MỤC LỤC

▶BÀI 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

1. Giới hạn hữu hạn của dãy số

Giới hạn 0 của dãy số

- Dãy số (u_n) ***có giới hạn*** 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bất kì cho trước, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ *hay* $u_n \to 0$ *khi* $n \to +\infty$. Ta còn viết là $\lim u_n = 0$.
- Ta thừa nhận một số giới hạn cơ bản sau đây:
- $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$, với k nguyên dương bất kì.
- $\lim q^n = 0$, với q là số thực thỏa mãn $|q| < 1$.

Giới hạn hữu hạn của dãy số

- Dãy số (u_n) ***có giới hạn hữu hạn*** là số a (hay u_n dần tới a) khi n dần tiến tới dương vô cực, nếu $\lim(u_n - a) = 0$.
- Khi đó, ta viết $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ *hay* $\lim u_n = a$ *hay* $u_n \to a$ *khi* $n \to +\infty$.

Chú ý: Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của dãy số

- Cho $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ *và* c là hằng số. Khi đó:

$$\lim(u_n + v_n) = a + b \qquad \lim(u_n - v_n) = a - b$$

$$\lim(c.u_n) = c.a \qquad \lim(u_n.v_n) = a.b$$

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b} \ (b \neq 0)$$

- Nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ *thì* $a \geq 0$ *và* $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

- ***Cấp số nhân*** vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là ***cấp số nhân lùi vô hạn***.
- Cấp số nhân lùi vô hạn này có tổng là:
- $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \dfrac{u_1}{1-q}$

❹. Giới hạn vô cực

- Ta nói dãy số (u_n) ***có giới hạn*** là nếu u_n lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim u_n = +\infty$ *hay* $u_n \to +\infty$ *khi* $n \to +\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) ***có giới hạn*** là $-\infty$ *khi* $n \to +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim u_n = -\infty$ *hay* $u_n \to -\infty$ *khi* $n \to +\infty$.

Chú ý: Ta có các kết quả sau:

- a) $\lim u_n = +\infty$ khi và chỉ khi $lim(-u_n) = -\infty$;
- b) Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = 0$;
- c) Nếu $\lim u_n = 0$ *và* $u_n > 0$ với mọi n thì $\lim \dfrac{1}{u_n} = +\infty$.

Nhận xét:

- $a) \lim n^k = +\infty (k \in \mathbb{N}, k \ge 1)$; $\quad b) \lim q^n = +\infty (q > 1)$.

Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

⬩Dạng ❶: Xác định giới hạn của dãy số bằng định nghĩa

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Chứng minh rằng $\lim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$.

Lời giải

Xét dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Giả sử h là số dương bé tuỳ ý cho trước. Ta có:

$|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Do đó: $|u_n| < h \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{n}} < h \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < h^2 \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{h^2}$. 65

Vậy với các số tự nhiên n lớn hơn $\dfrac{1}{h^2}$ thì $|u_n| < h$.

Theo định nghĩa về dãy số có giới hạn 0, ta có: $\lim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$.

Câu 2: Chứng minh rằng $\lim \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$.

Lời giải

Xét dãy số (u_n) có $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$. Giả sử h là số dương bé tuỳ ý cho trước. Ta có:

$|u_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right| = \dfrac{1}{n^2}$. Do đó: $|u_n| < h \Leftrightarrow \dfrac{1}{n^2} < h \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \sqrt{h} \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\sqrt{h}}$. Vậy với các số tự nhiên n lớn hơn $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ thì $|u_n| < h$. Suy ra $\lim \dfrac{(-1)^n}{n^2} = 0$.

⬩Dạng ❷: Tính giới hạn hữu hạn của dãy số bằng định lí

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(5 - \dfrac{2}{n^3}\right)$ b) $\lim\left(4 - \dfrac{2}{n}\right)\left(5 + \dfrac{1}{3^n}\right)$

Lời giải

a) $\lim\left(5 - \dfrac{2}{n^3}\right) = \lim 5 - \lim \dfrac{2}{n^3} = 5 - 0 = 5$.

b) $\lim\left(4 - \dfrac{2}{n}\right)\left(5 + \dfrac{1}{3^n}\right) = \left(\lim 4 - \lim \dfrac{2}{n}\right) \cdot \left(\lim 5 + \lim \dfrac{1}{3^n}\right) = 4 \cdot 5 = 20$.

Câu 2: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{4n+2}{3}$ b) $\lim \dfrac{3n+4}{-5 + \dfrac{2}{n}}$ c) $\lim \dfrac{-3 + \dfrac{1}{n+1}}{5^n}$ d) $\lim\left(6 - \dfrac{5}{4^n}\right)$

Lời giải

a) $+\infty$. b) $-\infty$. c) 0. d) 6.

Câu 3: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2+n+2}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+3}{1+3^n}$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2+n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 + \dfrac{1}{n^2}}{2 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2}} = \dfrac{1}{2}$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^n+3}{1+3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 1} = 0$.

⬩Dạng ❸: Tính giới hạn của dãy số có dạng $\frac{C}{\infty},\frac{\infty}{C},\frac{C}{0}(C\neq 0),\frac{\infty}{\infty}$

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{2+\frac{1}{n}}{2^n}$ b) $\lim\dfrac{-3n+2}{4}$

Lời giải

a) Vì $\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)=\lim 2+\lim\frac{1}{n}=2+0=2$ và $\lim 2^n=+\infty$ nên $\lim\dfrac{2+\frac{1}{n}}{2^n}=0$.

b) Vì $\lim(-3n+2)=\lim\left[n\left(-3+\frac{2}{n}\right)\right]=\lim[(-3)\cdot n]=-\infty$ và $4>0$ nên

$\lim\dfrac{-3n+2}{4}=-\infty$ c) Vì $\lim\left(-3+\frac{1}{n}\right)=-3<0;\lim\frac{1}{n^2}=0$ và $\frac{1}{n^2}>0\forall n\in\mathbb{N}^*$ nên $\lim\dfrac{-3+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=-\infty$.

d) $\lim\dfrac{2n+1}{-3n+4}=\lim\dfrac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(-3+\frac{4}{n}\right)}=\dfrac{\lim\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\lim\left(-3+\frac{4}{n}\right)}=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 2: Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ với $u_n=3-\dfrac{4}{n+1},v_n=8-\dfrac{5}{3n^2+2}$. Tính:

a) $\lim u_n,\lim v_n$; b) $\lim(u_n+v_n),\lim(u_n-v_n),\lim(u_n\cdot v_n),\lim\dfrac{u_n}{v_n}$

Lời giải

a) $\lim u_n=\lim\left(3-\dfrac{4}{n+1}\right)=\lim 3-\lim\dfrac{4}{n+1}=3$ $\lim v_n=\lim\left(8-\dfrac{5}{3n^2+2}\right)=\lim 8-\lim\dfrac{5}{3n^2+2}=8$

b) $\lim(u_n+v_n)=\lim u_n+\lim v_n=3+8=11$

$\lim(u_n-v_n)=\lim u_n-\lim v_n=3-8=-5;$

$\lim(u_n\cdot v_n)=\lim u_n\cdot\lim v_n=3.8=24;\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{\lim u_n}{\lim v_n}=\dfrac{3}{8}.$

⬩Dạng ❹: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính các tổng sau:

a) $M=2+\frac{2}{5}+\frac{2}{5^2}+\ldots+\frac{2}{5^n}+\ldots$ b) $N=3-\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}-\ldots+3\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\ldots$

Lời giải

a) Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân (u_n) có $u_1=2, q=\frac{1}{5}<1$ nên

$$M=2+\frac{2}{5}+\frac{2}{5^2}+\ldots+\frac{2}{5^n}+\ldots=\frac{2}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{2}.$$

b) Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân (u_n) có $u_1=3, q=-\frac{1}{4}, |q|<1$ nên

$$N=3-\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}-\ldots+3\left(-\frac{1}{4}\right)^n+\ldots=\frac{3}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{12}{5}$$

Câu 2: Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn:

a) $1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{5^3}+\ldots+\left(-\frac{1}{5}\right)^n+\ldots$ b) $2+\frac{2^2}{3}+\frac{2^3}{3^2}+\ldots+\frac{2^n}{3^{n-1}}+\ldots$

Lời giải

a) $1\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}=\frac{5}{6}$ b) $2\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=6$.

