

MỤC LỤC

▶ BÀI 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ.....	2
Ⓐ. Tóm tắt kiến thức.....	2
Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản.....	4
♦ Dạng 1: Xác định giới hạn của hàm số bằng định nghĩa.....	4
♦ Dạng 2: Tính giới hạn của hàm số bằng một số kết quả giới hạn cơ bản.....	5
♦ Dạng 3: Tính giới hạn của hàm số có dạng $\frac{C}{\infty}, \frac{C}{0} (C \neq 0), \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$	6
♦ Dạng 4: Xác định giới hạn của hàm số dựa vào đồ thị.....	7
♦ Dạng 5: Ứng dụng.....	9
Ⓒ. Dạng toán rèn luyện.....	11
♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	11
♦ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....	17
♦ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	28

A. Tóm tắt kiến thức

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

- ✓ Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$.
- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn hữu hạn** là số L khi x dần tới x_0 nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$.
- ✍ **Nhận xét:** $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ (c là hằng số).

2. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số

- ✓ Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:
 - ✓ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = L - M$
 - ✓ $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ (với $M \neq 0$).
 - ✓ Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.
 - ✓ (Dấu của $f(x)$ được xét trên khoảng tìm giới hạn, $x \neq x_0$).
- ✍ **Nhận xét:**
 - ✓ a) $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k$, k là số nguyên dương;
 - ✓ b) $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ($c \in \mathbb{R}$, nếu tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$).

3. Giới hạn một phía

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.
- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn bên phải** là số L khi x dần tới x_0 nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$
- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng (a, x_0) .
- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ **có giới hạn bên trái** là số L khi x dần tới x_0 nếu dãy số (x_n) bất kì, $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$,
- ✓ kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Chú ý:

- ✓ Ta thừa nhận các kết quả sau:
- ✓ $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$;
- ✓ Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ thì không tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- ✓ Các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi ta thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow x_0^+$ hoặc $x \rightarrow x_0^-$.

4. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.
- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow +\infty$.
- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.
- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

Chú ý:

- ✓ a) Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta luôn có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} c = c$ và $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0$.
- ✓ b) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Mục 2 vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.
- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; a)$.
- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow -\infty$.

5. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.
- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là $+\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow +\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow x_0^+$.
- ✓ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là $-\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow -\infty$, kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ hay $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow x_0^-$.

 **Chú ý:**

a) Các giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được định nghĩa tương tự như trên.

b) Ta thường có các giới hạn thường dùng sau:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty \quad (a \in \mathbb{R}); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty \text{ với } k \text{ nguyên dương};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty \text{ với } k \text{ là số chẵn}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty \text{ với } k \text{ là số lẻ}.$$

c) Các phép toán trên giới hạn hàm số ở Mục 2 chỉ áp dụng được khi tất cả các hàm số được xét có giới hạn hữu hạn. Với giới hạn vô cực, ta có một số quy tắc sau đây.

Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \neq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) = -\infty$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x).g(x)]$ được tính

theo quy tắc cho bởi sau:

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x).g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay x_0^+ thành x_0^- (hoặc $+\infty$, $-\infty$).

B. Phân dạng toán cơ bản

♦ Dạng 1: Xác định giới hạn của hàm số bằng định nghĩa

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ với $x \neq 3$. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$.

Lời giải

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thoả mãn $x_n \neq 3$ và $\lim x_n = 3$.

$$\text{Ta có: } \lim f(x_n) = \lim \frac{x_n^2 - 9}{x_n - 3} = \lim \frac{(x_n - 3)(x_n + 3)}{x_n - 3}$$

$$= \lim (x_n + 3) = \lim x_n + \lim 3 = 3 + 3 = 6. \text{ Vậy } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6.$$

Câu 2: Sử dụng định nghĩa, chứng minh rằng:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = -8$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$

Lời giải

a) Xét hàm số $f(x) = x^3$. Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thoả mãn $\lim x_n = -2$.

Ta có: $\lim f(x_n) = \lim x_n^3 = (-2)^3 = -8$. Vậy $\lim_{x \rightarrow -2} x^3 = -8$.

b) Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$.

Giả sử (x_n) là dãy số bất kì, thoả mãn $x_n \neq -2$ và $\lim x_n = -2$.

Ta có: $\lim g(x_n) = \lim \frac{x_n^2 - 4}{x_n + 2} = \lim (x_n - 2) = -4$. Vậy $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4$.

• Dạng 2: Tính giới hạn của hàm số bằng một số kết quả giới hạn cơ bản

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Chứng minh rằng: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2} = 1$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} 2} = \frac{2}{2} = 1$.

Câu 2: Khi thực hiện tính $\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)]$ biết $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$, một bạn làm như sau:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} f(3x) = \lim_{3x \rightarrow 3} f(3x) = 3.$$

a) Theo em, lời giải trên có đúng không? Giải thích.

b) Nếu lời giải trên là sai, em hãy trình bày lời giải đúng.

Lời giải

a) Vì không có giả thiết $3f(x) = f(3x)$ nên $\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)] \neq \lim_{x \rightarrow 1} f(3x)$. Hơn nữa, từ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ không có cơ sở để kết luận được $\lim_{3x \rightarrow 3} f(3x) = 3$.

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \cdot 1 = 3$.

Câu 3: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (-x^2 + x + 2)$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x - 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^2 + x + 4}$.

