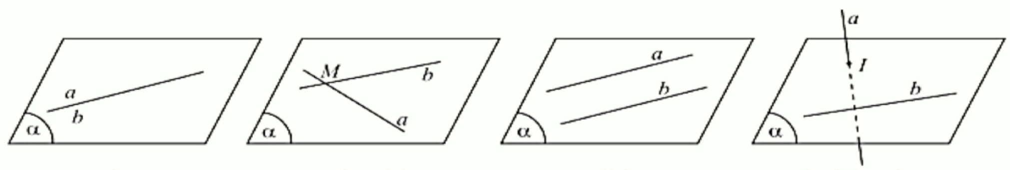
MỤC LỤC

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

❶. *Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian*

- *TH1: a và b đồng phẳng*
- *a cắt b* $\Leftrightarrow$ $a \cap b = M$.
- $a \,//\, b \Leftrightarrow a \cap b = \varnothing$.
- $a \equiv b \Leftrightarrow a \cap b = a$.
- *TH2: không có mp nào chứa a và b, ta nói* ***a và b chéo nhau****.*



$a \equiv b$ a) $\quad a \cap b = M$ b) $\quad a \,//\, b$ c) $\quad a, b$ chéo nhau d)

- Hai đường thẳng được gọi là song song nếu chúng cùng nằm trên một mặt phẳng và không có điểm chung

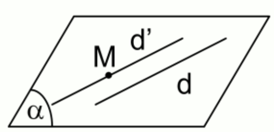
Chú ý:

Hai đường thẳng gọi là *chéo nhau* nếu chúng không đồng phẳng.

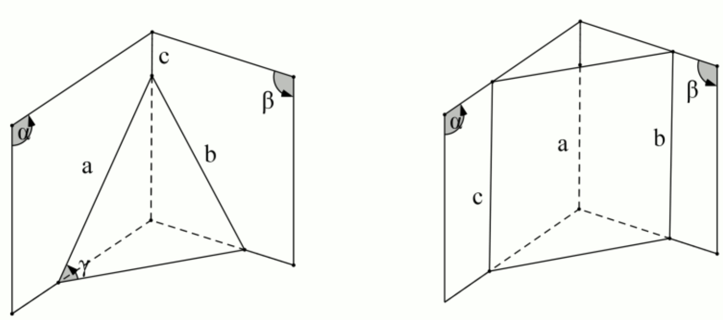
Cho hai đường thẳng song song *a* và *b*. Có duy nhất một mặt phẳng chứa hai đường thẳng đó, kí hiệu mp(*a, b*).

❷. *Các tính chất cơ bản về hai đường thẳng song song.*

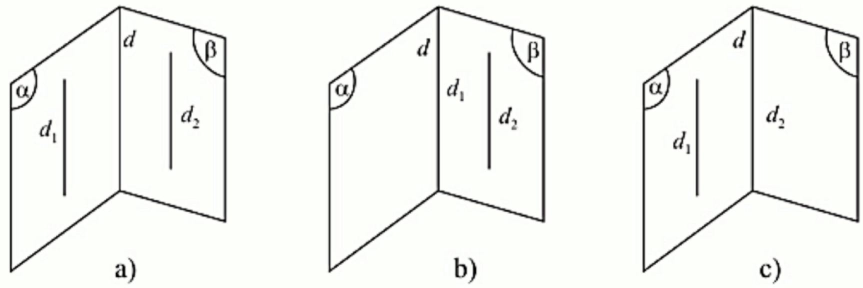
- ***Định lí 1:*** Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.
- **Ký hiệu:** $M \notin d \Rightarrow \exists\,!\, d' : M \in d', d' \,//\, d$
- ***Nhận xét:*** *Hai đt song song a và b xác định một mp, <u>kh</u> (a,b)*



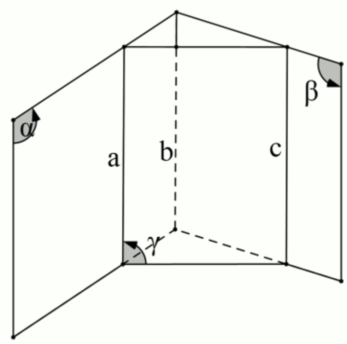
- ***Định lí 2:*** *Nếu ba mp phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng qui hoặc đôi một song song với nhau.*



Hệ quả: *Nếu hai mp phân biệt lần lượt chứa hai đt song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đt đó hoặc trùng với một trong hai đt đó.*



Định lí 3: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau. $\begin{cases} a \neq b \\ a // c \Rightarrow a // b \\ b // c \end{cases}$

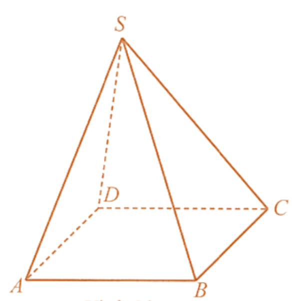


Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

◆Dạng ❶: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng trong không gian

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành (Hình 10). Hãy xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau: AD và $BC; SB$ và CD.



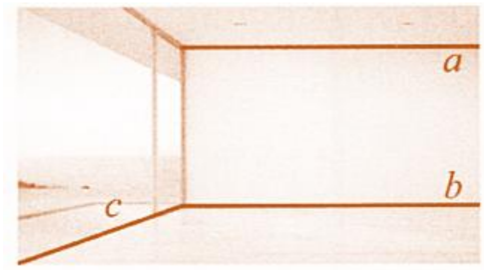
Hình 10

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên AD và BC song song với nhau.

Vì bốn điểm S,A,B,C không cùng nằm trên một mặt phẳng nên hai đường thẳng SB và CD chéo nhau..

Câu 2: Quan sát hình căn phòng (Hình 16), hãy cho biết vị trí tương đối của các cặp đường thẳng a và b;a và c;b và c.



Hình 16

Lời giải

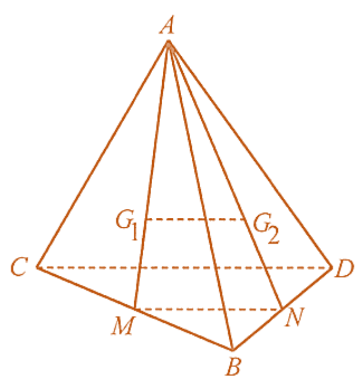
a và b song song; a và c chéo nhau; b và c cắt nhau.

⬩Dạng ❷: Chứng minh hai đường thẳng song song

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1,G_2 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng hai đường thẳng G_1G_2 và CD song song với nhau.

Lời giải



Hình 11

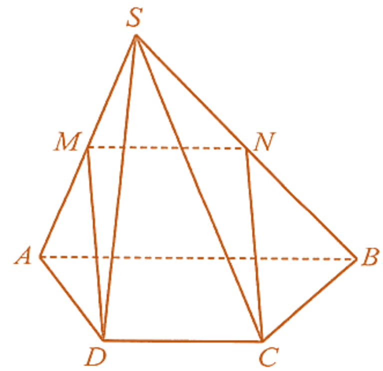
Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BC và BD. Ta có:

$M \in AG_1$ và $\frac{AG_1}{AM}=\frac{2}{3}$; $N \in AG_2$ và $\frac{AG_2}{AN}=\frac{2}{3}$.

Do đó $\frac{AG_1}{AM}=\frac{AG_2}{AN}$, suy ra $G_1G_2\,//\,MN$. Mặt khác, MN là đường trung bình của tam giác BCD nên $MN\,//\,CD$. Vậy $G_1G_2\,//\,CD$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn và $AB = 2CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB. Chứng minh rằng đường thẳng NC song song với đường thẳng MD.

Lời giải



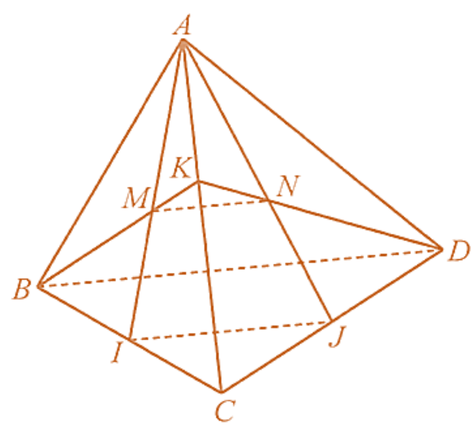
Hình 12

Do MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN // AB$ và $MN = \frac{1}{2}AB$.

Theo giả thiết, ta có $CD // AB$ và $CD = \frac{1}{2}AB$. Từ đó suy ra $MN // CD$ và $MN = CD$, hay tứ giác $MNCD$ là hình bình hành. Vậy $NC // MD$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD. Trên cạnh AC lấy điểm K. Gọi M là giao điểm của BK và AI, N là giao điểm của DK và AJ. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng BD.

Lời giải



Hình 13

Ba mặt phẳng $(AIJ), (BCD), (BKD)$ phân biệt đôi một cắt nhau theo các giao tuyến IJ, BD, MN.

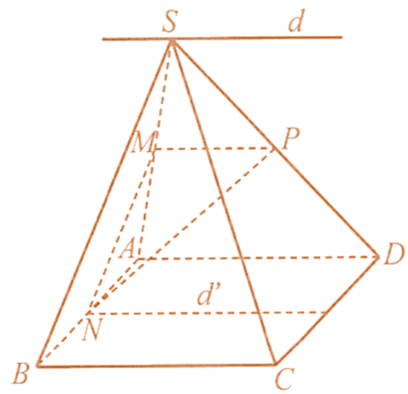
Trong tam giác BCD ta có IJ là đường trung bình nên $IJ // BD$. Theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng, ta có ba đường thẳng IJ, BD, MN đôi một song song. Vậy đường thẳng MN song song với đường thẳng BD.

◆Dạng ❸: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, AB, SD. Xác định giao tuyến của mỗi cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC); (MNP) và $(ABCD)$.

Lời giải



Hình 14

a) Hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có điểm chung S và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là AD, BC nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d đi qua S và song song với AD, BC.

b) Do MP là đường trung bình của tam giác SAD nên $MP // AD$. Hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ có điểm chung N và lần lượt chứa hai đường thẳng song song là MP, AD nên giao tuyến của chúng là đường thẳng d' đi qua N và song song với AD, MP.

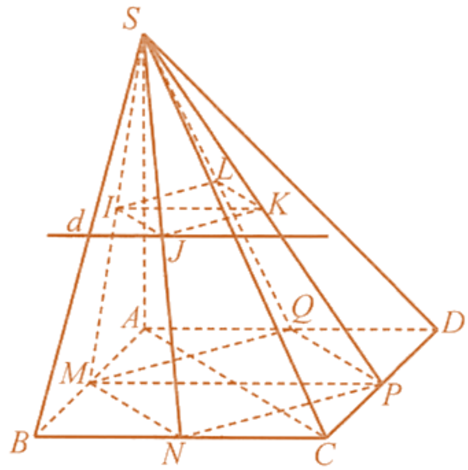
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA; I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM, SN, SP, SQ.

a) Chứng minh rằng bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $IK // BC$.

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC).

Lời giải



Hình 15

a) Vì MN, QP lần lượt là đường trung bình của các tam giác BAC, DAC nên $MN // AC$ và $MN = \frac{1}{2}AC, QP // AC$ và $QP = \frac{1}{2}AC$. Do đó, $MN // QP$ và $MN = QP$.