⬩Dạng ❺: Ứng dụng thực tế

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Một mẫu chất phóng xạ $^{210}_{84}Po$ có khối lượng ban đầu $m_0=42(mg)$, nhưng cứ sau một khoảng thời gian $T=138$ ngày thì khối lượng chất đó giảm đi một nửa (T được gọi là chu kì bán rã). Gọi u_n là khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ sau n chu kì bán rã.

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

b) Tính giới hạn của dãy số (u_n) và cho biết ý nghĩa của giới hạn đó.

Lời giải

a) Vì cứ sau 1 chu kì bán rã thì khối lượng mẫu chất phóng xạ giảm một nửa nên (u_n) là cấp số nhân với $u_1=21$ và công bội $q=\frac{1}{2}$.

Khi đó, số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là: $u_n = \dfrac{42}{2^n}$.

b) Ta có: $\lim u_n = \lim \dfrac{42}{2^n} = \lim 42 \cdot \lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 42 \cdot 0 = 0$. Từ giới hạn đó, ta rút ra được ý nghĩa: Khi n càng dần tới vô cực thì khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ càng dần về 0, nghĩa là sau một khoảng thời gian đủ dài thì khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ là rất nhỏ (đến mức không đáng kể).

Câu 2: Tại một nhà máy, người ta đo được rằng 80% lượng nước sau khi sử dụng được xử lí và tái sử dụng. Với $100\, m^3$ ban đầu được sử dụng lần đầu tại nhà máy, khi quá trình xử lí và tái sử dụng lặp lại mãi mãi, nhà máy sử dụng được tổng lượng nước là bao nhiêu?

Lời giải

$$100 + 100 \cdot 0,8 + 100 \cdot (0,8)^2 + 100 \cdot (0,8)^3 + \ldots = 100 \cdot \frac{1}{1-0,8} = 500\left(m^3\right).$$

Câu 3: Từ độ cao $100\, m$, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử cứ sau mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên một độ cao bằng $\dfrac{1}{4}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi h_n là độ cao quả bóng đạt được ở lần nảy thứ n.

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (h_n).

b) Tính giới hạn của dãy số (h_n) và nêu ý nghĩa giới hạn của dãy số (h_n).

c) Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường đi được của quả bóng từ lúc bắt đầu thả quả bóng đến khi quả bóng chạm đất lần thứ n. Tính S_n, nếu quá trình này cứ tiếp tục diễn ra mãi thì tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là bao nhiêu?

Lời giải

a) Theo đề bài, $h_n = \dfrac{1}{4} h_{n-1}$ nên (h_n) là một cấp số nhân với $h_1 = 25$, công bội $q = \dfrac{1}{4}$. Suy ra số hạng tổng quát của dãy số $(h_n): h_n = \dfrac{100}{4^n}$.

b) Ta có: $\lim h_n = \lim \dfrac{100}{4^n} = \lim 100 \cdot \lim \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 100 \cdot 0 = 0$. Từ giới hạn đó, ta rút ra được ý nghĩa: Khi n càng dần tới vô cực thì độ cao của quả bóng đạt được sau khi nảy ngày càng nhỏ và độ cao đó dần tới 0.

c) Ta có: $S_n = 100 + 2\cdot\left(\frac{100}{4}+\frac{100}{4^2}+\frac{100}{4^3}+\ldots+\frac{100}{4^n}\right)$

Nếu quá trình bóng nảy cứ tiếp tục diễn ra mãi, tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là:

$\lim S_n = 100 + 2\cdot\left(\frac{100}{4}+\frac{100}{4^2}+\frac{100}{4^3}+\ldots+\frac{100}{4^n}+\ldots\right)$

Vì $\frac{100}{4};\frac{100}{4^2};\frac{100}{4^3};\ldots;\frac{100}{4^n};\ldots$ lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{100}{4}$ và công bội

$q = \frac{1}{4} < 1$ nên ta có $\lim S_n = 100 + 2\cdot\frac{\frac{100}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{500}{3}$. Vậy tổng quãng đường quả bóng di chuyển

được là $\frac{500}{3}m$. đường quả bóng di chuyển được là $\frac{500}{3}m$.

Ⓒ. Dạng toán rèn luyện

◆Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{-3}{4n^2-2n+1}$ là

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\lim\frac{-3}{4n^2-2n+1} = \lim\frac{\frac{-3}{n^2}}{4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{0}{4} = 0.$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim\frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ là

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\lim\frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1} = \lim\frac{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{4+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}} = \frac{0}{4} = 0.$

Câu 3: Cho hai dãy số u_n và v_n có $u_n = \frac{1}{n+1}$ và $v_n = \frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim\frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\frac{v_n}{u_n}=\lim\frac{n+1}{n+2}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{1}=1.$

Giải nhanh : $\frac{n+1}{n+2}\sim\frac{n}{n}=1.$

Câu 4: Cho dãy số u_n với $u_n=\frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số u_n có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $a=10.$ **B.** $a=8.$ **C.** $a=6.$ **D.** $a=4.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim u_n=\lim\frac{an+4}{5n+3}=\lim\frac{a+\frac{4}{n}}{5+\frac{3}{n}}=\frac{a}{5}$. Khi đó

$\lim u_n=2\Leftrightarrow\frac{a}{5}=2\Leftrightarrow a=10$

Câu 5: Tính giới hạn $L=\lim\frac{n^2+n+5}{2n^2+1}$.

