

MỤC LỤC

>>§2- PHÉP TÍNH LOGARIT	2
Ⓐ. Tóm tắt kiến thức	2
Ⓑ. Trắc nghiệm Đ/S	3
Ⓒ. Trả lời ngắn	10
Ⓓ. Câu hỏi trắc nghiệm.....	19

A. Tóm tắt kiến thức

Lý thuyết

1. KHÁI NIỆM LOGARIT

- Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Số thực α để $a^\alpha = b$ được gọi là **logarit cơ số a của b** và kí hiệu là $\log_a b$, nghĩa là

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

Chú ý:

- Không có logarit của số 0 và số âm vì $a^\alpha > 0, \forall \alpha$.

- $\log_a b$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \\ b > 0 \end{cases}$

- Theo định nghĩa của logarit, ta có:

- 1) $\log_a 1 = 0$; 2) $\log_a a = 1$.
- 3) $\log_a a^b = b$.
- 4) $a^{\log_a b} = b$.

2. TÍNH LOGARIT BẰNG MÁY TÍNH CẦM TAY

Chú ý:

- a) Lôgarit cơ số 10 được gọi là **lôgarit thập phân**. Ta viết $\log N$ hoặc $\lg N$ thay cho $\log_{10} N$.
- b) Lôgarit cơ số e còn được gọi là **lôgarit tự nhiên**. Ta viết $\ln N$ thay cho $\log_e N$.

3. TÍNH CHẤT CỦA PHÉP TÍNH LOGARIT

- Với $0 < a \neq 1; M, N > 0; \alpha \in \mathbb{R}$, khi đó:

1) $\log_a (M.N) = \log_a M + \log_a N$

2) $\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$

3) $\log_a M^\alpha = \alpha \cdot \log_a M$

Chú ý: Đặc biệt, với a, M, N dương, $a \neq 1$, ta có:

• $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$; • $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

4. CÔNG THỨC ĐỔI CƠ SỐ



Cho các số dương a, b, N với $a \neq 1, b \neq 1$, ta có

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

Đặc biệt, ta có:

$$\bullet \log_a N = \frac{1}{\log_N a} \quad (N \neq 1); \quad \bullet \log_{a^\alpha} N = \frac{1}{\alpha} \log_a N \quad (\alpha \neq 0).$$

B. Trắc nghiệm Đ/S

Câu 1. Cho các biểu thức sau: $P = \log_2 8 + \log_3 27 - \log_5 5^3$; $Q = \ln(2e) - \log 100$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$P + Q = 2 \ln 2$		
b)	$Q - P = \ln 2 - 4$		
c)	$3Q + P = 3 \ln 2$		
d)	$2Q + P = 2 \ln 2 + 1$		

Câu 2. Cho các biểu thức sau: $A = \log_{2^{2030}} 4 - \frac{1}{1015} + \ln e^{2035}$; $B = \log_5 3 \cdot \log_2 5 - \frac{\ln 9}{\ln 4}$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	A chia hết cho 5		
b)	$A - B = 2036$		
c)	$A + 2024B = 2035$		
d)	$A - 2024B = 2035$		

Câu 3. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\log(x-3)$ có nghĩa khi và chỉ khi $x > 3$		
b)	$\log_2(4-x^2)$ có nghĩa khi và chỉ khi $x < 2$		
c)	$\ln(2x) - \lg(10-x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $0 < x < 10$		
d)	$\log_x \frac{1}{x-2}$ có nghĩa khi và chỉ khi $x > 0$		

Câu 4. Cho các biểu thức sau: $P = \frac{\log_a(a^3 b^2) - \log_b\left(\frac{b^3}{a^2}\right)}{\log^2 b + 1}$ và $Q = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$ với a, b là các số

dương và a khác 1. Vậy:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$Q = 6\log_a b$		
b)	$P = 6\log_b a$		
c)	$Q = 3P$		
d)	$Q.P = 12$		