Lời giải

a) $\lim_{x \rightarrow 3} (-x^2 + x + 2) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x^2) + \lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 2 = -9 + 3 + 2 = -4$.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 2x + 1}{3x - 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 2x + 1)}{\lim_{x \rightarrow -1} (3x - 2)}$
 $= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2) - \lim_{x \rightarrow -1} (2x) + \lim_{x \rightarrow -1} 1}{\lim_{x \rightarrow -1} (3x) - \lim_{x \rightarrow -1} 2} = \frac{3 - (-2) + 1}{(-3) - 2} = -\frac{6}{5} \cdot 72$

c) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} (5x^2 + x + 4) = 26$ nên $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^2 + x + 4} = \sqrt{26}$.

♦ **Dạng 3:** Tính giới hạn của hàm số có dạng $\frac{C}{\infty}, \frac{C}{0} (C \neq 0), \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{4x - 5}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1}$

Lời giải

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{2}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x - 3} = +\infty$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 2}{4x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(3 + \frac{2}{x} \right)}{x \left(4 - \frac{5}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{4 - \frac{5}{x}} = \frac{3}{4}$.

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (3x-1) = 3-1 = 2.$$

Câu 2: Cho $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = 3$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Lời giải

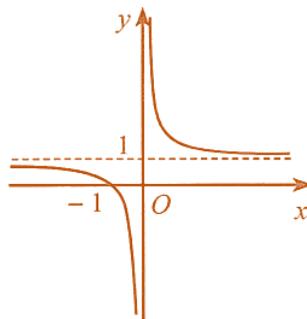
Nếu $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)-5] \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = -\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-5}{x-2} = +\infty$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)-5] = 0$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

♦ Dạng 4: Xác định giới hạn của hàm số dựa vào đồ thị

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Quan sát đồ thị hàm số ở Hình 1 và cho biết các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$



Hình 1

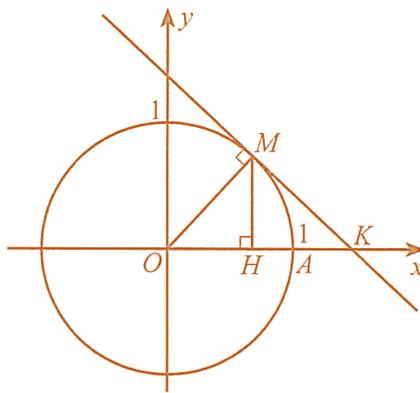
Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Câu 2: Cho điểm $M(t; \sqrt{1-t^2})$, $0 < t < 1$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2 + y^2 = 1$, điểm

$A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



Hình 1

Lời giải

Điểm M dần đến điểm A khi $t \rightarrow 1^-$. Do đó, ta cần tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{HK}{HA}$.

Ta có $H(t; 0)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M nhận $\overline{OM} = (t; \sqrt{1-t^2})$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là $d: t(x-t) + \sqrt{1-t^2}(y - \sqrt{1-t^2}) = 0$.

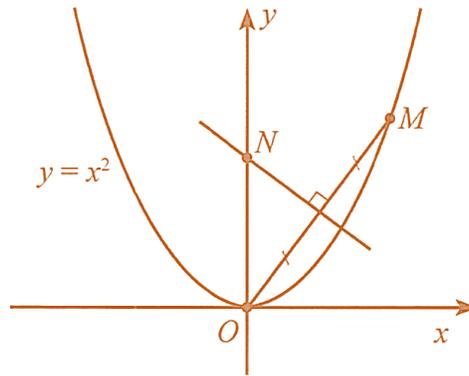
Thay $y=0$ vào phương trình của d ta nhận được $x = \frac{1}{t}$. Suy ra $K\left(\frac{1}{t}; 0\right)$.

Ta có: $HA = 1-t$; $HK = \frac{1}{t} - t = \frac{1-t^2}{t}$; $\frac{HK}{HA} = \frac{1-t^2}{t(1-t)} = \frac{1+t}{t}$; $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{HK}{HA} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1+t}{t} = \frac{1+1}{1} = 2$.

Vậy khi điểm M dần đến điểm A thì giá trị của tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến 2.

Câu 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(t; t^2)$, $t > 0$, nằm trên đường parabol $y = x^2$.

Đường trung trực của đoạn thẳng OM cắt trục tung tại N . Điểm N dần đến điểm nào khi điểm M dần đến điểm O ?



Hình 2

Lời giải

Trung điểm của đoạn thẳng OM là $I\left(\frac{t}{2}; \frac{t^2}{2}\right)$.

Đường trung trực của OM nhận vectơ $\overrightarrow{OM} = (t; t^2)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình

$$d: t\left(x - \frac{t}{2}\right) + t^2\left(y - \frac{t^2}{2}\right) = 0. \text{ Thay } x=0 \text{ vào phương trình của } d, \text{ ta nhận được } y = \frac{1}{2}(1+t^2).$$

Suy ra $N\left(0; \frac{1}{2}(1+t^2)\right)$.

Điểm M dần đến điểm O khi t dần đến 0^+ . Ta có $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}(1+t^2) = \frac{1}{2}$.