A. $L=\frac{3}{2}.$ **B.** $L=\frac{1}{2}.$ **C.** $L=2.$ **D.** $L=1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $L=\lim\frac{n^2+n+5}{2n^2+1}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}}{2+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$

Giải nhanh: $\frac{n^2+n+5}{2n^2+1}\sim\frac{n^2}{2n^2}=\frac{1}{2}.$

Câu 6: Kết quả của giới hạn $\lim\frac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}$ là:

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}.$ **C.** $+\infty.$ **D.** $\frac{1}{4}.$

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh: $\dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\dfrac{\pi^n+3^n+4^n}{3\pi^n-3^n+4.4^n}\sim\dfrac{4^n}{4.4^n}=\dfrac{1}{4}$

Cụ thể : $\lim\dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1}{3.\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n-3.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4}=\dfrac{1}{4}.$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim\ \sqrt[3]{n^3-2n^2}-n$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $-\dfrac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\sim\sqrt[3]{n^3}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\ \sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\ =\lim\dfrac{-2n^2}{\sqrt[3]{\ n^3-2n^2\ ^2}+n.\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}=\lim\dfrac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\dfrac{2}{n}}+1}=-\dfrac{2}{3}.$$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim\ \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\ \sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\ =\lim\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}=\lim\dfrac{4}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\sqrt{1-\dfrac{2}{n}}}=2.$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}=\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}\sim\dfrac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=2.$

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim\ \sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+\ a+2\ n+1}\ =0.$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+\ a+2\ n+1}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=\lim\dfrac{(a^2-a-2)n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

$$=\lim\dfrac{a^2-a-2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\dfrac{a^2-a-2}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=2\end{array}\right..$$

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)$ là

A. 0. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\sim\sqrt{2n^2}-\sqrt{2n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp

$$\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)=\lim\dfrac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}$$

$$=\lim\dfrac{2-\dfrac{1}{n}}{\sqrt{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Giải nhanh :

$$\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}=\dfrac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}\sim\dfrac{2n}{\sqrt{2n^2}+\sqrt{2n^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 11: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)$ là:

A. -1. **B.** $1-\sqrt{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{2n^2}=\left(1-\sqrt{2}\right)n\longrightarrow-\infty$.

Cụ thể : $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)=\lim n.\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}\right)=-\infty$ vì

$\lim n=+\infty$, $\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}}-\sqrt{2+\dfrac{1}{n}}\right)=1-\sqrt{2}<0$

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn B

Nếu $\sqrt{n^2-8n}-n+a^2 \sim \sqrt{n^2}-n=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp

Ta có $\lim \ \sqrt{n^2-8n}-n+a^2 \ = \lim \dfrac{2a^2-8 \ n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim \dfrac{2a^2-8}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$

$= a^2-4=0 \Leftrightarrow a=\pm 2.$

Câu 13: Giá trị của giới hạn $\lim \ \sqrt{n^2-2n+3}-n$ là

A. $-1.$ **B.** $0.$ **C.** $1.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{n^2-2n+3}-n \sim \sqrt{n^2}-n=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim \ \sqrt{n^2-2n+3}-n \ = \lim \frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n} = \lim \frac{-2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1} = -1$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-2n+3}-n = \dfrac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n} \sim \dfrac{-2n}{\sqrt{n^2}+n} = -1.$

Câu 14: Cho dãy số u_n với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực.

Tìm a để $\lim u_n=-1.$

A. $3.$ **B.** $2.$ **C.** $-2.$ **D.** $-3.$

Lời giải

Chọn C

$\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1} \sim \sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$-1=\lim u_n=\lim \ \sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1} \ = \lim \frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim \frac{a+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a=-2.$$

Giải nhanh:

$$-1 \sim \sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1} = \frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}} \sim \frac{an}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}} = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a=-2.$$

Câu 15: Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

$\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\sim\sqrt[3]{n^3}-\sqrt[3]{n^3}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)=\lim\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}.\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{\left(n^3+2\right)^2}}=0.$$

Câu 16: Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn A

$\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}\sim\sqrt{9n^2}=3n\neq 0\longrightarrow$ giải nhanh:

$$\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}\sim\frac{\sqrt{9n^2}}{3n}=1$$

Cụ thể : $\lim\dfrac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}=\lim\dfrac{\sqrt{9-\dfrac{1}{n}}-\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}}{3-\dfrac{2}{n}}=\dfrac{\sqrt{9}}{3}=1.$

Câu 17: Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}-n}$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn B

$\sqrt[3]{n^3+1}-n\sim\sqrt[3]{n^3}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=0$$

Câu 18: Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}$ là:

A. $+\infty$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k \Rightarrow 2^n \ge C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\sim\frac{n^3}{6}\Rightarrow\begin{cases}\frac{n}{2^n}\to 0\\ \frac{2^n}{n^2}\to+\infty\end{cases}$. Khi đó:

$$\lim\frac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}=\lim\frac{2^n}{n^2}.\frac{2+3.\frac{n}{2^n}+10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\frac{2^n}{n^2}=+\infty\\ \lim\frac{2+3.\frac{n}{2^n}+10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{3}>0\end{cases}.$$

Câu 19: Kết quả của giới hạn $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=\lim\sqrt{3^n}.\sqrt{2-\frac{n}{3^n}+2.\left(\frac{1}{3}\right)^n}$. Vì

$$\left.\begin{matrix}\lim\sqrt{3^n}=+\infty\\ 0\le\frac{n}{3^n}\le\frac{n}{C_n^2}=\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2}{n-1}\to 0\Rightarrow\lim\frac{n}{3^n}=0\\ \lim\left(\frac{1}{3}\right)^n=0\end{matrix}\right\}\longrightarrow\begin{cases}\lim\sqrt{3^n}=+\infty\\ \lim\sqrt{2-\frac{n}{3^n}+2.\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\sqrt{2}>0\end{cases},$$

do đó $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=+\infty$.

⬩Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Biết giới hạn $\lim\frac{2n+1}{-3n+2}=a$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Giá trị a lớn hơn 0.		
b)	Ba số $-\frac{5}{3};a;\frac{1}{3}$ tạo thành một cấp số cộng với công sai bằng 2		

c)	Trên khoảng $(-\pi;\pi)$ phương trình lượng giác $\sin x = a$ có 3 nghiệm		
d)	Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q=3$ và $u_1 = a$, thì $u_3 = -6$		

Câu 2. Biết giới hạn $\lim \dfrac{5n^3 - 2n + 1}{n - 2n^3} = a$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Giá trị a nhỏ hơn 0.		
b)	$x = a$ là trục đối xứng của parabol $(P): y = x^2 + 5x + 2$		
c)	Phương trình lượng giác $\sin x = a$ vô nghiệm		
d)	Cho cấp số cộng (u_n) với công sai $d = 3$ và $u_1 = a$, thì $u_3 = 6$		

Câu 3. Biết giới hạn $\lim \dfrac{2n^2+1}{3n^3 - 3n + 3} = a$ và $\lim \dfrac{n\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{4n^4 - n^2 + 3}} = b$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Giá trị a nhỏ hơn 0.		
b)	Giá trị b lớn hơn 0.		
c)	Phương trình lượng giác $\cos x = a$ có một nghiệm là $x = \dfrac{\pi}{2}$		
d)	Cho cấp số cộng (u_n) với công sai $d = b$ và $u_1 = a$, thì $u_3 = \dfrac{3}{2}$		

Câu 4. Biết giới hạn $\lim\left(-2n^3 - 5n + 9\right) = a$ và $\lim \dfrac{4^n + 3}{1 + 3\cdot 4^{n+1}} = b$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tích $a.b = 3$		
b)	Hàm số $y = \sqrt{1-x}$ có tập xác định là $D(a;1]$		
c)	Giá trị b là số lớn hơn 0		
d)	Phương trình lượng giác $\cos x = b$ vô nghiệm		

