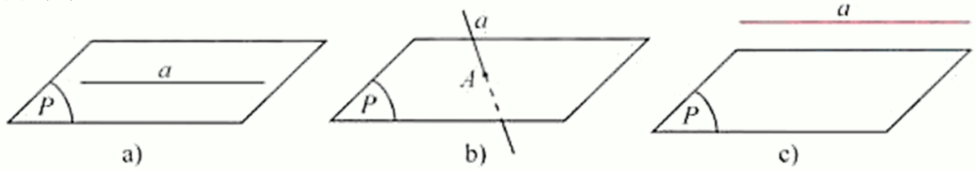
MỤC LỤC

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

1. Đường thẳng song song mặt phẳng

- Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Khi đó có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau:
- Trường hợp 1: a và (P) có từ hai điểm chung phân biệt trở lên (Hình 2a), suy ra mọi điểm thuộc a đều thuộc (P), ta nói a nằm trong (P), ki hiệu $a \subset (P)$.
- Trường hợp 2: a và (P) có một điểm chung duy nhất A (Hình 2b), ta nói a cắt (P) tại A, kí hiệu $a \cap (P) = A$.
- Trường hợp 3: a và (P) không có điểm chung nào (Hình 2c), ta nói a song song với (P), kí hiệu $a//(P)$.

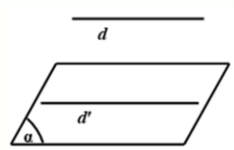


- Đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu chúng không có điểm chung.

2. Điều kiện để một đường thẳng song song với 1 mặt phẳng

Định lý 1:

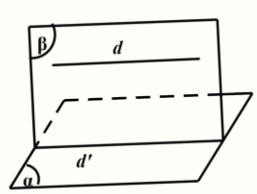
- Nếu đường thẳng d không nằm trong mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).
- Vậy $\begin{cases} d \not\subset (\alpha) \\ d \parallel d' \\ d' \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow d \parallel (\alpha)$



3. Tính chất cơ bản của đường thẳng và mặt phẳng song song

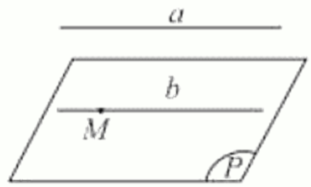
Định lý 2:

- Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) đi qua d và cắt (α) theo giao tuyến d' thì $d' \parallel d$
- Vậy $\begin{cases} d \parallel (\alpha) \\ d \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d' \parallel d$.



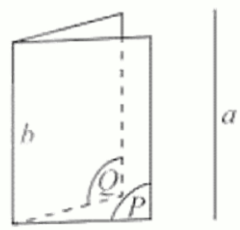
Hệ quả 1:

Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu qua điểm M thuộc (P) ta vẽ đường thẳng b song song với a thì b phải nằm trong (P).



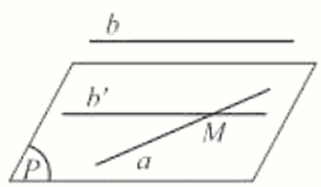
Hệ quả 2:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.



Định lý 3:

- Nếu a và b là hai đường thẳng chéo nhau thì qua a có duy nhất một mặt phẳng song song với đường thẳng b



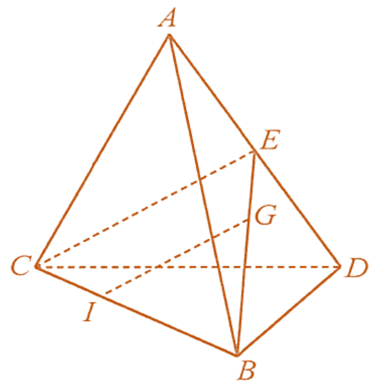
Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

Dạng 1: Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng đường thẳng IG song song với mặt phẳng (ACD)..

Lời giải



Hình 21

Gọi E là trung điểm AD. Ta có $E \in BG$ và $\frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$;

Vì $BI = 2IC$ nên $\frac{BI}{BC} = \frac{2}{3}$. Do đó $\frac{BI}{BC} = \frac{BG}{BE} = \frac{2}{3}$.

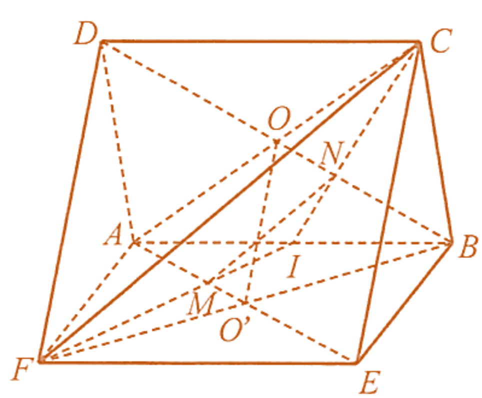
Suy ra $IG // CE$. Mà $CE \subset (ACD)$ nên $IG // (ACD)$.

Câu 2: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O và O' lần lượt là giao điểm hai đường chéo của mỗi hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$. Chứng minh rằng đường thẳng OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABF và ABC. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACF).

Lời giải



Hình 22

a) Do OO' là đường trung bình của tam giác BDF nên $OO' // DF$. Mà $DF \subset (ADF)$ nên $OO' // (ADF)$.

Tương tự ta có $OO' // (BCE)$.

b) Gọi I là trung điểm của AB. Vì M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABF và ABC nên ta có: $I \in FM$ và $\frac{IM}{IF} = \frac{1}{3}; I \in CN$ và $\frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}$.

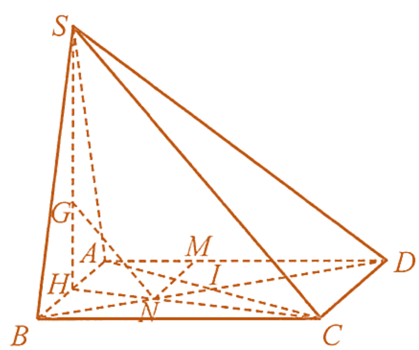
Do đó $\frac{IM}{IF} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}$. Suy ra $MN // FC$.

Mà $FC \subset (ACF)$ nên $MN // (ACF)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, ABC.

Chứng minh rằng hai đường thẳng MN, NG lần lượt song song với các mặt phẳng $(SCD), (SAC)$

Lời giải



Hình 23

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

Do N là trọng tâm tam giác ABC nên $\frac{BN}{BI} = \frac{2}{3}$.

Suy ra $\frac{BN}{BD} = \frac{1}{3}$, mà $\frac{AM}{AD} = \frac{1}{3}$ nên $\frac{AM}{AD} = \frac{BN}{BD}$.

Do đó $MN // AB$ hay $MN // CD$. Mà $CD \subset (SCD)$ nên $MN // (SCD)$.

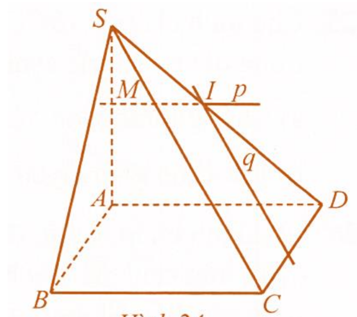
Gọi H là trung điểm của AB. Vì G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC nên ta có: $H \in SG$ và $\frac{HG}{HS} = \frac{1}{3}; H \in CN$ và $\frac{HN}{HC} = \frac{1}{3}$. Do đó $\frac{HG}{HS} = \frac{HN}{HC}$ suy ra $GN // SC$. Mà $SC \subset (SAC)$ nên $GN // (SAC)$.

◆Dạng ❷: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên cạnh SA lấy điểm M. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với hai đường thẳng AD và SC. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt phẳng $(SAD),(SCD)$.

Lời giải



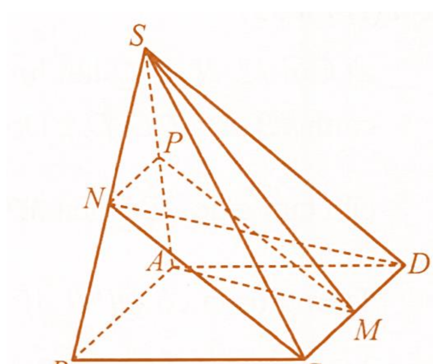
Hình 24

Vì mặt phẳng (P) đi qua M và song song với AD, mà $AD \subset (SAD)$ nên (P) cắt mặt phẳng (SAD) theo giao tuyến p đi qua M và song song với AD.

Gọi I là giao điểm của đường thẳng p với SD, khi đó I thuộc mặt phẳng (P). Mặt phẳng (P) đi qua I và song song với SC, mà $SC \subset (SCD)$ nên (P) cắt mặt phẳng (SCD) theo giao tuyến q đi qua I và song song với SC.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của CD,SB. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (CDN).

Lời giải



Hình 55

Trong mặt phẳng (SAB), lấy P thuộc SA sao cho $NP//AB$. Vì $AB//CD$ nên $NP//CD$. Hai mặt phẳng (SAB) và (CDN) có điểm chung là N và lần lượt chứa hai đường thẳng AB,CD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng NP.

©. Dạng toán rèn luyện

◆Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

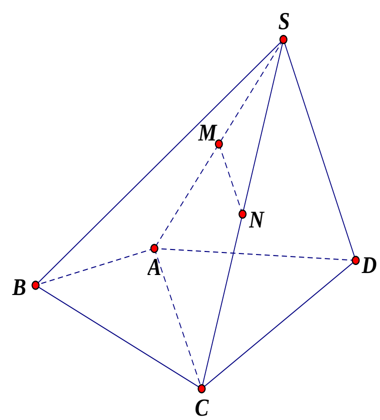
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $MN\,//\left(ABCD\right)$. **B.** $MN\,//\left(SAB\right)$.

C. $MN\,//\left(SCD\right)$. **D.** $MN\,//\left(SBC\right)$.

Lời giải

Chọn A



MN là đường trung bình của tam giác SAC nên $MN\,//\,AC$ mà $AC \in \; ABCD$

$\Rightarrow MN\,//\; ABCD$.

Câu 2: Tìm khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau.

A. Nếu một đường thẳng song song với một mặt phẳng thì nó song song với một đường thẳng nào đó nằm trong mặt phẳng đó.
B. Nếu hai mặt phẳng cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
C. Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến thì ba giao tuyến đó phải đồng quy.
D. Trong không gian, hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba thì hai đường thẳng đó song song với nhau.

Lời giải

Chọn A

A. Đúng.
B. Sai vì hai mặt phẳng có thể trùng nhau.
C. Sai vì ba giao tuyến có thể song song hoặc trùng nhau.
D. Sai hai đường thẳng đó có thể trùng nhau hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

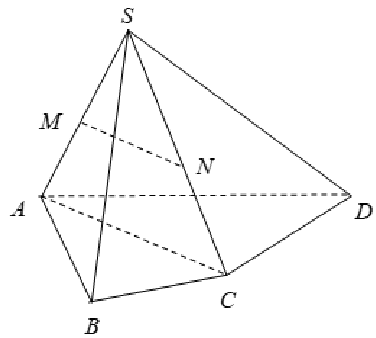
Câu 3: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $MN//\left(ABCD\right)$. **B.** $MN//\left(SAB\right)$.

C. $MN//\left(SCD\right)$. **D.** $MN//\left(SBC\right)$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: MN là đường trung bình của ΔSAC nên $MN // AC$

Mà $MN \not\subset (ABCD)$, $CD \subset (ABCD)$.

Nên $MN // (ABCD)$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của CB. Khẳng định nào sau đây đúng?