Câu 5. Cho biểu thức $Q = 2^{\log_{16} x^4 + \log_2 x^2}$ với x là số thực khác 0. Vậy

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$Q > 0$		
b)	Khi $x = 2$ thì $Q = 8$		
c)	Khi $x = -2$ thì $Q = -8$		
d)	Khi $x = 3$ thì $Q = 9$		

Câu 6. Cho các biểu thức sau: $A = (a^3 \sqrt{a})^{\log_a b} + (\sqrt[3]{b^2})^{\log_b a}$ với $\begin{cases} a, b > 0 \\ a \neq 1, b \neq 1 \end{cases}$ và

$B = \log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} - \log \frac{a}{d}$ với a, b, c, d là các số dương. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$A = \sqrt[3]{a} + \sqrt{b^4}$		
b)	$B = \frac{a}{b}$		
c)	$A + B\sqrt{a} = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt{b^7}$.		
d)	$A - B\sqrt{b} = 2\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{b^7}$.		

Câu 7. Cho biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$. Vậy:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Khi $\log_2 x = 1$ thì $A = -\frac{1}{2}$		
b)	Khi $\log_2 x = 2$ thì $A = 1$		
c)	Khi $\log_2 x = \sqrt{3}$ thì $A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$		
d)	Khi $\log_2 x = \sqrt{2}$ thì $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$		

Câu 8. Cho biểu thức $B = 2\ln \sqrt{ex} - \ln \frac{e^2}{\sqrt{x}} + \ln 3 \cdot \log_3 (ex^2)$. Vậy:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Cho $\ln x = 2$ thì $B = 7$		

b)	Cho $\ln x = 4$ thì $B = 14$		
c)	Cho $\ln x = 3$ thì $B = \frac{15}{2}$		
d)	Cho $\ln x = 6$ thì $B = 18$		

Câu 9. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\log(x+1)$ có nghĩa khi và chỉ khi $x > -1$.		
b)	$\ln(x-1)^2$ có nghĩa khi và chỉ khi $x \neq 1$.		
c)	$\log_{x-1} x$ có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$.		
d)	$\log^2 \frac{1}{x-x^2}$ có nghĩa khi và chỉ khi $0 < x < 1$.		

Câu 10. biết $a > 0, a \neq 1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$A = 2^{\log_2 3} - \log_{\sqrt{3}} 3$ có $A > 2$		
b)	$B = \ln 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 - 5^{\log_5 (\ln 2)}$ có $B = 0$		
c)	$C = \log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ có $C > 1$		
d)	$D = \log_a \frac{\sqrt{a^3}}{a^4 \sqrt{a}}$ có $D > 1$		

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho các biểu thức sau: $P = \log_2 8 + \log_3 27 - \log_5 5^3$; $Q = \ln(2e) - \log 100$. Khi đó:

- a) $P + Q = 2 \ln 2$
- b) $Q - P = \ln 2 - 4$
- c) $3Q + P = 3 \ln 2$
- d) $2Q + P = 2 \ln 2 + 1$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

Ta có: $P = \log_2 8 + \log_3 27 - \log_5 5^3 = \log_2 2^3 + \log_3 3^3 - \log_5 5^3 = 3 + 3 - 3 = 3$.

Ta có: $Q = \ln(2e) - \log 100 = \ln 2 + \ln e - \log 10^2 = \ln 2 + 1 - 2 = \ln 2 - 1$.

Câu 2. Cho các biểu thức sau: $A = \log_{2^{2030}} 4 - \frac{1}{1015} + \ln e^{2035}$; $B = \log_5 3 \cdot \log_2 5 - \frac{\ln 9}{\ln 4}$

- a) A chia hết cho 5
- b) $A - B = 2036$
- c) $A + 2024B = 2035$
- d) $A - 2024B = 2035$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

Ta có: $A = \log_{2^{2030}} 4 - \frac{1}{1015} + \ln e^{2035} = \log_{2^{2030}} 2^2 - \frac{1}{1015} + 2035$
 $= \frac{2}{2030} - \frac{1}{1015} + 2035 = 2035.$