Vì IJ, LK lần lượt là đường trung bình của các tam giác SMN, SQP nên $IJ // MN$ và $IJ = \frac{1}{2}MN, LK // QP$ và $LK = \frac{1}{2}QP$.

Do đó, $IJ // LK$ và $IJ = LK$.

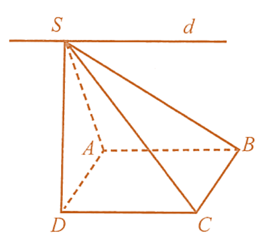
Vậy bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Vì IK là đường trung bình của tam giác SMP nên $IK // MP$. Mà $MP // BC$ nên $IK // BC$.

c) Hai mặt phẳng (IJKL) và (SBC) có điểm chung J và lần lượt chứa hai đường thẳng IK, BC song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC) là đường thẳng d đi qua J và song song với IK, BC.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Lời giải



Hình 7

Ta có $AB \subset (SAB); CD \subset (SCD); AB // CD$; $S \in (SAB) \cap (SCD)$.

Vậy d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) với $d // AB // CD, S \in d$.

©. Dạng toán rèn luyện

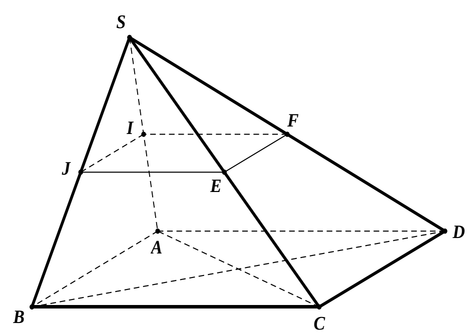
◆Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào **không** song song với IJ?

A. AD. **B.** DC. **C.** EF. **D.** AB.

Lời giải

Chọn A



Vì $AD // IF$ nên AD không song song với IJ.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh SA và SC. Khi đó MN song song với đường thẳng

A. AC. **B.** BC. **C.** CD. **D.** AD.

Lời giải

Chọn A

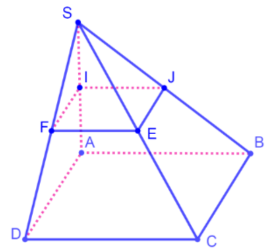
Do MN là đường trung bình của tam giác SAC nên $MN // AC$..

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ ?

A. EF. **B.** DC. **C.** AD. **D.** AB.

Lời giải

Chọn C



Xét ΔSAB, IJ là đường trung bình $\Rightarrow IJ//AB$ mà $AB//CD$ $\Rightarrow IJ//CD$.

Xét ΔSCD, EF là đường trung bình $\Rightarrow EF//CD$ $\Rightarrow IJ//EF$.

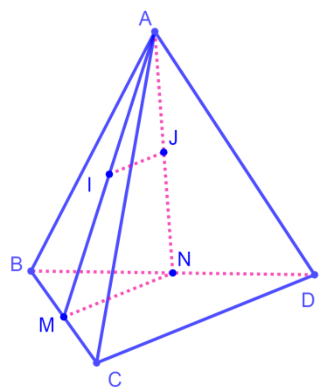
Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. IJ song song với CD. **B.** IJ song song với AB.

C. IJ chéo CD. **D.** IJ cắt AB.

Lời giải

Chọn A



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD, ta có $MN//CD$ (1)

Xét ΔAMN có $\frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ//MN$ (2)

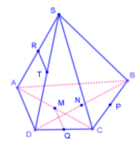
Từ (1) và (2) suy ra $IJ//CD$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD. Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

A. MP và RT. **B.** MQ và RT. **C.** MN và RT. **D.** PQ và RT.

Lời giải

Chọn B



Xét ΔSAD có RT là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow RT//AD$ (1)

Xét ΔACD có MQ là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow MQ//AD$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MQ//RT$.

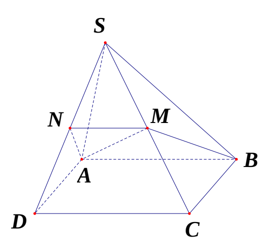
Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M là trung điểm cạnh SC. Khi đó thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MAB) là

A. một tam giác. **B.** một hình thang.

C. một hình bình hành. **D.** một hình ngũ giác.

Lời giải

Chọn B



Ta có $(ABCD)\cap(SCD)=CD$; $(ABCD)\cap(MAB)=AB$; $(MAB)\cap(SCD)=d$ và $AB//CD$ nên AB ; CD ; d đôi một song song (1).

Mặt khác M là điểm chung của (MAB); (SCD) (2).

Từ (1) và (2) suy ra d đi qua M và song song với CD, cắt SD tại N.

Khi đó thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (MAB) là một hình thang.

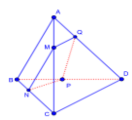
Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. M là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn AC (khác A, C). Mặt phẳng (P) qua M và song song với các đường thẳng AB, CD. Thiết diện của (P) với tứ diện đã cho là hình gì?

A. Hình chữ nhật. **B.** Hình thang.

C. Hình vuông. **D.** Hình bình hành.

Lời giải

Chọn D



Trong mp (ABC), qua M kẻ đường thẳng song song với AB, cắt BC tại N

Trong mp (ACD), qua M kẻ đường thẳng song song với CD, cắt AD tại Q

Trong mp (BCD), qua M kẻ đường thẳng song song với CD, cắt BD tại P

$\Rightarrow$ Thiết diện của (P) với tứ diện là tứ giác $MNPQ$.

Mặt khác $\begin{cases} MQ // NP \ (// CD) \\ MN // PQ \ (// AB) \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AC. E là điểm trên cạnh CD và $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là

A. Tam giác MNE.

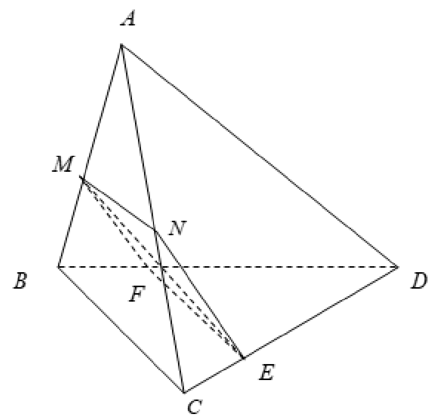
B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

Lời giải

Chọn D



Xét hai mặt phẳng (MNE) và (BCD), có;

$E \in (MNE) \cap (BCD)$

Và $MN \,//\, BC$ (MN là đường trung bình của ΔABC), $MN \subset (MNE), BC \subset (BCD)$

Nên $(MNE) \cap (BCD) = EF$ $(EF \,//\, MN \,//\, BC, F = BD \cap EF)$.

Do đó thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là hình thang $MNEF$ ($MN \,//\, EF$).

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC, ABD. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây.

A. Hai đường thẳng IJ và CD cắt nhau.

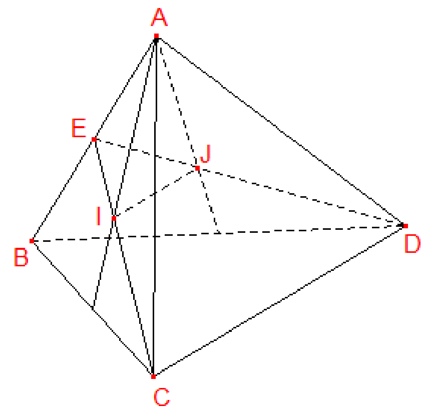
B. Hai đường thẳng IJ và CD chéo nhau.

C. Hai đường thẳng IJ và CD song song nhau và $IJ = \frac{1}{3}CD$.

D. Hai đường thẳng IJ và CD song song nhau và $IJ = \frac{2}{3}CD$.

Lời giải

Chọn C



Gọi E là trung điểm của AB.

Vì I, J là trọng tâm của tam giác ABC, ABD nên $\frac{EI}{EC}=\frac{EJ}{ED}=\frac{1}{3}\Rightarrow IJ\,//\,CD$ và $IJ=\frac{1}{3}CD$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$, gọi các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, AC và BD. Khi đó mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. MN, PQ, BC đôi một song song.

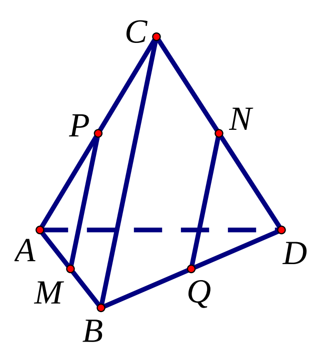
B. $MP\,//\,BD$.

C. $MN\,//\,PQ$.

D. $MP\,//\,NQ$.

Lời giải

Chọn D



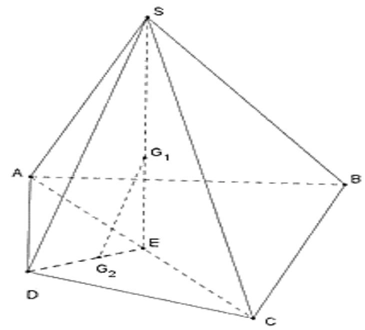
Ta có: MP, NQ lần lượt là đường trung bình của các tam giác ABC và BCD nên $MP\,//\,BC$ và $MQ\,//\,BC\Rightarrow MP\,//\,NQ$.

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAC và ACD. Khi đó G_1G_2 song song với đường thẳng

A. AC.. **B.** AD.. **C.** SD.. **D.** BC.

Lời giải

Chọn C



Gọi E làtrungđiểmcủa AC .Trong $mp(SED)$,tacó: $\frac{EG_1}{ES}=\frac{EG_2}{ED}=\frac{1}{3}$,suyra $G_1G_2\,//\,SD$.

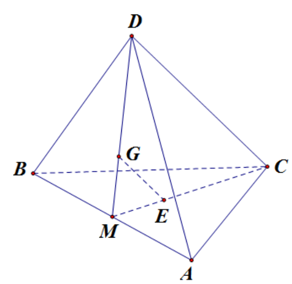
Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$.Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC .Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. GE và CD chéo nhau. **B.** $GE//CD$.

C. GE cắt AD. **D.** GE cắt CD.

Lời giải

Chọn B



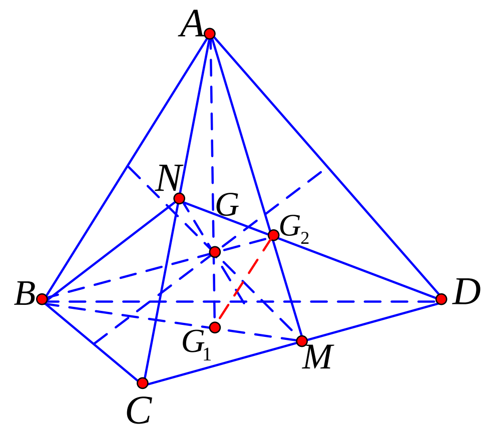
Gọi M là trung điểm của AB .Trong tam giác MCD có $\frac{MG}{MD}=\frac{ME}{MC}=\frac{1}{3}$ suy ra $GE//CD$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tứ diện.Gọi G_1 là giao điểm của AG và mp$\left(BCD\right)$, G_2 là giao điểm của BG và mp$\left(ACD\right)$.Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $G_1G_2\,//\,AB$. **B.** $G_1G_2\,//\,AC$. **C.** $G_1G_2\,//\,CD$. **D.** $G_1G_2\,//\,AD$.