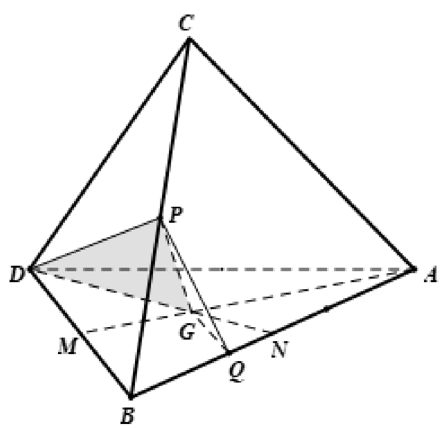
A. $PQ // (BCD)$. **B.** $GQ // (BCD)$.

C. $PQ // (ACD)$. **D.** $Q \in (GDP)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\dfrac{AG}{AM} = \dfrac{AQ}{AB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow GQ // MB \subset (BCD) \Rightarrow GQ // (BCD)$.



.

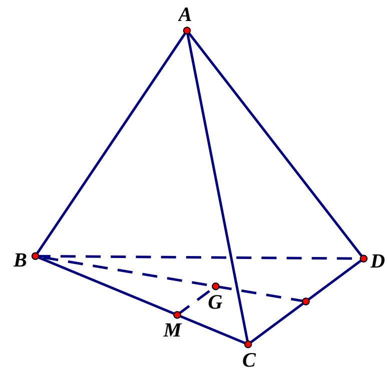
Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. MG song song (ACD). **B.** MG song song (ABD).

C. MG song song (ACB). **D.** MG song song (BCD).

Lời giải

Chọn A



Vì $MG//CD$ nên $MG//(ACD)$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Gọi M là trung điểm của OC. Mặt phẳng (α) qua M và (α) song song với SA và BD. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ và mp(α) là hình gì?

A. hình tam giác. **B.** hình bình hành.
C. hình chữ nhật. **D.** hình ngũ giác

Lời giải

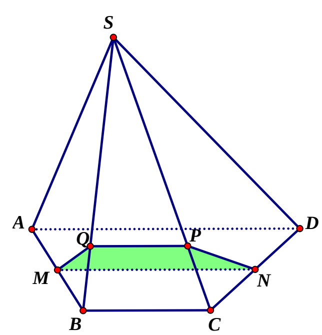
Chọn A

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn AD. M, N lần lượt là hai trung điểm của AB và CD. (P) là mặt phẳng qua MN và cắt mặt bên (SBC) theo một giao tuyến. Thiết diện của (P) và hình chóp là

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang.
C. Hình chữ nhật. **D.** Hình vuông.

Lời giải

Chọn B



Có MN // BC nên MN // (SBC)

Do đó (P) cắt (SBC) theo giao tuyến PQ song song MN.

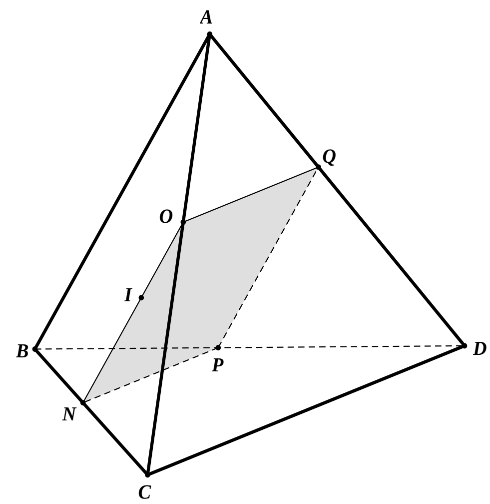
Vậy thiết diện là hình thang MNPQ.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$, điểm I nằm trong tam giác ABC, mặt phẳng (α) đi qua I và song song với AB, CD. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ và mặt phẳng (α) là

A. hình chữ nhật. **B.** hình vuông.
C. hình bình hành. **D.** tam giác.

Lời giải

Chọn C



Xét trong (ABC) ta có: $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (ABC) \\ (\alpha) // AB \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABC) = ON // AB$, với $I \in ON; O \in AC; N \in BC$.

Xét trong (ADC) ta có: $\begin{cases} O \in (\alpha) \cap (ADC) \\ (\alpha) // CD \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ADC) = OQ // CD$, với $Q \in AD$.

Xét trong (BDC) ta có: $\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (BDC) \\ (\alpha) // CD \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (BDC) = NP // CD$, với $P \in PD$.

Suy ra $(\alpha) \cap (ABD) = PQ // AB$.

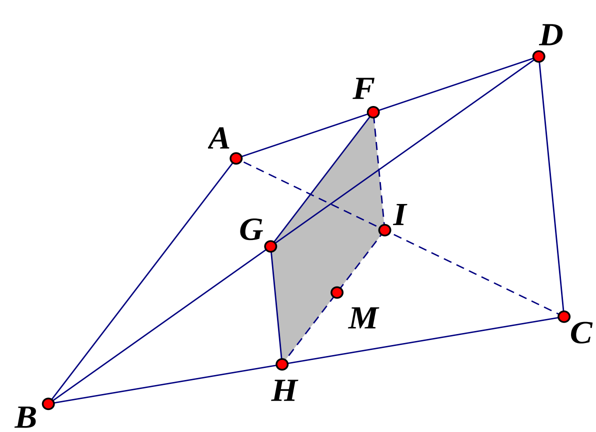
Ta có: $\begin{cases} ON // QP // AB \\ OQ // NP // CD \end{cases}$ nên thiết diện tạo thành là hình bình hành $ONPQ$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. M là điểm nằm trong tam giác ABC, mp α qua M và song song với AB và CD. Thiết diện của $ABCD$ cắt bởi $mp(\alpha)$ là:

A. Tam giá.
B. Hình chữ nhật.
C. Hình vuông.
D. Hình bình hành.

Lời giải

Chọn D



Do $M\in(\alpha),(\alpha)//AB,(\alpha)//CD$ nên $\begin{cases}(\alpha)\cap(ABC)=IH\parallel AB\\(\alpha)\cap(ADB)=GF\parallel AB\\(\alpha)\cap(ADC)=FI\\(\alpha)\cap(BDC)=GH\end{cases}$.

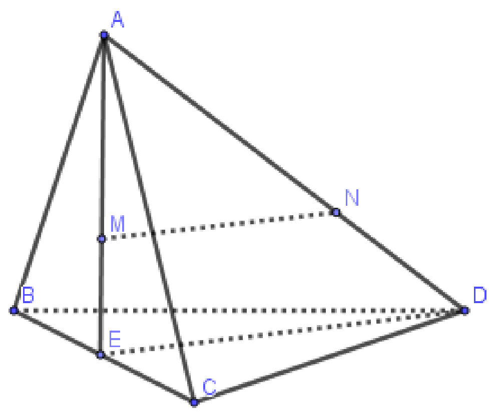
Mà $IH=\dfrac{1}{2}AB=HI$ nên $GHIF$ là hình bình hành.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trọng tâm của ΔABC và N là điểm nằm trên cạnh AD sao cho $AN=2ND$. Khi đó ta có

A. MN cắt BD.
B. $MN//(BCD)$.
C. $MN//CD$.
D. AC cắt BD.

Lời giải

Chọn B



Gọi E là trung điểm BC.

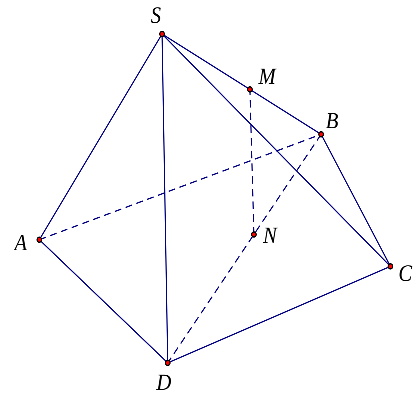
Trong ΔAED, có $\dfrac{AM}{AE}=\dfrac{AN}{AD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow MN//ED\Rightarrow MN//(BCD)$.

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SB và BD. Khẳng định nào sau đây ***đúng***? Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $MN//\ SAC$.
B. $MN//\ SAB$.
C. $MN//\ SBC$.
D. $MN//\ SAD$.

Lời giải

Chọn D



Ta có MN là đường trung bình của tam giác SBD. Suy ra: $MN//\ SD$.

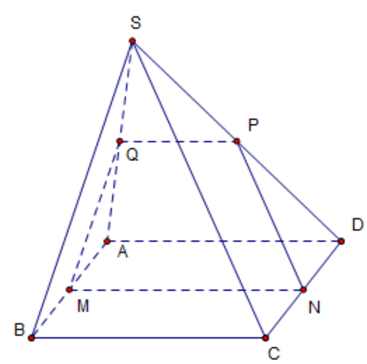
Mà $SD \subset\ SAD$ nên suy ra: $MN//\ \ SAD$ ..

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SD và SA. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây.

A. $PN//\left(SBC\right)$.
B. $MQ//\left(SBC\right)$.
C. $PQ//\left(SAD\right)$.
D. $\mathrm{MN}//\left(SAD\right)$.

Lời giải

Chọn C



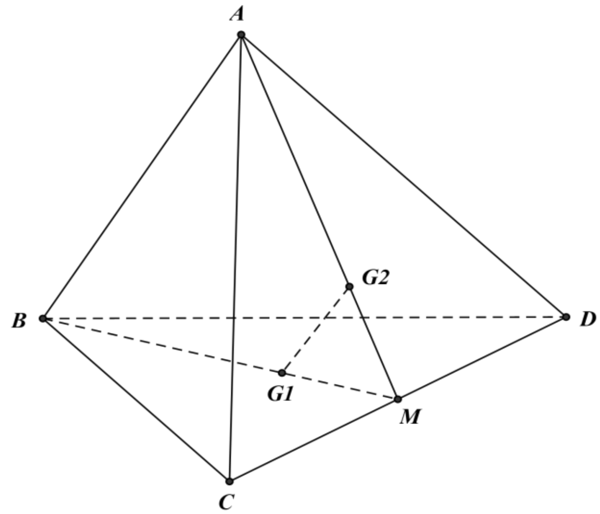
$PQ \subset \left(SAD\right)$ nên khẳng định $PQ//\left(SAD\right)$ là sai.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Chọn khẳng định **sai**?

A. $G_1G_2//\left(ABD\right)$.
B. $G_1G_2//\left(ABC\right)$.
C. BG_1, AG_2 và CD đồng qui.
D. $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AB$.

Lời giải

Chọn D



G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD nên BG_1, AG_2 và CD đồng qui tại M với M là trung điểm CD.

Vì $G_1G_2 // AB$ nên $G_1G_2 // (ABD)$ và $G_1G_2 // (ABC)$.

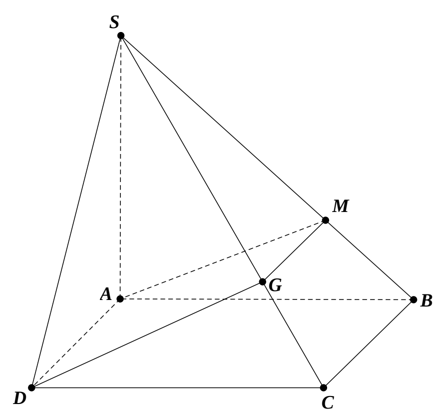
Lại có $\frac{G_1G_2}{AB} = \frac{MG_1}{MB} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 = \frac{1}{3}AB$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB. Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình thang. **B.** Hình chữ nhật.
C. Hình bình hành. **D.** Tam giác.

Lời giải

Chọn A



Do $BC \parallel AD$ nên mặt phẳng (ADM) và (SBC) có giao tuyến là đường thẳng MG song song với BC.

Thiết diện là hình thang $AMGD$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABC$ có E, F lần lượt là trung điểm cạnh AB, BC và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{SG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{SC}$. Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt bởi mặt phẳng (EFG) là hình nào dưới đây?