Ta có: $B = \log_5 3 \cdot \log_2 5 - \frac{\ln 9}{\ln 4} = \log_2 5 \cdot \log_5 3 - \log_4 9$
 $= \log_2 3 - \log_2 3^2 = \log_2 3 - \log_2 3 = 0.$

Câu 3. Tìm được x để các biểu thức sau có nghĩa. Vậy:

- a) $\log(x-3)$ có nghĩa khi và chỉ khi $x > 3$
- b) $\log_2(4-x^2)$ có nghĩa khi và chỉ khi $x < 2$
- c) $\ln(2x) - \lg(10-x)$ có nghĩa khi và chỉ khi $0 < x < 10$
- d) $\log_x \frac{1}{x-2}$ có nghĩa khi và chỉ khi $x > 0$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
----------------	---------------	----------------	---------------

- a) Biểu thức $\log(x-3)$ xác định khi và chỉ khi $x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3.$
- b) Biểu thức $\log_2(4-x^2)$ xác định khi và chỉ khi $4-x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$
- c) Biểu thức $\ln(2x) - \lg(10-x)$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2x > 0 \\ 10-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 10$$

- d) Biểu thức $\log_x \frac{1}{x-2}$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ \frac{1}{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Cho các biểu thức: $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$ với a, b là các số dương và a khác 1 ;

Câu 4. Cho các biểu thức sau: $P = \frac{\log_a(a^3 b^2) - \log_b\left(\frac{b^3}{a^2}\right)}{\log_a^2 b + 1}$ và $Q = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$ với a, b là các số dương và a khác 1. Vậy:

- a) $Q = 6 \log_a b$
- b) $P = 6 \log_b a$
- c) $Q = 3P$
- d) $Q.P = 12$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------

Ta có: $Q = 3 \log_a b + 6 \cdot \frac{1}{2} \log_a b = 6 \log_a b$.

$$P = \frac{\log_a a^3 + \log_a b^2 - (\log_b b^3 - \log_b a^2)}{\log_a^2 b + 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } &= \frac{3 + 2 \log_a b - 3 + 2 \log_b a}{\log_a^2 b + 1} = \frac{2 \left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b} \right)}{\log_a^2 b + 1} \\ &= \frac{2 \left(\frac{\log_a^2 b + 1}{\log_a b} \right)}{\log_a^2 b + 1} = \frac{2}{\log_a b} = 2 \log_b a. \end{aligned}$$

Câu 5. Cho biểu thức $Q = 2^{\log_{16} x^4 + \log_2 x^2}$ với x là số thực khác 0. Vậy

- a) $Q > 0$
- b) Khi $x = 2$ thì $Q = 8$
- c) Khi $x = -2$ thì $Q = -8$
- d) Khi $x = 3$ thì $Q = 9$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
----------------	----------------	---------------	---------------

Ta có: $Q = 2^{\log_2 x^4 + \log_2 x^2} = 2^{4 \cdot \frac{1}{4} \log_2 |x| + 2 \log_2 |x|} = 2^{3 \log_2 |x|} = (2^{\log_2 |x|})^3 = |x|^3$.

Câu 6. Cho các biểu thức sau: $A = (a^3 \sqrt{a})^{\log_a b} + (\sqrt[3]{b^2})^{\log_b a}$ với $\begin{cases} a, b > 0 \\ a \neq 1, b \neq 1 \end{cases}$ và

$B = \log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} - \log \frac{a}{d}$ với a, b, c, d là các số dương. Khi đó:

- a) $A = \sqrt[3]{a} + \sqrt{b^4}$

b) $B = \frac{a}{b}$

c) $A + B\sqrt{a} = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt{b^7}$.

c) $A - B\sqrt{b} = 2\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{b^7}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

Ta có: $A = \left(a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{\log_a b} + \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\log_b a} = \left(a^{\frac{7}{2}}\right)^{\log_a b} + \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{\log_b a}$

$= \left(a^{\log_a b}\right)^{\frac{7}{2}} + \left(b^{\log_b a}\right)^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{7}{2}} + a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt{b^7}$.