Câu 5. Biết giới hạn $\lim \dfrac{-3n^3+1}{2n+5} = a$ và $\lim \dfrac{(-1)^n \cdot 5^n}{2^n + 5^{2n}} = b$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim\left(-3n^2+\frac{1}{n}\right)=a$		
b)	$x=b$ là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y=2x$ với trục hoành		
c)	$\lim\left(\frac{1}{2024}\right)^n=b$		
d)	Cho cấp số cộng (u_n) với công sai $d=\frac{1}{2}$ và $u_1=b$, thì $u_3=2$		

Câu 6. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$		
b)	$\lim\frac{1}{(\sqrt{2})^n}=-\infty$		
c)	$\lim\frac{1}{n^3}=0$		
d)	$\lim 4=0$		

Câu 7. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim(\sqrt{3})^n=-\infty$		
b)	$\lim\pi^n=0$		
c)	$\lim\left(n^3+2n^2-4\right)=+\infty$		
d)	$\lim\left(-n^4+5n^3-4n\right)=-\infty$		

Câu 8. Viết được các số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số tối giản, ta được:

$0,212121\ldots=\frac{a}{b}$; $4,333\ldots=\frac{c}{d}$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$a+b=40$		
b)	Ba số $a;b;58$ tạo thành một cấp số cộng		
c)	$c+d=15$		
d)	$\lim c=13$		

Câu 9. Tìm được tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$ và

$T=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q=-\frac{1}{2}$.		
b)	$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots$là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q=\frac{1}{3}$.		
c)	$S>T$		
d)	$S=\frac{1}{T}$		

Câu 10. Cho $u_n=\frac{7^n+2^{2n-1}+3^{n+1}}{7^{n+1}+5^{n-1}}$. Biết $\lim u_n=\frac{a}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{Z};\frac{a}{b}$ tối giản). Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$a+b=8$		
b)	$a-b=-7$		
c)	Bộ ba số $a;b;13$ tạo thành một cấp số cộng có công sai $d=7$		
d)	Bộ ba số $a;b;49$ tạo thành một cấp số nhân có công bội $q=7$		

LỜI GIẢI

Câu 1. Biết giới hạn $\lim\frac{2n+1}{-3n+2}=a$. Khi đó:

a) Giá trị a lớn hơn 0.

b) Ba số $-\frac{5}{3};a;\frac{1}{3}$ tạo thành một cấp số cộng với công sai bằng 2

c) Trên khoảng $(-\pi;\pi)$ phương trình lượng giác $\sin x=a$ có 3 nghiệm

d) Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q=3$ và $u_1=a$, thì $u_3=-6$

Lời giải

a) Sai	**b) Sai**	**c) Sai**	**d) Đúng**

a) Ta có: $\lim \frac{2n+1}{-3n+2} = \lim \frac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n\left(-3+\frac{2}{n}\right)} = \lim \frac{2+\frac{1}{n}}{-3+\frac{2}{n}} = \frac{-2}{3}$

b) Ba số $-\frac{5}{3};-\frac{2}{3};\frac{1}{3}$ tạo thành một cấp số cộng với công sai bằng 1

c) Trên khoảng $\left(-\pi;\pi\right)$ phương trình lượng giác $\sin x = a$ có 2 nghiệm

d) Cho cấp số nhân $\left(u_n\right)$ với công bội $q=3$ và $u_1 = a$, thì $u_3 = -6$

Câu 2. Biết giới hạn $\lim \frac{5n^3-2n+1}{n-2n^3} = a$. Khi đó:

a) Giá trị a nhỏ hơn 0.

b) $x=a$ là trục đối xứng của parabol $(P): y = x^2+5x+2$

c) Phương trình lượng giác $\sin x = a$ vô nghiệm

d) Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ với công sai $d=3$ và $u_1=a$, thì $u_3=6$

Lời giải

a) Đúng	**b) Đúng**	**c) Đúng**	**d) Sai**

a) Ta có: $\lim \frac{5n^3-2n+1}{n-2n^3} = \lim \frac{n^3\left(5-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(\frac{1}{n^2}-2\right)} = \lim \frac{5-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2}-2} = -\frac{5}{2}$.

b) parabol $(P): y = x^2+5x+2$ nhận $x=-\frac{5}{2}$ làm trục đối xứng

c) Phương trình lượng giác $\sin x = -\frac{5}{2}$ vô nghiệm

d) Cho cấp số cộng $\left(u_n\right)$ với công sai $d=3$ và $u_1=a$, thì $u_3 = u_1+\left(3-1\right)d = -\frac{5}{2}+2.3 = \frac{7}{2}$

Câu 3. Biết giới hạn $\lim \frac{2n^2+1}{3n^3-3n+3} = a$ và $\lim \frac{n\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{4n^4-n^2+3}} = b$. Khi đó:

a) Giá trị a nhỏ hơn 0.

b) Giá trị b lớn hơn 0.

c) Phương trình lượng giác $\cos x = a$ có một nghiệm là $x = \frac{\pi}{2}$

d) Cho cấp số cộng (u_n) với công sai $d = b$ và $u_1 = a$, thì $u_3 = \frac{3}{2}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) Ta có: $\lim \frac{2n^2+1}{3n^3-3n+3} = \lim \frac{n^3\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\left(3-\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)} = \lim \frac{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}{3-\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}} = \frac{0}{3} = 0$.

b) Ta có: $\lim \frac{n\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{4n^4-n^2+3}} = \lim \frac{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n^2\sqrt{4-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}}} = \lim \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^4}}} = \frac{1}{2}$.

c) Phương trình lượng giác $\cos x = 0$ có một nghiệm là $x = \frac{\pi}{2}$

d) Cho cấp số cộng (u_n) với công sai $d = \frac{1}{2}$ và $u_1 = 0$, thì $u_3 = 0 + 2.\frac{1}{2} = 1$

Câu 4. Biết giới hạn $\lim\left(-2n^3-5n+9\right) = a$ và $\lim \frac{4^n+3}{1+3\cdot 4^{n+1}} = b$. Khi đó:

a) Tích $a.b = 3$

b) Hàm số $y = \sqrt{1-x}$ có tập xác định là $D(a;1]$

c) Giá trị b là số lớn hơn 0

d) Phương trình lượng giác $\cos x = b$ vô nghiệm

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

Ta có: $\lim\left(-2n^3-5n+9\right) = \lim n^3\left(-2-\frac{5}{n^2}+\frac{9}{n^3}\right) = -\infty$, do $\begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim\left(-2 - \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{9}{n^3}\right) = -2 \end{cases}$

$$\lim \frac{4^n + 3}{1 + 3\cdot 4^{n+1}} = \lim \frac{4^n + 3}{1 + 12\cdot 4^n} = \lim \frac{4^n\left(1 + \dfrac{3}{4^n}\right)}{4^n\left(\dfrac{1}{4^n} + 12\right)} = \lim \frac{1 + \dfrac{3}{4^n}}{\dfrac{1}{4^n} + 12} = \frac{1}{12}$$

a) Tích $a.b = -\infty$

b) Hàm số $y = \sqrt{1-x}$ có tập xác định là $D(-\infty;1]$

c) Giá trị $\dfrac{1}{12}$ là số lớn hơn 0

d) Phương trình lượng giác $\cos x = \dfrac{1}{12}$ có nghiệm

Câu 5. Biết giới hạn $lim\frac{-3n^3+1}{2n+5} = a$ và $lim\frac{(-1)^n\cdot 5^n}{2^n+5^{2n}} = b$. Khi đó:

a) $\lim\left(-3n^2 + \dfrac{1}{n}\right) = a$

b) $x = b$ là hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = 2x$ với trục hoành

c) $\lim\left(\dfrac{1}{2024}\right)^n = b$

d) Cho cấp số cộng (u_n) với công sai $d = \dfrac{1}{2}$ và $u_1 = b$, thì $u_3 = 2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

