

MỤC LỤC

► BÀI ③. HÀM SỐ LIÊN TỤC	2
Ⓐ. Tóm tắt kiến thức	2
Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản.....	3
♦ Dạng ①: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm.....	3
♦ Dạng ②: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng, đoạn.....	4
♦ Dạng ③: Tìm giá trị tham số để hàm số liên tục	6
♦ Dạng ④: Ứng dụng	7
Ⓒ. Dạng toán rèn luyện.....	9
♦ Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	9
♦ Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai	20
♦ Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	30

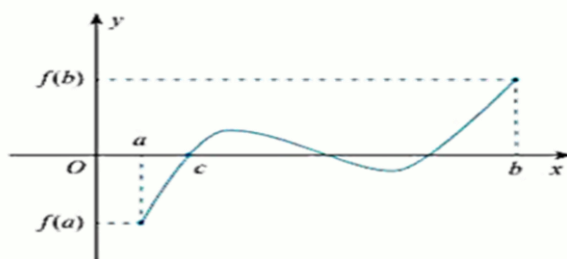
A. Tóm tắt kiến thức

1. Hàm số liên tục tại một điểm

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.
- ✓ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục tại điểm** x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- ✍ **Nhận xét:** Để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì phải có cả ba điều kiện sau:
 1. Hàm số xác định tại x_0 ;
 2. Tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$;
 3. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
- ✍ **Chú ý:**
- ✓ Khi hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm x_0 thì ta nói $f(x)$ **gián đoạn tại điểm** x_0 và x_0 được gọi là **điểm gián đoạn** của hàm số $f(x)$.

2. Hàm số liên tục trên một khoảng, trên một đoạn

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$.
- ✓ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên khoảng** $(a; b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trong khoảng ấy.
- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $[a; b]$.
- ✓ Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a; b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.
- ✍ **Nhận xét:** Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ là một đường liền, có điểm đầu, điểm cuối (Hình 3).
- ✓ Nếu hai điểm này nằm về hai phía so với trục hoành thì đường liền nói trên luôn cắt trục hoành tại ít nhất một điểm. Điều này còn được phát biểu dưới dạng sau:
- ✓ Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.



Hình 3

3. Tính liên tục của hàm sơ cấp

- ✓ Hàm số đa thức $y = P(x)$, các hàm lượng giác $y = \sin x, y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
- ✓ Hàm số phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$, các hàm số lượng giác $y = \tan x, y = \cot x$ liên tục trên các khoảng của tập xác định của chúng.
- ✓ Trong đó $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức.
- ✓ **Nhận xét:** Hàm số thuộc những loại trên được gọi chung là hàm số sơ cấp.

4. Tổng, hiệu, tích thương của hàm số liên tục

- ✓ Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:
- ✓ Các hàm số $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .
- ✓ Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

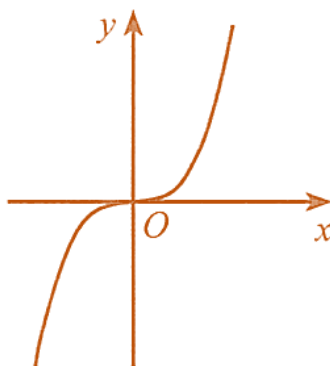
B. Phân dạng toán cơ bản

♦ Dạng 1: Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

👉 Các ví dụ minh họa

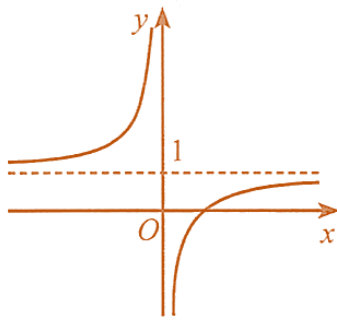
Câu 1: Quan sát đồ thị hàm số $y = f(x)$ và tìm $f(0), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Từ đó, cho biết tính liên tục của mỗi hàm số đó tại $x = 0$ trong mỗi trường hợp sau:

a) Đồ thị trong Hình 3;



Hình 3

b) Đồ thị trong Hình 4.



Hình 4

Lời giải

a) Từ đồ thị trong Hình 3, ta thấy: $f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$.

Như vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$

b) Từ đồ thị trong Hình 4, ta thấy: không tồn tại giá trị của $f(x)$ khi $x = 0$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại $x = 0$.

Câu 2: Xét tính liên tục tại $x = 2$ của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{nếu } x \geq 2 \\ x - 1 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $f(2) = 1; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - \lim_{x \rightarrow 2^+} 3 = 4 - 3 = 1;$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x - \lim_{x \rightarrow 2^-} 1 = 2 - 1 = 1.$ Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 = f(2)$. Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$.

♦Dạng ②: Xét tính liên tục của hàm số trên một khoảng, đoạn

👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{nếu } x < 2 \\ -x & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$

a) Hàm số trên có liên tục tại $x = 2$ hay không?

b) Hàm số trên có liên tục trên $\mathbb{R}$ hay không?

Lời giải

a) Ta có: $f(2) = -2; \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 4) = -2; \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x) = -2.$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$. Vậy hàm số trên liên tục tại $x = 2$.

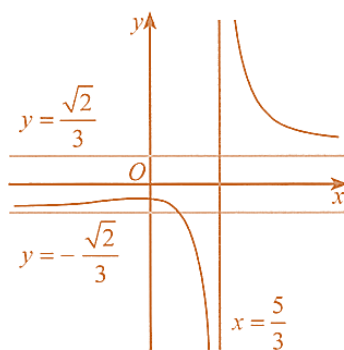
b) Với $x < 2$, $f(x) = x - 4$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 2)$.

Với $x > 2$, $f(x) = -x$ là hàm đa thức nên $f(x)$ liên tục trên $(2; +\infty)$.

Ngoài ra, theo câu a ta có hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Quan sát đồ thị hàm số trong Hình 8 và cho biết hàm số đó có liên tục:



Hình 8

a) Tại $x = \frac{5}{3}$ hay không.

b) Trên khoảng $(-\infty; 0)$ hay không.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta có:

a) Hàm số không liên tục tại $x = \frac{5}{3}$ vì giá trị hàm số không xác định tại $x = \frac{5}{3}$.

b) Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x) = x - 1$ và $g(x) = x^2 - 3x + 2$. Xét tính liên tục của các hàm số:

a) $y = f(x) \cdot g(x)$;

b) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$;

c) $y = \frac{1}{\sqrt{f(x) + g(x)}}$.