Lời giải

Chọn A



Gọi M , N lần lượt là trung điểm của DC , AC .Vì G là trọng tâm tứ diện nên G là giao điểm của ba đoạn thẳng nối hai trung điểm của cặp cạnh đối của tứ diện như hình vẽ trên.

Xét (ABM): $AG \cap BM = G_1$, $BG \cap AM = G_2$.Trong ΔACD có AM và DN là đường trung tuyến nên G_2 là trọng tâm của tam giác do đó $\frac{G_2M}{G_2A} = \frac{1}{2}$.Tương tự ta cũng có $\frac{G_1M}{G_1B} = \frac{1}{2}$ suy ra $G_1G_2 \,//\, AB$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$.Gọi I , J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC , ABD.Đường thẳng IJ song song với đường thẳng

A. AC .

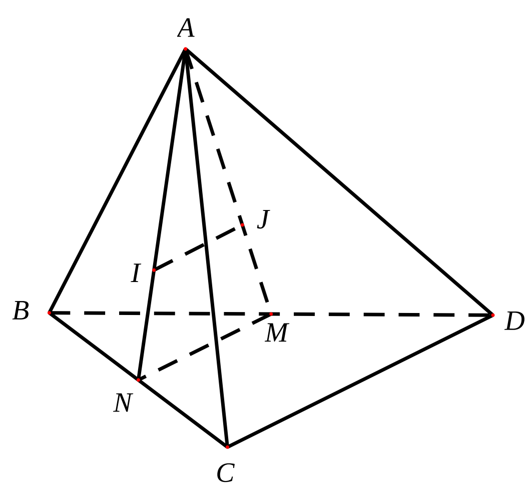
B. CD.

C. CM với M là trung điểm cạnh BD.

D. DB.

Lời giải

Chọn B



Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các cạnh BD và BC ,ta có $MN//CD$.

Vì I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ABD nên ta có

$\frac{AI}{AN}=\frac{AJ}{AM}=\frac{2}{3}\Rightarrow IJ//MN$.

Từ và suy ra $IJ//CD$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$.Gọi I và J lầnl ượt là trọng tâm ΔABC và ΔABD.

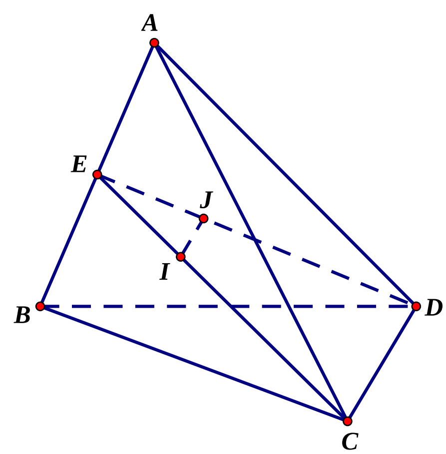
Chọn khẳng định đúng.

A. IJ song songvới CD. **B.** IJ song songvới AB.

C. IJ chéo nhauvới CD. **D.** IJ cắt AB.

Lời giải

Chọn A



Gọi E là trung điểm AB.

Vì I và J lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và ABD nên: $\frac{EI}{EC}=\frac{EJ}{ED}=\frac{1}{3}$.

Suyra: $IJ//CD$.

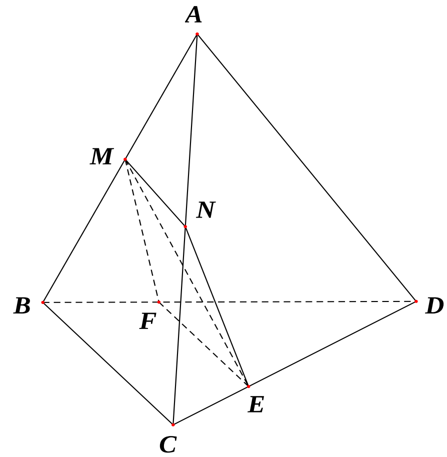
Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,AC; E là điểm trên cạnh CD sao cho $2EC=ED$. Khi đó, thiết diện tạo bởi (MNE) và tứ diện $ABCD$ là hình gì?

A. Hình thang có đáy lớn là MN. **B.** Hình chữ nhật.

C. Hình bình hành. **D.** Hình thang có đáy bé là MN.

Lời giải

Chọn D



Xét (MNE) và (BCD) có:

E là điểm chung.

$MN // BC$ (do MN là đường trung bình của tam giác ABC).

Do đó $(MNE) \cap (BCD) = EF // BC // MN$ (với $F \in BD$)

Thiết diện là hình thang $MNEF$.

Ta có $MN = \dfrac{1}{2}BC$ và $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{ED}{CD} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow EF = \dfrac{2}{3}BC$. Suy ra $EF > MN$.

Vậy $MNEF$ là hình thang với đáy nhỏ là MN.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, I là trung điểm của SA. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là

A. ΔIBC.

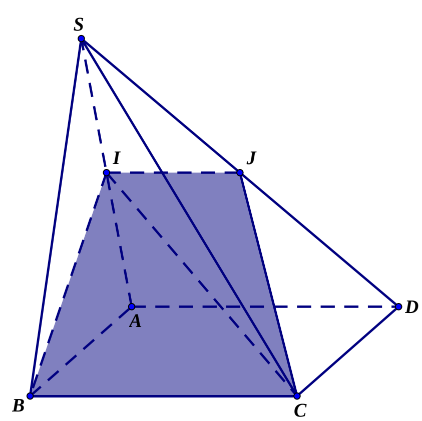
B. Hình thang $IJBC$ (J là trung điểm của SD).

C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm của SB).

D. Tứ giác $IBCD$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $(IBC)\cap(ABCD)=BC$; $(IBC)\cap(SAB)=IB$

Tìm $(IBC)\cap(SAD)$.

Ta có: $\begin{cases} I\in(IBC)\cap(SAD) \\ BC\in(IBC) \\ AD\in(SAD) \\ BC\,//\,AD \end{cases} \Rightarrow (IBC)\cap(SAD)=Ix\,//\,AD\,//\,BC$

Xét (SAD): Gọi $J=Ix\cap SD$, mà $IA=IS$, $Ix\,//\,AD$ $\Rightarrow JS=JD$

$\Rightarrow (IBC)\cap(SAD)=IJ \Rightarrow (IBC)\cap(SDC)=JC$

Vậy thiết diện cần tìm là hình thang $IJBC$.

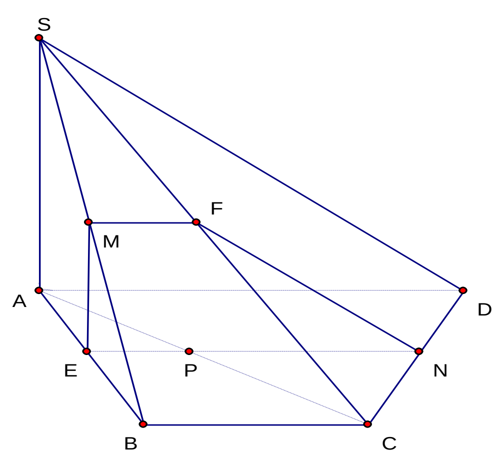
Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AD//BC)$. Gọi M, N,P lần lượt là trung điểm của SB, CD và AC. Hãy cho biết thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ khi cắt bởi mặt phẳng (MNP) là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang.

C. Hình chữ nhật. **D.** Hình tam giác.

Lời giải

Chọn B



Trong mp $(ABCD)$, gọi $E=NP\cap AB$.

Khi đó : $(MNP)\cap(ABCD)=NE$ và $(MNP)\cap(SAB)=EM$. (1)

Xét ΔACD có P,N lần lượt là trung điểm của $AC,CD \Rightarrow NP//AD//BC$.

Ta có: $NP//BC$; $NP\subset(MNP)$; $BC\subset(SBC)$; $M\in(MNP)\cap(SBC)$, qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại F.

Khi đó : $(MNP)\cap(SBC)=MF$

và $(MNP)\cap(SCD)=FN$. (2)

Từ (1) và (2), thiết diện của hình chóp là tứ giác $MENF$.

Tứ giác $MENF$ có $MF//EN$ nên $MENF$ là hình thang.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABC$ có E, F lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{SG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$. Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (EFG) là hình nào dưới đây?

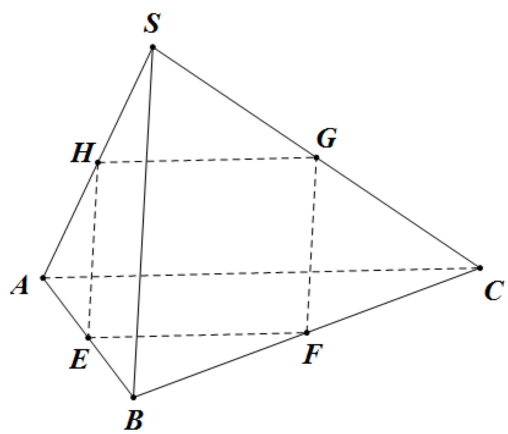
A. Tam giá.

B. Hình bình hành.

C. Hình thang chỉ có một cặp cạnh song song.

D. Hình thoi.

Lời giải



Chọn B

Ta có EF là đường trung bình trong tam giác ABC, suy ra $EF//AC$ (1).

$$\left.\begin{array}{l}(EFG)\cap(SAC)=\{G\}\\ EF\subset(EFG)\\ AC\subset(SAC)\\ EF//AC\end{array}\right\}\Rightarrow(EFG)\cap(SAC)=Gx//FE//AC$$

Gọi $Gx\cap SA=\{H\}$, suy ra H là trung điểm SA và $HG//AC$ (2)

Ta có $\overrightarrow{SG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$, suy ra G là trung điểm của SC và $GF//SB$ (3).

Ta có HE là đường trung bình trong tam giác SAB, suy ra $HE//SB$ (4)

Từ $(1),(2),(3),(4)$ suy ra thiết diện là hình bình hành $FGHE$.

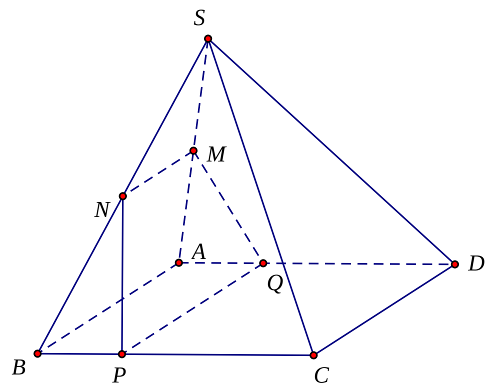
Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm $SA,\ SB$. P là một điểm trên cạnh BC. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNP) với hình chóp có dạng là:

A. Hình chữ nhật. **B.** Hình thang.

C. Hình tam giác. **D.** Hình bình hành.

Lời giải

Chọn B



Do $MN//AB$ và $MN=\frac{1}{2}AB$ nên $(MNP)\cap(ABCD)=PQ$ với $PQ//AB,\ Q\in AD$.

Tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

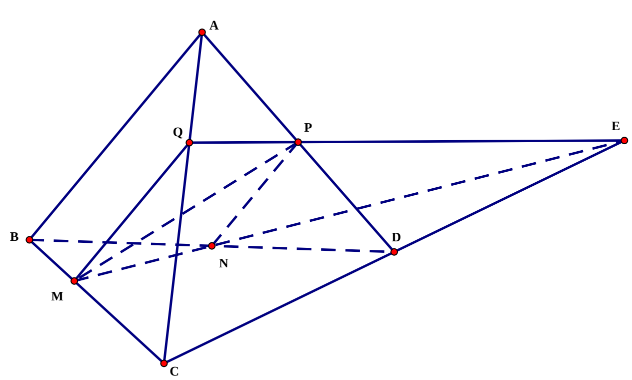
Câu 21: Cho t diện $ABCD$. Gọi N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BD và AD; M là điểm thuộc đoạn BC sao cho $MC=2MB$. Kết luận nào sau đây đúng nhất về thiết diện của mặt phẳng (MNP) với hình chóp $ABCD$?

A. Thiết diện là ngũ giác. **B.** Thiết diện là hình bình hành.

C. Thiết diện là hình thang. **D.** Thiết diện là t giác.

Lời giải

Chọn C



Gọi $E = MN \cap CD \Rightarrow (MNP) \cap (ACD) = PE$.

Trong mặt phẳng (ACD) gọi $Q = PE \cap AC$. Khi đó thiết diện của mặt phẳng (MNP) với hình chóp $ABCD$ là t giác $MNPQ$.

Ta có $\begin{cases} MQ = (MNP) \cap (ABC) \\ NP // AB \\ NP \subset (MNP), AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow MQ // NP$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

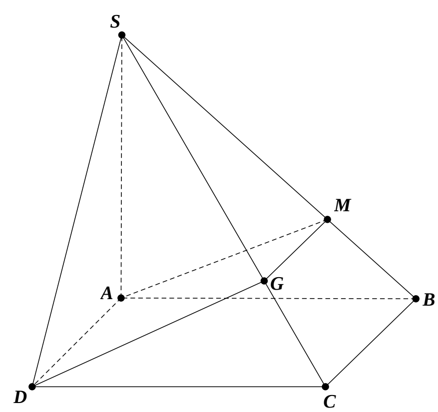
Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB. Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. hình thang. **B.** hình chữ nhật.

C. hình bình hành. **D.** tam giác.

Lời giải

Chọn A



Do $BC // AD$ nên mặt phẳng (ADM) và (SBC) có giao tuyến là đường thẳng MG song song với BC

Thiết diện là hình thang $AMGD$.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ có M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và AC. Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác (T). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. (T) là hình bình hành.

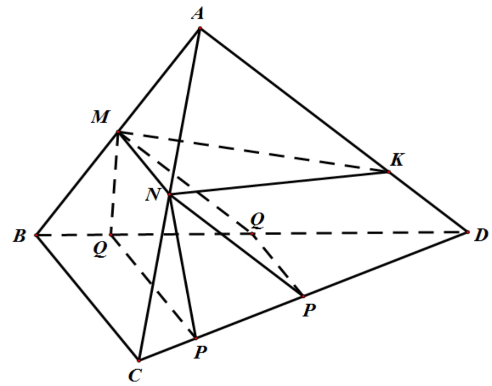
B. (T) là tam giá.

C. (T) là tam giác hoặc hình thang.

D. (T) là hình thoi.

Lời giải

Chọn C



Ta có các trường hợp sau:

(α) giao với cạnh AD của tứ diện $ABCD$ tại K. Khi đó dễ thấy thiết diện (T) là tam giác MNK. Đặc biệt, nếu $K \equiv D$ thì thiết diện (T) là tam giác MND; nếu $K \equiv A$ thì thiết diện (T) là tam giác ABC.

(α) giao với cạnh CD của tứ diện $ABCD$ tại P $(P \not\equiv D, P \not\equiv C)$.

Khi đó, P là một điểm chung của (α) và (BCD). Hơn nữa, ta có $MN \,//\, BC$ (tính chất đường trung bình của tam giác), $BC \subset (BCD)$ nên suy ra $MN \,//\, (BCD)$. Do đó $(\alpha) \cap (BCD) = PQ$ với $PQ \,//\, MN$ và $Q \in BD$. Từ đó, dễ thấy thiết diện (T) là hình thang $MNPQ$.

Đặc biệt, khi P là trung điểm của CD thì Q cũng là trung điểm của B Do đó $NP \,//\, AD \,//\, MQ$ (tính chất đường trung bình của tam giác). Suy ra thiết diện $MNPQ$ là hình bình hành.

Ngoài ra, nếu $P \equiv D$ thì thiết diện (T) là tam giác MND. Nếu $P \equiv C$ thì $Q \equiv B$ và thiết diện (T) là tam giác ABC.

Vậy, thiết diện (T) của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi (α) là một tam giác hoặc một hình thang (chú ý hình bình hành cũng là hình thang).

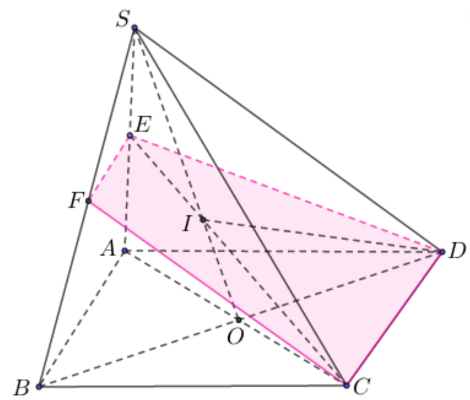
Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I là điểm trên cạnh SO. Mặt phẳng (ICD) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì?

A. Tam giác. **B.** Hình thang.

C. Hình bình hành. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases}(ICD)\cap(SCD)=CD\\(ICD)\cap(ABCD)=CD\end{cases}$ (1).

Trong (SAC), gọi $E=IC\cap SA\Rightarrow(ICD)\equiv(ECD)\Rightarrow(ECD)\cap(SAD)=ED$ (2).

Vì $AB//CD$ nên $(ECD)\cap(SAB)$ theo giao tuyến là đường thẳng đi qua E và song song với AB, CD cắt SB tại $F\Rightarrow(ECD)\cap(SAB)=EF$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra mặt phẳng (ICD) cắt hình chóp theo thiết diện là tứ giác $CDEF$.

Vì $EF//AB//CD$ nên tứ giác $CDEF$ là hình thang.

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. E là điển trên cạnh CD với $ED=3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD mà EF song song với BC.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà EF song song với BC

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(MNE)\cap(ABC)=MN$, $(MNE)\cap(ACD)=NE$.

Vì hai mặt phẳng (MNE) và (BCD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song là MN và BC nên $(MNE)\cap(BCD)=Ex$ (với Ex là đường thẳng qua E và song song với BC), Ex cắt BD tại F .

$(MNE)\cap(BCD)=EF$ và $(MNE)\cap(ADD)=FM$. Và $MN=\frac{1}{2}BC$; $EF=\frac{3}{4}BC$.

Vậy thiết diện là hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà EF song song với BC .

Câu 26: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là

A. Tam giác IBC .

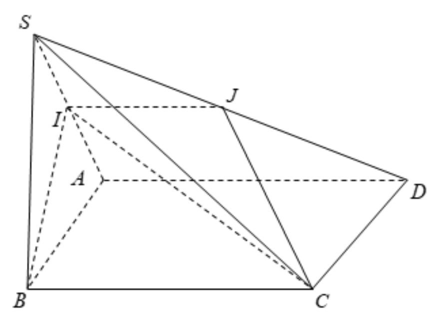
B. Hình thang $IBCJ$ (J là trung điểm SD).

C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).

D. Tứ giác $IBCD$.

Lời giải

Chọn B



Xét hai mặt phẳng (IBC) và (SAD), có;

$I\in(IBC)\cap(SAD)$

Và $BC // AD$ ($ABCD$ là hình bình hành), $AD\subset(SAD), BC\subset(IBC)$

Nên $(SAD)\cap(IBC)=IJ$ $(IJ // AD // BC, J=SD\cap IJ)$.

Do đó thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IBC) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang $BIJC$ ($IJ // BC$).

⬩Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song với nhau.		
b)	Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng chéo nhau.		
c)	Hai đường thẳng có điểm chung thì chúng cắt nhau.		
d)	Hai đường thẳng không thể cùng nằm trên một mặt phẳng thì chúng chéo nhau.		

Câu 2. Trong không gian cho ba đường thẳng a,b và c phân biệt. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Nếu hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.		
b)	Nếu hai đường thẳng cùng chéo nhau với đường thẳng thứ ba thì chúng chéo nhau.		
c)	Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b, đường thẳng b và đường thẳng c chéo nhau thì đường thẳng a và đường thẳng c chéo nhau hoặc cắt nhau.		
d)	Nếu đường thẳng a cắt b, hai đường thẳng b và c chéo nhau thì a và c chéo nhau hoặc song song với nhau.		

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	AB song song CD		
b)	SA cắt SC		
c)	SA song song BC		
d)	SC chéo nhau AB		

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có I,J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, BD. Gọi (P) là mặt phẳng qua I,J và cắt các cạnh AC,AD lần lượt tại hai điểm M,N. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$IJ=\frac{1}{2}CD$		
b)	MN cắt DC		
c)	$IJNM$ là một hình thang		
d)	Để $IJNM$ là hình bình hành thì M là trung điểm của đoạn AC		

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA, điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$EF//AC$		
b)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AC.		
c)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) đường thẳng qua M và song song với BC.		
d)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) là đường thẳng qua M và song song với AC.		

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và AC, G là trọng tâm của tam giác BCD. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$IJ//CD$		
b)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng qua G và song song với BC		
c)	Cho biết $CD=6$. Biết (GIJ) cắt BC, BD lần lượt tại M và N. Khi đó $2IJ+3MN=17$.		
d)	Cho biết $CD=6$. Biết (GIJ) cắt BC, BD lần lượt tại M và N. Khi đó $3IJ+2MN=18$.		

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O. Gọi I là trung điểm SO. Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Điểm M là giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng (ICD)		
b)	Ta có $SN=\frac{2}{3}SB$		
c)	Cho $AB=a$ thì $MN=\frac{a}{2}$		
d)	Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM. Khi đó SK và BC chéo nhau		

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (AD là đáy lớn, BC là đáy nhỏ). Gọi E,F lần lượt là trung điểm của SA và SD. K là giao điểm của các đường thẳng AB và CD. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Giao điểm M của đường thẳng SB và mặt phẳng (CDE) là điểm thuộc đường thẳng KE		
b)	Đường thẳng SC cắt mặt phẳng (EFM) tại N. Tứ giác $EFNM$ là hình bình hành		
c)	Các đường thẳng AM, DN, SK cùng đi qua một điểm		
d)	Cho biết $AD = 2BC$. Tỉ số diện tích của hai tam giác KMN và KEF bằng $\frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta KEF}} = \frac{2}{3}$		

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Khi đó

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AB		
b)	Giao tuyến (SAD) và (SBC) là đường thẳng đi qua S và song song với AB		
c)	Gọi $M \in SC$, giao tuyến của (ABM) và (SCD) là đường thẳng đi qua M và song song với AB		
d)	Gọi $N \in SB$, giao tuyến của (SAB) và (NCD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB		

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi I,K lần lượt là trung điểm của SB và SD. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	SO là giao tuyến của (SAC) và (SBD)		
b)	Giao điểm J của SA với (CKB) thuộc đường thẳng đi qua K và song song với DC		
c)	Giao tuyến của (OIA) và (SCD) là đường thẳng đi qua C và song song với SD		
d)	$CD // IJ$		

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho biết tính đúng sai của mỗi phát biểu sau (xét trong không gian):

a) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song với nhau.

b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng chéo nhau.

c) Hai đường thẳng có điểm chung thì chúng cắt nhau.

d) Hai đường thẳng không thể cùng nằm trên một mặt phẳng thì chúng chéo nhau.

