ nhất, ta có: $v_1 = 100 \cdot 0,75 = 75$

$u_2(m)$ là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ hai, ta có: $u_2 = v_1 = 0,75u_1$;

$v_2(m)$ là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ hai, ta có: $v_2 = 0,75u_2 = 0,75v_1$.

Như vậy, ta có hai cấp số nhân đều có công bội 0,75 là: u_1, u_2, \dots, u_{10} và v_1, v_2, \dots, v_{10} với $u_1 = 100$ và $v_1 = 75$.

$$\text{Ta có: } u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 100 \cdot \left(\frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} \right); v_1 + v_2 + \dots + v_{10} = 75 \cdot \left(\frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} \right).$$

Vậy quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên (tính từ lúc bắt đầu nhảy) là:

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_{10}) + (v_1 + v_2 + \dots + v_{10}) = 175 \cdot \left(\frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} \right) \approx 661(m).$$

©. Dạng toán rèn luyện

♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số nhân?

- A. 128; -64; 32; -16; 8. B. $\sqrt{2}; 2; 2\sqrt{2}; 4; 8$. C. 5; 6; 7; 8; 9. D. 15; 5; 1; $\frac{1}{5}; \frac{1}{25}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 2: Trong các dãy số (u_n) với số hạng tổng quát sau, dãy số nào là cấp số nhân?

- A. $u_n = 5^n$. B. $u_n = 1 + 5n$. C. $u_n = 5^n + 1$. D. $u_n = 5 + n^2$.

Lời giải

Chọn A

Câu 3: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 2$ và công bội $q = -2$. Giá trị u_5 là:

- A. -32. B. -16. C. -6. D. 32.

Lời giải

Chọn D

Câu 4: Viết bốn số hạng xen giữa các số 1 và -243 để được một cấp số nhân có 6 số hạng. Bốn số hạng đó lần lượt là:

- A. -3; -9; -27; -81. B. 3; -9; 27; -81. C. 3; 9; 27; 81. D. -3; 9; -27; 81.

Lời giải

Chọn D

Câu 5: Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_2 \cdot u_6 = 64$. Giá trị của $u_3 \cdot u_5$ là

- A. -8. B. -64. C. 64. D. 8.

Lời giải

Chọn C

Câu 6: Cho (u_n) là cấp số nhân có $u_1 = \frac{1}{3}; u_8 = 729$. Tổng 8 số hạng đầu của cấp số nhân đó là:

- A. $\frac{1-3^8}{2}$. B. $\frac{3^8-1}{6}$. C. $\frac{3^8-1}{2}$. D. $\frac{1-3^8}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 7: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 1. Gọi C_2 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông C_1 ; C_3 là hình vuông có các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông C_2 ; ... Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta được dãy các hình vuông $C_1; C_2; C_3; \dots; C_n; \dots$. Diện tích của hình vuông C_{2023} là:

- A. $\frac{1}{2^{2022}}$. B. $\frac{1}{2^{2023}}$. C. $\frac{1}{2^{1011}}$. D. $\frac{1}{2^{1012}}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 8: Trong các dãy số sau, dãy số nào **không** phải là một cấp số nhân?

- A. 2; 4; 8; 16; ... B. 1; -1; 1; -1; ...
C. $1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \dots$ D. $a; a^3; a^5; a^7; \dots a \neq 0$.

Lời giải

Chọn C

Xét đáp án C: $1^2; 2^2; 3^2; 4^2; \dots \longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = 4 \neq \frac{9}{4} = \frac{u_3}{u_2}$

Các đáp án A, B, D đều là các cấp số nhân.

Nhận xét : Dãy u_n với $u_n \neq 0$ là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_n = a \cdot q^n$, tức là các số hạng của nó đều được biểu diễn dưới dạng lũy thừa của cùng một cơ số q (công bội), các số hạng liên tiếp (kể từ số hạng thứ hai) thì số mũ của chúng cách đều nhau. Ví dụ

2; 4; 8; 16; ... \longrightarrow là cấp số nhân và $u_n = 2^n$.

1; -1; 1; -1; ... \longrightarrow là cấp số nhân và $u_n = -1^n$.

$a; a^3; a^5; a^7; \dots a \neq 0 \longrightarrow$ là cấp số nhân và $u_n = a^{2n-1} = \frac{1}{a} \cdot a^{2n}$.

Câu 9: Dãy số nào sau đây không phải là cấp số nhân?

- A. 1; 2; 4; 8; ... B. $3; 3^2; 3^3; 3^4; \dots$ C. $4; 2; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \dots$ D. $\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi^2}; \frac{1}{\pi^4}; \frac{1}{\pi^6}; \dots$

Lời giải

Chọn D

Các đáp án A, B, C đều là các cấp số nhân công bội lần lượt là $2; 3; \frac{1}{2}$.

Xét đáp án D: $\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi^2}; \frac{1}{\pi^4}; \frac{1}{\pi^6}; \dots \longrightarrow \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{\pi} \neq \frac{1}{\pi^2} = \frac{u_3}{u_2}$

Câu 10: Dãy số 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... là một cấp số nhân với

- A. Công bội là 3 và số hạng đầu tiên là 1.
- B. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 1.
- C. Công bội là 4 và số hạng đầu tiên là 2.
- D. Công bội là 2 và số hạng đầu tiên là 2.

Lời giải

Chọn B

Cấp số nhân: 1; 2; 4; 8; 16; 32; ... $\longrightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ q = \frac{u_2}{u_1} = 2 \end{cases}$

Câu 11: Cho cấp số nhân u_n với $u_1 = -2$ và $q = -5$. Viết bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân.

- A. -2; 10; 50; -250.
- B. -2; 10; -50; 250.
- C. -2; -10; -50; -250.
- D. -2; 10; 50; 250.

Lời giải.

Chọn B

$\begin{cases} u_1 = -2 \\ q = -5 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} u_1 = -2 \\ u_2 = u_1 q = 10 \\ u_3 = u_2 q = -50 \\ u_4 = u_3 q = 250 \end{cases}$

Câu 12: Một cấp số nhân có hai số hạng liên tiếp là 16 và 36. Số hạng tiếp theo là:

- A. 720.
- B. 81.
- C. 64.
- D. 56.