Lời giải

a) Liên tục trên $\mathbb{R}$;

b) Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$ và $(2; +\infty)$;

c) Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

♦Dạng ③: Tìm giá trị tham số để hàm số liên tục

👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \neq 3 \\ a & \text{nếu } x = 3. \end{cases}$ Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Với $x \neq 3$, $f(x) = x+1$ là hàm đa thức nên hàm số $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 3)$ và $(3; +\infty)$.

Ta có: $f(3) = a; \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 3+1 = 4$.

Để hàm số liên tục tại $x = 3$ thì $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$. Suy ra $a = 4$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $a = 4$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & \text{nếu } x \geq 1 \\ x + a & \text{nếu } x < 1 \end{cases}$

a) Với $a = 2$, xét tính liên tục của hàm số tại $x = 1$.

b) Tìm a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Với $a = 2$, ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$. Suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Vậy hàm số không liên tục tại $x = 1$.

b) Với $x < 1$ thì $f(x) = x + a$ liên tục trên $(-\infty; 1)$. Với $x > 1$ thì $f(x) = x^2 - x$ liên tục trên $(1; +\infty)$. Để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thì hàm số liên tục tại $x = 1$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$.

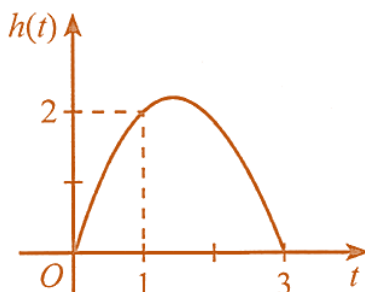
Như vậy, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + a) = 1 + a = 0 \Rightarrow a = -1$.

Vậy hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ khi $a = -1$.

♦Dạng 4: Ứng dụng

👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Hình 5 biểu thị độ cao $h(m)$ của một quả bóng được đá lên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t) = at^2 + bt$.



Hình 5

- a) Dựa vào đồ thị, tìm a, b .
- b) Chứng minh rằng hàm số $h(t)$ liên tục trên khoảng $(0;3)$.
- c) Với m thuộc $(0;3)$, tính $\lim_{t \rightarrow m} h(t)$. Cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

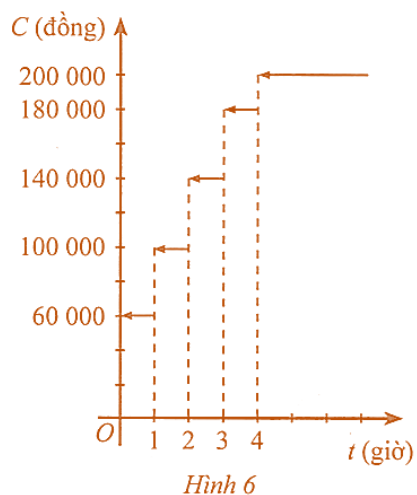
- a) Dựa vào Hình 5 ta thấy quỹ đạo quả bóng đi qua điểm có tọa độ $(3;0)$ và $(1;2)$. Suy ra $a = -1, b = 3$.
- b) Từ câu a, ta có: $h(t) = -t^2 + 3t$. Vì $h(t)$ là hàm đa thức nên $h(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, mà $(0;3) \subset \mathbb{R}$ nên $h(t)$ liên tục trên $(0;3)$.
- c) Với $m \in (0;3)$, ta có: $\lim_{t \rightarrow m} h(t) = \lim_{t \rightarrow m} (-t^2 + 3t) = -m^2 + 3m = h(m)$. Khi dần tới thời điểm m bất kỳ thuộc $(0;3)$ thì quả bóng dần đạt độ cao $h(m)$.

Câu 2: Một bãi đỗ xe tính phí 60000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200000 đồng.

- a) Vẽ đồ thị hàm số $C = C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.
- b) Hàm số đó có liên tục trên $[0; +\infty)$ không?
- c) Giá trị $\lim_{t \rightarrow 3} C(t)$ có tồn tại không? Khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người có giảm đi không?

Lời giải

a) Đồ thị hàm số $C = C(t)$ được thể hiện trong Hình 6.



b) Từ đồ thị ta thấy hàm số bị gián đoạn tại $t = 1$ (giờ); $t = 2$ (giờ); $t = 3$ (giờ); $t = 4$ (giờ) nên hàm số không liên tục trên $[0; +\infty)$.

c) Từ đồ thị ta có:

$\lim_{t \rightarrow 3^+} C(t) = 180000, \lim_{t \rightarrow 3^-} C(t) = 140000$. Vì $\lim_{t \rightarrow 3^+} C(t) \neq \lim_{t \rightarrow 3^-} C(t)$ nên không tồn tại $\lim_{t \rightarrow 3} C(t)$.

Nhận thấy khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người luôn là $180000 - 140000 = 40000$ (đồng), như vậy chênh lệch chi phí giữa hai người không giảm đi.

Câu 3: Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau:

Khối lượng đến 250g	Mức cước (đồng)
Đến 20 g	4000
Trên 20 g đến 100 g	6000
Trên 100 g đến 250 g	8000

a) Hãy biểu diễn số tiền phải trả khi sử dụng dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp theo khối lượng của thư cơ bản và bưu thiếp.

b) Hàm số trên có liên tục trên tập xác định hay không?

Lời giải

a) Ta có hàm số: $f(x) = \begin{cases} 4000 & \text{nếu } 0 < x \leq 20 \\ 6000 & \text{nếu } 20 < x \leq 100 \\ 8000 & \text{nếu } 100 < x \leq 250 \end{cases}$

b) Tập xác định của hàm số trên là $(0; 250]$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = 4000$, $\lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) = 6000$. Suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 20} f(x)$. Do đó, hàm số không liên tục tại $x = 20$. Vậy hàm số không liên tục trên tập xác định $(0; 250]$.

©. Dạng toán rèn luyện

♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

A. $m = 0$.

B. $m = 1$.

C. $m = 2$.

D. $m = 3$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$, chứa $x = 2$. Theo giả thiết thì ta phải có

$$m = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 3.$$

Câu 2: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $m = 0$.