Lời giải

a) Sai	**b) Sai**	**c) Sai**	**d) Đúng**

Phát biểu A và B sai vì hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể là chúng chéo nhau hoặc song song với nhau.

Phát biểu C sai vì hai đường có điểm chung thì chúng có thể cắt nhau hoặc trùng nhau.

Phát biểu D đúng (tính chất cơ bản).

Câu 2. Trong không gian cho ba đường thẳng a, b và c phân biệt. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào đúng, phát biểu nào sai?

a) Nếu hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

b) Nếu hai đường thẳng cùng chéo nhau với đường thẳng thứ ba thì chúng chéo nhau.

c) Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b, đường thẳng b và đường thẳng c chéo nhau thì đường thẳng a và đường thẳng c chéo nhau hoặc cắt nhau.

d) Nếu đường thẳng a cắt b, hai đường thẳng b và c chéo nhau thì a và c chéo nhau hoặc song song với nhau.

Lời giải

a) Đúng	**b) Sai**	**c) Đúng**	**d) Sai**

Phát biểu A đúng (xem định lí 3).

Phát biểu B sai. Vì nếu hai đường a, c chéo nhau và hai đường b, c chéo nhau thì đường thẳng a và đường thẳng b có đến ba khả năng: chéo nhau, song song hoặc cắt nhau.

Phát biểu C đúng.

Phát biểu D sai vì đường thẳng a có thể cắt cả hai đường chéo nhau là b và c, tức là đường thẳng a có thể cắt đường thẳng c.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Khi đó:

a) AB song song CD

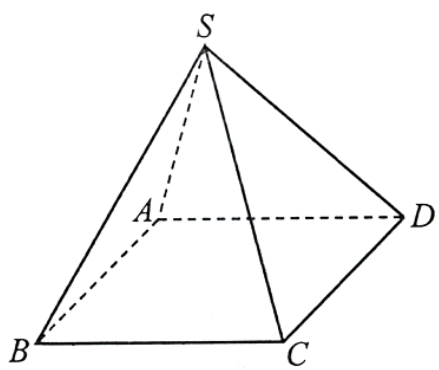
b) SA cắt SC;

c) SA song song BC.

d) SC chéo nhau AB.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng



a) Ta có AB và CD cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung nên AB song song với CD (hai cạnh đối của hình bình hành thì song song với nhau).

b) Hai đường thẳng SA và SC cắt nhau tại S.

c) Hai đường thẳng SA và BC không đồng phẳng, vì vậy SA và BC là hai đường thẳng chéo nhau.

d) SC chéo nhau AB.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, BD. Gọi (P) là mặt phẳng qua I, J và cắt các cạnh AC, AD lần lượt tại hai điểm M, N. Khi đó:

a) $IJ = \frac{1}{2}CD$

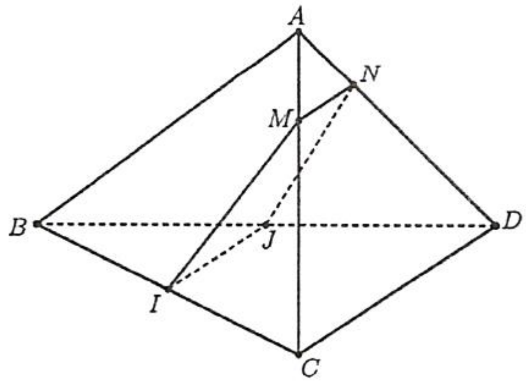
b) MN cắt DC

c) $IJNM$ là một hình thang.

d) Để $IJNM$ là hình bình hành thì M là trung điểm của đoạn AC.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng



Ta có IJ là đường trung bình của tam giác BCD nên $IJ // CD, IJ = \frac{1}{2}CD$.

Khi đó: $\begin{cases} (P) \cap (ACD) = MN \\ IJ \subset (P), CD \subset (ACD) \Rightarrow MN // IJ // CD. \\ IJ // CD \end{cases}$

Vì vậy $IJNM$ là một hình thang.

Theo câu a), ta có: $IJ // MN$.

Vì vậy, $IJNM$ là hình bình hành khi và chỉ khi $IJ = MN$.

Khi đó, $MN = \frac{1}{2}CD, MN // CD$.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ACD, hay M là trung điểm của đoạn AC.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA, điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC. Khi đó:

a) $EF // AC$

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AC.

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) đường thẳng qua M và song song với BC.

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) là đường thẳng qua M và song song với AC.

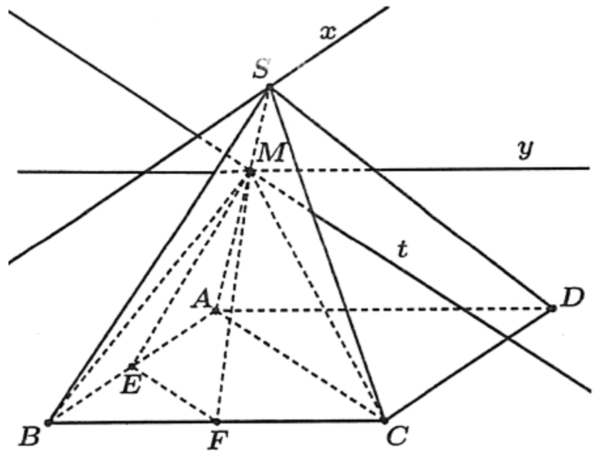
Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) :

Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \subset (SAB); CD \subset (SCD). \\ AB // CD \end{cases}$

Suy ra $Sx = (SAB) \cap (SCD)$, với Sx là đường thẳng qua S và $Sx // AB // CD$.



c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD):

Ta có: $\begin{cases} M \in SA, SA \subset (SAD) \\ M \in (MBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MBC) \cap (SAD)$.

Khi đó: $\begin{cases} M \in (MBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (MBC); AD \subset (SAD). \\ BC // AD \end{cases}$

Suy ra $My = (MBC) \cap (SAD), My$ là đường thẳng qua M và $My // BC // AD$.

d) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) :

Ta có : $\begin{cases} M \in SA, SA \subset (SAC) \\ M \in (MEF) \end{cases} \Rightarrow M \in (MEF) \cap (SAC)$.

Xét tam giác ABC, ta có EF là đường trung bình $\Rightarrow EF // AC$.

Khi đó: $\begin{cases} M \in (MEF) \cap (SAC) \\ EF \subset (MEF); AC \subset (SAC). \\ EF // AC \end{cases}$

Suy ra $Mt = (MEF) \cap (SAC), Mt$ là đường thẳng qua M và $Mt // EF // AC$.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và AC, G là trọng tâm của tam giác BCD.

a) $IJ\,//\,CD$

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng qua G và song song với BC

c) Cho biết $CD=6$. Biết (GIJ) cắt BC, BD lần lượt tại M và N. Khi đó $2IJ+3MN=17$.

d) Cho biết $CD=6$. Biết (GIJ) cắt BC, BD lần lượt tại M và N. Khi đó $3IJ+2MN=18$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

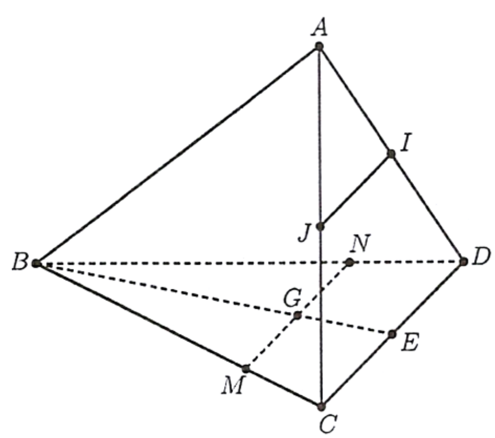
b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD):

Vì IJ là đường trung bình của tam giác ACD nên $IJ\,//\,CD$.

Ta có: $\begin{cases} G\in(GIJ)\cap(BCD) \\ IJ\,//\,CD \\ IJ\subset(GIJ), CD\subset(BCD) \end{cases} \Rightarrow Gx=(GIJ)\cap(BCD)$, trong đó Gx là đường thẳng qua G và $Gx\,//\,IJ\,//\,CD$.

c) Trong mặt phẳng (BCD), kẻ Gx song song CD cắt BC tại M, cắt BD tại N.

Tính $2IJ+3MN$



Gọi E là trung điểm CD, theo định lí Thalès, ta có:

$\frac{BM}{BC}=\frac{BG}{BE}=\frac{2}{3}$ (vì $GM\,//\,CE$); $\frac{MN}{CD}=\frac{BM}{BC}$ (vì $MN\,//\,CD$).

Suy ra $\frac{MN}{CD}=\frac{2}{3}$ hay $MN=\frac{2}{3}CD=\frac{2}{3}\cdot 6=4$.

Vì IJ là đường trung bình tam giác ACD nên $IJ = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\cdot 6 = 3$.

Do đó $2IJ + 3MN = 2\cdot 3 + 3\cdot 4 = 18$.

d) $3IJ + 2MN = 3\cdot 3 + 2\cdot 4 = 17$

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O. Gọi I là trung điểm SO. Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N. Khi đó:

a) Điểm M là giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng (ICD)

b) Ta có $SN = \frac{2}{3}SB$

c) Cho $AB = a$ thì $MN = \frac{a}{2}$

d) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM. Khi đó SK và BC chéo nhau

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

Xác định M, N :

Trong mặt phẳng (SAC), kẻ CI cắt SA tại M ;

Trong mặt phẳng (SBD), kẻ DI cắt SB tại N.

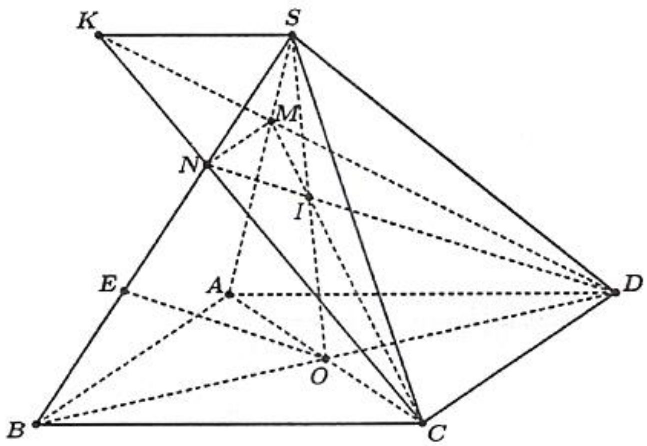
Vì $\begin{cases} M \in CI, CI \subset (ICD) \\ M \in SA \end{cases} \Rightarrow M = SA \cap (ICD)$.

Tương tự: $\begin{cases} N \in DI, DI \subset (ICD) \\ N \in SB \end{cases} \Rightarrow N = SB \cap (ICD)$.

Tính MN theo a :

Gọi E là trung điểm BN, OE là đường trung bình của tam giác BDN $\Rightarrow OE // DN$.

Trong tam giác SOE, ta có NI qua trung điểm I của SO và $NI // OE, N$ là trung điểm của SE.



Vậy $SN = NE = EB$ hay $SN = \frac{1}{3}SB$.

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $SM = \frac{1}{3}SA$.

Khi đó hai tam giác SMN, SAB đồng dạng vì có góc S chung và $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$.