Lời giải

Chọn B

Ta có cấp số nhân u_n có:

$\begin{cases} u_k = 16 \\ u_{k+1} = 36 \end{cases} \Rightarrow q = \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{9}{4} \longrightarrow u_{k+2} = u_{k+1} q = 81$

Câu 13: Trong các dãy số sau đây dãy số nào là cấp số nhân?

- A. Dãy số -2, 2, -2, 2, ..., -2, 2, -2, 2, ...
- B. Dãy số (u_n) , xác định bởi công thức $u_n = 3^n + 1$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

C. Dãy số (u_n) , xác định bởi hệ: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 2 \quad (n \in \mathbb{N}^* : n \geq 2) \end{cases}$

- D. Dãy số các số tự nhiên 1, 2, 3, ...

Lời giải

Chọn A

Dãy số -2, 2, -2, 2, ..., -2, 2, -2, 2, ... là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = -2$, công bội $q = -1$.

Dãy số (u_n) xác định bởi công thức $u_n = 3^n + 1$ có $u_1 = 3^1 + 1 = 4$, $u_2 = 3^2 + 1 = 10$, $u_3 = 3^3 + 1 = 28$. Nhận xét: $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$ nên (u_n) không là cấp số nhân.

Dãy số (u_n) , xác định bởi hệ: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + 2 \quad (n \in \mathbb{N}^* : n \geq 2) \end{cases}$ có $u_1 = 1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 5$. Nhận

xét: $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$ nên (u_n) không là cấp số nhân.

Dãy số các số tự nhiên $1, 2, 3, \dots$ có $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$. Nhận xét: $\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1}$ nên không là cấp số nhân.

Câu 14: Cho (u_n) là cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu và công bội lần lượt là u_1 và q . Công thức nào sau đây dùng để tính tổng S của cấp số nhân trên?

A. $S = \frac{1-q}{u_1}$. **B.** $S = \frac{u_1}{1-q}$. **C.** $S = \frac{q-1}{u_1}$. **D.** $S = \frac{u_1}{1-q}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 15: Cho dãy số u_n có số hạng tổng quát là $u_n = 3 \cdot 2^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chọn kết luận đúng:

A. Dãy số là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 12$.

B. Dãy số là cấp số cộng có công sai $d = 2$.

C. Dãy số là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 6$.

D. Dãy số là cấp số nhân có công bội $q = 3$.

Lời giải

Chọn A

Dãy số u_n có số hạng tổng quát là $u_n = 3 \cdot 2^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} = 3 \cdot 2^{n+2}$.

Xét thương $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \cdot 2^{n+2}}{3 \cdot 2^{n+1}} = 2 = \text{const}$ với $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên dãy số u_n là một cấp số nhân có công bội $q = 2$ và có số hạng đầu là $u_1 = 3 \cdot 2^{1+1} = 12$.

Câu 16: Trong các dãy số sau, dãy số nào là một cấp số nhân?

A. $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

B. $2, 4, 6, 8, 16, 32, \dots$

C. $-2, -3, -4, -5, -6, -7, \dots$

D. $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$

Lời giải

Chọn D

Nhận thấy $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_3}{u_2}$ nên các dãy số ở đáp án **A, B** và **C** không phải là cấp số nhân.

Riêng đối với dãy $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ ở đáp án **D** thỏa mãn: $u_{n+1} = 2u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy dãy số $1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$ là cấp số nhân với $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$.

Câu 17: Trong các dãy số sau, đây số nào là cấp số nhân?

A. $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$. **B.** $u_n = \frac{1}{3^n} - 1$. **C.** $u_n = n + \frac{1}{3}$. **D.** $u_n = n^2 + \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Dãy số $u_n = \frac{1}{3^{n-2}}$ là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 3$, công bội $q = \frac{1}{3}$.

Câu 18: Cho cấp số nhân (U_n) có $U_1 = \frac{1}{2}$, $U_2 = 16$. Khi đó công bội q là

A. 64. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 32.

Lời giải

Chọn D Cấp số nhân (U_n) có công bội là $q = \frac{u_2}{u_1} = \frac{16}{\frac{1}{2}} = 32$.

Câu 19: Ba số $-\sqrt{3}$; x ; $-3\sqrt{3}$ theo thứ tự là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân. Tìm công bội q của cấp số nhân đó.

A. $q = \pm 3$. **B.** $q = -\sqrt{3}$. **C.** $q = 3$. **D.** $q = \pm\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D Do $-\sqrt{3}; x; -3\sqrt{3}$ là một cấp số nhân $\Rightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Vậy công bội của cấp số nhân là $q = \frac{x}{-\sqrt{3}} = \pm\sqrt{3}$.

Câu 20: Cho cấp số nhân (u_n) có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$ và công bội $q = 3$. Tìm u_5

A. $\frac{81}{2}$. **B.** $\frac{163}{2}$. **C.** $\frac{27}{2}$. **D.** $\frac{55}{2}$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng công thức số hạng tổng quát $u_n = u_1 q^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$)

$$\Rightarrow u_5 = u_1 q^4 \Rightarrow u_5 = \frac{1}{2} \cdot 3^4 = \frac{81}{2}.$$

Câu 21: Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $u_1 = 3$, $u_5 = 48$. Công bội của cấp số nhân bằng

A. 16.. **B.** -2.. **C.** 2.. **D.** ± 2 .

Lời giải

Chọn D

Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n) .

$$\text{Với } u_1 = 3, u_5 = 48 \text{ suy ra } \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_1 \cdot q^4 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q^4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3 \\ q = \pm 2 \end{cases}.$$

Vậy công bội của cấp số nhân (u_n) là $q = \pm 2$.

Câu 22: Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = -4$ và công bội $q = 5$. Tính u_4 .

- A. $u_4 = 600$. B. $u_4 = -500$.
C. $u_4 = 200$. D. $u_4 = 800$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức tính số hạng tổng quát của cấp số nhân ta có:

$$u_4 = u_1 \cdot q^3 = (-4) \cdot 5^3 = -500.$$

Vậy $u_4 = -500$.