B. $m = 2$.

C. $m = 4$.

D. $m = 6$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Theo giả thiết ta phải có

$$3 + m = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 3 \Leftrightarrow m = 0.$$

- Câu 3:** Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ k+1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$.
- A.** $k = \frac{1}{2}$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = -\frac{1}{2}$. **D.** $k = 0$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có TXĐ: $D = [0; +\infty)$. Điều kiện Câu toán tương đương với

$$\text{Ta có: } k+1 = y(1) = \lim_{x \rightarrow 1} y = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

- Câu 4:** Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ liên tục tại $x=3$ (với m là tham số).

Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $m \in (-3; 0)$. **B.** $m \leq -3$. **C.** $m \in [0; 5)$. **D.** $m \in [5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $(-1; +\infty)$. Theo giả thiết ta phải có

$$m = f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} = -\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+1}+2) = -4.$$

- Câu 5:** Hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại:

- A.** mọi điểm trừ $x=0, x=1$. **B.** mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.
C. mọi điểm trừ $x=-1$. **D.** mọi điểm trừ $x=0$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Để thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$ và $(0; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3 = f(-1).$$

→ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = -1$.

(ii) Xét tại $x = 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x + 1) = 1 = f(0).$$

→ hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Câu 6: Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{khi } x = -1 \\ \frac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x \neq -1, x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ $D = \mathbb{R}$.

Hàm số $f(x) = \frac{x(x+1)}{x^2-1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ và $(1; +\infty)$.

(i) Xét tại $x = -1$, ta có $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{2} = f(-1)$ → Hàm số liên tục tại $x = -1$.

$$(ii) \text{ Xét tại } x = 1, \text{ ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x+1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty \end{cases} \rightarrow$$

Hàm số $y = f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} m^2 x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ (1-m)x & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 2); (2; +\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2). (*)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2) = 4m^2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [(1-m)x] = 2(1-m) \longrightarrow (*) \Leftrightarrow 4m^2 = 2(1-m) \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} m^2 x^2 = 4m^2 \end{cases}$$

Câu 8: Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x \in [0; 4] \\ 1+m & \text{khi } x \in (4; 6] \end{cases}$ tục trên $[0; 6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m < 2$.

B. $2 \leq m < 3$.

C. $3 < m < 5$.

D. $m \geq 5$.

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0; 4)$ và $(4; 6)$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $[0; 6]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x = 4, x = 0, x = 6$.

$$\text{Tức là ta cần có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = f(6) \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = f(4) \end{cases} . (*)$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0 \\ f(0) = \sqrt{0} = 0 \end{cases} ; \quad \bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 6^-} (1+m) = 1+m \\ f(6) = 1+m \end{cases} ;$$

$$\bullet \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (1+m) = 1+m; \text{ Khi đó } (*) \text{ trở thành } 1+m=2 \Leftrightarrow m=1 < 2. \\ f(4) = 1+m \end{cases}$$

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{|x - 1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $-\infty; 1$ và $1; +\infty$. Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liên tục tại $x=1$, tức là ta cần có

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1). \quad *$$

$$\text{Ta có } f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x > 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \\ 2-x & \text{khi } x < 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2-x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x-2 = -1 \end{cases} \longrightarrow * \text{ không thỏa mãn với mọi}$$

$a \in \mathbb{R}$. Vậy không tồn tại giá trị a thỏa yêu cầu.

Câu 10: Biết rằng $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$ (với a là tham số). Khẳng định nào

dưới đây về giá trị a là đúng?

A. a là một số nguyên. **B.** a là một số vô tỉ. **C.** $a > 5$.

D. $a < 0$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định và liên tục trên $[0; 1]$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[0; 1]$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1). \quad *$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[(x+1)(\sqrt{x}+1) \right] = 4 \end{cases} \longrightarrow * \Leftrightarrow a = 4.$$

Câu 11: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x < 1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ không liên tục trên $(0; 2)$.

C. $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

D. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -2x = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-\sqrt{2-x}+1] = -2 \end{cases} \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x=1.$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x > 3 \\ 1-a^2x & \text{khi } x \leq 3 \end{cases}$ liên tục tại $x=3$.

A. $-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

C. $-\frac{4}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện Câu toán trở thành: $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$. *

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(3) = 1-3a^2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{1-x} \cdot \frac{\sqrt{4x-3}+x}{\sqrt{4x-3}+x} = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 1-a^2x = 1-3a^3. \end{cases}$$

$$\longrightarrow * \Leftrightarrow a = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \longrightarrow a_{\min} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Câu 13: Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \\ a^2x + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $a_{\max} = 3$.

B. $a_{\max} = 0$.

C. $a_{\max} = 1$.

D. $a_{\max} = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta cần có $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$. *

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(2) = 2a^2 - \frac{7}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} = \frac{1}{4} \longrightarrow * \Leftrightarrow a = \pm 1 \longrightarrow a_{\max} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(a^2 x + \frac{1}{4} \right) = 2a^2 - \frac{7}{4} \end{cases}$$

Câu 14: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} 1 - \cos x & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $f(x)$ liên tục tại $x = 0$. **B.** $f(x)$ liên tục trên $-\infty; 1$.
C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. **D.** $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $-\infty; 0$ và $0; +\infty$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} f(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 - \cos x = 1 - \cos 0 = 0 \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{0+1} = 1 \end{cases}$$

Câu 15: Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{khi } |x| \leq 1 \\ x-1 & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A.** Hàm số liên tục tại $x = -1$.
B. Hàm số liên tục trên các khoảng $-\infty, -1$; $1; +\infty$.
C. Hàm số liên tục tại $x = 1$.
D. Hàm số liên tục trên khoảng $-1, 1$.

Lời giải

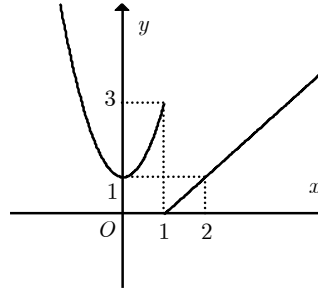
Chọn A

Ta có $f(x)$ liên tục trên $-\infty; -1$, $-1; 1$, $1; +\infty$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(-1) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x-1 = -2 \end{cases} \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x = -1.$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x=1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \end{cases}$$

Câu 16: Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?



A. $x = 0$.

B. $x = 1$.

C. $x = 2$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy tại điểm có hoành độ $x = 1$ đồ thị của hàm số bị "đứt" nên hàm số không liên tục tại đó.