Xét tam giác SAB, theo định lí Thalès, ta có:

$\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3}$.

Chứng minh $SK // BC // AD$:

Dễ thấy S là điểm chung của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Ta có: $\begin{cases} K \in CN, CN \subset (SBC) \\ K \in DM, DM \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow K \in (SBC) \cap (SAD)$.

Vì vậy $SK = (SBC) \cap (SAD)$.

Khi đó: $\begin{cases} SK = (SBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \\ BC // AD \end{cases} \Rightarrow SK // BC // AD.$

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (AD là đáy lớn, BC là đáy nhỏ). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SD. K là giao điểm của các đường thẳng AB và CD. Khi đó:

a) Giao điểm M của đường thẳng SB và mặt phẳng (CDE) là điểm thuộc đường thẳng KE

b) Đường thẳng SC cắt mặt phẳng (EFM) tại N. Tứ giác $EFNM$ là hình bình hành

c) Các đường thẳng AM, DN, SK cùng đi qua một điểm

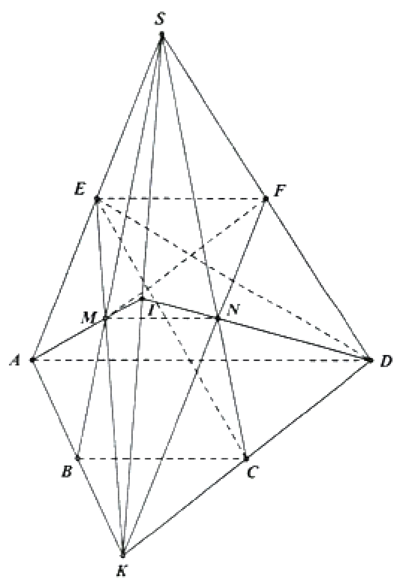
d) Cho biết $AD = 2BC$. Tỉ số diện tích của hai tam giác KMN và KEF bằng $\frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta KEF}} = \frac{2}{3}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Có $SK = (SAB) \cap (SCD)$.

Trong mp (SAB), gọi $M = KE \cap SB$, có $KE \subset (CDE)$. Do đó $SB \cap (CDE) = M$.



b) Trong mp (SCD), gọi $N = KF \cap SC$, có $KF \subset (EFM)$.

Do đó $SC \cap (EFM) = N$.

Có $\Rightarrow \begin{cases} MN = (EFK) \cap (SBC) \\ EF // BC; EF \subset (EFK), BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow MN // EF // BC$.

Suy ra tứ giác $EFNM$ là hình thang.

c) Trong mp $(ADNM)$, gọi $I = AM \cap DN$.

Mà $\begin{cases} I \in AM, AM \subset (SAB) \\ I \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$, Hay $I \in SK$. Kết luận 3 đường thẳng AM, DN, SK đồng quy tại điểm I.

d) Khi $AD = 2BC$ dễ dàng chứng minh được B, C lần lượt là trung điểm của KA và KD. Suy ra M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAK và SDK.

Do đó $MN = \frac{2}{3}EF$, gọi h_1, h_2 lần lượt là độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh K xuống hai đáy MN và EF, dễ thấy $h_1 = \frac{2}{3}h_2$.

Vậy $\frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta KEF}} = \frac{\frac{1}{2}MN \cdot h_1}{\frac{1}{2}EF \cdot h_2} = \frac{\frac{2}{3}EF \cdot \frac{2}{3}h_2}{EF \cdot h_2} = \frac{4}{9}$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Khi đó

a) Giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AB

b) Giao tuyến (SAD) và (SBC) là đường thẳng đi qua S và song song với AB

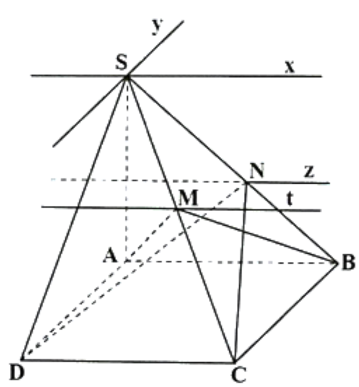
c) Gọi $M \in SC$, giao tuyến của (ABM) và (SCD) là đường thẳng đi qua M và song song với AB

d) Gọi $N \in SB$, giao tuyến của (SAB) và (NCD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB // CD; AD // BC$.



a) Ta có: $\begin{cases} AB//CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sx = (SAB) \cap (SCD) \\ Sx//AB//CD \end{cases}$

b) Ta có: $\begin{cases} AD//BC \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ S \in (SAD) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Sy = (SAD) \cap (SCD) \\ Sy//AD//BC \end{cases}$

c) Ta có : $\begin{cases} AB//CD \\ AB \subset (MAB) \\ CD \subset (SCD) \\ M \in (MAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Mt = (MAB) \cap (SCD) \\ Mt//AB//CD \end{cases}$.

d) Ta có : $\begin{cases} AB//CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (NCD) \\ N \in (SAB) \cap (NCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Nz = (SAB) \cap (NCD) \\ Nz//AB//CD \end{cases}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi I,K lần lượt là trung điểm của SB và SD. Khi đó:

a) SO là giao tuyến của (SAC) và (SBD)

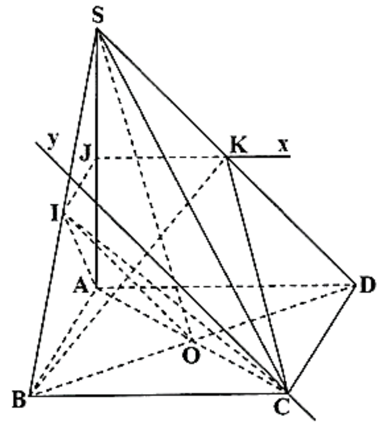
b) Giao điểm J của SA với (CKB) thuộc đường thẳng đi qua K và song song với DC

c) Giao tuyến của (OIA) và (SCD) là đường thẳng đi qua C và song song với SD

d) $CD//IJ$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng



a) $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAB) \cap (SCD)$

$S \in (SAB) \cap (SCD)$

$\Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD).$

b) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD; AD//BC$.

Ta có : $\begin{cases} AD//CB \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ K \in (KBC) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Kx = (KBC) \cap (SAD) \\ Kx//AD//BC \end{cases}$.

Trong (SAD) gọi $J = Kx \cap SA$, có $\Rightarrow \begin{cases} J \in SA \\ J \in Kx \subset (BKC) \end{cases} \Rightarrow J = SA \cap (BKC)$

c) Có OI là đường trung bình của $\Delta SBD \Rightarrow OI//SD$.

Ta có: $\begin{cases} OI//SD \\ OI \subset (OIA) \\ SD \subset (SCD) \\ C \in (OIA) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Cy = (OIA) \cap (SCD) \\ Cy//SD//OI \end{cases}$.

d) Ta có:

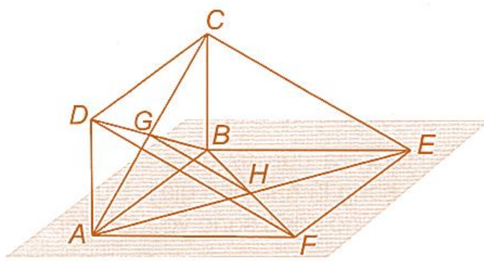
$IJ//AB$ (IJ là đường trung bình của ΔSAB)

$AB//CD$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành) $\Rightarrow CD//IJ$.

⬩Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi G, H lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của hai hình bình hành đó. Chứng minh rằng ba đường thẳng GH, CE, DF đôi một song song.

Lời giải



Hình 4.47

Vì GH là đường trung bình của hai tam giác ACE và BDF nên $GH // CE$ và $GH // DF$.

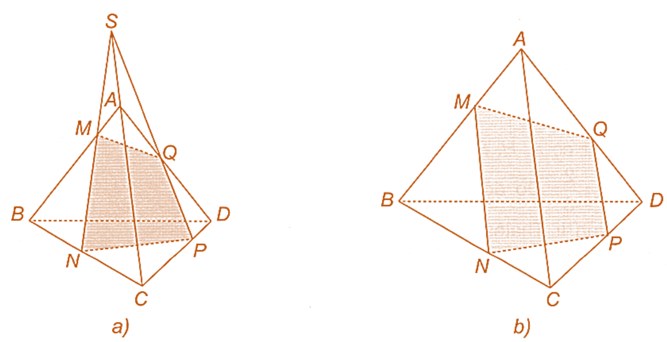
Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Một mặt phẳng cắt bốn cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt tại các điểm M, N, P, Q.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng MN, PQ, AC đôi một song song hoặc đồng quy.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng MQ, NP, BD đôi một song song hoặc đồng quy.

Lời giải

a) Áp dụng định lí về ba đường giao tuyến cho ba mặt phẳng $(ABC), (ACD)$ và (MNPQ)

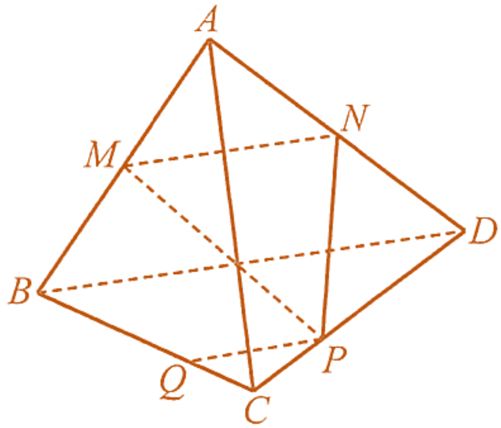


Hình 4.49

b) Tương tự câu a.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD và P là một điểm nằm trên CD. Đường thẳng BC cắt mặt phẳng (MNP) tại Q. Chứng minh rằng $PQ // BD$

Lời giải



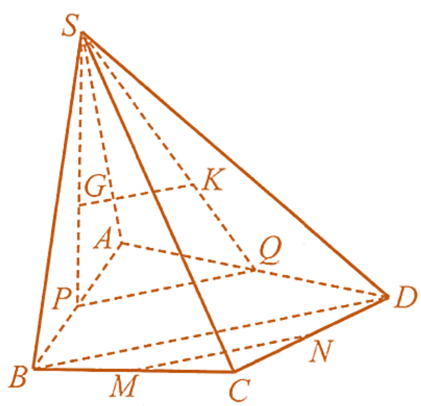
Hình 51

Vì BC cắt mặt phẳng (MNP) tại Q nên PQ là giao tuyến của (MNP) và (BCD).

Ba mặt phẳng $(ABD),(BCD),(MNP)$ đôi một cắt nhau theo các giao tuyến BD,PQ,MN. Mà trong tam giác ABD, vì MN là đường trung bình nên $MN//BD$. Vậy theo định lí về giao tuyến của ba mặt phẳng, ta có $PQ//BD$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi G,K lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB và $SAD;M,N$ lần lượt là trung điểm của BC và CD. Chứng minh rằng $GK//MN$.

Lời giải



Hình 52

Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AB và AD. Khi đó, ta có $\frac{SG}{SP}=\frac{SK}{SQ}=\frac{2}{3}$, suy ra $GK//PQ$.

Vì PQ là đường trung bình của tam giác ABD nên $PQ//BD;MN$ là đường trung bình của tam giác BCD nên $MN//BD$. Suy ra $MN//PQ$.