Suy ra khi điểm M dần đến điểm O thì điểm N dần đến điểm $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

♦ Dạng 5: Ứng dụng

📌 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Số lượng xe ô tô vào một đường hầm được cho bởi công thức $f(v) = \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$,

trong đó $v(m/s)$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim_{v \rightarrow 20} f(v)$ và cho biết

ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{v \rightarrow 20} \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264} = \frac{\lim_{v \rightarrow 20} 290,4v}{\lim_{v \rightarrow 20} 0,36v^2 + \lim_{v \rightarrow 20} 13,2v + \lim_{v \rightarrow 20} 264} = \frac{290,4 \cdot 20}{0,36 \cdot 20^2 + 13,2 \cdot 20 + 264} \approx 9.$$

Từ kết quả đó, ta thấy lưu lượng xe vào hầm ở thời điểm vận tốc trung bình của các xe đạt $20m/s$ là khoảng 9 xe ô tô trong 1s.

Câu 2: Một đơn vị sản xuất hàng thủ công ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2x + 55$ (triệu đồng).

a) Tìm hàm số $f(x)$ biểu thị chi phí trung bình để sản xuất mỗi đơn vị sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Giới hạn này có ý nghĩa gì?

Lời giải

$$a) f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x + 55}{x}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Khi số lượng sản phẩm sản xuất được càng lớn thì chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm càng gần với 2 (triệu đồng).

Câu 3: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t) = 45t^2 - t^3$ (người). Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1, t_2 là

$V_{tb} = \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}$. Tính $\lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10}$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10} = \lim_{t \rightarrow 10} \frac{45t^2 - t^3 - 45 \cdot 10^2 + 10^3}{t - 10}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 10} \frac{45(t - 10)(t + 10) - (t - 10)(t^2 + 10t + 100)}{t - 10}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 10} (-t^2 + 35t + 350) = 600$$

Từ kết quả trên, ta thấy tốc độ gia tăng người bệnh ngay tại thời điểm $t = 10$ (ngày) là 600 người/ngày.

©. Dạng toán rèn luyện

♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 7x + 11$ là:

- A. 37. B. 38. C. 39. D. 40.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x^2 + 7x + 11 = 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot 2 + 11 = 37$$

Câu 2: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4|$ là:

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4| = \left| \sqrt{3}^2 - 4 \right| = 1$$

Câu 3: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2}$ là:

- A. $\sin \frac{1}{2}$. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. 0.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{2} = 0 \cdot \sin \frac{1}{2} = 0$$

Câu 4: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2}$ là:

- A. 1. B. -2. C. 2. D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3}{x^3 + 2} = \frac{-1^2 - 3}{-1^3 + 2} = -2$$

Câu 5: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^3}{2x - 1 - x^4 - 3}$ là:

- A. 1. B. -2. C. 0. D. $-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-x^3}{2x-1} = \frac{1-1^3}{2 \cdot 1 - 1} = 0$$

Câu 6: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-1|}{x^4+x-3}$ là:

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x-1|}{x^4+x-3} = \frac{|-1-1|}{1-1-3} = -\frac{2}{3}$$

Câu 7: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2-x}{2x-1}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 3^2 - 3}{2 \cdot 3 - 1}}$ là:

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\sqrt{5}$. C. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{9x^2-x}{2x-1}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 3^2 - 3}{2 \cdot 3 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Câu 8: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$ là:

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn B

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}} = \sqrt[3]{\frac{2^2-2+1}{2^2+2 \cdot 2}} = \frac{1}{2}$$

Câu 9: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2-4} - \sqrt{3x-2}}{x+1}$ là:

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $-\frac{2}{3}$. C. 0. D. $+\infty$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{3x^2-4} - \sqrt{3x-2}}{x+1} = \frac{\sqrt[3]{12-4} - \sqrt{6-2}}{3} = \frac{0}{3} = 0$$

Câu 10: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} + x)$ là:

- A. 0. B. $+\infty$. C. $\sqrt{2}-1$. D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty : \sqrt{x^2+1} + x \sim \sqrt{x^2} + x = 2x \rightarrow +\infty$.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right) = +\infty$$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2 > 0 \end{cases}$$

Câu 11: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2})$ là:

A. $\sqrt[3]{3} + 1$.

B. $+\infty$.

C. $\sqrt[3]{3} - 1$.

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn B

Giải nhanh: $x \rightarrow +\infty : \sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2} \sim \sqrt[3]{3x^3} + \sqrt{x^2} = (\sqrt[3]{3} + 1)x \rightarrow +\infty$.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{3x^3-1} + \sqrt{x^2+2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = +\infty$$

Câu 12: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:

A. $-\infty$.

B. $+\infty$.

C. $-\frac{15}{2}$.

D. Không xác định.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+2} = 2 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0 \text{ \& } \sqrt{x-2} > 0, \forall x > 2 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = +\infty.$$

$$\text{vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{3 - \frac{1}{x^3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} \right) = \sqrt[3]{3} + 1 > 0 \end{cases}$$

Câu 13: Kết quả của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2-2x+1} + 2-x}{\sqrt{9x^2-3x+2x}}$ là:

A. $-\frac{1}{5}$.

B. $+\infty$.

C. $-\infty$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Giải nhanh : khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{3x^2 + 1} = \sqrt{3 \cdot 1^2 + 1} = 2$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{với } x < 1 \\ 1 - x & \text{với } x \geq 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ là:

- A. $+\infty$. B. -1. C. 0. D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{1 - x} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 - x = 0 \text{ \& } 1 - x > 0 \quad \forall x < 1 \end{cases}$$

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{với } x \geq 2 \\ x - 1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ là:

- A. -1. B. 0. C. 1. D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 3 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1.$$

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} + 3 & \text{với } x \geq 2 \\ ax - 1 & \text{với } x < 2 \end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

- A. $a = 1$. B. $a = 2$. C. $a = 3$. D. $a = 4$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax - 1 = 2a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} + 3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ tồn tại} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Leftrightarrow 2a - 1 = 3 \Leftrightarrow a = 2.$$

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{với } x > 3 \\ 1 & \text{với } x = 3 \\ 3 - 2x^2 & \text{với } x < 3 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6$. B. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 15$
C. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6$. D. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -15$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - 2x + 3 = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 3 - 2x^2 = -15 \end{cases} \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

\longrightarrow không tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow 3$.