Cụ thể: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{x} & \text{khi } x < 1, x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x = 0$.

C. mọi điểm trừ $x = 1$.

D. mọi điểm trừ $x = 0$ và $x = 1$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $-\infty; 0$, $0; 1$ và $1; +\infty$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x=1. \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x < 3, x \neq 1 \\ 4 & \text{khi } x = 1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x=1$.

C. mọi điểm trừ $x=3$.

D. mọi điểm trừ $x=1$ và $x=3$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = f(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Để thấy hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $-\infty; 1$, $1; 3$ và $3; +\infty$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x+1 = 2 \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x=1. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(3) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 3^-} x+1 = 4 \longrightarrow f(x) \text{ gián đoạn tại } x=3. \end{cases}$$

Câu 19: Số điểm gián đoạn của hàm số $h(x) = \begin{cases} 2x & \text{khi } x < 0 \\ x^2+1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ 3x-1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = h(x)$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Để thấy hàm số $y = h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $-\infty; 0$, $0; 2$ và $2; +\infty$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} h(0) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \longrightarrow f(x) \text{ không liên tục tại } x=0. \end{cases}$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} h(2) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5 \longrightarrow f(x) \text{ liên tục tại } x = 2. \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 1) = 5 \end{cases}$$

Câu 20: Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x < 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \\ m^2x + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

A. $S = -1$.

B. $S = 0$.

C. $S = 1$.

D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Điều kiện Câu toán trở thành $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$. *

$$\text{Ta có } \begin{cases} f(1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (m^2x + 1) = m^2 + 1 \longrightarrow (*) \Leftrightarrow m^2 + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = \pm 1 \longrightarrow S = 0.$$

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$. Số nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x) = x^3 - 3x - 1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $[-2; -1]$, $[-1; 0]$, $[0; 2]$.

Ta có

$$\begin{cases} f(-2) = -3 \\ f(-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(-2) \cdot f(-1) < 0 \longrightarrow 1 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } [-2; -1].$$

$$\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(-1) \cdot f(0) < 0 \longrightarrow 1 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } [-1; 0].$$

$$\begin{cases} f(2) = 1 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow f(2) \cdot f(0) < 0 \longrightarrow 1 \text{ có ít nhất một nghiệm thuộc } [0; 2].$$

Như vậy phương trình 1 có ít nhất ba thuộc khoảng $-2;2$. Tuy nhiên phương trình $f(x) = 0$ là phương trình bậc ba có nhiều nhất ba nghiệm. Vậy phương trình $f(x) = 0$ có đúng nghiệm trên $\mathbb{R}$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1) = 2$, $f(4) = 7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x) = 5$ trên đoạn $[-1;4]$:

- A. Vô nghiệm. B. Có ít nhất một nghiệm.
C. Có đúng một nghiệm. D. Có đúng hai nghiệm.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = 5 \Leftrightarrow f(x) - 5 = 0$. Đặt $g(x) = f(x) - 5$. Khi đó

$$\begin{cases} g(-1) = f(-1) - 5 = 2 - 5 = -3 \\ g(4) = f(4) - 5 = 7 - 5 = 2 \end{cases} \Rightarrow g(-1)g(4) < 0.$$

Vậy phương trình $g(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $[-1;4]$ hay phương trình $f(x) = 5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $[-1;4]$.

Câu 23: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $[-10;10]$ để phương trình $x^3 - 3x^2 + 2m - 2x + m - 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$?

- A. 19. B. 18. C. 4. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2m - 2x + m - 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1 < -1 < x_2 < x_3$. Khi đó $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.

Ta có $f(-1) = (-1 - x_1)(-1 - x_2)(-1 - x_3) > 0$ (do $x_1 < -1 < x_2 < x_3$).

Mà $f(-1) = -m - 5$ nên suy ra $-m - 5 > 0 \Leftrightarrow m < -5$.

Thử lại: Với $m < -5$, ta có

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại $a < -1$ sao cho $f(a) < 0$. 1

Do $m < -5$ nên $f(-1) = -m - 5 > 0$. 2

$$f'(0) = m - 3 < 0. \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ nên tồn tại } b > 0 \text{ sao cho } f(b) > 0. \quad (4)$$

Từ (1) và (2), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $-\infty; -1$; Từ (2) và (3), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $-1; 0$; Từ (3) và (4), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $0; +\infty$.

Vậy khi $m < -5$ thỏa mãn $\frac{m \in \mathbb{Z}}{m \in [-10; 10]} \rightarrow m \in \{-9; -8; -7; -6\}$.

♦Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1. Cho các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4,5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ và $g(x) = \frac{2}{x - 1}$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
b)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$		
c)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
d)	Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ x + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ và $g(x) = 4x^2 - x + 1$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Ta có $f(1) = 2$		
b)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$		
c)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$		
d)	Hàm số $y = f(x) - g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$		

Câu 3. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$f(x) = x^3 - x^2 + 8x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.		
b)	$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x}$ là hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.		
c)	$f(x) = \frac{\sin x + 1}{x + 1}$ là hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0), (0; +\infty)$.		
d)	$f(x) = \sqrt{x - 2}$ là hàm số liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.		

Câu 4. Cho các hàm số sau: $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$ và $h(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
b)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
c)	Hàm số $h(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
d)	Hàm số $y = f(x).g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		

Câu 5. Cho các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x-7}-1}{x^2-4} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{5x-9}{2} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{2-x} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{1-x}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
b)	Hàm số $g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = 2$.		
c)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \frac{1}{4}$.		
d)	Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ và $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
b)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		
c)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$.		
d)	Hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.		

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{2a+1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ và $g(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}$		
b)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.		
c)	Khi $a = 1$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$		
d)	Khi $a = 0$ thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$		

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5x+11}}{2x^2-5x-18} & \text{khi } x > -2 \\ 4-x^2 & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ 2x+a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$, khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{5}{26}$		
b)	Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$		
c)	Để hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$ thì $a = 1$		

d)	Khi $a = -1$ thì hàm số $y = f(x).g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$		
----	---	--	--

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{x+5}}{x^2 - 5x - 4} & \text{khi } x > -1 \\ x^2 - 9x & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ 2a + 1 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{8}$		
b)	Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$		
c)	Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$ khi $a = \frac{1}{2}$		
d)	Khi $a = -\frac{1}{2}$ hàm số $y = f(x) - g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$		

Câu 10. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$f(x) = \frac{3x-2}{x-5}$ là hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 5), (5; +\infty)$.		
b)	$f(x) = \sin x - 2\cos x + 3$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.		
c)	$f(x) = \sqrt{4-x^2}$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.		
d)	$f(x) = \sqrt{2-x} + 3\sqrt{x+1}$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.		