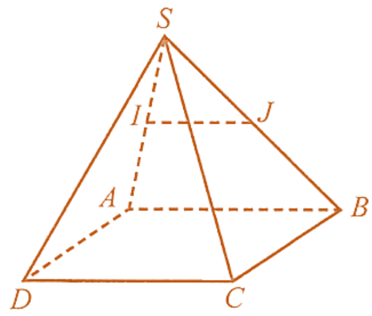
Từ đó, suy ra $GK//MN$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB. Chứng minh rằng $IJ//AB$, từ đó suy ra $IJ//CD$.

Lời giải

Vì I,J lần lượt là trung điểm của SA,SB nên IJ là đường trung bình của tam giác SAB.

Do đó, $IJ//AB$.



Hình 5

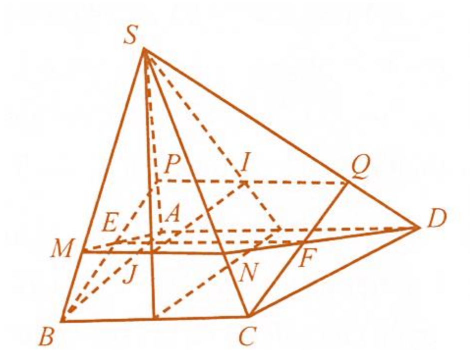
Mà $AB//CD$ nên $IJ//CD$ (vì cùng song song với đường thẳng AB).

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AD. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q.

a) Chứng minh MN song song với PQ.

b) Gọi E là giao điểm của AM và BP, F là giao điểm của CQ và DN. Chứng minh EF song song với MN và PQ.

Lời giải



Hình 1

a) Ta có $AD//BC, AD \subset (ADJ), BC \subset (SBC)$, $(ADJ) \cap (SBC) = MN$.

Suy ra $MN//AD//BC$.

Chứng minh tương tự, ta có $PQ//AD//BC$. Suy ra $MN//PQ$.

b) Ta có: $AD//BC, (ADJ) \cap (IBC) = EF, AD \subset (ADJ), BC \subset (IBC)$.

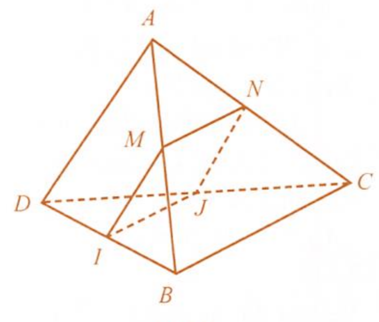
Suy ra $EF//AD//BC$, suy ra $EF//MN//PQ$.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$; I, J lần lượt là trung điểm của BD, CD.

a) Chứng minh rằng $MN//BC$.

b) Tứ giác $MNJI$ là hình gì. Tìm điều kiện để tứ giác $MNJI$ là hình bình hành.

Lời giải



Hình 2

a) Ta có $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}$, suy ra $MN//BC$.

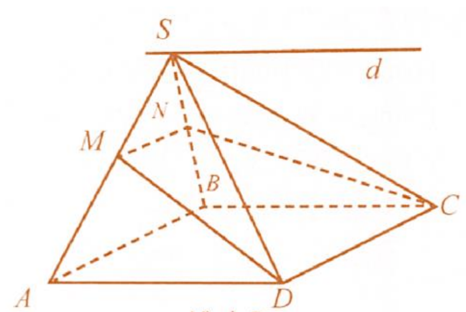
b) Ta có IJ là đường trung bình của tam giác DBC, suy ra $IJ//BC$. Suy ra $IJ//BC//MN$, do đó $MNJI$ là hình thang. $MNJI$ là hình bình hành khi và chỉ khi $MI//NJ//AD$, suy ra MI là đường trung bình của tam giác ADB. Vậy M là trung điểm AB.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) (SAD) và (SBC);

b) (SAB) và (MDC), với M là một điểm bất kì thuộc cạnh SA.

Lời giải



Hình 3

a) Ta có $S\in(SAD)\cap(SBC), AD\subset(SAD)$, $BC\subset(SBC)$ và $AD//BC$.

Suy ra $(SAD)\cap(SBC)=d$ với $S\in d$, $d\ //AD//BC$.

b) Ta có $M\in(SAB)\cap(MDC), AB\subset(SAB)$, $DC\subset(MDC)$ và $AB//DC$.

Suy ra $(SAB)\cap(MDC)=Mx$ với $Mx//AB//DC$.

Gọi $N=SB\cap Mx$.

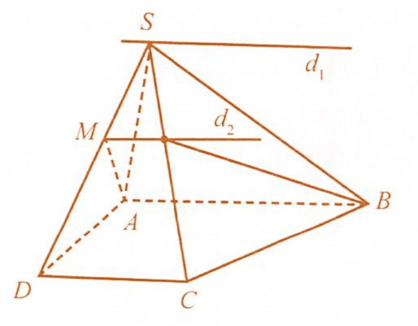
Khi đó $(SAB)\cap(MDC)=MN$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi M là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng SD.

a) Tìm các giao tuyến: $d_1 = (SAB) \cap (SCD); d_2 = (SCD) \cap (MAB)$.

b) Chứng minh $d_1 // d_2$.

Lời giải



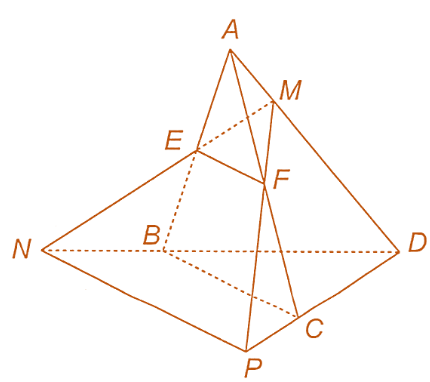
Hình 4

a) Ta có $AB // CD$ và S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD), suy ra giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng d_1 thoả mãn: d_1 đi qua S và $d_1 // AB // CD$.

Ta có $AB // CD$ và M là điểm chung của hai mặt phẳng (SCD) và (MAB), suy ra giao tuyến của (SCD) và (MAB) là đường thẳng d_2 thoả mãn: d_2 đi qua M và $d_2 // AB // CD$.

b) Ta có $d_1 // d_2$ vì chúng cùng song song với AB.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC và M là một điểm bất kì thuộc cạnh AD. Giả sử ME cắt BD tại N và MF cắt CD tại $P(H.4.11)$. Chứng minh rằng $NP // EF$.



Hình 4.11

Lời giải

Vì N là giao điểm của ME và BD nên N thuộc cả hai mặt phẳng (MEF) và (BCD).

Tương tự, P cũng thuộc cả hai mặt phẳng đó nên suy ra NP là giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (BCD).

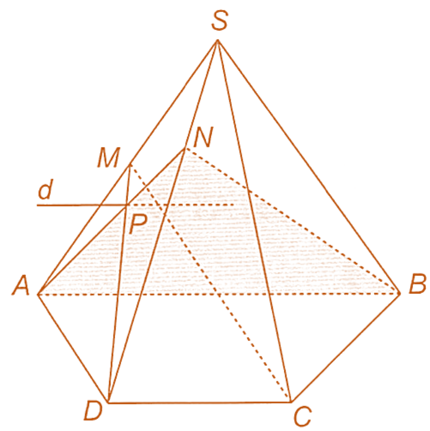
Vì EF là đường trung bình của tam giác ABC nên $EF // BC$. Hai mặt phẳng (MEF) và (BCD) chứa hai đường thẳng song song là EF và BC nên giao tuyến NP của hai mặt phẳng đó song song với EF và BC.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi M,N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SD.

a) Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng (MCD) và (NAB).

b) Chứng minh rằng $d//AB$.

Lời giải



Hình 4.45

a) Trong mặt phẳng (SAD), gọi P là giao điểm của AN và DM.

Trong mặt phẳng (NAB), vẽ đường thẳng d đi qua P và song song với AB thì d là giao tuyến cần tìm.

b) Theo cách dựng thì d song song với AB.

Câu 12: Một chiếc thang được đặt sao cho hai đầu của chân thang dựa vào tường, hai đầu còn lại nằm trên sàn nhà $(H \cdot 4 \cdot 12)$.

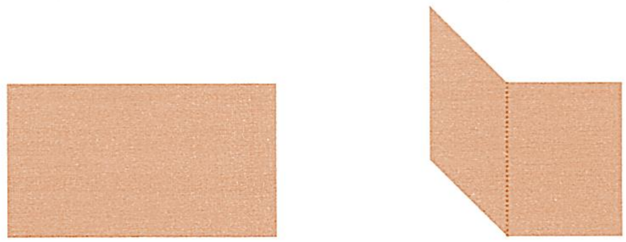
Hình 4.12

Biết rằng chiếc thang có dạng hình chữ nhật, hãy giải thích vì sao hai đầu của chân thang nằm trên sàn nhà lại cách đều đường chân tường.

Lời giải

Áp dụng định lí về ba đường giao tuyến cho ba mặt phẳng: mặt sàn nhà, mặt chân tường và mặt phẳng tạo bởi bốn đầu của chân thang. Từ đó suy ra đường thẳng đi qua hai đầu của chân thang trên sàn nhà song song với đường chân tường.

Câu 13: Bạn Hà lấy một tờ giấy hình chữ nhật và gấp tờ giấy sao cho hai mép của tờ giấy song song với nhau $(H.4.13)$.



Hình 4.13

Hà thấy rằng dù gấp thế nào thì đường nếp gấp vẫn luôn song song với hai mép của tờ giấy. Hãy giải thích vì sao.

Lời giải

Hai nửa của tờ giấy có thể coi như hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song là hai mép giấy. Đường nếp gấp chính là giao tuyến của hai mặt phẳng này nên nó song song với hai mép giấy.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là một điểm bất kì thuộc cạnh SC.

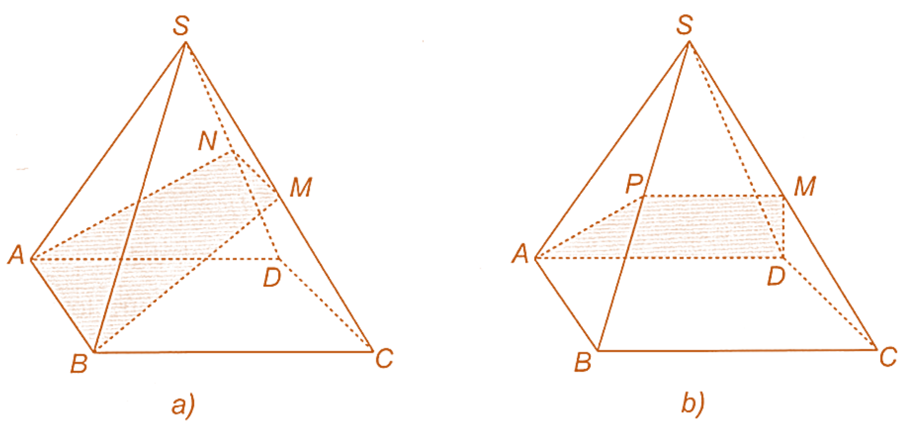
a) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (MAB) với các mặt của hình chóp.

b) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (MAD) với các mặt của hình chóp.

Lời giải

a) Trong mặt phẳng (SCD), vẽ $MN//CD(N \in SD)$. Giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và các mặt của hình chóp là các đường thẳng $AB, BM, MN, NA(H.4.44a)$.

b) Tương tự câu a (H.4.44b).