Câu 23: Cho dãy số $\frac{-1}{\sqrt{2}}; \sqrt{b}; \sqrt{2}$. Chọn b để dãy số đã cho lập thành cấp số nhân?

- A. $b = -1$. B. $b = 1$.
C. $b = 2$. D. Không có giá trị nào của b.

Lời giải

Chọn D

Dãy số đã cho lập thành cấp số nhân khi $\begin{cases} b \geq 0 \\ b = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = -1 \end{cases}$. Vậy không có giá trị nào của b.

Câu 24: Giả sử $\frac{\sin \alpha}{6}, \cos \alpha, \tan \alpha$ theo thứ tự đó là một cấp số nhân. Tính $\cos 2\alpha$.

- A. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\cos \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Theo tính chất của cấp số nhân, ta có: $\cos^2 \alpha = \frac{\sin \alpha}{6} \cdot \tan \alpha \Leftrightarrow 6 \cos^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}$.

$$\Leftrightarrow 6 \cos^3 \alpha - \sin^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow 6 \cos^3 \alpha + \cos^2 \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Câu 25: Cho năm số a, b, c, d, e tạo thành một cấp số nhân theo thứ tự đó và các số đều khác 0, biết $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} = 10$ và tổng của chúng bằng 40. Tính giá trị $|S|$ với $S = abcde$.

- A. $|S| = 52$. B. $|S| = 42$. C. $|S| = 62$. D. $|S| = 32$.

Lời giải

Chọn D

Gọi q ($q \neq 0$) là công bội của cấp số nhân a, b, c, d, e . Khi đó $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ là cấp số nhân có công bội $\frac{1}{q}$.

Theo đề Câu ta có

$$\begin{cases} a+b+c+d+e=40 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 40 \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{q}\right)^5}{1-\frac{1}{q}} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 40 \\ \frac{1}{a} \cdot \frac{q^5-1}{q^4(q-1)} = 10 \end{cases} \Leftrightarrow a^2 q^4 = 4.$$

Ta có $S = abcde = a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \cdot aq^4 = a^5 q^{10}$.

Nên $S^2 = (a^5 q^{10})^2 = (a^2 q^4)^5 = 4^5$.

Suy ra $|S| = \sqrt{4^5} = 32$.

Câu 26: Xác định x dương để $2x-3; x; 2x+3$ lập thành cấp số nhân.

- A.** $x = \sqrt{3}$. **B.** $x = \pm\sqrt{3}$ **C.** không có giá trị nào của x . **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn A

$2x-3; x; 2x+3$ lập thành cấp số nhân $\Leftrightarrow x^2 = (2x-3)(2x+3) \Leftrightarrow x^2 = 4x^2 - 9$
 $\Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$.

Vì x dương nên $x = \sqrt{3}$.

Câu 27: Tổng vô hạn $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ bằng

- A.** 4. **B.** $2^n - 1$. **C.** 1. **D.** 2

Lời giải.

Chọn D

Đây là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn, với $u_1 = 1; q = \frac{1}{2}$.

Khi đó: $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Câu 28: Xác định x để bộ ba số $2x-1, x, 2x+1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

- A.** $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $x = \pm\sqrt{3}$.
C. Không có giá trị nào của x . **D.** $x = \pm\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Bộ ba số $2x-1$, x , $2x+1$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên ta có

$$(2x-1)(2x+1) = x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 1 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 29: Cho cấp số nhân u_n có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = 5^n - 1$. Tìm số hạng thứ 4 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_4 = 100$.

B. $u_4 = 124$.

C. $u_4 = 500$.

D. $u_4 = 624$.

Lời giải**Chọn C**

Ta có $5^{n-1} - 1 = S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{u_1}{q-1} q^n - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = q-1 \\ q = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 4 \\ q = 5 \end{cases}$. Khi đó

$$u_4 = u_1 q^3 = 4 \cdot 5^3 = 500$$

Câu 30: Cho cấp số nhân u_n có tổng n số hạng đầu tiên là $S_n = \frac{3^n - 1}{3^{n-1}}$. Tìm số hạng thứ 5 của cấp số nhân đã cho.

A. $u_5 = \frac{2}{3^4}$.

B. $u_5 = \frac{1}{3^5}$.

C. $u_5 = 3^5$.

D. $u_5 = \frac{5}{3^5}$.

Lời giải**Chọn A**

Ta có $\frac{3^n - 1}{3^{n-1}} = 3 \left(1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right) = S_n = \frac{u_1}{1-q} (1 - q^n) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 3(1-q) \\ q = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \\ q = \frac{1}{3} \end{cases}$. Khi đó

$$u_5 = u_1 q^4 = \frac{2}{3^4}$$

Câu 31: Một cấp số nhân có số hạng thứ bảy bằng $\frac{1}{2}$, công bội bằng $\frac{1}{4}$. Hỏi số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng bao nhiêu?

A. 4096.

B. 2048.

C. 1024.

D. $\frac{1}{512}$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có $\begin{cases} q = \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} = u_7 = u_1 q^6 = \frac{u_1}{4^6} \end{cases} \Rightarrow u_1 = \frac{4^6}{2} = 2048$

Câu 32: Cho cấp số nhân u_n có $u_2 = -6$ và $u_6 = -486$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho, biết rằng $u_3 > 0$.

A. $q = -3$.

B. $q = -\frac{1}{3}$.

C. $q = \frac{1}{3}$.

D. $q = 3$.

Lời giải**Chọn D**

$$\begin{cases} -6 = u_2 = u_1 q \\ -486 = u_6 = u_1 q^5 = u_1 q \cdot q^4 = -6 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 81 = 3^4 \Rightarrow q = 3. \end{cases}$$

♦ **Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai**

Câu 1. Cho các dãy số sau đây: $u_n = (\sqrt{5})^{2n-3}$; $v_n = \frac{2}{n}$; $w_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$ và dãy số hữu hạn gồm các số hạng: $16; 4; 1; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}; \frac{1}{64}$. Khi đó:

- a) (u_n) là một cấp số nhân công bội $q = 5$.
- b) (v_n) không phải là một cấp số nhân
- c) (w_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $w = \frac{9}{2}$
- d) Dãy số hữu hạn đã cho theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{8}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) Ta có: $u_{n+1} = (\sqrt{5})^{2(n+1)-3} = (\sqrt{5})^{2n-1} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\sqrt{5})^{2n-1}}{(\sqrt{5})^{2n-3}} = (\sqrt{5})^2 = 5, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó (u_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ với công bội $q = 5$.

b) Ta có: $v_{n+1} = \frac{2}{n+1} \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n}{n+1}$ (tỉ số này còn phụ thuộc vào n).