Ta có: $\lim \dfrac{-3n^3 + 1}{2n + 5} = \lim \dfrac{n\left(-3n^2 + \dfrac{1}{n}\right)}{n\left(2 + \dfrac{5}{n}\right)} = \lim \dfrac{-3n^2 + \dfrac{1}{n}}{2 + \dfrac{5}{n}} = -\infty$,

do $\begin{cases} \lim\left(-3n^2 + \dfrac{1}{n}\right) = -\infty \\ \lim\left(2 + \dfrac{5}{n}\right) = 2 \end{cases}$

$$\lim \frac{(-1)^n \cdot 5^n}{2^n + 5^{2n}} = \lim \frac{(-1)^n \cdot 5^n}{2^n + 25^n} = \lim \frac{25^n \cdot \left(\frac{-1}{5}\right)^n}{25^n \left[\left(\frac{2}{25}\right)^n + 1\right]} = \lim \frac{\left(\frac{-1}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{25}\right)^n + 1} = 0$$

Câu 6. Tính được các giới hạn sau, khi đó:

a) $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

b) $\lim \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = -\infty$

c) $\lim \frac{1}{n^3} = 0$

d) $\lim 4 = 0$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \left(\text{do } \frac{2}{3} < 1\right)$

b) $\lim \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = \lim \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0 \left(\text{do } \frac{1}{\sqrt{2}} < 1\right)$

c) $\lim \frac{1}{n^3} = 0$

d) $\lim 4 = 4$

Câu 7. Tính được các giới hạn sau, khi đó:

a) $\lim (\sqrt{3})^n = -\infty$

b) $\lim \pi^n = 0$

c) $\lim \left(n^3 + 2n^2 - 4\right) = +\infty$

d) $\lim \left(-n^4 + 5n^3 - 4n\right) = -\infty$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) $\lim(\sqrt{3})^n = +\infty$(do $\sqrt{3} > 1$)

b) $\lim \pi^n = +\infty$(do $\pi > 1$)

c) $\lim\left(n^3 + 2n^2 - 4\right) = \lim n^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^3}\right) = +\infty$.

Vì $\begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim\left(1 + \frac{2}{n} - \frac{4}{n^3}\right) = 1 > 0 \end{cases}$

d) $\lim\left(-n^4 + 5n^3 - 4n\right) = \lim n^4 \cdot \left(-1 + \frac{5}{n} - \frac{4}{n^3}\right) = -\infty$.

Vì $\begin{cases} \lim n^4 = +\infty \\ \lim\left(-1 + \frac{5}{n} - \frac{4}{n^3}\right) = -1 < 0 \end{cases}$

Câu 8. Viết được các số thập phân vô hạn tuần hoàn dưới dạng phân số tối giản, ta được:

$0,212121\ldots = \frac{a}{b}$; $4,333\ldots = \frac{c}{d}$. Khi đó:

a) $a + b = 40$

b) Ba số $a; b; 58$ tạo thành một cấp số cộng

c) $c + d = 15$

d) $\lim c = 13$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

Ta có: $0,212121\ldots = 0,21 + 0,0021 + 0,000021 + \ldots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu 0,21 và công bội $\frac{1}{100}$.

Vì vậy $0,212121\ldots=0,21+0,0021+0,000021+\ldots=\dfrac{0,21}{1-\dfrac{1}{100}}=\dfrac{7}{33}$.

Ta có: $0,333\ldots=0,3+0,03+0,003+\ldots$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là 0,3 và công bội là $\dfrac{1}{10}$.

Vì vậy $4,333\ldots=4+0,3+0,03+0,003+\ldots=4+\dfrac{0,3}{1-\dfrac{1}{10}}=\dfrac{13}{3}$.

Câu 9. Tìm được tổng của cấp số nhân lùi vô hạn sau: $S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots$ và

$T=1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}+\ldots$Khi đó:

a) $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots$là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q=-\dfrac{1}{2}$.

b) $1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}+\ldots$là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có công bội $q=\dfrac{1}{3}$.

a) $S>T$

b) $S=\dfrac{1}{T}$

Lời giải

a) Đúng	**b) Đúng**	**c) Sai**	**d) Đúng**

a) Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$, công bội

$q=-\dfrac{1}{2}$. $\Rightarrow S=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\ldots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\ldots=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}=\dfrac{2}{3}$.

b) Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1=1$, công bội

$q=\dfrac{1}{3}$.

Vì vậy $T=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{3^n}+\ldots=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$.

Câu 10. Cho $u_n=\frac{7^n+2^{2n-1}+3^{n+1}}{7^{n+1}+5^{n-1}}$. Biết $\lim u_n=\frac{a}{b}$ (với $a,b\in\mathbb{Z};\frac{a}{b}$ tối giản). Khi đó:

a) $a+b=8$

b) $a-b=-7$

c) Bộ ba số $a;b;13$ tạo thành một cấp số cộng có công sai $d=7$

d) Bộ ba số $a;b;49$ tạo thành một cấp số nhân có công bội $q=7$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

Ta có $\lim u_n=\lim\frac{7^n+2^{2n-1}+3^{n+1}}{7^{n+1}+5^{n-1}}=\lim\frac{1+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{7}\right)^n+3\left(\frac{3}{7}\right)^n}{7+\frac{1}{5}\left(\frac{5}{7}\right)^n}=\frac{1}{7}$.

Do đó suy ra $a=1,b=7\Rightarrow a+b=8$.

⬩Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1:

a) Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_1=\frac{5}{4},q=-\frac{1}{3}$.

b) Biểu diễn số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,(3) dưới dạng phân số.

Lời giải

a) $\frac{15}{16}$ b) $\frac{7}{3}$.

Câu 2: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\frac{3^{n+1}}{2^{2n}}$ b) $\lim\frac{3^{n+1}+2^n}{3^n}$.

Lời giải

a) $\lim\frac{3^{n+1}}{2^{2n}}=\lim\frac{3\cdot3^n}{4^n}=3\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n=3\cdot0=0$ $\left(\text{vì } \frac{3}{4}<1\right)$.

b) $\lim \dfrac{3^{n+1}+2^n}{3^n} = \lim \dfrac{3\cdot 3^n+2^n}{3^n} = \lim\left[3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right] = 3+\lim\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 3+0=3$.

Câu 3: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(2+\dfrac{5}{n}\right)$ b) $\lim\left(\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^2}\right)$; c) $\lim\left(3-\dfrac{4}{n}\right)\left(2+\dfrac{5}{n^2}\right)$ d) $\lim \dfrac{3-\dfrac{3}{n}}{1+\dfrac{1}{n^3}}$

Lời giải

a) 2; b) 0; c) 6; d) 3.

Câu 4: Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $\lim u_n = 3, \lim v_n = 4$. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim(3u_n-4)$; b) $\lim(u_n+2v_n)$; c) $\lim(u_n-v_n)^2$; d) $\lim \dfrac{-2u_n}{v_n-2u_n}$.