Vậy chỉ có khẳng định C sai.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Khi } x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x} \sim \sqrt{x^2} - \sqrt{x^2} = 0$$

→ Nhân lượng liên hợp:

$$\text{Giải nhanh: } x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x}$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 4x}} \sim \frac{-x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \frac{-x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Cụ thể: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 4x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 4x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 + \frac{3}{x}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x}}} = -\frac{1}{2}.$$

Câu 26: Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ là:

A. $\frac{5}{6}$.

B. $+\infty$.

C. -1 .

D. $-\infty$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Khi } x \rightarrow +\infty \longrightarrow \sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \sim \sqrt{x^2} - \sqrt[3]{x^3} = x - x = 0$$

→ Nhân lượng liên hợp:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x + x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{x^3 - 1}^2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

$$\text{Giải nhanh: } \sqrt{x^2 + x} - \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \sqrt{x^2 + x} - x + x - \sqrt[3]{x^3 - x^2}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + x} + \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[3]{x^3 - 1}^2} \sim \frac{x}{\sqrt{x^2} + x} + \frac{x^2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[6]{x^6}}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \quad x \rightarrow +\infty.$$

♦ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + 3) = 9$		

b)	$\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{\frac{1}{x+3}} = 3$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{3}$		

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x < -1 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$. Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \sqrt{5}$		
b)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3$.		
c)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{2}$		
d)	Hàm số tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow -1$		

Câu 3. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 0} (-5x^3 - 4x + 2) = 2$		
b)	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 3x^2}{4x + 1} = -\frac{3}{4}$		
c)	$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = +\infty$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \frac{5}{4}$		

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -8$		
b)	Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$		

c)	Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$		
d)	Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$		

Câu 5. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$		
b)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = -\infty$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 6x + 9} = +\infty$		
d)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^3 - 1) \left(\sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} \right) \right] = +\infty$		

Câu 6. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3) = +\infty$		
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = -\infty$		
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$		
d)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x+3}} = 2$		

Câu 7. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x+2} - 1) = 1$		
b)	$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1} = +\infty$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = -\infty$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ x+1 }{x^2-1} = -\infty$		

Câu 8. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x) = 4$		
b)	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 2x + 1}{x - 4} = \frac{13}{6}$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9} = \frac{23}{6}$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 - x - 14}{x^2 - 7x - 18} = \frac{9}{11}$		

Câu 9. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{4x} = \frac{1}{16}$		
b)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x+7} - 3} = -24$		
c)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} = \frac{4}{3}$		
d)	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} = \frac{1}{3}$		

Câu 10. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 10x) = +\infty$		
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{3}{2}$		
c)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 3x}{2 - 3x} = \frac{5}{4}$		
d)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 3x^2 + 1} - x}{\sqrt{4x^2 - x + 2} + 3x} = 1$		

LỜI GIẢI

Câu 1. Tìm được các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + 3) = 9$

b) $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{\frac{1}{x+3}} = 3;$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = \frac{1}{3}.$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + 3) = (-2)^2 - (-2) + 3 = 9.$

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 6} \sqrt{\frac{1}{x+3}} = \sqrt{\frac{1}{6+3}} = \frac{1}{3}.$

c) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-1) = 2-1 = 1.$

d) Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x-1} = \frac{-2+1}{-1-1} = \frac{1}{2}.$

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x < -1 \\ \sqrt{x^2+1} & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$. Khi đó:

a) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \sqrt{5}$

b) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -3.$

c) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{2}$

d) Hàm số tồn tại giới hạn khi $x \rightarrow -1$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------------	----------------	----------------	---------------

a) Ta có: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4$

b) Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n < -1$ và $x_n \rightarrow -1$, ta có: $f(x_n) = x_n - 2.$

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x_n) = -1 - 2 = -3.$

c) Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n > -1$ và $x_n \rightarrow -1$, ta có: $f(x_n) = \sqrt{x_n^2 + 1}$.

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x_n) = \sqrt{(-1)^2 + 1} = \sqrt{2}$.

d) Vì $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ (hay $-3 \neq \sqrt{2}$) nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Câu 3. Tìm được các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (-5x^3 - 4x + 2) = 2$;

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 3x^2}{4x + 1} = -\frac{3}{4}$;

c) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \frac{5}{4}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (-5x^3 - 4x + 2) = -5 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0 + 2 = 2$.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - 3x^2}{4x + 1} = \frac{2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-1)^2}{4 \cdot (-1) + 1} = \frac{5}{3}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 + 2x - 15}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x+5)(x-3)}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5} (x-3) = -5 - 3 = -8$.

d) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x-1)(x+4)}{x(x+4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x-1}{x} = \frac{-4-1}{-4} = \frac{5}{4}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+2} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$.

a) Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -8$

b) Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -3$

c) Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

d) Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \sqrt{5}$

b) Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n < 2$ và $x_n \rightarrow 2$, ta có: $f(x_n) = 1 - x_n^2$.