Do đó (v_n) không phải là một cấp số nhân.

c) Ta có: $w_{n+1} = \frac{3^{n+2}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n} \Rightarrow \frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \frac{3^{n+1}}{2^n}}{\frac{3^{n+1}}{2^n}} = \frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Do đó (w_n) là một cấp số nhân có số hạng đầu $w_1 = \frac{3^2}{2^1} = \frac{9}{2}$ với công bội $q = \frac{3}{2}$

d) Đặt $u_1 = 16; u_2 = 4; u_3 = 1; u_4 = \frac{1}{4}; u_5 = \frac{1}{16}; u_6 = \frac{1}{64}$.

Ta có: $u_2 = u_1 \cdot \frac{1}{4}; u_3 = u_2 \cdot \frac{1}{4}; u_4 = u_3 \cdot \frac{1}{4}; u_5 = u_4 \cdot \frac{1}{4}; u_6 = u_5 \cdot \frac{1}{4}$.

Vì vậy dãy số hữu hạn đã cho theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{4}$.

Câu 2. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q < 0$ và $u_2 = 4, u_4 = 9$. Khi đó:

- a) Số hạng đầu $u_1 = -\frac{8}{3}$
 b) Số hạng $u_5 = \frac{27}{2}$
 c) $-\frac{2187}{32}$ là số hạng thứ 8
 d) Cấp số nhân có công bội $q = -\frac{3}{2}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
----------------	---------------	---------------	---------------

Ta có: $u_2 = u_1q = 4, u_4 = u_1q^3 = 9 \Rightarrow \frac{u_4}{u_2} = \frac{u_1q^3}{u_1q} \Rightarrow \frac{9}{4} = q^2 \Rightarrow q = -\frac{3}{2} (q < 0)$.

Thay $q = -\frac{3}{2}$ vào u_2 , ta được: $u_1 \left(-\frac{3}{2}\right) = 4 \Rightarrow u_1 = -\frac{8}{3}$.

Vậy cấp số nhân đã cho có số hạng đầu $u_1 = -\frac{8}{3}$ và công bội $q = -\frac{3}{2}$.

Khi đó $u_n = -\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

Vậy $u_5 = -\frac{27}{2}$

$-\frac{2187}{32} \neq -\frac{8}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^7$ nên không phải là số hạng thứ 8

Câu 3. Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 + u_5 = 51; u_2 + u_6 = 102$. Khi đó:

- a) Số hạng $u_1 = 3$
 b) Số hạng $u_4 = 48$
 c) Số 12288 là số hạng thứ 12 của cấp số nhân (u_n)
 d) Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là: 765.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Gọi q là công bội của cấp số nhân đã cho.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1q^4 = 51 \\ u_1q + u_1q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q^4) = 51 & (1) \\ u_1q(1+q^4) = 102 & (2) \end{cases}$$

Nhận xét: Nếu $u_1 = 0$ hay $q = 0$ thì (1) và (2) đều không thỏa mãn, vì vậy ta có $u_1q \neq 0$. Chia theo vế (2) cho (1), ta được: $q = 2$.

Thay $q = 2$ vào (1) suy ra $u_1 = \frac{51}{1+2^4} = 3$.

Công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.

b) $u_4 = 3 \cdot 2^3 = 24$

c) Xét $u_n = 12288 \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{n-1} = 12288 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 2^{12} \Leftrightarrow n = 13$.

Vậy 12288 là số hạng thứ 13 của cấp số nhân đã cho.

d) Tổng tám số hạng đầu của cấp số nhân là: $S_8 = \frac{u_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{3 \cdot (1-2^8)}{1-2} = 765$.

Câu 4. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn: $\begin{cases} u_4 = \frac{2}{27} \\ u_3 = 243u_8 \end{cases}$. Khi đó:

a) Số hạng $u_1 = 2; u_2 = \frac{2}{3}$

b) $u_5 - u_3 = -\frac{16}{81}$

c) Số $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 8 của cấp số nhân

d) Tổng chín số hạng đầu của cấp số nhân là số lớn hơn 3.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Gọi q là công bội của cấp số nhân (u_n) .

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} u_1q^3 = \frac{2}{27} \\ u_1q^2 = 243 \cdot u_1q^7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1q^3 = \frac{2}{27} \\ q^5 = \frac{1}{243} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{3} \\ u_1 = 2 \end{cases}$

Năm số hạng đầu của (u_n) là: $u_1 = 2; u_2 = \frac{2}{3}; u_3 = \frac{2}{9}; u_4 = \frac{2}{27}; u_5 = \frac{2}{81}$.

c) Số hạng tổng quát của cấp số nhân: $u_n = u_1 q^{n-1} = \frac{2}{3^{n-1}}$.

$$\text{Xét } u_n = \frac{2}{6561} \Rightarrow \frac{2}{3^{n-1}} = \frac{2}{6561}$$

$$\Rightarrow 3^{n-1} = 6561 = 3^8 \Rightarrow n = 9.$$

Vậy $\frac{2}{6561}$ là số hạng thứ 9 của cấp số nhân (u_n) .

$$\text{d) Tổng chín số hạng đầu của cấp số nhân là: } S_9 = \frac{u_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^9\right)}{1 - \frac{1}{3}} \approx 2,99985 < 3.$$

Câu 5. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$. Khi đó:

a) Số hạng $u_1 = 2$

b) Gọi q là công bội của cấp số nhân, thì ba số $q; 1; 3$ tạo thành một cấp số cộng

c) Số -486 là số hạng thứ 5 của cấp số nhân

d) Tổng của 21 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng 5230176602

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

Gọi q là công bội và S_{21} là tổng của 21 số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_4 + u_6 = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u_3 + u_5)q = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 180q = -540 \\ u_3 + u_5 = 180 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1(-3)^2 + u_1(-3)^4 = 180 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1(9 + 81) = 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = -3 \\ u_1 = 2 \end{cases}$$