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4, 5 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ và $g(x) = \frac{2}{x-1}$. Khi đó:

- a) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.
- b) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$
- c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.
- d) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Ta có: $g(2) = \frac{2}{2-1} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = 2$; suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ta có: $f(2) = 4,5$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$.

Vậy hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ x + 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ và $g(x) = 4x^2 - x + 1$. Khi đó:

- a) Ta có $f(1) = 2$
- b) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$
- c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$
- d) Hàm số $y = f(x) - g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

Ta có: $f(x_0) = f(1) = 1 + 1 = 2$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 = f(x_0).$$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có: $g(x_0) = g(1) = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (4x^2 - x + 1) = 4 = g(1)$$

Vậy hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Câu 3. Xét được tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của nó:

- a) $f(x) = x^3 - x^2 + 8x$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
- b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x}$ là hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- c) $f(x) = \frac{\sin x + 1}{x + 1}$ là hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0), (0; +\infty)$.

d) $f(x) = \sqrt{x-2}$ là hàm số liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Vì $f(x) = x^3 - x^2 + 8x$ là hàm đa thức nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Vì $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 3x}$ là hàm phân thức có tập xác định $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$ nên hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0), (0; 3), (3; +\infty)$.

c) Tập xác định của hàm số $f(x) = \frac{\sin x + 1}{x + 1}$ là $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Trên các khoảng đó, hàm lượng giác $y = \sin x + 1$ (tử thức) và hàm số đa thức $y = x + 1$ (mẫu thức) đều liên tục.

Do vậy hàm $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1), (-1; +\infty)$.

d) Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{x-2}$ là $[2; +\infty)$.

Với mỗi x_0 tùy ý thuộc $(2; +\infty)$, ta luôn có $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sqrt{x_0 - 2}$; vì vậy hàm số liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$. (1)

Mặt khác: $f(2) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0$ nên $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$; suy ra hàm số liên tục tại điểm $x = 2$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên nửa khoảng $[2; +\infty)$.

Câu 4. Cho các hàm số sau: $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$ và $h(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$

a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

c) Hàm số $h(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

d) Hàm số $y = f(x).g(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Ta có: $f(1) = -\frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x}{2} = -\frac{1}{2}$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có: $g(1) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$ nên $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có: $h(2) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$ nên $h(2) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$.

Vậy hàm số $h(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Câu 5. Cho các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x-7}-1}{x^2-4} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{5x-9}{2} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{2-x} & \text{khi } x > 2 \\ \frac{1-x}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

Khi đó:

a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

b) Hàm số $g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = 2$.

c) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \frac{1}{4}$.

d) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

Ta có: $f(x_0) = f(2) = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{4x-7}-1}{x^2-4} = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x).$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2).$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

$$\text{Ta có: } g(2) = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4}; \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1-x}{4} \right) = -\frac{1}{4};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\sqrt{x+2} - 2}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2-4}{(2-x)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{\sqrt{x+2}+2} = -\frac{1}{4}.$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -\frac{1}{4} = g(2).$

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ và $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Khi đó:

- a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.
- b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.
- c) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$.
- d) Hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

Ta có: $f(1) = -\frac{1}{2}$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x}{2} = -\frac{1}{2},$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2}$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ta có: $g(1) = -1$ và $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 = -1$ nên $g(1) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x).$

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{2a+1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ và $g(x) = \sin \frac{\pi x}{4}$. Khi đó:

- a) Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{1}{2}$
- b) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.
- c) Khi $a = 1$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$
- d) Khi $a = 0$ thì hàm số $y = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

Ta có: $f(2) = \frac{2a+1}{6}$ và $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1-1}{(x-2)(x-1)(\sqrt{x-1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x-1}+1)} = \frac{1}{2}.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{2a+1}{6} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 1.$

Ta có: $g(2) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \sin \frac{2\pi}{4} = 1$ nên $g(2) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x).$

Vậy hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2.$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{5x+11}}{2x^2-5x-18} & \text{khi } x > -2 \\ 4-x^2 & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-6}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ 2x+a & \text{khi } x = -2 \end{cases}$, khi đó:

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \frac{5}{26}$

b) Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$

c) Để hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$ thì $a = 1$

d) Khi $a = -1$ thì hàm số $y = f(x).g(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = -2$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Ta có: $f(x_0) = f(-2) = 0 = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x).$

$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1-\sqrt{5x+11}}{2x^2-5x-18} = \frac{5}{26} \neq \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x). \Rightarrow$ Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -2} f(x).$

Vậy hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = -2.$

Ta có: $g(x_0) = g(-2) = -4 + a.$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-x-6}{x+2} = -5.$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -2$ thì $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = g(-2).$

$$\Rightarrow -4 + a = -5 \Leftrightarrow a = -1.$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{x+5}}{x^2 - 5x - 4} & \text{khi } x > -1 \\ x^2 - 9x & \text{khi } x \leq -1 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1 \\ 2a + 1 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$. Khi đó:

- a) Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{1}{8}$
 b) Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$
 c) Hàm số $g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$ khi $a = \frac{1}{2}$
 d) Khi $a = -\frac{1}{2}$ hàm số $y = f(x) - g(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

Ta có: $f(x_0) = f(-1) = 10 = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2 - \sqrt{x+5}}{x^2 - 5x - 4} = \frac{1}{8} \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x).$$

$\Rightarrow$ Không tồn tại $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

Vậy hàm số gián đoạn tại điểm $x_0 = -1$.

-Ta có: $g(-1) = 2a - 1$.