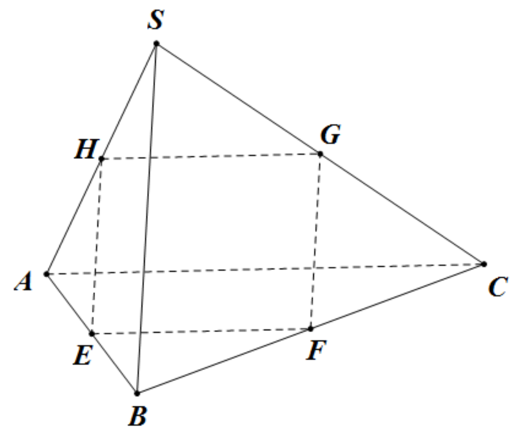
A. Tam giác.

B. Hình bình hành.

C. Hình thang chỉ có một cặp cạnh song song.

D. Hình thoi.

Lời giải



Chọn B

Ta có EF là đường trung bình trong tam giác $ABC,$ suy ra $EF//AC$ (1).

$$\left.\begin{array}{l}(EFG)\cap(SAC)=\{G\}\\ EF\subset(EFG)\\ AC\subset(SAC)\\ EF//AC\end{array}\right\}\Rightarrow (EFG)\cap(SAC)=Gx//FE//AC$$

Gọi $Gx\cap SA=\{H\}$, suy ra H là trung điểm SA và $HG//AC$ (2)

Ta có $\overrightarrow{SG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{SC},$ suy ra G là trung điểm của SC và $GF//SB$ (3).

Ta có HE là đường trung bình trong tam giác $SAB,$ suy ra $HE//SB$ (4)

Từ $(1),(2),(3),(4)$ suy ra thiết diện là hình bình hành $FGHE$.

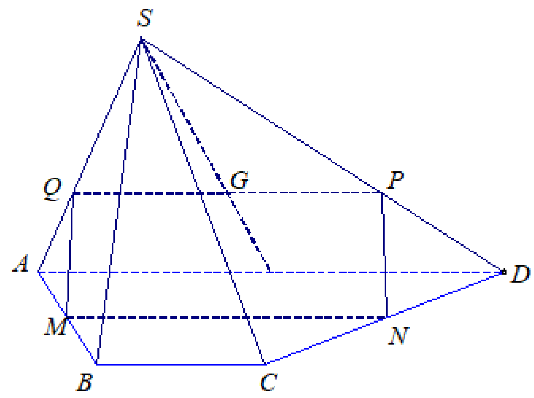
Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AD // BC$, $AD=3BC$. M, N lần lượt là trung điểm AB, CD. G là trọng tâm ΔSAD. Mặt phẳng (GMN) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình bình hành. **B.** ΔGMN.

C. ΔSMN. **D.** Ngũ giác.

Lời giải

Chọn A



Ta có $(GMN) // AD$ nên giao tuyến của (GMN) và (SAD) là đường thẳng PQ qua G và song song với AD, thiết diện là tứ giác $MNPQ$ và vì cùng song song với AD nên $MN // PQ \quad (1)$.

Đặt $BC = a$ khi đó $AD = 3a$ nên $MN = 2a$.

Vì G là trọng tâm tam giác SAD nên $\frac{PQ}{AD} = \frac{2}{3} \Rightarrow PQ = 2a$. Vậy $MN = PQ \quad (2)$.

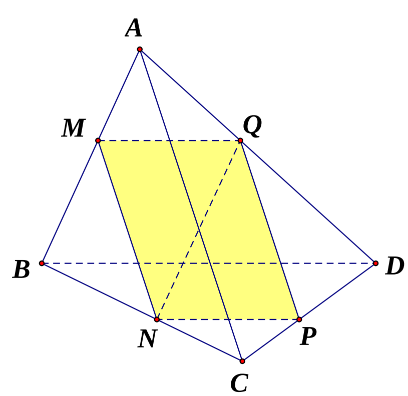
Từ (1) và (2) suy ra, $MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thay đổi trên cạnh AB (M không trùng với các đỉnh). Thiết diện của tứ diện tạo bởi mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng AC và BD luôn là

A. một tam giá.
B. một ngũ giá.
C. một tứ giác có hai đường chéo vuông góc nhau.
D. một tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Lời giải

Chọn D



Từ M dựng đường thẳng song song AC, cắt BC tại N thì MN chứa trong mặt phẳng cần tìm.

Từ M dựng đường thẳng song song BD, cắt AD tại Q thì MQ chứa trong mặt phẳng cần tìm.

Vậy mặt phẳng qua M, song song với hai đường thẳng AC và BD chính là mặt phẳng (MNQ).

Từ N dựng đường thẳng song song BD, cắt CD tại P thì $NP \subset (MNQ)$.

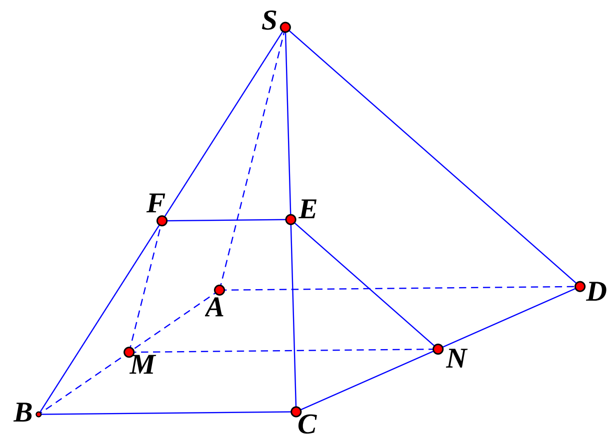
Thiết diện là tứ giác $MNPQ$, tứ giác này có hai cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình thang $(AD // BC)$, gọi M là trung điểm của AB. Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với $SA,\ BC$ cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình gì?

A. Ngũ giác. **B.** Hình bình hành.
C. Tam giác. **D.** Hình thang.

Lời giải

Chọn D



Trong (SAB), kẻ đường thẳng qua M song song với SA cắt SB tại F.

Trong (SBC), kẻ đường thẳng qua F song song với BC cắt SC tại E.

Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua M song song với BC cắt CD tại N.

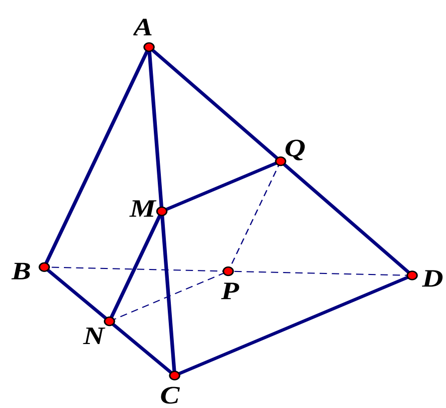
Suy ra thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là hình thang $FENM$ vì có $FE // MN$ (cùng song song với BC).

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD, AB = CD$. Mặt phẳng (α) qua trung điểm của AC và song song với AB, CD cắt tứ diện đã cho theo thiết diện là

A. Hình thoi. **B.** Hình chữ nhật.
C. Hình vuông. **D.** Hình tam giác.

Lời giải

Chọn A



Gọi M là trung điểm của AC.

$$\left.\begin{array}{l} AB // (\alpha) \\ (ABC) \supset AB \\ M \in (ABC) \cap (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow (ABC) \cap (\alpha) = MN // AB$$ với N là trung điểm của BC

$$\left.\begin{array}{l} CD // (\alpha) \\ (DBC) \supset CD \\ N \in (DBC) \cap (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow (DBC) \cap (\alpha) = NP // CD$$ với P là trung điểm của BD

$$\left.\begin{array}{l} AB // (\alpha) \\ (ABD) \supset AB \\ P \in (ABD) \cap (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow (ABD) \cap (\alpha) = PQ // AB$$ với Q là trung điểm của AD

Tương tự có $(ACD) \cap (\alpha) = MQ // CD$

Thiết diện của tứ diện cắt bởi (α) là hình bình hành $MNPQ$ do $MN // PQ, MQ // NP$

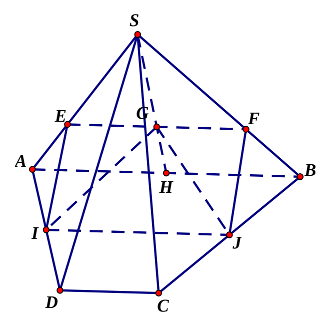
Mặt khác $AB = CD \Rightarrow MN = NP$ (theo tính chất đường trung bình). Vậy $MNPQ$ là hình thoi.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB // CD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB. Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJG) là hình bình hành. Hỏi khẳng định nào sao đây đúng?

A. $AB = \frac{1}{3}CD$. **B.** $AB = \frac{3}{2}CD$. **C.** $AB = 3CD$. **D.** $AB = \frac{2}{3}CD$

Lời giải

Chọn C



Vì $(IJG) \cap (SAB) = \{G\}$ ta có $IJ // AB$ vì IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$

$(IJG) \cap (SAB) = Gx // AB // IJ$. Gọi $E = Gx \cap SA, F = Gx \cap SB$

$(IJG) \cap (SAD) = EI$; $(IJG) \cap (ABCD) = IJ$; $(IJG) \cap (SBC) = JF$

Suy ra thiết diện (IJG) và hình chóp là hình bình hành $IJFE \Leftrightarrow IJ = EF$ (1)

vì G là trọng tâm tam giác $SAB \Leftrightarrow SG = \frac{2}{3}GH \Rightarrow EF = \frac{2}{3}AB$ (2)

và $IJ = \frac{AB + CD}{2}$ (3) vì IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$

Từ $(1),(2)$ và (3) $\Rightarrow \dfrac{2}{3}AB = \dfrac{AB+CD}{2} \Leftrightarrow\ 4AB = 3AB + 3CD \Leftrightarrow AB = 3CD$.

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$ với M,N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD, ACD. Xét các khẳngđịnh sau:

$(I): MN // (ABC)$. $(II): MN // (BCD)$.

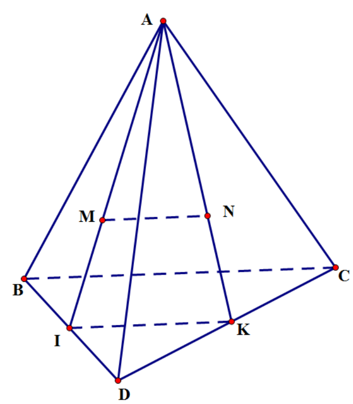
$(III): MN // (ACD)$. $(IV): MN // (ABD)$.

Các mệnh đề đúng là:

A. $(I),(IV)$. **B.** $(II),(III)$. **C.** $(III),(IV)$. **D.** $(I),(II)$.

Lời giải

Chọn D



Gọi I,K lần lượt là trung điểm của BD, DC.

(II) - **Đúng**

Xét tam giác AIK có: $\begin{cases} MN // IK \\ IK \subset (BCD) \\ MN \not\subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow MN // (BCD)$

(I) - **Đúng**

$\begin{cases} MN // IK \\ IK // BC \end{cases} \Rightarrow MN // BC$ và $MN \not\subset (ABC)$ do đó $MN // (ABC)$

Có $M \in (ABD), N \in (ACD)$ do đó: $(III),(IV)$ - **Sai:**.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi I là trung điểm cạnh SC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $IO // (SAB)$.

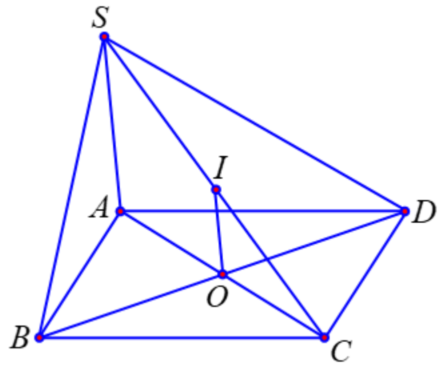
B. $IO // (SAD)$.

C. Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là tứ giác.

D. $mp(IBD) \cap mp(SAC) = IO$.

Lời giải

Chọn D



IO là đường trung bình tam giác SAC nên $IO \,//\, SA \Rightarrow IO // (SAB)$, $IO \,//\, (SAC)$.

Do đó A, B đúng.

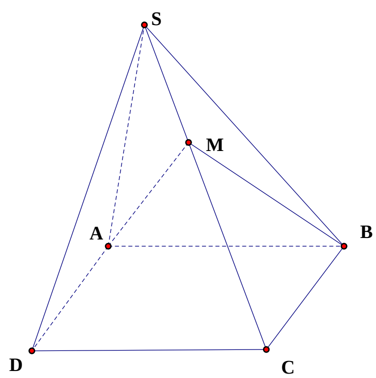
$I \in SC$, $O = AC \cap BD \Rightarrow (IBD) \cap (SAC) = IO$ nên D đúng.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kì trên cạnh SC. Khi đó mặt phẳng (ABM) song song với

A. BD. **B.** AC. **C.** SC. **D.** CD.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} AB \subset (ABM) \\ CD \not\subset (ABM) \\ CD // AB \end{cases}$. Từ đó suy ra $CD // (ABM)$.

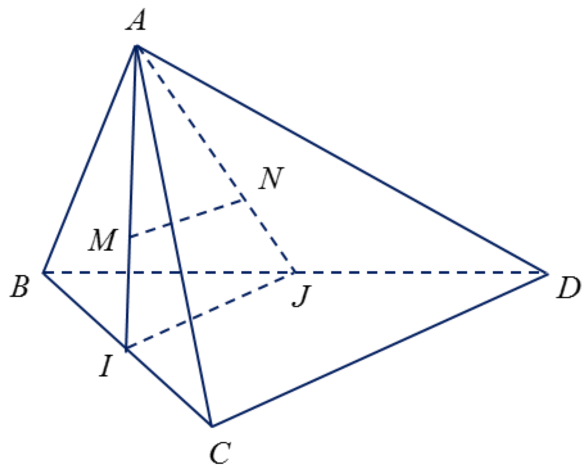
Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ABD Những khẳng định nào sau là đúng?

(1): $MN \,//\, (BCD)$; (2): $MN \,//\, (ACD)$; (3): $MN \,//\, (ABD)$.

A. (1) và (3). **B.** (2) và (3). **C.** (1) và (2). **D.** Chỉ có (1) đúng.

Lời giải

Chọn C



Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC, BD.

Ta có $\frac{AM}{AI}=\frac{AN}{\text{AJ}}=\frac{2}{3}\Rightarrow MN\,//\,\text{IJ}\Rightarrow MN\,//\,IJ\,//\,CD\Rightarrow MN\,//\left(BCD\right)$ và $MN\,//\left(ACD\right)$.

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$, gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD và ACD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $G_1G_2\,//\left(ABD\right)$.

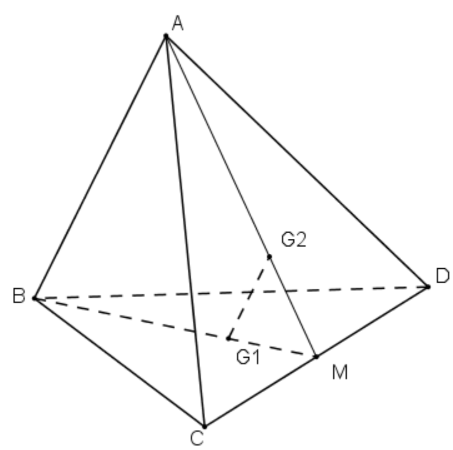
B. $G_1G_2\,//\left(ABC\right)$.

C. $G_1G_2=\frac{2}{3}AB$.

D. Ba đường thẳng BG_1, AG_2 và CD đồng quy.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của CD nên ba đường thẳng BG_1, AG_2 và CD đồng quy tại M, mặt khác:

$\frac{MG_1}{MB}=\frac{MG_2}{MA}=\frac{1}{3}$, suy ra $G_1G_2\,//\,AB$ và $\frac{G_1G_2}{AB}=\frac{1}{3}$.

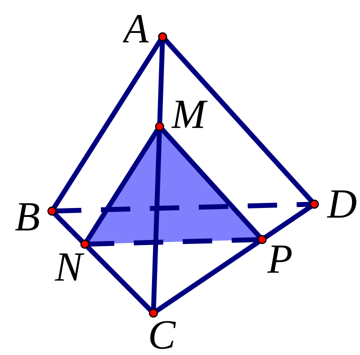
Vậy $G_1G_2\,//\left(ABD\right)$, $G_1G_2\,//\left(ABC\right)$ và $G_1G_2=\frac{1}{3}AB$.

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC (M khác A, M khác C). Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

A. Hình tam giác. **B.** Hình bình hành.
C. Hình vuông. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\left.\begin{matrix}(\alpha)//AB \\ AB\subset(ABC)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\alpha)\cap(ABC)=MN$ với $MN//AB$ và $N\in BC$.

Ta có $\left.\begin{matrix}(\alpha)//AD \\ AD\subset(ADC)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\alpha)\cap(ADC)=MP$ với $MP//AD$ và $P\in CD$.

$(\alpha)\cap(BCD)=NP$.

Do đó thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình tam giác MNP.

Câu 27: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm của SO. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mp(P) qua I và song song BD, và SC là

A. Lục giác. **B.** Ngũ giác.
C. Hình bình hành. **D.** Tứ giác.

Lời giải

Chọn A

Qua I, dựng $MQ//BD$, và $QP//SC$, $PN//BD$, $MN//SC$. Gọi $E=FI\cap SA$.

Ta có: $(ABCD)\cap(P)=NP$, $(SBC)\cap(P)=NM$,

$(SAB)\cap(P)=MF$, $(SAD)\cap(P)=EQ$, $(SCD)\cap(P)=QP$.

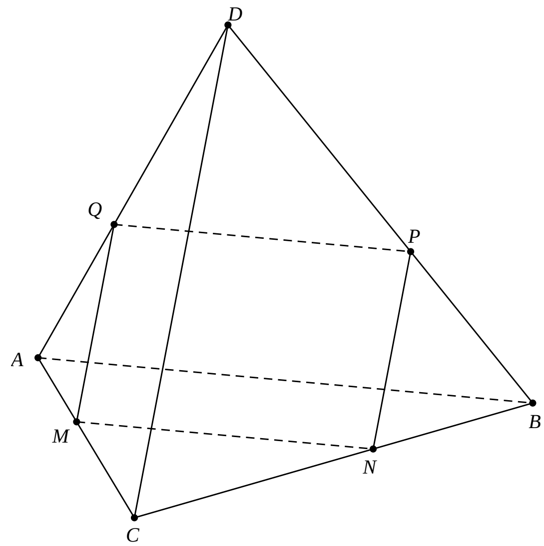
Vậy thiết diện là ngũ giác.

Câu 28: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC (M khác A, M khác C). Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD, cắt tứ diện đã cho theo giao tuyến là

A. Hình vuông. **B.** Hình bình hành.
C. Hình chữ nhật. **D.** Tam giác.

Lời giải

Chọn B



Ta có

$$+)\ \left.\begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ AB \subset (ABC) \\ M \in (\alpha) \cap (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow (ABC) \cap (\alpha) = MN \parallel AB\ (N \in BC).$$

$$+)\ \left.\begin{array}{l} CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (BCD) \\ N \in (\alpha) \cap (BCD) \end{array}\right\} \Rightarrow (BCD) \cap (\alpha) = NP \parallel CD\ (P \in BD).$$

$$+)\ \left.\begin{array}{l} AB \parallel (\alpha) \\ AB \subset (ABD) \\ P \in (\alpha) \cap (ABD) \end{array}\right\} \Rightarrow (ABD) \cap (\alpha) = PQ \parallel AB\ (Q \in AD).$$

Theo cách dựng thì thiết diện $MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a. Điểm M trên cạnh AC thỏa mãn $AM = x\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$. Mặt phẳng (P) qua M, $(P) \parallel SA$, $(P) \parallel BD$ hoặc $(P) \supset BD$. Giá trị x thỏa mãn điều kiện nào để thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác.

A. $0 < x < a\sqrt{2}$.

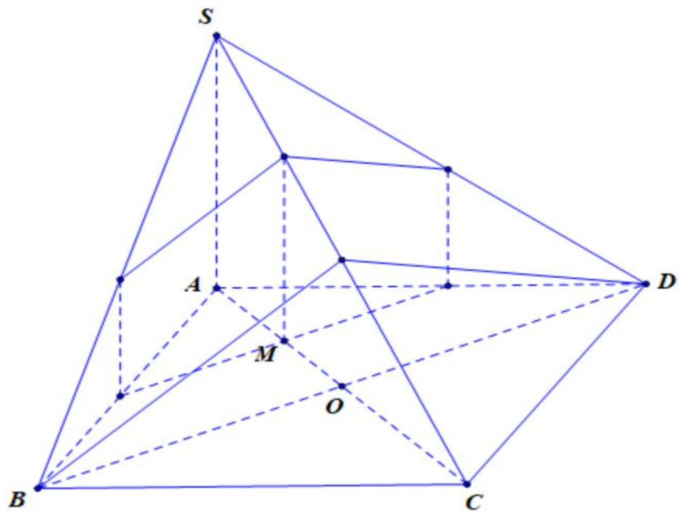
B. $0 < x < \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

C. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2} \le x < a\sqrt{2}$.

D. $\dfrac{a}{2} \le x < a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Dựng thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$, ta có nếu M nằm giữa A,C thì thiết diện là tứ giác, nằm giữa O,C hoặc trùng với O thì thiết diện là tam giác, nên giá trị cần tìm của x là $0 < x < \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giá.

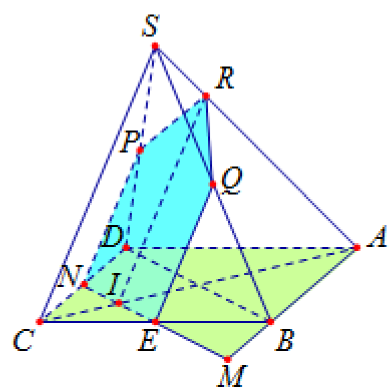
B. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giá.

C. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giá.

D. (P) không cắt hình chóp.

Lời giải

Chọn A



Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua M và song song với BD cắt BC, CD, CA tại K, N, I.

Trong (SCD), kẻ đường thẳng qua N và song song với SC cắt SD tại P.

Trong (SCB), kẻ đường thẳng qua K và song song với SC cắt SB tại Q.

Trong (SAC), kẻ đường thẳng qua I và song song với SC cắt SA tại R.

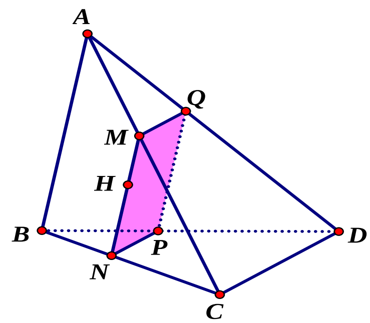
Thiết diện là ngũ giác $KNPRQ$.

Câu 31: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là một điểm nằm trong tam giác ABC, (α) là mặt phẳng đi qua H song song với AB và CD. Mệnh đề nào sau đây đúng về thiết diện của (α) và tứ diện?

A. Thiết diện là hình vuông. **B.** Thiết diện là hình thang cân.
C. Thiết diện là hình bình hành. **D.** Thiết diện là hình chữ nhật.