Lời giải

a) 5; b) 11; c) 1; d) 3.

Câu 5: Cho dãy số (u_n) thoả mãn $\lim nu_n = 3$. Tìm giới hạn $\lim \dfrac{2n+3}{n^2u_n}$.

Lời giải

$$\lim \frac{2n+3}{n^2u_n} = \lim\left(\frac{2n+3}{n}\cdot\frac{1}{nu_n}\right) = \lim\frac{2n+3}{n}\cdot\lim\frac{1}{nu_n}$$

$$= \lim\left(2+\frac{3}{n}\right)\cdot\frac{1}{\lim nu_n} = 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Câu 6: Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau thành phân số:

a) $0,(7)=0,777\ldots$; b) $1,(45)=1,454545\ldots$

Lời giải

a) $\dfrac{7}{9}$ b) $\dfrac{16}{11}$.

Câu 7: Cho dãy số (u_n) có tính chất $|u_n-2| \le \dfrac{1}{3^n}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Lời giải

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{3^n} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-2)=0$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Câu 8: Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2+1}{3n^2+n}$.

Lời giải

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

Câu 9: Tính $\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1}\right)$.

Lời giải

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-n}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{-n-1}{\sqrt{n^2-n}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{-1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=-\frac{1}{2}$$

Câu 10: Tính $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2-n+3\right)$.

Lời giải

$$\lim_{n\to+\infty}\left(n^2-n+3\right)=\lim_{n\to+\infty}n^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=+\infty$$

Câu 11: Tính tổng $S=-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{3^n}+\cdots$

Lời giải

Ta thấy S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_1=-\frac{1}{3}, q=-\frac{1}{3}$.

Do đó $S=\frac{u_1}{1-q}=\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{4}$

Câu 12: Cho $u_n=\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$ với a,b là các số thực thoả mãn $|a|<1,|b|<1$. Tính $\lim_{n\to+\infty}u_n$.

Lời giải

Ta có $u_n=\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}=\frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}}=\frac{1-b}{1-a}\cdot\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}$.

Do đó $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1-b}{1-a}$.

Câu 13: Tính $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2+2n}$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n^2+2n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2}{n^2+2n}=1$.

Câu 14: Tính tổng $S=-1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5^2}+\dots+(-1)^n\dfrac{1}{5^{n-1}}+\dots$

Lời giải

Ta thấy S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_1=-1$ và $q=-\dfrac{1}{5}$.

Do đó $S=\dfrac{-1}{1+\dfrac{1}{5}}=-\dfrac{5}{6}$

Câu 15: Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số:

a) $1,(03)$; b) $3,(23)$.

Lời giải

a) $1,(03)=1+\dfrac{3}{100}+\dfrac{3}{100^2}+\dots+\dfrac{3}{100^n}+\dots=1+\dfrac{\dfrac{3}{100}}{1-\dfrac{1}{100}}=1\dfrac{3}{99}=\dfrac{102}{99}$.

b) $3,(23)=3+\dfrac{23}{100}+\dfrac{23}{100^2}+\dots+\dfrac{23}{100^n}+\dots=3+\dfrac{\dfrac{23}{100}}{1-\dfrac{1}{100}}=3\dfrac{23}{99}=\dfrac{320}{99}$.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{\cos n}{n^2}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

Lời giải

Ta có $|u_n|=\dfrac{|\cos n|}{n^2}\le\dfrac{1}{n^2}$. Do $\dfrac{1}{n^2}\to 0$ khi $n\to+\infty$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

Câu 17: Cho tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích là 3 (đơn vị diện tích). Dựng tam giác $A_2B_2C_2$ bằng cách nối các trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Tiếp tục quá trình này, ta có các tam giác $A_3B_3C_3,\dots,A_nB_nC_n,\dots$ Kí hiệu s_n là diện tích của tam giác $A_nB_nC_n$.

a) Tính s_n. b) Tính tổng $s_1+s_2+\dots+s_n+\dots$

Lời giải

Theo cách xác định tam giác $A_2B_2C_2$, ta có $s_2=\dfrac{1}{4}s_1$. Tương tự, $s_3=\dfrac{1}{4}s_2,\dots,$

$s_n=\dfrac{1}{4}s_{n-1}\Rightarrow s_n=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}s_1=3\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Từ đó $s_1+s_2+\cdots+s_n+\cdots=\dfrac{3}{1-\dfrac{1}{4}}=4$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) với $u_1=2, u_{n+1}=u_n+\dfrac{2}{3^n}, n\geq 1$. Đặt $v_n=u_{n+1}-u_n$.

a) Tính $v_1+v_2+\cdots+v_n$ theo n. b) Tính u_n theo n. c) Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Lời giải

Ta có $v_n=\dfrac{2}{3^n}$. Do vậy $v_1+v_2+\cdots+v_n=2\left(\dfrac{1-\dfrac{1}{3^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{3}}\right)=3\left(1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)$.

Mặt khác

$v_1+v_2+\cdots+v_n=(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\cdots+(u_{n+1}-u_n)=u_{n+1}-u_1=u_{n+1}-2.$

Vậy $u_n=3\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)+2$ và $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=5$.

Câu 19: Cho dãy số (u_n) có tính chất $\left|u_n-\dfrac{n}{n+1}\right|\leq\dfrac{1}{n^2}$. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n-\dfrac{n}{n+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n-1)=0$. Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$.

Câu 20: Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn 2,(12) = 2,121212... thành phân số.

Lời giải

Ta có: 2,(12) = 2+0,(12);

$$\begin{aligned}0,(12)&=0,12121212\ldots=0,12+0,0012+0,000012+0,00000012\ldots\\&=0,12+0,12\cdot\frac{1}{100}+0,12\cdot\frac{1}{100^2}+0,12\cdot\frac{1}{100^3}+0,12\cdot\frac{1}{100^4}\ldots\end{aligned}$$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng 0,12 và công bội bằng $\dfrac{1}{100}$. Tổng này bằng $0,12\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{100}}=\dfrac{12}{99}=\dfrac{4}{33}$.

Vậy $2,(12)=2+\dfrac{4}{33}=\dfrac{70}{33}$.

Câu 21: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ b) $\lim\frac{3^n}{4^n-1}$; c) $\lim\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$; d) $\lim\frac{4^{n+1}}{3^n+4^n}$.

Lời giải

a) 0;

b) $$\lim\frac{3^n}{4^n-1}=\lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\lim\left(\frac{1}{4}\right)^n}=\frac{0}{1-0}=0$$

c) $$\lim\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1-\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\lim\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

d) $$\lim\frac{4^{n+1}}{3^n+4^n}=\lim\frac{4}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\frac{4}{\lim\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=\frac{4}{0+1}=4.$$

Câu 22: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(1+3n-n^2\right)$; b) $\lim\frac{n^3+3n}{2n-1}$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2-n}+n\right)$ d) $\lim\left(3^{n+1}-5^n\right)$.