Số $-486 = 2 \cdot (-3)^5$ nên số -486 là số hạng thứ 6

$$\text{Suy ra } S_{21} = \frac{u_1(1-q^{21})}{1-q} = \frac{2[1-(-3)^{21}]}{1-(-3)} = \frac{1+3^{21}}{2}.$$

Câu 6. Cho tứ giác $ABCD$ có bốn góc tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Khi đó:

a) Số đo góc nhỏ nhất bằng 24°

b) Số đo góc lớn nhất bằng 196°

c) Tổng số đo góc lớn nhất với góc nhỏ nhất bằng 220°

d) Số đo góc lớn nhất trừ cho số đo góc nhỏ nhất bằng 168°

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Đặt $u_1; u_2; u_3; u_4$ theo thứ tự là số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$, gọi q là công bội của cấp số nhân $u_1; u_2; u_3; u_4 \Rightarrow q = 2$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 360^\circ \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = 360^\circ \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot \frac{1-2^4}{1-2} = 360^\circ \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 24^\circ \\ q = 2 \end{cases}.$$

Vậy số đo bốn góc của tứ giác $ABCD$ là: $24^\circ; 48^\circ; 96^\circ; 192^\circ$.

Câu 7. Cho các dãy số $a_n = n^2 + n + 1; b_n = (n+2) \cdot 3^n; \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_{n+1} = \frac{6}{c_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}; d_n = (-4)^{2n+1}$. Khi đó

- a) (a_n) không phải là cấp số nhân
- b) (b_n) không phải là cấp số nhân
- c) (c_n) là một cấp số nhân
- d) (d_n) là một cấp số nhân

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, không phải là hằng số. Vậy (a_n) không phải là cấp số nhân.

b) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+3) \cdot 3^{n+1}}{(n+2) \cdot 3^n} = \frac{3(n+3)}{n+2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, không phải là hằng số. Vậy (b_n) không phải là cấp số nhân.

c) Từ công thức truy hồi của dãy số, suy ra $c_1 = 2; c_2 = 3; c_3 = 2; c_4 = 3; \dots$

Vì $\frac{c_3}{c_2} \neq \frac{c_2}{c_1}$ nên (c_n) không phải là cấp số nhân.

d) $\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(-4)^{2(n+1)+1}}{(-4)^{2n+1}} = 16, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy (d_n) là một cấp số nhân công bội $q = 16$.

Câu 8. Cho cấp số nhân (u_n) biết rằng $u_1 + u_2 + u_3 = 168$ và $u_4 + u_5 + u_6 = 21$. Khi đó:

- a) Số hạng $u_1 = 90$
 b) Công bội của cấp số nhân bằng 2
 c) Số 24 là số hạng thứ 3 của cấp số nhân
 d) Tổng của 10 số hạng đầu cấp số nhân đã cho bằng $\frac{3069}{16}$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------------	---------------	----------------	----------------

$$\text{Ta có: } \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 168 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 + u_1 \cdot q + u_1 \cdot q^2 = 168 \\ u_1 \cdot q^3 + u_1 \cdot q^4 + u_1 \cdot q^5 = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1+q+q^2) = 168 \\ u_1 q^3(1+q+q^2) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{168}{1+q+q^2} \\ q^3 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 96 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Ta có } 24 = 96 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-1}$$

$$\text{Ta có } S_{10} = \frac{u_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{96 \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{3069}{16}$$

Câu 9. Xác định tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) Dãy số (u_n) với $u_n = (-7)^n \cdot 5^{3n-1}$ là cấp số nhân với công bội $q = -875$.

b) Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$ là cấp số nhân với công bội $q = -4$.

c) Dãy số (u_n) với $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ không là cấp số nhân.

d) Dãy số (u_n) với $-\frac{1}{8}; -\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 1$ không là cấp số nhân.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

$$\text{a) Ta có: } \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(-7)^{n+1} \cdot 5^{3(n+1)-1}}{(-7)^n \cdot 5^{3n-1}} = \frac{(-7) \cdot 5^2}{5^{-1}} = -7 \cdot 5^3 = -875 \text{ không đổi.}$$

Vậy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -875$.

b) Ta có: $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = -5u_n \end{cases}$. Khi đó $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{-5u_n}{u_n} = -5$

Vậy (u_n) là cấp số nhân với công bội $q = -5$.

c) Ta có: $u_2 = u_1^2 = 2^2 = 4; u_3 = u_2^2 = 4^2 = 16; u_4 = u_3^2 = 16^2 = 256$

Khi đó: $\frac{u_2}{u_1} = \frac{4}{2} = 2; \frac{u_4}{u_3} = \frac{256}{16} = 16$

Nhận thấy: $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3} (2 \neq 16)$

Vậy (u_n) không là cấp số nhân.

d) Ta có: $\frac{u_2}{u_1} = \left(-\frac{1}{4}\right); \left(-\frac{1}{8}\right) = 2; \frac{u_4}{u_3} = 1; \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

Nhận thấy: $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_4}{u_3} (2 \neq -2)$

Vậy (u_n) không là cấp số nhân.

Câu 10. Aladin nhặt được cây đèn thần, chàng miết tay vào cây đèn và gọi Thần đèn ra. Thần đèn cho chàng 3 điều ước. Aladin ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là: "Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được cây đèn và Thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước ngày hôm nay". Thần đèn chấp thuận và mỗi ngày Aladin đều thực hiện theo quy tắc như trên: ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều ước cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với thần đèn cho ngày hôm sau. Khi đó:

a) Ngày thứ hai Aladin ước 6 điều.

b) Ngày thứ ba Aladin ước 12 điều.

c) Ngày thứ tư Aladin ước 48 điều.

d) Sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả 3269 điều ước

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

Ngày thứ nhất Aladin ước 3 điều.

Ngày thứ hai Aladin ước $2 \cdot 3$ điều.

Ngày thứ ba Aladin ước $2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$ điều.

Ngày thứ tư Aladin ước $2 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$ điều. ...

Ngày thứ 10 Aladin ước $2^9 \cdot 3$ điều.