Lời giải

Chọn C



ABC) cắt (α) theo giao tuyến MN đi qua H và song song với AB ($M \in AC, N \in BC$)

(BCD) cắt (α) theo giao tuyến NP song song với CD ($P \in BD$)

(ACD) cắt (α) theo giao tuyến MQ song song với CD ($Q \in AD$)

(ABD) cắt (α) theo giao tuyến PQ song song với AB

Có MQ//NP (vì cùng song song CD)

Có MN//PQ (vì cùng song song AB)

Vậy thiết diện là hình bình hành MNPQ

◆Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Có vô số mặt phẳng chứa đường thẳng a mà không chứa đường thẳng b		
b)	Nếu mặt phẳng (P) song song với đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng song song với đường thẳng b.		
c)	Nếu mặt phẳng (P) cắt đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng cắt đường thẳng b.		
d)	Nếu mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng chứa đường thẳng b.		

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD, P là trung điểm cạnh SA. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$MN\,//(SBC)$		
b)	$MN\,//(SAD)$		
c)	SB cắt với mặt phẳng (MNP)		
d)	SC cắt với mặt phẳng (MNP)		

Câu 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng và có tâm lần lượt là O và O'. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AE, BD sao cho $AM=\frac{1}{3}AE$, $BN=\frac{1}{3}BD$. Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	OO' song song với mặt phẳng (ADF)		
b)	OO' cắt mặt phẳng (BCE)		
c)	$\frac{BN}{BD}=\frac{2}{3}$		
d)	MN song song với mặt phẳng $(CDFE)$		

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC. Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD. Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AB		
b)	Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (BCD) là đường thẳng đi qua M và song song với CD		
c)	Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB		
d)	Hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của tứ diện (ta gọi là thiết diện) là hình thang		

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, điểm M di động trên cạnh AD. Một mặt phẳng (α) qua M và song song với hai đường thẳng CD, SA, cắt BC, SC và SD lần lượt tại N, P, Q. Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề	Đúng	Sai

a)	Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua M và song song với AD		
b)	Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SAD) là đường thẳng đi qua M và song song với SA		
c)	Tứ giác $MNPQ$ là hình thang có hai đáy là MN và PQ.		
d)	Gọi $I = MQ \cap NP$. Khi đó I thuộc đường thẳng đi qua S và song song với AB		

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và $SCD; E, F$ lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\frac{SJ}{SF} = \frac{2}{3}$		
b)	$IJ // (ABCD)$		
c)	BC song song với mặt phẳng $(SAD), (SEF)$		
d)	BC cắt mặt phẳng (AIJ)		

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2, M$ là một điểm thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt các mặt của hình chóp theo hình là một tứ giác. Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SAB) là đường thẳng đi qua M và song song với AB		
b)	Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SAD) là đường thẳng đi qua M và song song với SD		
c)	$\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$		
d)	Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt các mặt của hình chóp theo hình là một tứ giác có diện tích bằng $\frac{16}{9}$		

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N theo thứ tự là trọng tâm các tam giác SAB, ABC. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AC, BD		
b)	$\dfrac{DN}{DB} = \dfrac{1}{3}$		
c)	MN song song với mặt phẳng (SCD)		
d)	NG cắt với mặt phẳng (SAC)		

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của ΔSAB và ΔSBC. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$AC // (SIJ)$		
b)	HK cắt IJ		
c)	$HK // (SAC)$		
d)	Giao tuyến của (BHK) và (ABC) là đường thẳng đi qua B và song song với AC		

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE, I$ là trung điểm AD. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	OI song song với mặt phẳng (SAB)		
b)	OI song song với mặt phẳng (SCD)		
c)	IE song song với AC		
d)	$GE // (SBC)$		

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

a) Có vô số mặt phẳng chứa đường thẳng a mà không chứa đường thẳng b

b) Nếu mặt phẳng (P) song song với đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng song song với đường thẳng b.

c) Nếu mặt phẳng (P) cắt đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng cắt đường thẳng b.

d) Nếu mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng chứa đường thẳng b.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Có vô số mặt phẳng chứa đường thẳng a mà không chứa đường thẳng b

Khẳng định b sai vì nếu mặt phẳng (P) song song với đường thẳng a thì mặt phẳng (P) có thể song song hoặc chứa đường thẳng b.

Khẳng định c đúng.

Khẳng địnhh d sai. Có vô số mặt phẳng chứa đường thẳng a mà không chứa đường thẳng b $(a,b$ là hai đường thẳng song song).

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD, P là trung điểm cạnh SA. Khi đó:

a) $MN//(SBC)$

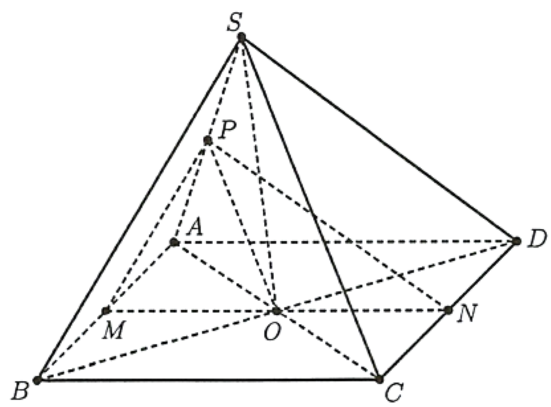
b) $MN//(SAD)$

c) SB cắt với mặt phẳng (MNP)

d) SC cắt với mặt phẳng (MNP)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai



a) b) Chứng minh $MN//(SBC), MN//(SAD)$:

Vì MN là đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ nên $MN//BC$, mà $BC \subset (SBC) \Rightarrow MN//(SBC)$.

Tương tự: $MN//AD, AD \subset (SAD) \Rightarrow MN//(SAD)$.

c) d) Chứng minh $SB//(MNP), SC//(MNP)$:

Ta có MP là đường trung bình của tam giác SAB nên $SB//MP$, mà $MP \subset (MNP)$ nên $SB//(MNP)$.

Tương tự: OP là đường trung bình của tam giác SAC nên $SC//OP$, mà $OP \subset (MNP)$ nên $SC//(MNP)$.

Câu 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng và có tâm lần lượt là O và O'. Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên các cạnh AE, BD sao cho $AM = \frac{1}{3}AE$, $BN = \frac{1}{3}BD$. Khi đó:

a) OO' song song với mặt phẳng (ADF)

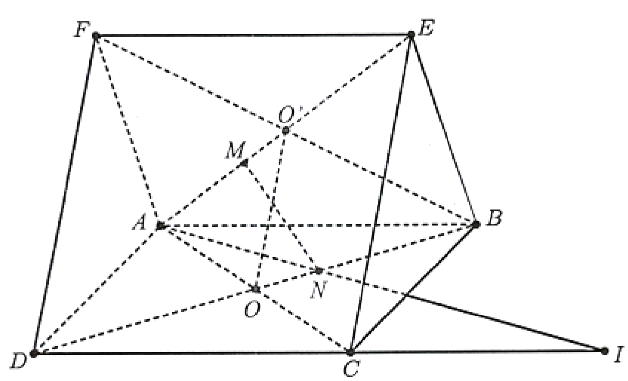
b) OO' cắt mặt phẳng (BCE)

c) $\frac{BN}{BD} = \frac{2}{3}$

d) MN song song với mặt phẳng $(CDFE)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng



a) b) Chứng minh OO' song song với mặt phẳng (ADF) và (BCE) : Ta có OO' là đường trung bình của tam giác BDF nên $OO'//DF$, mà $DF \subset (ADF)$ suy ra $OO'//(ADF)$

Tương tự, OO' là đường trung bình của tam giác ACE nên $OO'//CE$, mà $CE \subset (BCE)$ suy ra $OO'//(BCE)$

c) d) Chứng minh MN song song với mặt phẳng $(CDFE)$:

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $I = AN \cap CD$.

Do $AB//CD$ nên $\frac{AN}{AI}=\frac{BN}{BD}=\frac{1}{3}$.

Mặt khác: $\frac{AM}{AE}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{AN}{AI}=\frac{AM}{AE}\Rightarrow MN//IE$, mà $IE\subset(CDFE)$, suy ra $MN//(CDFE)$.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC. Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD. Khi đó:

a) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AB

b) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (BCD) là đường thẳng đi qua M và song song với CD

c) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB

d) Hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của tứ diện (ta gọi là thiết diện) là hình thang

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

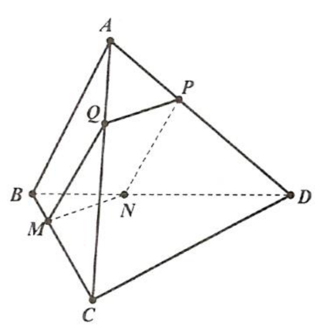
Vì $(\alpha)//AB$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AB và cắt AC tại Q.

Vì $(\alpha)//CD$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (BCD) là đường thẳng đi qua M và song song với CD và cắt BD tại N.

Vì $(\alpha)//AB$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α).với mặt phẳng (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB và cắt AD tại P.

Ta có $MN//PQ//CD, MQ//PN//AB$.

Vậy hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của tứ diện (ta gọi là thiết diện) là hình bình hành $MNPQ$.



Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, điểm M di động trên cạnh AD. Một mặt phẳng (α) qua M và song song với hai đường thẳng CD, SA, cắt BC, SC và SD lần lượt tại N, P, Q. Khi đó:

a) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua M và song song với AD

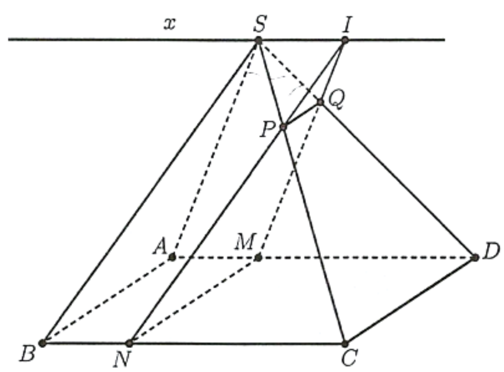
b) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SAD) là đường thẳng đi qua M và song song với SA

c) Tứ giác $MNPQ$ là hình thang có hai đáy là MN và PQ.

b) Gọi $I = MQ \cap NP$. Khi đó I thuộc đường thẳng đi qua S và song song với AB

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai



a) b) c) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

Ta có: $\begin{cases} MN = (\alpha) \cap (ABCD) \\ CD // (\alpha) \\ CD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN // CD.(1)$

Tương tự: $\begin{cases} MQ = (\alpha) \cap (SAD) \\ SA // (\alpha) \\ SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = MQ // SA;$

$\begin{cases} PQ = (\alpha) \cap (SCD) \\ CD // (\alpha) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = PQ // CD (2)$

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $MNPQ$ là hình thang có hai đáy là MN và PQ.

d) Xét $(SAD) \cap (SBC)$.

Ta có: $\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SBC) \\ AD//BC \\ AD \subset (SAD), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SBC) = Sx$

(với Sx qua S và $Sx//AD//BC$).

Vì $\begin{cases} I \in NP, NP \subset (SBC) \\ I \in MQ, MQ \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAD) \cap (SBC)$.

Suy ra $I \in Sx$ (với Sx cố định).