Hình 4.44

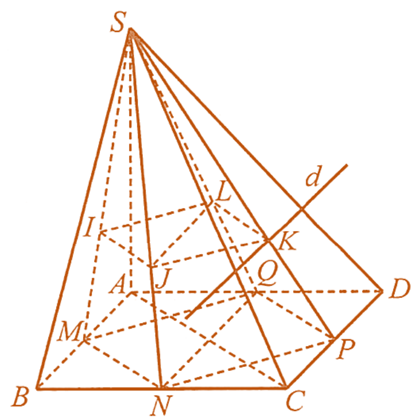
Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, K, L lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SBC, SCD, SAD.

a) Chứng minh rằng bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $JL//CD$.

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SCD).

Lời giải



Hình 53

a) Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Do MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN//AC$ và $MN = \frac{1}{2}AC$. Tương tự ta có $QP//AC$ và $QP = \frac{1}{2}AC$. Suy ra $MN//QP$ và $MN = QP$.

Ngoài ra, ta có $\frac{SI}{SM} = \frac{SJ}{SN} = \frac{IJ}{MN} = \frac{2}{3}$. Suy ra $IJ//MN$ và $IJ = \frac{2}{3}MN$. Tương tự ta có $LK//QP$ và $LK = \frac{2}{3}QP$. Từ các kết quả trên, suy ra $IJ//LK$ và $IJ = LK$. Vậy bốn điểm I, J, K, L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Vì $\frac{SJ}{SN} = \frac{SL}{SQ} = \frac{2}{3}$ nên $JL//NQ$. Trong hình bình hành $(ABCD)$ có $NQ//CD$.

Suy ra $JL//CD$.

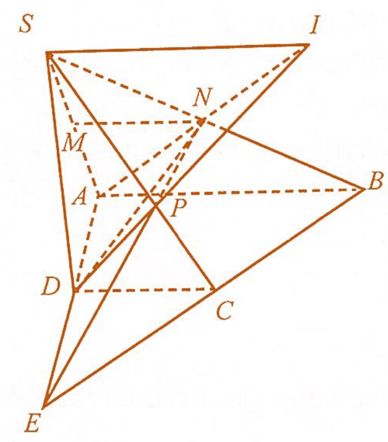
c) Hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SCD) có điểm chung là K và lần lượt chứa hai đường thẳng JL và CD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SCD) là đường thẳng d đi qua K và song song với CD.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB.

a) Chứng minh MN song song với CD.

b) Gọi P là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng $(ADN), I$ là giao điểm của AN và DP. Chứng minh SI song song với CD.

Lời giải



Hình 6

a) Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN//AB$. Mà $ABCD$ là hình thang nên $AB//CD$.

Suy ra $MN//AB//CD$. Vậy $MN//CD$.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi E là giao điểm của AD và BC. Trong mặt phẳng (SBC), gọi P là giao điểm của SC và EN.

Ta có: $E \in AD$ và $AD \subset (ADN)$, suy ra $EN \subset (ADN)$;

$P \in EN$ và $EN \subset (ADN)$, suy ra $P \in (ADN)$. Vậy $P = SC \cap (ADN)$.

Do $I = AN \cap DP$, suy ra $I \in AN$.

Ta có: $I \in AN$ và $AN \subset (SAB); I \in DP$ và $DP \subset (SCD)$.

Suy ra $I \in (SAB) \cap (SCD)$. Do đó $SI = (SAB) \cap (SCD)$.

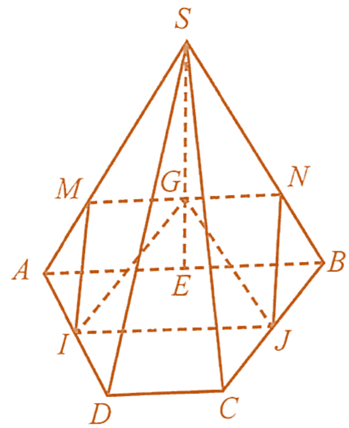
Ta có $AB \subset (SAB); CD \subset (SCD); (SAB) \cap (SCD) = SI$. Mà $AB//CD$. Suy ra $SI//CD$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG).

b) Tìm điều kiện của AB và CD để các giao tuyến của mặt phẳng (IJG) với các mặt của hình chóp tạo thành một hình bình hành.

Lời giải



Hình 8

a) Ta có IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $AB//IJ$.

Ta có $G \in (SAB) \cap (IJG); AB \subset (SAB); IJ \subset (IJG)$; $AB//IJ$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG) là MN với $MN//IJ//AB$,

sao cho $M \in SA$, $N \in SB$.

b) Dễ thấy giao tuyến của mặt phẳng (IJG) với các mặt của hình chóp là tứ giác $MNJI$.

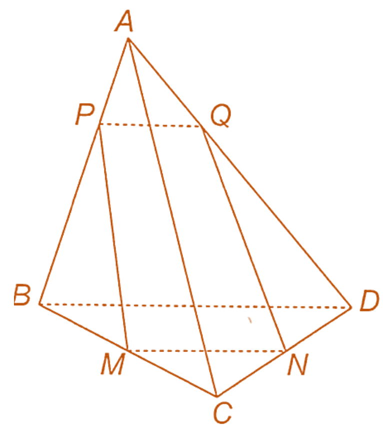
Do G là trọng tâm của tam giác SAB và $MN//AB$ nên $\frac{MN}{AB} = \frac{SG}{SE} = \frac{2}{3}$

(E là trung điểm của AB) suy ra $MN = \frac{2}{3}AB$.

Ta lại có $IJ = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Vì $MN//IJ$ nên $MNJI$ là hình thang, do đó $MNJI$ là hình bình hành khi $MN = IJ \Leftrightarrow \frac{2}{3}AB = \frac{1}{2}(AB + CD) \Leftrightarrow AB = 3CD$.

Vậy giao tuyến của mặt phẳng (IJG) với các mặt của hình chóp tạo thành một hình bình hành khi $AB = 3CD$.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và P là một điểm bất kì thuộc cạnh $AB(H.4.10)$. Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (MNP) và các mặt của tứ diện.



Hình 4.10

Lời giải

Hiển nhiên MP, MN lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (MNP) và các mặt $(ABC),(BCD)$ của tứ diện. Vì MN là đường trung bình của tam giác BCD nên $MN//BD$. Hai mặt phẳng (MNP) và (ABD) có điểm chung P và chứa hai đường thẳng song song là MN và BD, suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng đi qua P và song song với BD.

Trong mặt phẳng (ABD) vẽ $PQ//BD$ với Q thuộc AD thì PQ là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABD). Khi đó QN là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ACD).

Vậy các giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt của tứ diện là các đường thẳng MN, MP, PQ, QN.

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm thuộc các cạnh AB, BC, CD. Xác định giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng (MNP) trong các trường hợp sau:

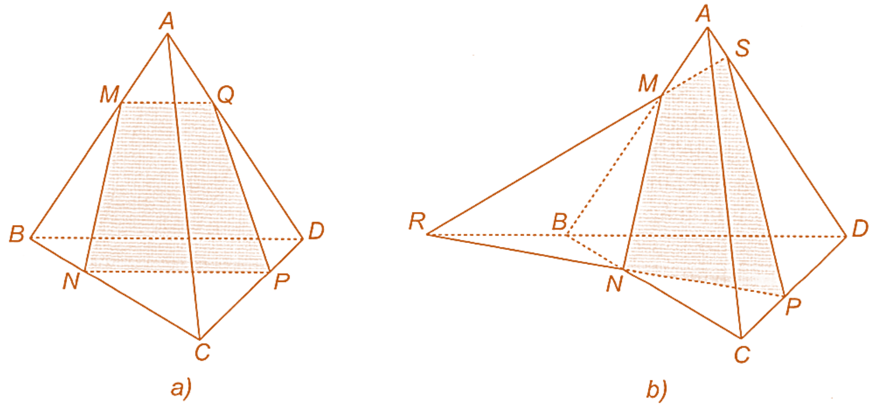
a) Đường thẳng NP song song với đường thẳng BD;

b) Đường thẳng NP cắt đường thẳng BD.

Lời giải

a) Trong mặt phẳng (ABD) vẽ đường thẳng $MQ//BD(Q \in AD)$ thì Q là giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng $(MNP)(H.4.43a)$.

b) Trong mặt phẳng (BCD), gọi R là giao điểm của NP và BD. Trong mặt phẳng (ABD), gọi S là giao điểm của MR và AD. Khi đó R là giao điểm của đường thẳng AD và mặt phẳng $(MNP)(H.4.43b)$.



Hình 4.43

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA.

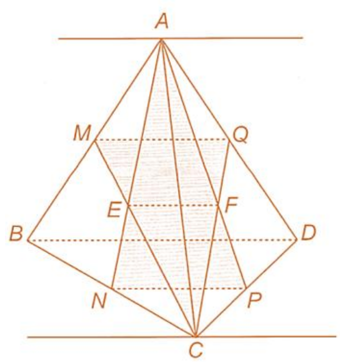
a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ANP) và (CMQ).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (ANP) và (ABD).

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (CMQ) và (BCD).

d) Chứng minh rằng các giao tuyến tìm được ở trên đôi một song song với nhau.

Lời giải



Hình 4.46

a) Trong mặt phẳng (ABC), gọi E là giao điểm của AN và CM. Trong mặt phẳng (ACD), gọi F là giao điểm của AP và CQ. Đường thẳng EF là giao tuyến của hai mặt phẳng (ANP) và (CMQ).

Vì MQ và NP lần lượt là đường trung bình của các tam giác ABD và CBD nên $MQ // BD // NP$, suy ra $EF // MQ // NP // BD$.

b) Giao tuyến là đường thẳng qua A và song song với BD.

c) Giao tuyến là đường thẳng qua C và song song với BD.

d) Các giao tuyến đều song song với BD nên chúng đôi một song song với nhau.

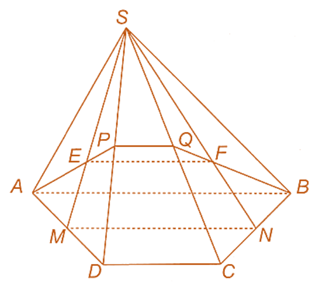
Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB // CD)$. Gọi E, F lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD, SBC.

a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Chứng minh rằng $EF//MN$, từ đó suy ra $EF//AB$.

b) Xác định các giao tuyến của mặt phẳng (AEF) với các mặt của hình chóp.

c) Trong các giao tuyến tìm được ở câu b, giao tuyến nào song song với đường thẳng EF ?

Lời giải



Hình 4.48

a) Vì E, F lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAD, SBC nên $\frac{SE}{SM} = \frac{SF}{SN} = \frac{2}{3}$.

Theo định lí Thalès suy ra trong tam giác SMN có $EF//MN$. Vì MN là đường trung bình của hình thang $ABCD$ nên $MN//AB$. Từ đó suy ra $EF//AB$.

b) Trong mặt phẳng (SAD), gọi P là giao điểm của AE và SD. Trong mặt phẳng (SBC), gọi Q là giao điểm của BF và SC. Các giao tuyến của mặt phẳng (AEF) và các mặt của hình chóp là các đường thẳng AP, PQ, QB, AB.

c) Hai mặt phẳng (AEF) và (SCD) chứa hai đường thẳng song song là EF và CD (cùng song song với AB) nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó song song với EF, tức là PQ song song với EF. Vậy có hai giao tuyến song song với đường thẳng EF là AB và PQ.