Ta có: $B = \log\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d}\right) - \log\frac{a}{d} = \log\left(\frac{a}{d} : \frac{a}{d}\right) = \log 1 = 0$.

Câu 7. Cho biểu thức $A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$. Vậy:

a) Khi $\log_2 x = 1$ thì $A = -\frac{1}{2}$

b) Khi $\log_2 x = 2$ thì $A = 1$

c) Khi $\log_2 x = \sqrt{3}$ thì $A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) Khi $\log_2 x = \sqrt{2}$ thì $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Ta có:

$A = \log_2 x^2 + \log_{\frac{1}{2}} x^3 + \log_4 x$
 $= 2\log_2 x + 3\log_{2^{-1}} x + \log_{2^2} x = 2\log_2 x - 3\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = -\frac{1}{2}\log_2 x$

Câu 8. Cho biểu thức $B = 2\ln\sqrt{ex} - \ln\frac{e^2}{\sqrt{x}} + \ln 3 \cdot \log_3(ex^2)$. Vậy:

a) Cho $\ln x = 2$ thì $B = 7$

b) Cho $\ln x = 4$ thì $B = 14$

c) Cho $\ln x = 3$ thì $B = \frac{15}{2}$

d) Cho $\ln x = 6$ thì $B = 18$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

Ta có:

$$\begin{aligned}
 B &= 2\ln(ex)^{\frac{1}{2}} - \left(\ln e^2 - \ln x^{\frac{1}{2}} \right) + \ln(ex^2) \\
 &= \ln(ex) - \left(2 - \frac{1}{2} \ln x \right) + \ln(ex^2) = (\ln e + \ln x) - 2 + \frac{1}{2} \ln x + \ln e + \ln x^2 \\
 &= 1 + \ln x - 2 + \frac{1}{2} \ln x + 1 + 2 \ln x = \frac{7}{2} \ln x
 \end{aligned}$$

Câu 9. Tìm được x để biểu thức sau có nghĩa. Vậy:

a) $\log(x+1)$ có nghĩa khi và chỉ khi $x > -1$.

b) $\ln(x-1)^2$ có nghĩa khi và chỉ khi $x \neq 1$.

c) $\log_{x-1} x$ có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

d) $\log^2 \frac{1}{x-x^2}$ có nghĩa khi và chỉ khi $0 < x < 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
----------------	----------------	----------------	----------------

a) Biểu thức $\log(x+1)$ có nghĩa khi và chỉ khi $x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

b) Biểu thức $\ln(x-1)^2$ có nghĩa khi và chỉ khi $(x-1)^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

c) Biểu thức $\log_{x-1} x$ có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases} x > 0 \\ x-1 > 0 \\ x-1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$.

d) Biểu thức $\log^2 \frac{1}{x-x^2}$ có nghĩa khi và chỉ khi $\frac{1}{x-x^2} > 0 \Leftrightarrow x-x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Câu 10. Tính được giá trị của các biểu thức sau (biết $a > 0, a \neq 1$). Vậy:

a) $A = 2^{\log_2 3} - \log_{\sqrt{3}} 3$ có $A > 2$

b) $B = \ln 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 - 5^{\log_5 (\ln 2)}$ có $B = 0$

a) $C = \log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ có $C > 1$

b) $D = \log_a \frac{\sqrt{a^3}}{a^4 \sqrt{a}}$ có $D > 1$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------------	----------------	---------------	---------------

a) Ta có: $2^{\log_2 3} - \log_{\sqrt{3}} 3 = 3 - \log_{\frac{1}{3^2}} 3 = 3 - 2 = 1$.

b) Ta có: $\ln 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 - 5^{\log_5 (\ln 2)}$
 $= \ln 2 \cdot \log_2 3 \cdot \log_3 2 - \ln 2$
 $= \ln 2 - \ln 2 = 0$

c) Ta có: $\log_a \sqrt{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}} = \log_a \left[a \cdot \left(a \cdot a^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} = \log_a a^{\frac{7}{8}} = \frac{7}{8}$.

d) Ta có: $\log_a \frac{\sqrt{a^3}}{a \cdot \sqrt[4]{a}} = \log_a \frac{a^{\frac{3}{2}}}{a \cdot a^{\frac{1}{4}}} = \log_a a^{\frac{3}{2} - \left(1 + \frac{1}{4}\right)} = \log_a a^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$.