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và $SCD; E, F$ lần lượt là trung điểm của AB và CD. Khi đó:

a) $\frac{SJ}{SF} = \frac{2}{3}$

b) $IJ//(ABCD)$.

b) BC song song với mặt phẳng $(SAD), (SEF)$

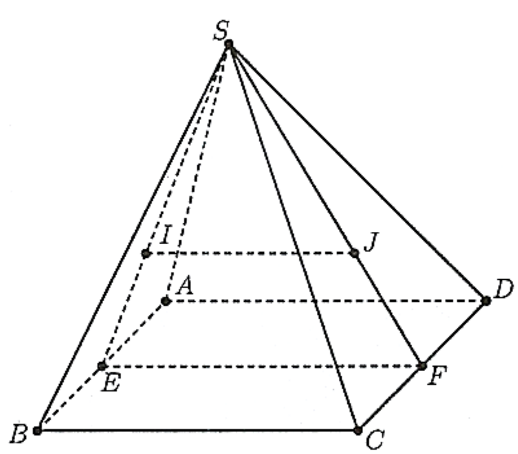
d) BC cắt mặt phẳng (AIJ)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) b) Do I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SCD nên

$\frac{SI}{SE} = \frac{SJ}{SF} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ//EF$ mà $EF \subset (ABCD) \Rightarrow IJ//(ABCD)$.



c) d) Vì $BC//AD, AD \subset (SAD) \Rightarrow BC//(SAD)$.

Vì EF là đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ nên

$BC//EF, EF \subset (SEF) \Rightarrow BC//(SEF)$. Ta có: $IJ//EF, EF//BC \Rightarrow BC//IJ$ mà

$IJ \subset (AIJ) \Rightarrow BC//(AIJ)$.

Câu 7. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2, M$ là một điểm thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt các mặt của hình chóp theo hình là một tứ giác. Khi đó:

a) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SAB) là đường thẳng đi qua M và song song với AB

b) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SAD) là đường thẳng đi qua M và song song với SD

c) $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$

d) Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt các mặt của hình chóp theo hình là một tứ giác có diện tích bằng $\frac{16}{9}$

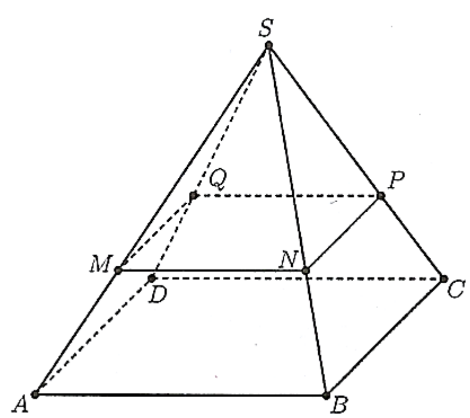
Lời giải

a) Đúng	**b) Sai**	**c) Sai**	**d) Đúng**

Vì $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (\alpha)//AB, AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MN$ với $MN//AB, N \in SB$;

$\begin{cases} M \in (SAD) \cap (\alpha) \\ (\alpha)//AD, AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = MQ$ với $MQ//AD, Q \in SD$.

Vì $BC//AD//MQ$ và $BC \not\subset (\alpha), MQ \subset (\alpha)$ nên $BC//(\alpha)$.



Khi đó, ta có: $\begin{cases} N \in (SBC) \cap (\alpha) \\ (\alpha)//BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (\alpha) = NP$ (với $NP//BC, P \in SC$).

Nối các đỉnh M, N, P, Q ta được một tứ giác.

Ta có: $MN//AB, MQ//AD, NP//BC, PQ//CD$ nên theo định lí Thalès, ta có:

$$\frac{SM}{SA}=\frac{SN}{SB}=\frac{SP}{SC}=\frac{SQ}{SD}=\frac{MN}{AB}=\frac{NP}{BC}=\frac{PQ}{CD}=\frac{MQ}{AD}=\frac{2}{3}.$$

Suy ra $MN=NP=PQ=MQ=\frac{2}{3}\cdot 2=\frac{4}{3}$ (đáy hình của chóp là hình vuông cạnh 2).

Dễ thấy $MNPQ$ là một hình vuông có cạnh bằng $\frac{4}{3}$ nên có diện tích bằng $\frac{16}{9}$ (đơn vị diện tích).

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD=3AM$. Gọi G, N theo thứ tự là trọng tâm các tam giác SAB, ABC. Khi đó:

a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AC, BD

b) $\frac{DN}{DB}=\frac{1}{3}$

c) MN song song với mặt phẳng (SCD)

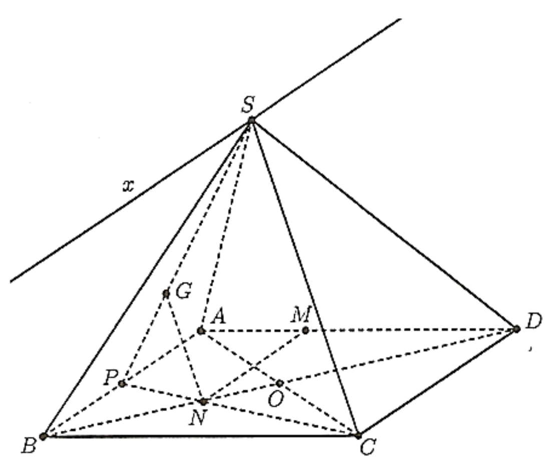
d) NG cắt với mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Sai	**b) Sai**	**c) Đúng**	**d) Sai**

a) Ta có: $\begin{cases} S\in (SAB)\cap (SCD) \\ AB//CD \\ AB\subset (SAB), CD\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB)\cap (SCD)=Sx$

(với Sx qua S và $Sx//AB//CD$).



c) Chứng minh MN song song với mặt phẳng (SCD):

Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Vì N là trọng tâm của ΔABC nên $BN=\frac{2}{3}BO=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}BD=\frac{1}{3}BD\Rightarrow\frac{DN}{DB}=\frac{2}{3}$.

Mặt khác, ta có: $AD=3AM\Rightarrow\frac{DM}{DA}=\frac{2}{3}$.

Xét tam giác ADB, ta có: $\frac{DM}{DA}=\frac{DN}{DB}=\frac{2}{3}$ nên $MN//AB\Rightarrow MN//CD$,

mà $CD\subset(SCD)\Rightarrow MN//(SCD)$.

d) Chứng minh NG song song (SAC) :

Gọi P là trung điểm AB. Tam giác SPC có:

$\frac{PG}{PS}=\frac{PN}{PC}=\frac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm)

$\Rightarrow NG//SC, SC\subset(SAC)\Rightarrow NG//(SAC)$

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Gọi H,K lần lượt là trọng tâm của ΔSAB và ΔSBC. Khi đó:

a) $AC//(SIJ)$.

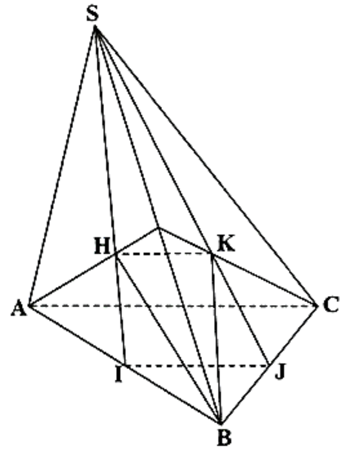
b) HK cắt IJ

c) $HK//(SAC)$.

d) Giao tuyến của (BHK) và (ABC) là đường thẳng đi qua B và song song với AC.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng



a) Vì IJ là đường trung bình ΔABC nên $IJ//AC$.

Ta có: $\begin{cases} AC//IJ \\ IJ \subset (SIJ) \\ AC \not\subset (SIJ) \end{cases} \Rightarrow AC//(SIJ)$.

b) Ta có $\dfrac{SH}{HI} = \dfrac{SK}{KJ} = 2(H, K$ lần lượt là trọng tâm ΔSAB và $\Delta SAC)$.

$\Rightarrow HK//IJ$

Lại có $\begin{cases} HK//AC(HK//IJ, AC//IJ) \\ AC \subset (SAC) \\ HK \not\subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK//(SAC)$

c) Ta có $\begin{cases} HK//AC \\ HK \subset (BHK) \\ AC \subset (ABC) \\ B \in (BHK) \cap (ABC) \end{cases}$

Vậy giao tuyến của (BHK) và (ABC) là đường thẳng Bx đi qua B và song song với AC và HK.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE, I$ là trung điểm AD. Khi đó:

a) OI song song với mặt phẳng (SAB)

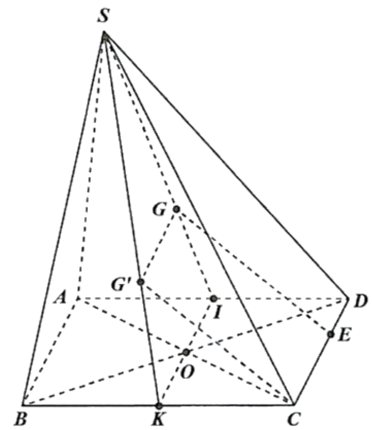
b) OI song song với mặt phẳng (SCD)

c) IE song song với AC

d) $GE//(SBC)$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng



a) Ta có $\begin{cases} OI \not\subset (SAB), AB \subset (SAB) \\ OI \parallel AB \end{cases} \Rightarrow OI \parallel (SAB)$

Tương tự, $\begin{cases} OI \not\subset (SCD), CD \subset (SCD) \\ OI \parallel CD \end{cases} \Rightarrow OI \parallel (SCD)$.

b) Vì $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{3} = \dfrac{DE}{DC}$ nên IE không song song với AC. Trong hình chữ nhật $ABCD$, gọi

$P = IE \cap BC$

$\Rightarrow P = IE \cap (SBC)$.

Gọi K là trung điểm của BC, G' là trọng tâm tam giác SBC.

Khi đó $\dfrac{SG'}{SK} = \dfrac{SG}{SI} = \dfrac{G'G}{KI} = \dfrac{2}{3}$, suy ra $G'G \parallel KI \parallel CE$ và $\Rightarrow G'G = \dfrac{2}{3}KI = \dfrac{2}{3}CD = CE$.

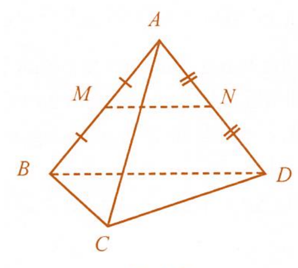
Do đó tứ giác $G'GEC$ là hình bình hành, suy ra $CG' \parallel CE \Rightarrow CG \parallel (SBC)$.

⬩Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD.

Chứng minh rằng $MN // (BCD)$.

Lời giải



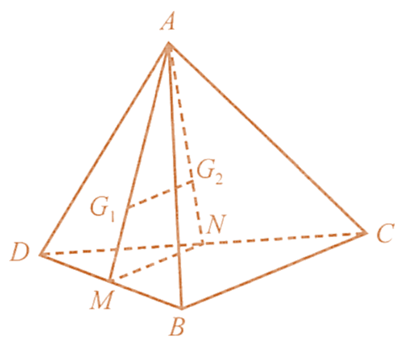
Hình 7

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD nên MN là đường trung bình của tam giác ABD.

Suy ra $MN // BD$. Mà $BD \subset (BCD)$ nên $MN // (BCD)$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABD và ACD. Chứng minh G_1G_2 song song với các mặt phẳng (ABC) và (BCD).

Lời giải



Hình 1

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DB, DC.

Ta có MN là đường trung bình của tam giác DBC, suy ra $MN // BC$.

Trong tam giác AMN, ta có $\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN} = \frac{2}{3}$.

Theo định lí Thalès đảo trong tam giác AMN, ta có $G_1G_2 // MN$. Suy ra $G_1G_2 // MN // BC$, suy ra G_1G_2 song song với các mặt phẳng (ABC) và (BCD).

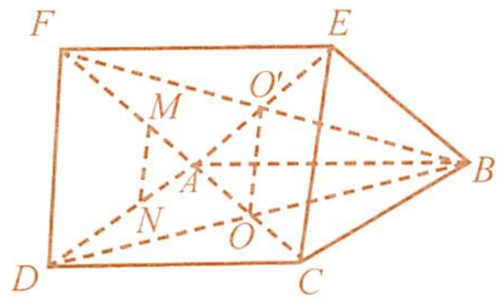
Câu 3: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng có tâm lần lượt là O và O'.

a) Chứng minh OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc hai cạnh AF, AD sao cho $AM = \frac{1}{3}AF$, $AN = \frac{1}{3}AD$.