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2.$$

Để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$ thì $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1)$.

$$\Rightarrow 2a - 1 = -2 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{2}.$$

Câu 10. Xét được tính liên tục của hàm số:

- a) $f(x) = \frac{3x-2}{x-5}$ là hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 5), (5; +\infty)$.
 b) $f(x) = \sin x - 2 \cos x + 3$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.
 c) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.
 d) $f(x) = \sqrt{2-x} + 3\sqrt{x+1}$ là hàm số liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
----------------	----------------	----------------	----------------

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$ và $f(x)$ là hàm phân thức nên nó liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty; 5), (5; +\infty)$.

b) Hàm số $f(x) = \sin x - 2\cos x + 3$ là hàm số lượng giác có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

c) Tập xác định của hàm số là $D = [-2; 2]$.

Với mỗi $x_0 \in (-2; 2)$; ta luôn có $f(x_0) = \sqrt{4 - x_0^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, vì vậy hàm số liên tục trên khoảng $(-2; 2)$.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \sqrt{4 - 2^2} = 0$ và $f(2) = 0$ nên hàm số liên tục về bên trái tại điểm

$x_0 = 2$; $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \sqrt{4 - (-2)^2} = 0$ và $f(-2) = 0$ nên hàm số liên tục về bên phải tại điểm $x_0 = -2$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-2; 2]$.

d) Tập xác định của hàm số là $D = [-1; 2]$.

Với mỗi $x_0 \in (-1; 2)$, ta luôn có $f(x_0) = \sqrt{2 - x_0} + 3\sqrt{x_0 + 1} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, vì vậy hàm số liên tục trên khoảng $(-1; 2)$.

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \sqrt{2 - 2} + 3\sqrt{2 + 1} = 3\sqrt{3}$ và $f(2) = 3\sqrt{3}$ nên hàm số liên tục về bên trái tại

điểm $x_0 = 2$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{2 + 1} + 3\sqrt{-1 + 1} = \sqrt{3}$ và $f(-1) = \sqrt{3}$ nên hàm số liên tục về bên phải tại điểm $x_0 = -1$.

Vậy hàm số đã cho liên tục trên đoạn $[-1; 2]$.

♦Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tìm giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \\ mx + 1 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

Ta có $f(1) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = m + 1$. Vậy hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $m + 1 = 3$ hay $m = 2$.

Câu 2: Tìm các khoảng trên đó hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{x^2 - 1}$ liên tục.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Trên các khoảng này hàm số $f(x)$ là thương của hai hàm liên tục, trong đó mẫu thức $x^2 - 1 \neq 0$. Vậy hàm số đã cho liên tục trên các khoảng $(-\infty; -1), (-1; 1), (1; +\infty)$.

Câu 3: Chứng tỏ rằng phương trình $2x^5 + a(x^2 - 1) + 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi số thực a .

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 2x^5 + a(x^2 - 1) + 1$. Ta có $f(1) = 3 > 0$, $f(-1) = -1 < 0$.

Do $f(x)$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $[-1; 1]$. Do đó, theo tính chất của hàm liên tục, tồn tại ít nhất một điểm $c \in [-1; 1]$ sao cho $f(c) = 0$. Nói cách khác, $x = c$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Câu 4: Cho hàm số $g(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ trừ điểm $x = 0$. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ tại $x = 1$.

Lời giải

Do hàm số $g(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên hàm số $f(x) = \frac{g(x)}{x}$ cũng liên tục tại $x = 1$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{nếu } x \leq 1 \\ ax + b & \text{nếu } 1 < x < 2 \\ 5 & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$. Xác định a, b để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Theo cách xác định hàm số $f(x)$, ta có $f(1) = 3 = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ và $f(2) = 5 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$. Hơn nữa,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2a + b.$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và $x = 2$ khi và chỉ khi $a + b = 3, 2a + b = 5$.

Từ đó, $a = 2, b = 1$.

Câu 6: Tìm tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x < 1 \\ mx + 1 & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có $f(1) = m + 1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$.

Vậy hàm số liên tục tại $x=1$ khi và chỉ khi $m=1$.

Câu 7: Xét tính liên tục của các hàm số sau trên tập xác định của chúng:

a) $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

b) $g(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 3x - 4}$.

Lời giải

a) Hàm số $f(x) = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 3x + 2}$ liên tục trên $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

b) Hàm số $g(x) = \frac{\cos x}{x^2 + 3x - 4}$ liên tục trên $(-\infty; -4) \cup (-4; 1) \cup (1; +\infty)$.

Câu 8: Dùng định nghĩa, xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ tại điểm $x = -2$;

b) $f(x) = \sqrt{3x + 2}$ tại điểm $x = 0$.

Lời giải

a) Tìm được $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = 0$. Từ đó, hàm số liên tục tại điểm $x = -2$.

b) Hàm số liên tục tại điểm $x = 0$.

Câu 9: Xét tính liên tục của mỗi hàm số sau tại điểm $x = 2$.

a) $f(x) = \begin{cases} 6 - 2x & \text{khi } x \geq 2 \\ 2x^2 - 6 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 0 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$

Lời giải

a) Tìm được $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2, f(2) = 2$. Suy ra hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

b) Tìm được $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4, f(2) = 0$. Suy ra hàm số không liên tục tại điểm $x = 2$.

Câu 10: Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x) = |x + 1|$ tại điểm $x = -1$;

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x = 1$.

Lời giải

a) Tìm được $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0, f(-1) = 0$. Suy ra hàm số liên tục tại $x = -1$.

b) Tìm được $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -1$. Suy ra hàm số không liên tục tại $x = 1$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x \neq 2 \\ a & \text{khi } x = 2. \end{cases}$

Tìm giá trị của tham số a để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 2$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2}+2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Hàm số liên tục tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{1}{4} = a.$$

Vậy $a = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm.

Câu 12: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 2$; b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4x}$;

c) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+1}$ d) $f(x) = \sqrt{x^2-2x}$.

Lời giải

- a) Liên tục trên $\mathbb{R}$;
- b) Liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0), (0; 4)$ và $(4; +\infty)$;
- c) Liên tục trên $\mathbb{R}$;
- d) Liên tục trên các khoảng $(-\infty; 0]$ và $[2; +\infty)$.

Câu 13: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1-x^2}}$ b) $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$. Hàm số $y = \sqrt{1 - x^2}$ xác định và liên tục trên $(-1; 1)$. Do

$(-1; 1) \subset \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $y = \tan x$ xác định và liên tục trên $(-1; 1)$. Suy ra, hàm số

$$f(x) = \frac{\tan x}{\sqrt{1 - x^2}} \text{ liên tục trên } (-1; 1).$$

b) Hàm số liên tục trên các khoảng $(k\pi; (k+1)\pi)$ với k là số nguyên.