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x_n) = 1 - 2^2 = -3$.

c) Xét dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n > 2$ và $x_n \rightarrow 2$, ta có $f(x_n) = \sqrt{x_n + 2}$.

Khi đó: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x_n) = \sqrt{2 + 2} = 2$.

d) Vì $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ (hay $-3 \neq 2$) nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Câu 5. Tìm được các giới hạn một bên sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^3-1) \left(\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} \right) \right] = +\infty$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(2x-1) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = +\infty$ (do $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x-1) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$).

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x(x-3)}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left(x \frac{1}{x-3} \right) = -\infty$,

do $\lim_{x \rightarrow 3^-} x = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty$.

d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^3 - 1) \left(\sqrt{\frac{x}{x^2 - 1}} \right) \right] &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x-1)(x^2 + x + 1) \sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^2 + x + 1) \sqrt{\frac{x(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}} \right] = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x^2 + x + 1) \sqrt{\frac{x(x-1)}{x+1}} \right] = 3 \cdot \sqrt{\frac{0}{2}} = 0. \end{aligned}$$

Câu 6. Tìm được các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3) = +\infty$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = -\infty$;

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = 0$;

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x+3}} = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{3}{x^2} \right) = +\infty$, do $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x^2} \right) = 1$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = +\infty$,

do $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right) = -2$.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot \frac{1}{x}}{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x}{x \left(1 + \frac{3}{x} \right)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2}{1 + \frac{3}{x}}} = \sqrt{2}$.

Câu 7. Tìm được các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x+2} - 1) = 1$;

b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1} = +\infty$;

$$c) \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) = -\infty;$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|}{x^2-1} = -\infty.$$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

$$a) \lim_{x \rightarrow 2^+} (\sqrt{x+2} - 1) = \sqrt{2+2} - 1 = 1.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(4x-3) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = +\infty \text{ vì } \lim_{x \rightarrow 1^+} (4x-3) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty.$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2-1}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{1}{x-2} \right] = -\infty, \text{ do } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty \end{cases} \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{|x+1|}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{2}.$$

Câu 8. Tính được các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x) = 4$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 2x + 1}{x-4} = \frac{13}{6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9} = \frac{23}{6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 - x - 14}{x^2 - 7x - 18} = \frac{9}{11}$$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 = 8$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 2x + 1}{x-4} = -\frac{13}{6}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 24}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 2x + 8)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x + 8}{x+3} = \frac{23}{6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 - x - 14}{x^2 - 7x - 18} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 + 3x - 7)}{(x+2)(x-9)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x - 7}{x-9} = \frac{9}{11}$$

Câu 9. Tìm được các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{4x} = \frac{1}{16};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x+7} - 3} = -24$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} = \frac{4}{3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} = \frac{1}{3}$$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - 2}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+x} - 2)(\sqrt{4+x} + 2)}{4x(\sqrt{4+x} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4+x-4}{4x(\sqrt{4+x} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(\sqrt{4+x} + 2)} = \frac{1}{4(\sqrt{4} + 2)} = \frac{1}{16}.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sqrt{x+7} - 3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)(\sqrt{x+7} + 3)}{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(2+x)(\sqrt{x+7} + 3)}{x+7-9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} [-(2+x)(\sqrt{x+7} + 3)] = -4.6 = -24$$

c)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{\sqrt{x+2} - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x+5} - 3)(\sqrt{2x+5} + 3)(\sqrt{x+2} + 2)}{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)(\sqrt{2x+5} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+5-9)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x+2-4)(\sqrt{2x+5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(\sqrt{x+2} + 2)}{\sqrt{2x+5} + 3} = \frac{4}{3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x+7} - 2)(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4)}{(x-1)(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+7-2^3}{(x-1)(\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+7)^2} + 2\sqrt[3]{x+7} + 4} = \frac{1}{12}.$$

Câu 10. Tìm được các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 10x) = +\infty$;

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{3}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 3x}{2 - 3x} = \frac{5}{4}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 3x^2 + 1} - x}{\sqrt{4x^2 - x + 2} + 3x} = 1.$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 10x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 - \frac{10}{x}\right) = +\infty.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{2x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 3x}{2 - 3x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} - 3x}{x \left(\frac{2}{x} - 3\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3x}{x \left(\frac{2}{x} - 3\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3}{\frac{2}{x} - 3} = \frac{-\sqrt{1} - 3}{-3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 3x^2 + 1} - x}{\sqrt{4x^2 - x + 2 + 3x}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(8 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} - x}{\sqrt{x^2 \left(4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \sqrt[3]{8 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}} - x}{x \sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 3x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}} - 1}{\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + 3} = \frac{\sqrt[3]{8} - 1}{-\sqrt{4} + 3} = 1 \end{aligned}$$

♦ **Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

Câu 1: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = -3$. Tìm các giới hạn:

a) $\lim_{x \rightarrow 4} [g(x) - 3f(x)]$ b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2f(x) \cdot g(x)}{[f(x) + g(x)]^2}$.

Lời giải

a) -9 ; b) -12 .