Chứng minh $MN // (DCEF)$.

Lời giải



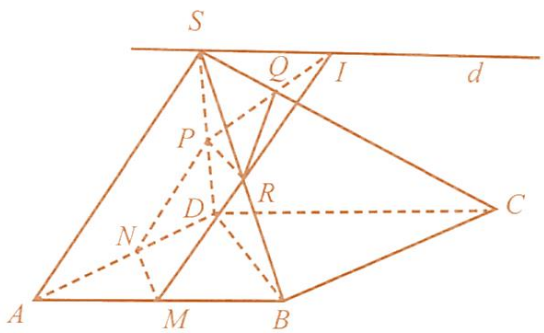
Hình 2

a) Ta có $OO' // DF // CE$, suy ra OO' song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) Ta có $\frac{AM}{AF} = \frac{AN}{AD}$, suy ra $MN // DF$, suy ra $MN // (DCEF)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB, song song với BD và SA. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp.

Lời giải



Hình 5

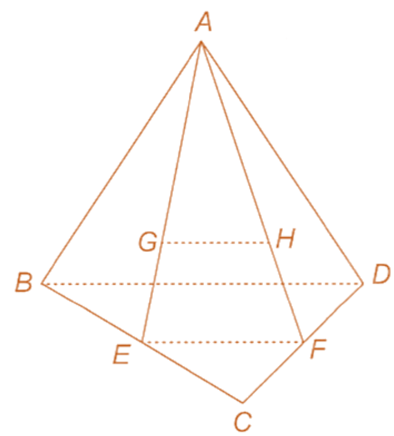
Gọi N, P, R lần lượt là trung điểm của AD, SD, SB. Trong mặt phẳng (SAB) vẽ đường thẳng d đi qua S và $d // AB // CD$. MR cắt d tại I, PI cắt SC tại Q.

Suy ra: $(\alpha)\cap(ABCD)=MN$, $(P)\cap(SAD)=NP,(\alpha)\cap(SCD)=PQ$,

$(\alpha)\cap(SBC)=QR,(\alpha)\cap(SAB)=MR$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và H lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC và ACD. Chứng minh rằng $GH//(BCD)$.

Lời giải

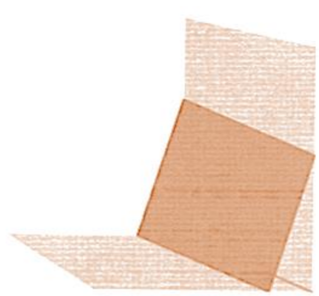


Hình 4.51

Gọi E,F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CD. Vì G là trọng tâm của tam giác ABC, nên A,G,E thẳng hàng và $\frac{AG}{AE}=\frac{2}{3}$.

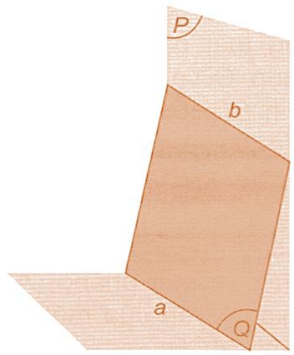
Tương tự có A,H,F thẳng hàng và $\frac{AH}{AF}=\frac{2}{3}$. Do đó $\frac{AG}{AE}=\frac{AH}{AF}$. Theo định lí Thalès đảo, suy ra tam giác AEF có $GH//EF$, vì vậy $GH//(BCD)$.

Câu 6: Một tấm bảng hình chữ nhật được đặt dựa vào tường như trong Hình 4.18.


Hình 4.18

Hãy giải thích vì sao mép trên của tấm bảng song song với mặt đất, mép dưới của tấm bảng song song với mặt tường.

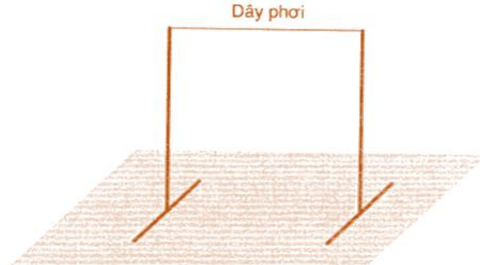
Lời giải



Hình 4.54

Gọi (P) là mặt tường và (Q) là mặt bảng. Gọi a là mép dưới của bảng và b là mép trên thì b nằm trong (P). Vì bảng có dạng hình chữ nhật nên $a//b$, do đó $a//(P)$, tức là mép dưới của bảng song song với mặt tường. Giải thích tương tự suy ra mép trên của bảng song song với mặt đất.

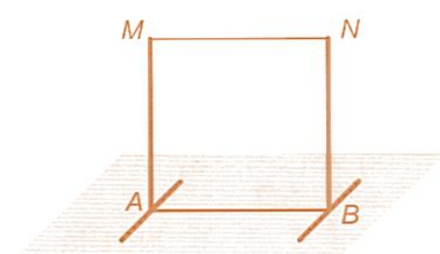
Câu 7: Để dựng dây phơi quần áo, bác Việt lắp hai thanh sắt thẳng đứng có chiều dài bằng nhau trên mặt đất và căng dây nối hai đầu còn lại của hai thanh sắt (H.4.19).



Hình 4.19

Khi đó, dây phơi có song song với mặt đất không? Giải thích vì sao.

Lời giải

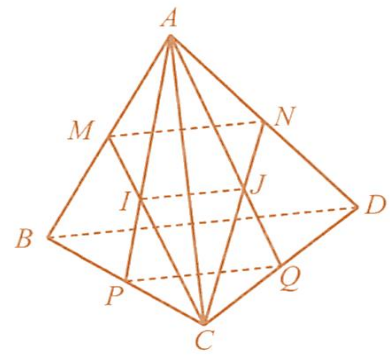


Hình 4.55

Gọi hai đầu của hai thanh sắt trên mặt đất là A, B và hai đầu tương ứng còn lại là M, N thì $AM//BN$ và $AM = BN$, suy ra $ABNM$ là hình bình hành. Vì vậy $MN//AB$ và do đó dây phơi (nối hai điểm M, N) song song với mặt đất (chứa đường thẳng AB).

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, BC, CD. Chứng minh rằng giao tuyến của hai mặt phẳng (APQ) và (CMN) song song với đường thẳng BD.

Lời giải



Hình 54

Vì MN là đường trung bình của tam giác ABD nên $MN // BD$, mà $MN \subset (CMN)$ nên $BD // (CMN)$. Vì PQ là đường trung bình của tam giác BCD nên $PQ // BD$, mà $PQ \subset (APQ)$ nên $BD // (APQ)$.

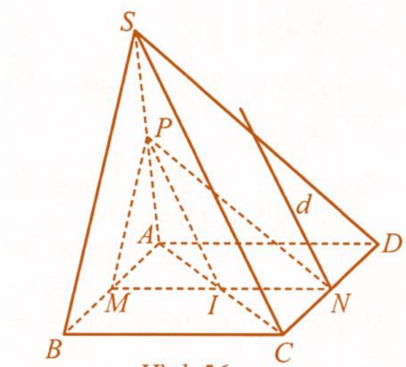
Trong mặt phẳng (ABC), gọi I là giao điểm của AP và MC; trong mặt phẳng (ACD), gọi J là giao điểm của AQ và NC. Khi đó, IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng (APQ) và (CMN). Mà $BD // (CMN)$ và $BD // (APQ)$ nên $IJ // BD$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SA.

a) Chứng minh rằng SC song song với mặt phẳng (MNP).

b) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SCD).

Lời giải

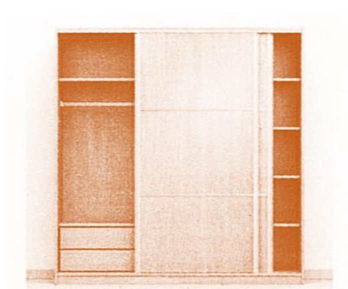


Hình 56

a) Gọi I là giao điểm của AC với MN. Ta có I là trung điểm của AC nên PI là đường trung bình của tam giác SAC, suy ra $PI // SC$, mà $PI \subset (MNP)$ nên $SC // (MNP)$.

b) Hai mặt phẳng (MNP) và (SCD) có điểm chung là N và lần lượt chứa hai đường thẳng PI, SC song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SCD) là đường thẳng d đi qua N và song song với SC.

Câu 10: Trong các không gian hẹp, người ta thường thiết kế tủ đựng quần áo có cánh cửa trượt. Tủ này bao gồm khoang tủ, cánh cửa trượt và hai đường ray trượt cho mép trên và mép dưới cánh cửa (Hình 25). Biết rằng cánh cửa trượt có dạng hình chữ nhật và có thể kéo trượt bình thường, khi đó bạn Minh nói: "Đường ray trượt ở mép trên cửa song song với mặt đáy của tủ quần áo". Em hãy cho biết phát biểu của bạn Minh đúng hay sai? Vì sao?


Hình 25

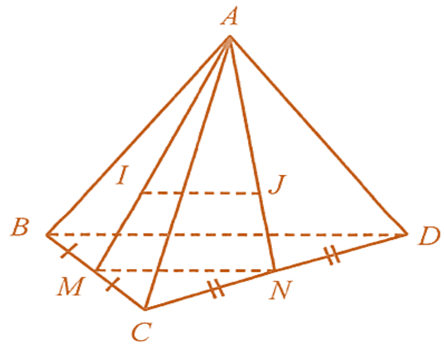
Lời giải

Phát biểu của bạn Minh là đúng. Vì cánh cửa là hình chữ nhật và có thể kéo trượt bình thường nên đường ray trên và đường ray dưới của cánh cửa song song với nhau. Đường ray dưới có thể xem là đường thẳng thuộc mặt đáy của tủ. Vì vậy đường ray trượt ở mép trên cánh cửa song song với mặt đáy của tủ quần áo.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABC, ACD. Chứng minh rằng $IJ // (BCD)$.

Lời giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD.



Hình 8

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác BCD. Suy ra $MN//BD$. (1)

Mặt khác, I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ACD nên $\dfrac{AI}{AM}=\dfrac{AJ}{AN}=\dfrac{2}{3}$.

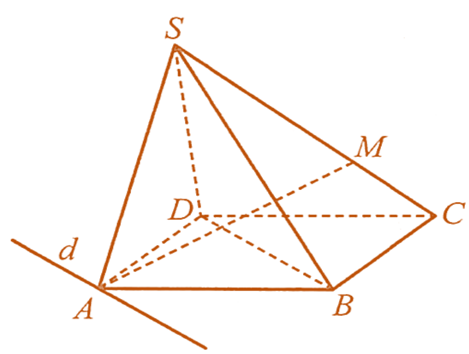
Theo định lí Thalès đảo trong tam giác AMN, ta có $IJ//MN$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IJ//BD$.

Mà $BD \subset (BCD)$ nên $IJ//(BCD)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm chuyển động trên cạnh $SC(M$ khác $C),(P)$ là mặt phẳng chứa đường thẳng AM và song song với BD. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) luôn đi qua một đường thẳng cố định khi điểm M chuyển động trên cạnh SC.

Lời giải



Hình 57

Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng AM và song song với BD nên (P) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến d đi qua A và song song với BD. Vì hình bình hành $ABCD$ cố định nên đường thẳng d cố định trong $(ABCD)$.

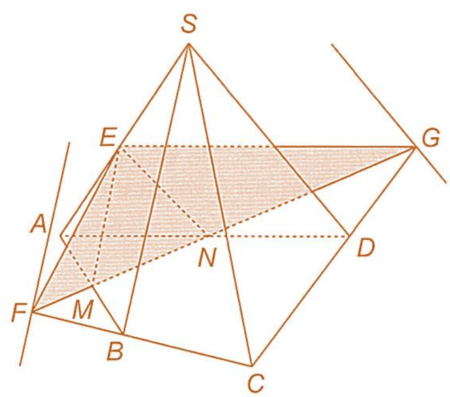
Vậy khi M chuyển động trên cạnh SC thì mặt phẳng (P) luôn luôn đi qua đường thẳng d cố định.