Câu 14: Cho hai hàm số $f(x) = \begin{cases} 2 - x & \text{khi } x < 1 \\ x^2 + x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$ và $g(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{khi } x < 1 \\ -x^2 + a & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$

Tìm giá trị của tham số a sao cho hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Lời giải

$$h(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} 2 + x - x^2 & \text{khi } x < 1 \\ x + a & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 + x - x^2) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 + \lim_{x \rightarrow 1^-} x - \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 2 + 1 - 1^2 = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + a) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + \lim_{x \rightarrow 1^+} a = 1 + a; h(1) = 1 + a.$$

Hàm số $h(x)$ liên tục tại $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1) \Leftrightarrow 2 = 1 + a \Leftrightarrow a = 1$.

Câu 15: Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3 + 2x - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1; 1)$.

b) $\sqrt{x^2 + x} + x^2 = 1$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

Lời giải

a) Xét hàm số $f(x) = x^3 + 2x - 1$ có $f(-1) = -4$; $f(1) = 2$. Do $f(-1) \cdot f(1) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm thuộc $(-1; 1)$.

b) Xét hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + x} + x^2 - 1$ có $f(0) = -1$; $f(1) = \sqrt{2}$. Do $f(0) \cdot f(1) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ hay $\sqrt{x^2 + x} + x^2 = 1$ có nghiệm thuộc $(0; 1)$.

Câu 16: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại $x_0 = 2$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $[1; +\infty)$. Do đó x_0 thuộc tập xác định của hàm số. Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-1} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)} = 1 = f(2).$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$.

Câu 17: Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } x > 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \text{ tại } x = 0. \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ và $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$. Do đó $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Nhưng do $f(0) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x = 0$.

Câu 18: Chứng tỏ rằng các phương trình sau có nghiệm trong khoảng tương ứng:

a) $x^2 = \sqrt{x+1}$, trong khoảng $(1; 2)$.

b) $\cos x = x$, trong khoảng $(0; 1)$.

Lời giải

a) Hàm số $f(x) = x^2 - \sqrt{x+1}$ liên tục trên đoạn $[1; 2]$. Hơn nữa $f(1) = 1 - \sqrt{2} < 0$, $f(2) = 4 - \sqrt{2} > 0$. Do đó, theo tính chất của hàm liên tục, tồn tại điểm $c \in (1; 2)$ sao cho $f(c) = 0$.

b) Hàm số $g(x) = \cos x - x$ liên tục trên đoạn $[0; 1]$, $g(0) = 1 > 0$, $g(1) = \cos 1 - 1 < 0$. Do vậy tồn tại điểm $d \in (0; 1)$ sao cho $g(d) = 0$.

Câu 19: Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x|x-3|}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ 3 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$ tại điểm $x = 3$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$, chứa điểm 3.

Ta có: $f(3) = 3$;

Khi $x > 3$, $f(x) = \frac{x(x-3)}{x-3} = x$ nên $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x = 3$;

Khi $x < 3$, $f(x) = \frac{x(3-x)}{x-3} = -x$ nên $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x) = -3$.

Do $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

Do đó, hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại điểm $x = 3$.

Câu 20: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = \frac{2x+1}{x^2-2x-3}$ b) $y = g(x) = \sqrt{3x+6} + \frac{2\sin x}{\sqrt{3-x}}$.

Lời giải

a) Ta có $x^2 - 2x - 3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ và $x \neq 3$.

$y = f(x)$ là hàm số phân thức có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ nên nó liên tục trên các khoảng của tập xác định là $(-\infty; -1)$, $(-1; 3)$ và $(3; +\infty)$.

b) Điều kiện: $\begin{cases} 3x+6 \geq 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < 3$.

Hàm số $y = g(x)$ có tập xác định là $D = [-2; 3)$.

Hàm số lượng giác $y = 2\sin x$ và hai hàm số căn thức $y = \sqrt{3x+6}$, $y = \sqrt{3-x}$ đều liên tục trên $[-2; 3)$ nên hàm số $y = g(x)$ liên tục trên $[-2; 3)$.

Câu 21: Chứng minh rằng phương trình:

a) $x^3 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$;

b) $x = \cos x$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

a) Xét hàm số $f(x) = x^3 + 3x - 1$. Hàm số này liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(0) \cdot f(-1) = (-1) \cdot 3 = -3 < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ hay $x^3 + 3x - 1 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(0; 1)$.

b) Xét hàm số $f(x) = x - \cos x$. Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(0) = 0 - \cos 0 = -1 < 0$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$.

Suy ra $f(0) \cdot f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$. Do đó, phương trình $f(x) = x - \cos x = 0$ hay $x = \cos x$ có nghiệm trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } |x| < 2 \\ x(2 - x) & \text{khi } |x| \geq 2 \end{cases}$

Tìm giá trị của các tham số a và b sao cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} [x(2 - x)] = -8 = f(-2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 + ax + b) = 4 - 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [x(2 - x)] = 0 = f(2)$$

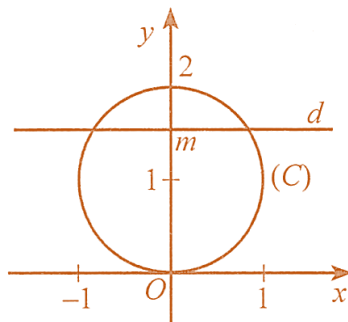
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b$$

Hàm số liên tục tại $x = -2$ và $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2a + b = -8 \\ 4 + 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + b = -12 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -8 \end{cases}$$

Vậy $a = 2, b = -8$ là các giá trị cần tìm.

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + (y - 1)^2 = 1$. Với mỗi số thực m , gọi $Q(m)$ là số giao điểm của đường thẳng $d: y = m$ với đường tròn (C) . Viết công thức xác định hàm số $y = Q(m)$. Hàm số này không liên tục tại các điểm nào?



Hình 2

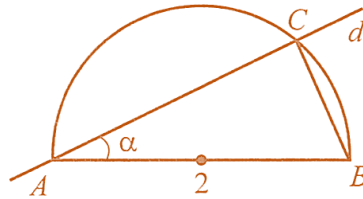
Lời giải

$$Q(m) = \begin{cases} 0 & \text{khi } m < 0 \text{ hay } m > 2 \\ 1 & \text{khi } m = 0 \text{ hay } m = 2 \\ 2 & \text{khi } 0 < m < 2 \end{cases}$$

Hàm số không liên tục tại các điểm $m = 0$ và $m = 2$.