Lời giải

a) $$\lim\left(1+3n-n^2\right)=\lim\left[n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}-1\right)\right]=-\infty;$$

b) $$\lim\frac{n^3+3n}{2n-1}=\lim\left[n^2\cdot\frac{1+\frac{3}{n^2}}{2-\frac{1}{n}}\right]=+\infty$$

c) $$\lim\left(\sqrt{n^2-n}+n\right)=\lim\left[n\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)\right]=+\infty$$

d) $$\lim\left(3^{n+1}-5^n\right)=\lim\left\{5^n\left[3\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right]\right\}=-\infty.$$

Câu 23: Tuỳ theo giá trị của $a>0$, tìm giới hạn $\lim\frac{a^n}{a^n+1}$.

Lời giải

Nếu $0<a<1$ thì $\lim a^n=0$ nên $\lim\dfrac{a^n}{a^n+1}=\dfrac{\lim a^n}{\lim a^n+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$.

Nếu $a=1$ thì $\lim\dfrac{a^n}{a^n+1}=\lim\dfrac{1^n}{1^n+1}=\lim\dfrac{1}{1+1}=\lim\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

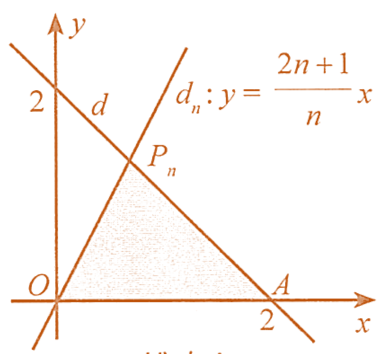
Nếu $a>1$, ta viết $\dfrac{a^n}{a^n+1}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{a}\right)^n}$ (chia cả tử và mẫu cho a^n).

Do $a>1$ nên $0<\dfrac{1}{a}<1$, suy ra $\lim\left(\dfrac{1}{a}\right)^n=0$. Từ đó,

$$\lim\frac{a^n}{a^n+1}=\lim\frac{1}{1+\left(\frac{1}{a}\right)^n}=\frac{1}{1+\lim\left(\frac{1}{a}\right)^n}=\frac{1}{1+0}=1.$$

Vậy $\lim\dfrac{a^n}{a^n+1}$ bằng 0 nếu $0<a<1$; bằng $\dfrac{1}{2}$ nếu $a=1$; bằng 1 nếu $a>1$.

Câu 24: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, đường thẳng $d: x+y=2$ cắt trục hoành tại điểm A và cắt đường thẳng $d_n: y=\dfrac{2n+1}{n}x$ tại điểm $P_n\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$. Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác OAP_n. Tìm $\lim S_n$.



Hình 4

Lời giải

$A(2;0); P_n\left(\dfrac{2n}{3n+1};\dfrac{4n+2}{3n+1}\right); OA=2; AP_n=\dfrac{4n+2}{3n+1}\cdot\sqrt{2}; OAP_n=45^\circ$.

$$S_n=\frac{1}{2}OA\cdot AP_n\cdot\sin OAP=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4n+2}{3n+1}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4n+2}{3n+1}$$

$$\lim S_n=\lim\frac{4n+2}{3n+1}=\lim\frac{4+\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{4}{3}$$

Câu 25: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n-2\right)$; b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+n^2-\sqrt{n^4+1}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-n+2}+n\right)$ d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n-\sqrt{4n^2+1}\right)$.

Lời giải

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+2n}-n-2\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2n-4}{\left(\sqrt{n^2+2n}+n+2\right)}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-2-\dfrac{4}{n}}{\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1+\dfrac{2}{n}\right)}=-1.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2+n^2-\sqrt{n^4+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2+3}{2+n^2+\sqrt{n^4+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{2}{n^2}+1+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^4}}}=2$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2-n+2}+n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}+1\right)=+\infty$.

d) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n-\sqrt{4n^2+1}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(3-\sqrt{4+\dfrac{1}{n^2}}\right)=+\infty$.

Câu 26: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{6n-5}{3n}$; b) $\lim\dfrac{-2n^2-6n+2}{8n^2-5n+4}$ c) $\lim\dfrac{n^3-5n+1}{3n^2-4n+2}$

d) $\lim\dfrac{-4n+1}{9n^2-n+2}$ e) $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+n+1}}{8n+3}$ g) $\lim\dfrac{4^n+5^n}{3\cdot4^n-4\cdot5^n}$

Lời giải

a) 2. b) $-\dfrac{1}{4}$. c) $\lim\dfrac{n^3-5n+1}{3n^2-4n+2}=\lim\dfrac{1-\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{\dfrac{3}{n}-\dfrac{4}{n^2}+\dfrac{2}{n^3}}=+\infty$

d) 0. e) $\lim\dfrac{\sqrt{4n^2+n+1}}{8n+3}=\lim\dfrac{\sqrt{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}{8+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{1}{4}$ g) $\lim\dfrac{4^n+5^n}{3\cdot4^n-4\cdot5^n}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{4}{5}\right)^n+1}{3\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^n-4}=-\dfrac{1}{4}$

Câu 27: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{n^2-2n+1}{2-3n^2}$ b) $\lim\dfrac{2n^2+n-3}{n^3+5}$ c) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$

Lời giải

a) $\lim\dfrac{n^2-2n+1}{2-3n^2}=\lim\dfrac{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{2}{n^2}-3}=\dfrac{\lim 1-\lim\dfrac{2}{n}+\lim\dfrac{1}{n^2}}{\lim\dfrac{2}{n^2}-3}=\dfrac{1-0+0}{0-3}=-\dfrac{1}{3}$.

b) $\lim\dfrac{2n^2+n-3}{n^3+5}=\lim\dfrac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{3}{n^3}}{1+\dfrac{5}{n^3}}=\dfrac{\lim\dfrac{2}{n}+\lim\dfrac{1}{n^2}-\lim\dfrac{3}{n^3}}{1+\lim\dfrac{5}{n^3}}=\dfrac{0+0-0}{1+0}=0$

c) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)=\lim\dfrac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim\dfrac{\left(n^2+2n\right)-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}$

$=\lim\dfrac{2n}{\sqrt{n^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)}+n}=\lim\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1}=\dfrac{\lim 2}{\lim\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+1\right)}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{\lim 1+\lim\dfrac{2}{n}}+\lim 1}=\dfrac{2}{\sqrt{1+\lim\dfrac{2}{n}}+1}=\dfrac{2}{\sqrt{1+0}+1}=1.$

Câu 28: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim\left(n^2+3n-5\right)$; b) $\lim\dfrac{n^2+7}{1-2n}$ c) $\lim\left(3^n-2^n\right)$.

Lời giải

a) $n^2+3n-5=n^2\left(1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)$

Ta có $\lim n^2=+\infty$ và $\lim\left(1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)=\lim 1+\lim\dfrac{3}{n}-\lim\dfrac{5}{n^2}=1+0-0=1.$

Suy ra $\lim\left(n^2+3n-5\right)=\lim\left[n^2\left(1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)\right]=+\infty$

b) $\dfrac{n^2+7}{1-2n}=\dfrac{n^2\left(1+\dfrac{7}{n^2}\right)}{n\left(\dfrac{1}{n}-2\right)}=n\cdot\dfrac{1+\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-2}$

Ta có $\lim n=+\infty$ và $\lim\dfrac{1+\dfrac{7}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-2}=\dfrac{\lim 1+\lim\dfrac{7}{n^2}}{\lim\dfrac{1}{n}-\lim 2}=\dfrac{1+0}{0-2}=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\lim \frac{n^2+7}{1-2n} = \lim\left[n \cdot \frac{1+\frac{7}{n^2}}{\frac{1}{n}-2}\right] = -\infty$

c) $3^n - 2^n = 3^n\left(1-\frac{2^n}{3^n}\right) = 3^n\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

Ta có $\lim 3^n = +\infty$ và $\lim\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = 1 - \lim\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1-0=1$.