Câu 13: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ và E là một điểm bất kì thuộc cạnh SA. Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng SB, SD. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh AB, AD.

a) Chứng minh rằng $EM // SB$ và $EN // SD$.

b) Giả sử đường thẳng MN cắt các đường thẳng BC, CD. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và các mặt phẳng $(SBC), (SCD)$.

Lời giải



Hình 4.52

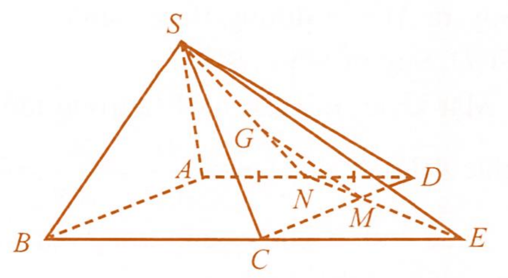
a) Mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng SB song song với (P) nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó song song với SB, suy ra $EM // SB$. Tương tự có $EN // SD$.

b) Gọi F, G lần lượt là giao điểm của đường thẳng MN và hai đường thẳng BC, CD. Trong mặt phẳng (SBC), vẽ đường thẳng qua F và song song với SB thì đường thẳng đó là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC). Trong mặt phẳng (SCD), vẽ đường thẳng qua G và song song với SD thì đường thẳng đó là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SCD).

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD, M là điểm trên đoạn DC sao cho $DC = 3DM$.

Chứng minh rằng $MG // (SBC)$.

Lời giải



Hình 11

Gọi N là trung điểm của AD. Ta có $MG \subset (SMN)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = MN \cap BC$.

Ta có $S \in (SNM) \cap (SBC)$; $E \in MN$ và $MN \subset (SMN)$; $E \in BC$ và $BC \subset (SBC)$.

Suy ra $(SMN) \cap (SBC) = SE$.

Dễ thấy $\Delta MND \text{ cs } \Delta MEC$, suy ra $\frac{MN}{ME} = \frac{MD}{MC} = \frac{1}{2}$, suy ra $\frac{MN}{NE} = \frac{1}{3}$.(1)

Mặt khác, $\frac{GN}{SN} = \frac{1}{3}$ (G là trọng tâm của tam giác SAD). (2)

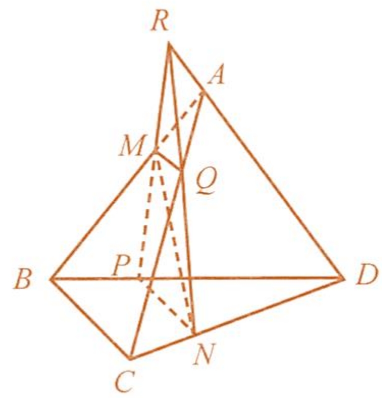
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{GN}{SN} = \frac{MN}{NE}$.

Theo định lí Thalès đảo trong tam giác SNE, ta có $MG // SE$.

Mà $SE \subset (SBC)$ nên $MG // (SBC)$.

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc hai cạnh AB và CD. Đặt (α) là mặt phẳng qua MN và song song với BC. Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện $ABCD$.

Lời giải



Hình 12

Ta có: $BC \subset (BCD); N \in (\alpha) \cap (BCD)$; $(\alpha) // BC$.

Suy ra $(\alpha) \cap (BCD) = Nx$, vói $Nx // BC$.

Trong mặt phẳng (BCD), gọi P là giao điểm của Nx và BD.

Suy ra $NP = (\alpha) \cap (BCD)$.

Ta có $BC \subset (ABC); M \in (\alpha) \cap (ABC)$; $(\alpha) // BC$.

Suy ra $(\alpha) \cap (ABC) = My$ với $My // BC$.

Trong mặt phẳng (ABC), gọi Q là giao điểm của My và AC.

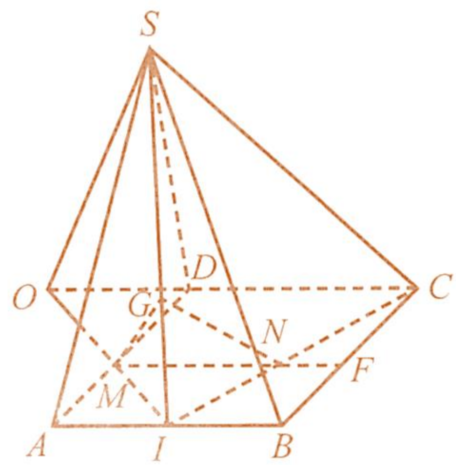
Suy ra $MQ = (\alpha) \cap (ABC)$.

Từ đó, dễ thấy: $(\alpha) \cap (ABD) = MP; (\alpha) \cap (ACD) = QN$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB, I là trung điểm của AB và M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $AM = \frac{1}{3}AD$. Đường thẳng đi qua M và song song với AB cắt CI tại N. Chứng minh:

a) $NG // (SCD)$; b) $MG // (SCD)$.

Lời giải



Hình 3

a) Gọi F là giao điểm của MN và BC.

Ta có $MN//AB$, suy ra $NF//BI$ (vì $F \in MN$, $I \in AB$).

Trong tam giác CIB có $NF//BI$, nên theo định lí Thalès ta có: $\frac{NI}{CI} = \frac{BF}{BC} = \frac{1}{3}$.

Trong tam giác SAB, ta có G là trọng tâm nên $\frac{GI}{SI} = \frac{1}{3}$.

Trong tam giác SIC, ta có $\frac{GI}{SI} = \frac{NI}{CI} = \frac{1}{3}$, suy ra $NG//SC$ (định lí Thalès đảo).

Do đó $NG//(SDC)$.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi O là giao điểm của MI và DC.

Trong tam giác OCI có $MN//OC$, suy ra $\frac{MI}{OI} = \frac{IN}{IC} = \frac{1}{3}$ (theo định lí Thalès).

Mà $\frac{IG}{SI} = \frac{1}{3}$($G$ là trọng tâm của tam giác SAB).

Do đó, trong tam giác SOI có $\frac{MI}{OI} = \frac{IG}{SI} = \frac{1}{3}$, suy ra $MG//SO$ (định lí Thalès đảo).

Do đó $MG//(SDC)$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB và CD, P là trung điểm của SA. Chứng minh:

a) MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD);

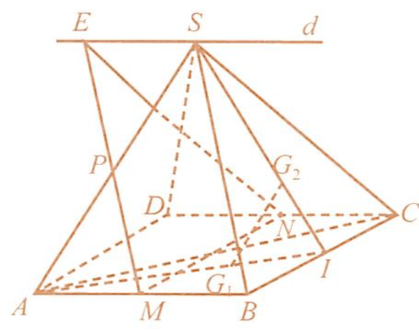
b) SB song song với (MNP);

c) SC song song với (MNP).

d) Gọi G_1 và G_2 theo thứ tự là trọng tâm của hai tam giác ABC và SBC.

Chứng minh G_1G_2 song song với (SAD).

Lời giải



Hình 4

a) Ta có $BC \subset (SBC)$ và $MN//BC$, suy ra $MN//(SBC)$; $AD \subset (SAD)$ và $MN//AD$,

suy ra $MN//(SAD)$.

b) Trong tam giác SAB, có PM là đường trung bình, suy ra $SB//MP$, suy ra $SB//(MNP)$

c) Trong mặt phẳng (SAB) vẽ đường thẳng d đi qua S và $d//AB$. Gọi E là giao điểm của MP và d, ta có $MBSE$ là hình bình hành, suy ra $SE//MB$ và $SE = MB$, suy ra $SE//CN$ và $SE = CN$, suy ra $SC//NE$. Ta lại có $NE \subset (MNP)$, suy ra $SC//(MNP)$.

d) Trong mặt phẳng (SBC), gọi I là giao điểm của SG_2 và BC.

Trong tam giác SIA, ta có $\frac{IG_1}{IA} = \frac{IG_2}{IS} = \frac{1}{3}$, theo định lí Thalès đảo suy ra $G_1G_2//SA$,

suy ra $G_1G_2//(SAD)$.

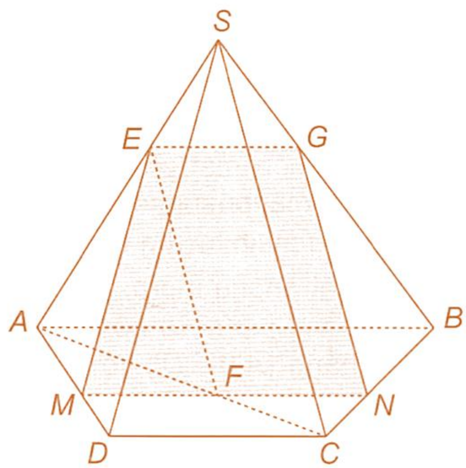
Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi E là một điểm bất kì thuộc cạnh SA. Gọi (P) là mặt phẳng qua E và song song với hai đường thẳng AB và SC.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAC), từ đó tìm một điểm chung của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và các mặt còn lại của hình chóp.

Lời giải



Hình 4.53

a) Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (P) song song với SC. Do đó, trong mặt phẳng (SAC), vẽ đường thẳng $EF\,//\,SC(F \in AC)$ thì EF là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (SAC). Điểm F là điểm chung của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

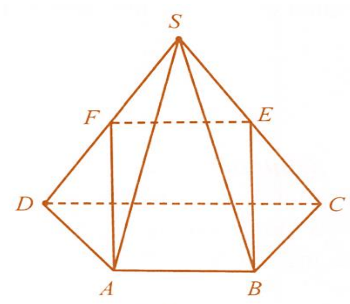
b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, vẽ đường thẳng MN qua F và song song với AB $(M \in AD, N \in BC)$ thì MN là giao tuyến của (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

c) Trong mặt phẳng (SAB), vẽ đường thẳng $EG\,//\,AB(G \in SB)$ thì EG là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (SAB). Các giao tuyến của (P) và các mặt của hình chóp là EG, MN, EM, GN.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy nhỏ $AB = a$, đáy lớn $CD = 2a$. Gọi E là trung điểm của SC. Chứng minh rằng $BE\,//\,(SAD)$.

Lời giải

Cách 1:



Hình 9

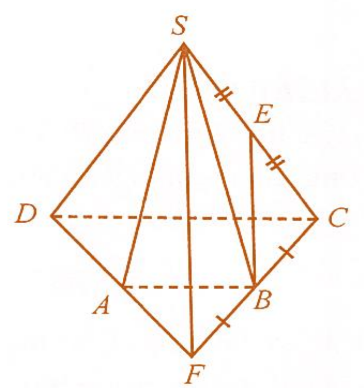
Gọi F là trung điểm của SD. EF là đường trung bình của tam giác SCD.

Suy ra $EF//CD$ và $EF=\frac{1}{2}CD$.

Mà $AB//CD$ và $AB=\frac{1}{2}CD$. Do đó, $EF//AB$ và $EF=AB$ hay $ABEF$ là hình bình hành.

Suy ra $BE//AF$. Mà $AF\subset(SAD)$. Vậy $BE//(SAD)$.

Cách 2:



Hình 10

Gọi F là giao điểm của BC và AD.

Ta có $AB//CD$ và $AB=\frac{1}{2}CD$, suy ra AB là đường trung bình của tam giác CDF.

Do đó B là trung điểm của FC.

Suy ra BE là đường trung bình của tam giác SCF hay $BE//SF$.

Mà $SF\subset(SAD)$ nên $BE//(SAD)$.