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, & x \leq -1 \\ 3 - 2x^2, & x > -1 \end{cases}$

Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (3 - 2x^2) = 1; \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (3x + 4) = 1; \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1.$$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + a}, & x > 1 \end{cases}$

Tìm giá trị của tham số a sao cho tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + 1) = 3; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2 + a} = \sqrt{1 + a}.$$

Để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ thì $\sqrt{1 + a} = 3$, suy ra $a = 8$.

Câu 4: Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 3x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x+5}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x}{2x+1}$.

Lời giải

a) 2; b) 3; c) $-\frac{1}{2}$.

Câu 5: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -3} (8+3x-x^2)$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} [(5x-1)(2-4x)]$;
c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x}{(2x+1)^2}$; d) $\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{10-2x^2}$.

Lời giải

a) -10; b) -54; c) $\frac{2}{3}$ d) $2\sqrt{2}$.

Câu 6: Mỗi giới hạn sau có tồn tại không? Nếu có, hãy tìm giới hạn đó.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}$; b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{|x-2|}$.

Lời giải

a) Tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$.

b) Không tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{|x-2|}$, do $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$ và

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-2x}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-2x}{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x) = -2.$$

Câu 7: Tính $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}.$$

Câu 8: Biết $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$.

Lời giải

Rõ ràng $(x-1)^2 > 0, (x-1)^2 \rightarrow 0$ khi $x \rightarrow 1$. Theo quy tắc giới hạn vô cực (của thương hai hàm số), ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2} = +\infty$.

Câu 9: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{1-x^2}}$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x-1)\sqrt{\frac{x+2}{1-x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{(x+2)(1-x)^2}{1-x^2}} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{(x+2)(1-x)}{1+x}} = 0.$$

Câu 10: Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x - 1)$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2+1} + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x}} = -1.$$

Câu 11: Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 1$. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)g(x)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 1)g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)g(x) \right] = +\infty$$

$$\text{(do } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)g(x) \right] = 1 > 0 \text{)}.$$

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x + m & \text{nếu } x < 0, \\ x^2 - 1 & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$ với m là tham số.

Biết hàm số $f(x)$ có giới hạn hữu hạn khi $x \rightarrow 0$. Tìm m .

Lời giải

Do $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + m) = m$ nên $m = -1$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x > 1 \\ 2 & \text{nếu } x = 1 \\ 1 & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$ không?

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$. Hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 1$.

Câu 14: Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{nếu } x > 3 \\ 3x^2 + 1 & \text{nếu } x \leq 3 \end{cases}$ có giới hạn khi $x \rightarrow 3$.

Lời giải

Theo cách xác định hàm số $f(x)$, ta có $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 9 + 3a$ và $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 28$. Hàm số này có giới hạn khi $x \rightarrow 3$ nếu $9 + 3a = 28$, hay $a = \frac{19}{3}$.

Câu 15: Tìm các số thực a và b sao cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - ax + 1}{x^2 - 3x + 2} = b$.

Lời giải

Do $x = 1$ là nghiệm của mẫu số nên ta phải có $2x^2 - ax + 1 = 0$ với $x = 1$. Tức là $a = 3$. Khi đó

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{x - 2} = -1$. Vậy $b = -1$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - x + 2}}{x}$. Tính:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Lời giải

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1$. b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} = -1$.

Câu 17: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)(1-x^2)(1-x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{x^3} - 1 \right) = -\infty.$$

Câu 18: Cho hàm số $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 1} - 2m$ với m là tham số.

Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, tìm giá trị của m .

Lời giải

$$\text{Ta có } g(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-1}} - 2m = \frac{2 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} - 2m.$$

Do đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 - 2m = 0$. Vậy $m = \frac{1}{2}$.

Câu 19: Cho m là một số thực. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(m-x)(mx+1)] = -\infty$. Xác định dấu của m .

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow -\infty} [(m-x)(mx+1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\frac{m}{x} - 1 \right) \left(m + \frac{1}{x} \right) = -\infty.$$

Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{m}{x} - 1 \right) \left(m + \frac{1}{x} \right) = -m$ nên ta phải có $m > 0$.

Câu 20: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$. Chứng minh rằng $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Lời giải

Lấy dãy số (x_n) bất kì sao cho $x_n \rightarrow +\infty$. Khi đó

$$|f(x_n)| = \frac{\sin^2 x_n}{x_n^2} \leq \frac{1}{x_n^2} \rightarrow 0 \text{ khi } n \rightarrow +\infty.$$

Vậy $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = 0$. Từ đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Câu 21: Cho $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$, chứng minh rằng:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} 3f(x) = 12$;

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{4} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{f(x)} = 2$

Lời giải

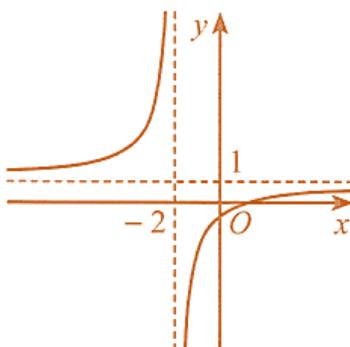
$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} 3f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} 3 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3 \cdot 4 = 12.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 3} 4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{f(x)} = \sqrt{4} = 2.$$

Câu 22: Quan sát đồ thị hàm số ở Hình 2 và cho biết các giới hạn sau: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x); \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x).$$



Hình 2

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$;

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = -\infty.$$

Câu 23: Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} (-4x^2 + 3x + 1)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-4x + 1}{x^2 - x + 3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{3x^2 + 5x + 4}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{4}{x}}{2x^2 + 3}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3}{x - 2}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{5}{x + 2}.$$

Lời giải

$$\text{a) } -6.$$

$$\text{b) } 1.$$

$$\text{c) } \sqrt{26}.$$

- d) 0. e) $-\infty$. g) $+\infty$.