Câu 24: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A , cắt nửa đường tròn tại C và tạo với đường thẳng AB góc $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

Kí hiệu diện tích tam giác ABC là $S(\alpha)$ (phụ thuộc vào α). Xét tính liên tục của hàm số $S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và tính các giới hạn $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha), \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.



Hình 3

Lời giải

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha = \sin 2\alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Do các hàm số $y = \sin 2\alpha$ đều liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số $y = S(\alpha)$ liên tục trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sin 2\alpha = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} S(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin 2\alpha = 0.$$

Câu 25: Xét tính liên tục của các hàm số sau:

$$\text{a) } f(x) = -x^2 + \cos x \quad \text{b) } g(x) = 3x^3 + 2 - \frac{3}{x+2} \quad \text{c) } h(x) = \frac{2x+5}{x+2} + \frac{3x-1}{2x-4}.$$

Lời giải

a) Vì hai hàm số $y = -x^2$ và $y = \cos x$ đều liên tục trên tập xác định của chúng là $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x) = -x^2 + \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

b) Vì hàm số $y = 3x^3 + 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = \frac{3}{x+2}$ liên tục trên hai khoảng $(-\infty; -2)$ và

$(-2; +\infty)$ nên hàm số $g(x) = 3x^3 + 2 - \frac{3}{x+2}$ liên tục trên hai khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

c) Vì hàm số $y = \frac{2x+5}{x+2}$ liên tục trên hai khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$, hàm số $y = \frac{3x-1}{2x-4}$ liên tục

trên hai khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$ nên hàm số $h(x) = \frac{2x+5}{x+2} + \frac{3x-1}{2x-4}$ liên tục trên các khoảng

$(-\infty; -2), (-2; 2), (2; +\infty)$.

Câu 26: Tìm các số thực a và b để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + ax + 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ b & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + ax + 2}{x-1}$ là hàm số phân thức có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ nên nó liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Do đó, ta cần tìm a và b để hàm số đã cho liên tục tại $x=1$, tức là $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ hay $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + 2}{x-1} = b$.

Do $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$ nên để giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + 2}{x-1}$ tồn tại, trước hết ta phải có

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + 2) = 0 \text{ hay } a + 3 = 0, \text{ suy ra } a = -3.$$

Khi đó, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1$, suy ra $b = -1$.

Vậy $a = -3, b = -1$ là các số cần tìm.

Câu 27: Dùng định nghĩa, xét tính liên tục của các hàm số sau tại điểm $x = -1$.

$$\text{a) } y = f(x) = \frac{2x^2 + 5x}{x-1} \qquad \text{b) } y = g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 1}{x+1} & \text{khi } x \neq -1 \\ 0 & \text{khi } x = -1 \end{cases}$$

Lời giải

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, chứa điểm -1 .

Ta có: $f(-1) = \frac{2 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1)}{-1-1} = \frac{3}{2};$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x}{x-1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + 5x)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x-1)} = \frac{2\left(\lim_{x \rightarrow -1} x\right)^2 + 5 \lim_{x \rightarrow -1} x}{\lim_{x \rightarrow -1} x - 1} \\ &= \frac{2(-1)^2 + 5(-1)}{-1-1} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1).$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm $x = -1.$

b) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$, chứa điểm $-1.$

Ta có: $g(-1) = 0;$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow -1} x\right)^2 - \lim_{x \rightarrow -1} x + 1 = (-1)^2 - (-1) + 1 = 3.\end{aligned}$$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) \neq g(-1).$

Vậy hàm số $y = g(x)$ không liên tục tại điểm $x = -1.$

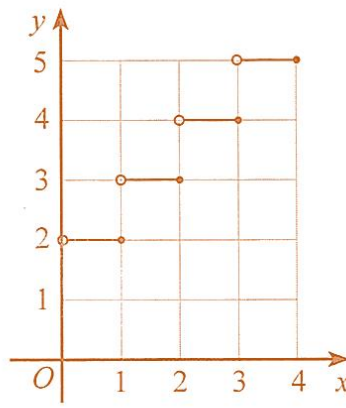
Câu 28: Tại một nhà gửi xe, phí gửi xe ô tô con được tính 20 nghìn đồng cho 1 giờ đầu và 10 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo. Gọi $P(t)$ (tính theo chục nghìn đồng) là số tiền phí gửi xe ô tô con tại nhà gửi xe này trong t giờ (với $0 < t \leq 4$). Viết công thức xác định hàm số $y = P(t)$, vẽ đồ thị hàm số và xét tính liên tục của nó trên nửa khoảng $(0; 4]$.

Lời giải

Hàm số $P(t)$ trên $(0; 4]$ có công thức:

$$P(t) = \begin{cases} 2 & \text{khi } 0 < t \leq 1 \\ 3 & \text{khi } 1 < t \leq 2 \\ 4 & \text{khi } 2 < t \leq 3 \\ 5 & \text{khi } 3 < t \leq 4 \end{cases} \quad (P \text{ tính theo chục nghìn đồng, } t \text{ tính theo giờ}).$$

Đồ thị của hàm số $P(t)$ như Hình 1.



Hình 1

Trên mỗi nửa khoảng $(0;1]$, $(1;2]$, $(2;3]$ và $(3;4]$, hàm số đều có dạng $P(t) = c$ (c là hằng số) nên hàm số liên tục trên mỗi khoảng này.

Ta có $\lim_{t \rightarrow 1^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} 2 = 2$; $\lim_{t \rightarrow 1^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 3 = 3$. Do $\lim_{t \rightarrow 1^-} P(t) \neq \lim_{t \rightarrow 1^+} P(t)$ nên hàm số không liên tục tại điểm $t = 1$.

Tương tự, chỉ ra được hàm số không liên tục tại các điểm $t = 2$ và $t = 3$.

Vậy hàm số liên tục trên các nửa khoảng $(0;1]$, $(1;2]$, $(2;3]$ và $(3;4]$; gián đoạn tại các điểm $t = 1, t = 2$ và $t = 3$.