Vậy sau 10 ngày Aladin đã ước: $3(1+2+2^2+2^3+\dots+2^9) = 3\left(\frac{1-2^{10}}{1-2}\right) = 3069$ điều.

Câu 11. Cho cấp số nhân (u_n) có công bội nguyên và các số hạng thoả mãn $\begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases}$

- a) Số hạng đầu của cấp số nhân bằng 9
 b) Công bội của cấp số nhân $q = 3$
 c) Tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599
 d) Số 576 là số hạng thứ 6 của cấp số nhân

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

$$\text{a) b) Ta có: } \begin{cases} u_4 - u_2 = 54 \\ u_5 - u_3 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 - u_1 q = 54 \\ u_1 q^4 - u_1 q^2 = 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q (q^2 - 1) = 54 \\ u_1 q^2 (q^2 - 1) = 108 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{54}{q(q^2 - 1)} \\ \frac{1}{q} = \frac{54}{108} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{54}{2(2^2 - 1)} \\ q = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = 9 \\ q = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) Ta có: } S_n = 4599 \Leftrightarrow \frac{u_1 \cdot (1 - q^n)}{1 - q} = 4599 \Leftrightarrow \frac{9 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} = 4599$$

$$\Leftrightarrow -9 \cdot (1 - 2^n) = 4599 \Leftrightarrow 1 - 2^n = -511 \Leftrightarrow 2^n = 512 \Leftrightarrow n = 9$$

Vậy tổng của 9 số hạng đầu tiên bằng 4599.

$$\text{d) Ta có: } u_k = 576 \Leftrightarrow u_1 \cdot q^{k-1} = 576 \Leftrightarrow 9 \cdot 2^{k-1} = 576 \Leftrightarrow 2^{k-1} = 64 \Leftrightarrow k - 1 = 6 \Leftrightarrow k = 7$$

Vậy số 576 là số hạng thứ 7 của cấp số nhân.

♦ Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$ và $q = \frac{2}{3}$. Tìm công thức số hạng tổng quát của cấp số nhân đó.

Lời giải

$$u_n = u_1 \cdot q^{n-1} = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{3^{n-2}}$$

Câu 2: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = -3$ và $q = \frac{2}{3}$. Tìm u_5 .

Lời giải

$$u_5 = u_1 \cdot q^4 = -3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = -\frac{16}{27}.$$

Câu 3: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_2 = \frac{1}{4}$ và $u_5 = 16$. Tìm công bội q và số hạng đầu u_1 .

Lời giải

$$u_5 = u_1 \cdot q^4 = u_2 \cdot q^3, \text{ suy ra } q^3 = \frac{u_5}{u_2} = \frac{16}{\frac{1}{4}} = 64, \text{ suy ra } q = 4, u_1 = \frac{1}{16}.$$

Câu 4: Cho cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 1, q = 2$. Số 1024 là số hạng thứ bao nhiêu của cấp số nhân đó?

Lời giải

Số 1024 là số hạng thứ 11.

Câu 5: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết $\begin{cases} u_5 - u_2 = 78 \\ u_6 - u_3 = 234. \end{cases}$

Lời giải

Gọi số hạng đầu của cấp số nhân là u_1 và công bội là q .

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} u_5 - u_2 = 78 \\ u_6 - u_3 = 234 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q^4 - u_1 \cdot q = 78 \\ u_1 \cdot q^5 - u_1 \cdot q^2 = 234 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 \cdot q \cdot (q^3 - 1) = 78 \\ u_1 \cdot q^2 \cdot (q^3 - 1) = 234. \end{cases}$$

Suy ra $q = 3, u_1 = 1$.

Câu 6: Cho cấp số nhân (u_n) , biết $u_1 = 2, u_3 = 18$.

a) Tìm công bội.

b) Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó.

Lời giải

a) Ta có $u_3 = u_1 \cdot q^2 = 2 \cdot q^2 = 18$, suy ra $q = 3$ hoặc $q = -3$.

b) Nếu $q = 3$ thì $S_{10} = \frac{2(1-3^{10})}{1-3} = 59048$.

Nếu $q = -3$ thì $S_{10} = \frac{2[1-(-3)^{10}]}{1-(-3)} = -29524$.

Câu 7: Cho ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số a, b, c theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Do ba số $\frac{2}{b-a}, \frac{1}{b}, \frac{2}{b-c}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng nên

$$\frac{1}{b} - \frac{2}{b-a} = \frac{2}{b-c} - \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{-b-a}{b-a} = \frac{b+c}{b-c} \Rightarrow b^2 = ac \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b}.$$

Suy ra ba số a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Câu 8: Tìm x để ba số $2x-3; x; 2x+3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Lời giải

Ba số $2x-3, x, 2x+3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân khi $\frac{x}{2x-3} = \frac{2x+3}{x} \Rightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Câu 9: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân (u_n) , biết:

a)
$$\begin{cases} u_3 = 16 \\ u_2 + u_4 = 40 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u_1 + u_6 = 244 \\ u_2 \cdot u_5 = 243 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351 \end{cases}$$

Lời giải

a) Ta có: $u_2 + u_4 = \frac{u_3}{q} + u_3 q = \frac{16}{q} + 16q.$

Suy ra $\frac{16}{q} + 16q = 40 \Rightarrow 16q^2 - 40q + 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{1}{2} \\ q = 2 \end{cases}$

Lại có $u_3 = u_1 q^2 = 16 \Rightarrow u_1 = \frac{16}{q^2}.$

Với $q = \frac{1}{2}$ thì $u_1 = 64$; Với $q = 2$ thì $u_1 = 4.$

b) $u_1 = 1, q = 3$ hoặc $u_1 = 243, q = 1.$

c) $u_1 = 1, q = 3.$

Câu 10: Tìm số hạng thứ 10 của cấp số nhân $64, -32, 16, -8, \dots$

Lời giải

Do cấp số nhân có $u_1 = 64$ và công bội $q = \frac{-32}{64} = -\frac{1}{2}$ nên số hạng thứ 10 của cấp số nhân là $u_{10} = u_1 q^9 = -\frac{1}{8}$.