Suy ra $\lim\left(3^n - 2^n\right) = \lim\left\{3^n\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]\right\} = +\infty$

Câu 29: Kí hiệu $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ là tổng n số hạng đầu của cấp số nhân (u_n) có công bội bằng $q \neq 1$. Biết rằng $\lim \frac{u_n}{S_n} = \frac{3}{4}$. Tìm giá trị của q.

Lời giải

Ta có $u_n = u_1 q^{n-1}; S_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. Suy ra $\frac{u_n}{S_n} = \frac{q^{n-1}(1-q)}{1-q^n} = \frac{1-q}{q} \cdot \frac{q^n}{1-q^n}$.

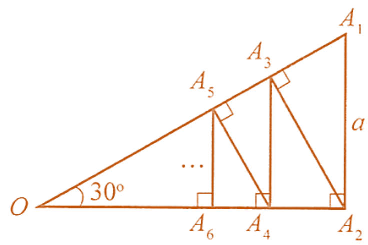
Nếu $0 < q < 1$ thì $\lim \frac{u_n}{S_n} = \lim\left(\frac{1-q}{q} \cdot \frac{q^n}{1-q^n}\right) = \frac{1-q}{q} \cdot \frac{\lim q^n}{1-\lim q^n}$

$= \frac{1-q}{q} \cdot \frac{0}{1-0} = 0 \neq \frac{3}{4}$. Do đó, $q > 1$. Khi đó,

$\lim \frac{u_n}{S_n} = \lim\left(\frac{1-q}{q} \cdot \frac{q^n}{1-q^n}\right) = \frac{1-q}{q} \cdot \lim \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n - 1} = \frac{1-q}{q} \cdot \frac{1}{0-1} = \frac{q-1}{q}$.

Suy ra $\frac{q-1}{q} = \frac{3}{4} \Rightarrow q = 4$. Vậy $q = 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 30: Cho tam giác OA_1A_2 vuông tại $A_2, A_1A_2 = a$ và $A_1OA_2 = 30^\circ$. Hạ các đường vuông góc $A_2A_3 \perp OA_1; A_3A_4 \perp OA_2; A_4A_5 \perp OA_1; \ldots$ Tiếp tục quá trình này, ta nhận được đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4\ldots$ Tính độ dài đường gấp khúc này theo a.



Hình 1

Lời giải

Các góc $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, A_3A_4A_5, \ldots$ đều bằng góc A_1OA_2 nên đều có số đo 30°.

$A_2A_3 = A_1A_2 \cdot \cos 30^\circ = a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$A_3A_4 = A_2A_3 \cdot \cos 30^\circ = a \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2;$

$A_4A_5 = A_3A_4 \cdot \cos 30^\circ = a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3;\ldots$

Vậy độ dài các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ và công bội bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Từ đó, độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4\ldots$ là $l = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{3}(2+\sqrt{3})}{2^2-(\sqrt{3})^2} = a(3+2\sqrt{3})$

Câu 31: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{2n-3}{6n+1}$ b) $\lim \dfrac{3n-1}{n^2+n}$ c) $\lim \dfrac{(2n-1)(2n+3)}{2n^2+4}$;

d) $\lim \dfrac{4n+1}{\sqrt{n^2+3n}+n}$; e) $\lim \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$; g) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$.

Lời giải

a) $\dfrac{1}{3}$;

b) 0.

c) $\lim \dfrac{(2n-1)(2n+3)}{2n^2+4} = \lim \dfrac{\left(2-\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}{2+\dfrac{4}{n^2}} = \dfrac{2.2}{2} = 2$;

d) $\lim \frac{4n+1}{\sqrt{n^2+3n}+n} = \lim \frac{4+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \frac{4+\lim\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\lim\frac{3}{n}}+1} = \frac{4}{1+1} = 2$;

e) $\lim \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim \frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

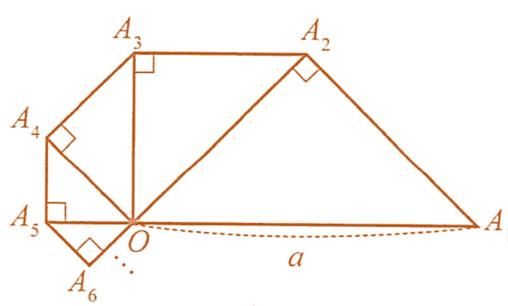
$= \lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+\lim\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$;

g)

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n} = \lim \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+n}+n\right)} = \lim \frac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}$$

$$= \lim\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right) = 2.$$

Câu 32: Cho tam giác OA_1A_2 vuông cân tại A_2 có cạnh huyền OA_1 bằng a. Bên ngoài tam giác OA_1A_2, vẽ tam giác OA_2A_3 vuông cân tại A_3. Tiếp theo, bên ngoài tam giác OA_2A_3, vẽ tam giác OA_3A_4 vuông cân tại A_4. Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta vẽ được một dãy các hình tam giác vuông cân (Hình 2).



Hình 2

Tính độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4\cdots$

Lời giải

Ta có các góc $A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4,\ldots$ đều bằng 45°. Ta có:

$$A_1A_2 = OA_2 = OA_1 \cdot \cos 45^\circ = a\frac{\sqrt{2}}{2}$$

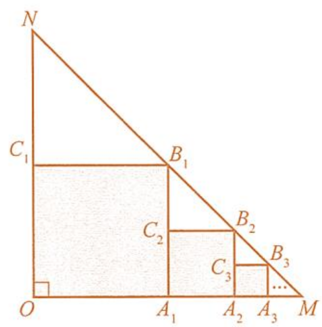
$$A_2A_3 = OA_3 = OA_2 \cdot \cos 45^\circ = a\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2;$$

$$A_3A_4 = OA_4 = OA_3 \cdot \cos 45^\circ = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = a\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3;\ldots$$

Vậy độ dài các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \ldots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và công bội bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó, độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4\ldots$ là

$$l = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot (2+\sqrt{2}) = a(1+\sqrt{2}).$$

Câu 33: Cho tam giác OMN vuông cân tại O, $OM = ON = 1$. Trong tam giác OMN, vẽ hình vuông $OA_1B_1C_1$ sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh OM, MN, ON. Trong tam giác A_1MB_1, vẽ hình vuông $A_1A_2B_2C_2$ sao cho các đỉnh A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh A_1M, MB_1, A_1B_1. Tiếp tục quá trình đó, ta được một dãy các hình vuông (Hình 3). Tính tổng diện tích các hình vuông này.



Hình 3

Lời giải

Độ dài cạnh của các hình vuông lần lượt là

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2; a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3; \ldots$$

Diện tích của các hình vuông lần lượt là

$$S_1 = a_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$S_2 = a_2^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$S_3 = a_3^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3, \ldots$$

Các diện tích $S_1, S_2, S_3, \ldots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $S_1 = \frac{1}{4}$ và công bội bằng $\frac{1}{4}$. Do đó, tổng diện tích các hình vuông là $S = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.