Câu 24: Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-4}{x-1} = 2$. Tính:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 1} 3f(x)$.

Lời giải

a) Nếu $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)-4] \neq 0$ thì $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-4}{x-1} = -\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-4}{x-1} = +\infty$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)-4] = 0$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} 3f(x) = 12$.

Câu 25: Cho số thực a và hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Chúng minh rằng: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-3}{2f(x)+1} = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có:
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-3}{2f(x)+1} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1 - \frac{3}{f(x)}}{2 + \frac{1}{f(x)}} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} 1 - \lim_{x \rightarrow a} \frac{3}{f(x)}}{\lim_{x \rightarrow a} 2 + \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}} = \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

Câu 26: Tìm các giới hạn sau:

- a) $\lim_{x \rightarrow 3} [(3x+1)(2-x^2)]$; b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(4x+10)^2}{\sqrt{x^2-6x}}$.

Lời giải

a)
$$\lim_{x \rightarrow 3} [(3x+1)(2-x^2)] = \lim_{x \rightarrow 3} (3x+1) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} (2-x^2) = (3 \lim_{x \rightarrow 3} x + 1) \left[2 - \left(\lim_{x \rightarrow 3} x \right)^2 \right] = (3 \cdot 3 + 1) \cdot (2 - 3^2) = -70$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(4x+10)^2}{\sqrt{x^2-6x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (4x+10)^2}{\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2-6x}} = \frac{\left(4 \lim_{x \rightarrow -2} x + 10 \right)^2}{\sqrt{\left(\lim_{x \rightarrow -2} x \right)^2 - 6 \lim_{x \rightarrow -2} x}}$$

$$= \frac{[4 \cdot (-2) + 10]^2}{\sqrt{(-2)^2 - 6 \cdot (-2)}} = 1$$

Câu 27: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ với $x \neq 1$. Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (nếu có).

Lời giải

$$\text{Với } x > 1 \text{ thì } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = x + 1;$$

$$\text{Với } x < 1 \text{ thì } f(x) = \frac{x^2 - 1}{1 - x} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{-(x - 1)} = -(x + 1).$$

$$\text{Từ đó, } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 1 + 1 = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-(x + 1)] = -\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1\right) = -(1 + 1) = -2.$$

Do $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Câu 28: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2g(x)] = 7$.

$$\text{Tìm } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) + g(x)}{2f(x) - g(x)}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } g(x) = \frac{1}{2} \{ [f(x) + 2g(x)] - f(x) \}.$$

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{1}{2} \{ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + 2g(x)] - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \} = \frac{1}{2} (7 - 3) = 2.$$

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) + g(x)}{2f(x) - g(x)} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}{2 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)} = \frac{2 \cdot 3 + 2}{2 \cdot 3 - 2} = 2.$$

Câu 29: Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{x - 2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^3 - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x - 2}{x}$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x-8}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{\sqrt{4x+1}+3} = \frac{2}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1) + (x^2 - 1) + (x - 1)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x + 1) + (x + 1) + 1}{x^2 + x + 1} = 2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-3}{x-2} = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x - 2}{x} = +\infty$$

Câu 30: Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x+2}{3x+1};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+3}{3x^2+2x+5}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{x+1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{x+1};$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-8x+6}{x^2-1}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2+2x+15}{x^2+4x+3}$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5x+2}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-5 + \frac{2}{x}}{3 + \frac{1}{x}} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+3}{3x^2+2x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{9 + \frac{3}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \sqrt{9 + \frac{3}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 3$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+3}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{9+\frac{3}{x^2}}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x) \cdot \sqrt{9+\frac{3}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -3.$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-8x+6}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-6)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-6}{x+1} = -2$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-x^2+2x+15}{x^2+4x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(5-x)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{5-x}{x+1} = -4.$$

Câu 31: Sử dụng định nghĩa, tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x}{x+1} \quad b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-5x}{x^2+2}.$$

Lời giải

a) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì thoả mãn $x_n \neq -1, x_n \neq 3$ với mọi n và $\lim x_n = 3$.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2-x_n}{x_n+1} = \frac{(\lim x_n)^2 - \lim x_n}{\lim x_n + 1} = \frac{3^2-3}{3+1} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x}{x+1} = \frac{3}{2}.$$

b) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì thoả mãn $\lim x_n = +\infty$.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x_n^2-5x_n}{x_n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{5}{x_n}}{1+\frac{2}{x_n^2}} = \frac{2-5\lim \frac{1}{x_n}}{1+2\lim \frac{1}{x_n^2}} = \frac{2-5 \cdot 0}{1+2 \cdot 0} = 2.$$

$$\text{Vậy } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-5x}{x^2+2} = 2.$$

Câu 32: Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-4x-5}{x+1} \quad b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}.$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-5)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-5) = \lim_{x \rightarrow -1} x - 5 = -1 - 5 = -6.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} + 1)}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1) - 1}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 1} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x-1} + 1)}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} x - 1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2-1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