Câu 11: Cho một cấp số nhân với tất cả các số hạng đều dương. Số hạng thứ 4 của cấp số nhân là 125 và số hạng thứ 10 là $\frac{125}{64}$. Tìm số hạng thứ 14 của cấp số nhân này.

Lời giải

Giả sử rằng các số hạng của cấp số nhân đều là số dương.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} u_4 = 125 \\ u_{10} = \frac{125}{64} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 q^3 = 125 \\ u_1 q^9 = \frac{125}{64} \end{cases}.$$

Chia vế theo vế của hai phương trình ta có $q^6 = \frac{1}{64} \Leftrightarrow q = \pm \frac{1}{2}$.

$$\text{Với } q = \frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = 1000 \Rightarrow u_{14} = u_1 q^{13} = \frac{125}{1024}.$$

$$\text{Với } q = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_1 = -1000 \text{ (loại)}.$$

$$\text{Vậy } u_{14} = \frac{125}{1024}.$$

Câu 12: Tìm x sao cho $x, x+2, x+3$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân.

Lời giải

Từ $x, x+2$ và $x+3$ là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân ta suy ra

$$x(x+3) = (x+2)^2 \Leftrightarrow x = -4$$

Thử lại, ta có ba số là $-4; -2; -1$ thỏa mãn bài toán. Vậy $x = -4$.

Câu 13: Tính các tổng sau:

a) $1+4+16+64+\dots+4^9$;

b) $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3} + \dots + \frac{2^{12}}{3}$.

Lời giải

a) Ta nhận thấy các số hạng của tổng là cấp số nhân có $u_1 = 1$, công bội $q = 4$ và có 10 số hạng.

$$\text{Vậy } 1+4+16+\dots+4^9 = 1 \cdot \frac{1-4^{10}}{1-4} = 349525.$$

b) Ta nhận thấy các số hạng của tổng là cấp số nhân có $u_1 = \frac{1}{3}$, công bội $q = 2$ và có 13 số hạng.

Vậy $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3} + \dots + \frac{2^{12}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-2^{13}}{1-2} = \frac{8191}{3}$.

Câu 14: Cho (u_n) là cấp số nhân có $u_1 + u_5 = 51$ và $u_2 + u_6 = 102$.

- Tính u_{10} .
- Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân trên?
- Số 9216 có là số hạng nào của cấp số nhân trên không?

Lời giải

a) Xét số hạng đầu u_1 và công bội q . Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} u_1 + u_1 q^4 = 51 \\ u_1 q + u_1 q^5 = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1(1 + q^4) = 51 \\ u_1 q(1 + q^4) = 102 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2 \\ u_1 = 3. \end{cases}$$

Suy ra $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 3 \cdot 2^9 = 1536$.

- Số 192 là số hạng thứ 7.
- Giả sử 9216 là số hạng thứ n của cấp số nhân (u_n) .

Ta có $3 \cdot 2^{n-1} = 9216 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 3072$. Do 3072 chia hết cho 3 mà với n là số nguyên dương thì 2^{n-1} không chia hết cho 3 nên không tồn tại n thoả mãn. Vậy số 9216 không là số hạng nào của (u_n) .

Câu 15: Một cấp số nhân có 7 số hạng, số hạng thứ tư bằng 2, số hạng thứ bảy gấp 32 lần số hạng thứ hai. Tìm các số hạng của cấp số nhân đó.

Lời giải

Cấp số nhân đó là: $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; 1; 2; 4; 8; 16$.

Câu 16: Ba số phân biệt tạo thành một cấp số nhân có tổng bằng 78; đồng thời chúng là số hạng thứ nhất, thứ ba và thứ chín của một cấp số cộng. Tìm ba số đó.

Lời giải

Ba số cần tìm là: 6; 18; 54.

Câu 17: Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = -1, q = 3$.

- Tính tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân đó.
- Giả sử tổng m số hạng đầu của (u_n) bằng -364. Tìm m .

c) Tính tổng $S = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5}$.

Lời giải

- $S_{10} = -29524$.
- $m = 6$.

c) Dãy $\frac{1}{u_1}; \frac{1}{u_2}; \dots; \frac{1}{u_5}$ là cấp số nhân với số hạng đầu là $u'_1 = \frac{1}{u_1} = -1$, công bội

$$\text{là } q' = \frac{1}{q} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Suy ra } S = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} + \frac{1}{u_5} = \frac{(-1) \left[1 - \left(\frac{1}{3} \right)^5 \right]}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{-121}{81}.$$

Câu 18: Cho dãy số (u_n) biết $u_1 = 1, u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + 1$ với $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Đặt $v_n = u_n - \frac{3}{2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh rằng dãy số (v_n) là cấp số nhân. Tìm số hạng đầu, công bội của cấp số nhân đó.

b) Tìm công thức số hạng tổng quát của $(v_n), (u_n)$.

c) Tính tổng $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{10}$.

Lời giải

a) Ta có: $v_n = u_n - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}u_{n-1} + 1 - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}u_{n-1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \left(u_{n-1} - \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{3}v_{n-1}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$.

Vậy (v_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $v_1 = -\frac{1}{2}$, công bội $q = \frac{1}{3}$.

$$\text{b) } v_n = \frac{-1}{2 \cdot 3^{n-1}}, u_n = v_n + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} = \frac{3^n - 1}{2 \cdot 3^{n-1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{c) } S &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{10} = \left(v_1 + \frac{3}{2} \right) + \left(v_2 + \frac{3}{2} \right) + \left(v_3 + \frac{3}{2} \right) + \dots + \left(v_{10} + \frac{3}{2} \right) \\ &= v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{10} + 10 \cdot \frac{3}{2} = \frac{280483}{19683}. \end{aligned}$$

Câu 19: Anh Dũng kí hợp đồng lao động trong 10 năm với phương án trả lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Dũng là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Dũng được tăng lên 10%. Tính tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị triệu đồng).

Lời giải

1912 triệu đồng.

Câu 20: Bác Năm gửi tiết kiệm vào ngân hàng 100 triệu đồng với hình thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 8% / năm. Tính số tiền cả gốc và lãi bác Năm nhận được sau 10 năm. (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền.)

Lời giải

Khoảng 215892500 đồng.

Câu 21: Một người chơi nhảy bungee trên một cây cầu với một sợi dây dài $100m$. Sau mỗi lần rơi xuống, người chơi được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 80% so với lần rơi trước và lại rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường đi lên của người đó sau 10 lần được kéo lên.

Lời giải

$$S_{10} = \frac{80(1-0,8^{10})}{1-0,8} \approx 357,05(m).$$

Câu 22: Các bệnh truyền nhiễm có thể lây lan rất nhanh. Giả sử có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo. Tính đến hết tuần thứ 10 của đợt dịch, có bao nhiêu người đã bị lây bởi căn bệnh này?

Lời giải

Gọi u_n là số người bị bệnh ở cuối tuần thứ n . Vì có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 5$ và công bội $q = 4$. Suy ra số người bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh ở cuối tuần 10 là $u_{10} = u_1 q^9 = 5 \cdot 4^9 = 1310720$ (người).

Câu 23: Nếu một kĩ sư được một công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5% , thì mức lương của người kĩ sư đó là bao nhiêu khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty?

Lời giải

Gọi u_n là số triệu đồng mà người kĩ sư đó nhận được ở năm thứ n . Vì người kĩ sư được công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5% nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 180$ và công bội $q = 1 + 5\% = 1,05$. Khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty thì mức lương năm của người kĩ sư đó là

$$u_6 = u_1 q^5 = 229,73 \text{ (triệu đồng)}$$

Câu 24: Để tích lũy tiền cho việc học đại học của con gái, cô Hoa quyết định hằng tháng bỏ ra 500 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi $0,5\%$ cộng dồn hằng tháng. Cô bắt đầu chương trình tích lũy này khi con gái cô tròn 3 tuổi. Cô ấy sẽ tích lũy được bao nhiêu tiền vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180? Lúc này con gái cô Hoa bao nhiêu tuổi?

Lời giải

Gọi u_n là số triệu đồng mà cô Hoa có trong chương trình tích lũy ở lần gửi thứ n (vào đầu tháng thứ n). Kí hiệu $a = 0,5$ triệu đồng, $r = 0,5\%$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 1 là $u_1 = a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 2 là $u_2 = u_1(1+r) + a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 3 là

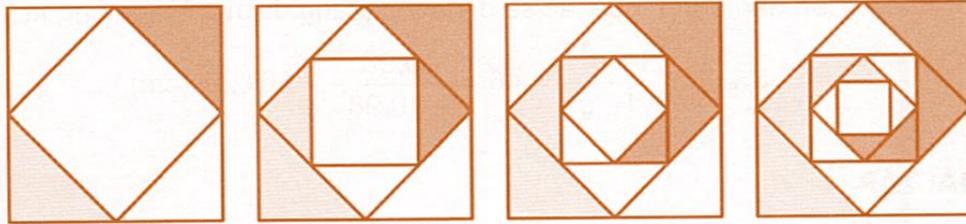
$$u_3 = u_2(1+r) + a = a(1+r)^2 + a(1+r) + a.$$

Tương tự cho các tháng tiếp theo, suy ra số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng n là

$$u_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) + a = a \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180, cô ấy sẽ tích lũy được $u_{180} = a \frac{(1+r)^{180} - 1}{r} = 145,41$ (triệu đồng). Khi đó, tuổi của con gái cô Hoa là $3 + 180 : 12 = 18$ tuổi.

Câu 25: Các cạnh của hình vuông ban đầu có chiều dài 16cm . Một hình vuông mới được hình thành bằng cách nối các điểm giữa của các cạnh của hình vuông ban đầu và hai trong số các hình tam giác kết quả được tô màu (hình vẽ dưới).



Nếu quá trình này được lặp lại năm lần nữa, hãy xác định tổng diện tích của vùng được tô màu.

Lời giải

Gọi u_n là diện tích hai tam giác được tô màu ở lần thực hiện thứ n . Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông ban đầu.

Ở lần 1 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2}$ nên $u_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{a}{2} \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2^2}$ và độ dài cạnh hình vuông sau đó là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ở lần 2 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_2 = \frac{a^2}{2^3}$.

Ở lần 3 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_3 = \frac{a^2}{2^4}$.

Như vậy, dãy số (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = \frac{a^2}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy tổng diện tích sau năm lần thực hiện là $S_5 = u_1 \frac{1-q^5}{1-q} = 124 (\text{cm}^2)$.

Chú ý. Diện tích cần tính bằng diện tích hình vuông ngoài cùng trừ đi diện tích hình vuông trong cùng rồi chia 2.

Câu 26: Nếu p, m và q lập thành một cấp số nhân thì dễ thấy $m^2 = p \cdot q$. Số m được gọi là trung bình nhân của p và q . Cho hai số p và q , nếu ta tìm được k số khác m_1, m_2, \dots, m_k

sao cho $p, m_1, m_2, \dots, m_k, q$ lập thành một cấp số nhân, thì chúng ta nói rằng đã "chèn k trung bình nhân vào giữa p và q ". Hãy:

- a) Chèn hai trung bình nhân vào giữa 3 và 24 ;
- b) Chèn ba trung bình nhân vào giữa 2,25 và 576 .

Lời giải

a) Theo định nghĩa, chèn hai trung bình nhân vào giữa 3 và 24 ta được cấp số nhân có $u_1 = 3, u_{2+2} = u_4 = 24$.

Do tính chất của cấp số nhân nên $u_4 = u_1 q^3 \Rightarrow q = 2$.

Vậy chèn hai trung bình nhân vào giữa 3 và 24 ta được cấp số nhân là: 3, 6, 12, 24.

b) Theo định nghĩa, chèn ba trung bình nhân vào giữa 2,25 và 576 ta được cấp số nhân có $u_1 = 2,25, u_{2+3} = u_5 = 576$.

Do tính chất của cấp số nhân nên $u_5 = u_1 q^4 \Rightarrow q = \pm 4$.

Với $q = 4$, chèn ba trung bình nhân vào giữa 2,25 và 576 ta được cấp số nhân:

2,25; 9; 36; 144; 576.

Với $q = -4$, chèn ba trung bình nhân vào giữa 2,25 và 576 ta được cấp số nhân: 2, 25; -9; 36; -144; 576.