Câu 33: Tìm các giới hạn sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + 4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x + 1};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x)$$

Lời giải

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3}{2x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{4}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2}} = \frac{1 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}.$$

b) Do xét giới hạn khi $x \rightarrow -\infty$ nên ta chỉ cần xét $x < 0$. Khi đó, $\sqrt{x^2} = |x| = -x$ nên ta có

$$\frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x + 1} = \frac{\sqrt{x^2 \left(4 + \frac{1}{x}\right)}}{x + 1} = \frac{|x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x + 1} = \frac{-x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}}.$$

$$\text{Do đó, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{4 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}}}{1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}} = \frac{-\sqrt{4 + 0}}{1 + 0} = -2.$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 6x} - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 6x} - x)(\sqrt{x^2 + 6x} + x)}{\sqrt{x^2 + 6x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 6x - x^2}{\sqrt{x^2 + 6x} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 6x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{\sqrt{1 + \frac{6}{x}} + 1} = \frac{6}{1 + 1} = 3. \end{aligned}$$

Câu 34: Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 2x - 4)$; b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x - 1}$.

Lời giải

a) $-x^2 + 2x - 4 = x^2 \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \right)$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2}$

$= -1 + 0 - 0 = -1$. Suy ra $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 2x - 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^2 \left(-1 + \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2} \right) \right] = -\infty$.

b) $\frac{x^2 + 3x + 1}{2x - 1} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)} = x \cdot \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x}}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}} = \frac{1 + 0 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x \cdot \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x}} \right) = -\infty$.

Câu 35: Tìm giá trị của các tham số a và b biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 4$.

Lời giải

Do $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ nên để tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = 4$, trước hết ta phải có

$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$ hay $1 + a + b = 0 \Rightarrow b = -a - 1$.

Khi đó, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - a - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + a(x - 1)}{x - 1}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1) + a(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1+a)(x-1)}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1+a) = \lim_{x \rightarrow 1} x+1+a = 2+a.
\end{aligned}$$

Suy ra $2+a=4$ hay $a=2$, suy ra $b=-3$.

Vậy $a=2, b=-3$.

Câu 36: Tìm các giới hạn sau:

$$\begin{array}{lll}
\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x+2}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{1-x}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3}; \\
\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{x+6}}{x+2}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}; & \text{g) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4}.
\end{array}$$

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 2-2 = 0;$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{-(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} [-(x^2+x+1)] = -3;$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-4x+3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-1) = 3-1 = 2;$$

d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-\sqrt{x+6}}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-\sqrt{x+6})(2+\sqrt{x+6})}{(x+2)(2+\sqrt{x+6})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4-(x+6)}{(x+2)(2+\sqrt{x+6})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x+2)}{(x+2)(2+\sqrt{x+6})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{2+\sqrt{x+6}} = \frac{-1}{2+\sqrt{-2+6}} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x+1}+1) = 2
\end{aligned}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{0}{4} = 0.$$

Câu 37: Tìm các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+4} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+1}{(2x+1)^2} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x}} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+2x}).$$

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{4}{x}} = \frac{1}{1+4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x}} = \frac{1}{1+4 \cdot 0} = 1;$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+1}{(2x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{2+\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}}{\left(2+\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{2+0}{(2+0)^2} = \frac{1}{2}$$

c) Với $x < 0$ thì $\sqrt{x^2} = |x| = -x$, nên ta có

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{\sqrt{x^2-2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\left(3+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{2}{x}}} = -\frac{3+\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}}{\sqrt{1-2 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}}} = -\frac{3+0}{\sqrt{1-2 \cdot 0}} = -3;$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+2x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2+2x})(x + \sqrt{x^2+2x})}{x + \sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2+2x)}{x + \sqrt{x^2+2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x + x\sqrt{1+\frac{2}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{1 + \sqrt{1+\frac{2}{x}}} = -1 \end{aligned}$$

Câu 38: Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 1) \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{3x^2 + 1}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3}$$

Lời giải

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + 2x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \right] = -\infty$$

$$(\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 1 + 0 - 0 = 1).$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x^2}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \frac{x^2 + 2x}{3x^2 + 1} \right] = +\infty \left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{3x^2 + 1} = \frac{1}{3} \right);$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(|x| \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} \right) = +\infty$$

$$(\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1).$$

Câu 39: Tìm giá trị của các tham số a và b , biết rằng:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax + b}{x - 2} = 5 \qquad b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x} + b}{x - 1} = 3.$$

Lời giải

a) Do $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$ nên để tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax + b}{x - 2} = 5$, trước hết ta phải có

$$\lim_{x \rightarrow 2} (ax + b) = 0 \text{ hay } 2a + b = 0, \text{ suy ra } b = -2a.$$

$$\text{Khi đó, } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax + b}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 2a}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} a = a.$$

Suy ra $a = 5$ và $b = -10$.

b) Do $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$ nên để tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x} + b}{x - 1} = 3$, trước hết ta phải có

$$\lim_{x \rightarrow 1} (a\sqrt{x} + b) = 0 \text{ hay } a + b = 0, \text{ suy ra } b = -a.$$

$$\text{Khi đó, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x} + b}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a\sqrt{x} - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{\sqrt{x} + 1} = \frac{a}{2}. \text{ Suy ra } \frac{a}{2} = 3 \text{ hay } a = 6, \text{ suy ra } b = -6.$$