©. Trả lời ngắn

Câu 1. Rút gọn biểu thức sau: $Q = \sqrt{\log_a^2(ab) - \frac{2 \ln b}{\ln a} - 1}$ với a, b là các số thực dương và a khác 1.

Trả lời:

Câu 2. Cho $a, b > 0$ và đều khác 1 thỏa mãn $\ln a + \ln(8b) = 2 \ln(a + 2b)$.

Rút gọn biểu thức: $P = \log_b(2a) + \log_{\frac{a}{2}}(2b) - \frac{1}{\log_8 b}$.

Trả lời:

Câu 3. Cho a, b là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn $ab \neq 1$.

Rút gọn biểu thức $P = (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1$.

Trả lời:

Câu 4. Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $Q = \log_a (b^2 c^3)$.

Trả lời:

Câu 5. Cho số thực a thỏa mãn $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right)$.

Trả lời:

Câu 6. Cho $\log_a b = 3$ và $\log_a c = 4$ với $a; b; c > 0; a \neq 1$. Tính giá trị của $P = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{c^3} \right)$

Trả lời:

Câu 7. Tính giá trị biểu thức: $B = \log \frac{1}{1000} + 3 \cdot \log_{\frac{1}{10}} 100 - 10^{1+\log 2}$.

Trả lời:

Câu 8. Cho $a = \log_2 5, b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_6 5$ theo a và b .

Trả lời:

Câu 9. Cho $a = \log 2, b = \ln 2$. Hãy biểu diễn $\ln 800$ theo a và b .

Trả lời:

Câu 10. Cho $a = \log_3 4, b = \log_5 4$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 80$ theo a và b .

Trả lời:

Câu 11. Cho $a = \log_2 3, b = \log_5 2, c = \log_2 7$. Hãy biểu diễn $\log_{42} 15$ theo a, b, c .

Trả lời:

Câu 12. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 14xy$. Khi đó:

$$\log_2(x+y) = a + \frac{\log_2 xy}{a}. \text{ Tìm } a$$

Trả lời:

Câu 13. Số tự nhiên 3^{2023} có bao nhiêu chữ số?

Trả lời:

Câu 14. Dung dịch A có nồng độ H^+ là $0,00001 \text{ mol/L}$ và dung dịch B có nồng độ H^+ là $0,00000001 \text{ mol/L}$.

Tìm độ pH của mỗi dung dịch trên. Độ pH của dung dịch nào lớn hơn?

Trả lời:

Câu 15. Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây, các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần số lượng đã có và giả sử tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

Trả lời:

Câu 16. Cho $a = \log_{25} 11, b = \log_2 5$. Hãy biểu diễn $\log_{625} \frac{121}{16}$ theo a và b .

Trả lời:

Câu 17. Cho $a = \log_3 5, b = \log_2 7, c = \log_2 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 1260$ theo a, b, c .

Trả lời:

Câu 18. Cường độ một trận động đất M (độ Richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỉ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, một trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ rung chấn mạnh hơn gấp 4 lần. Hỏi cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu (kết quả được làm tròn đến hàng phần chục)?

Trả lời:

Câu 19. Cho $a = \log_5 18$ và $b = \log_5 60$. Tính $\log_3 2$ theo a và b .

Trả lời:

Câu 20. Đặt $\log_{27} 5 = a, \log_8 7 = b$ và $\log_2 3 = c$. Hãy biểu diễn $\log_6 35$ theo a, b, c .

Trả lời:

Câu 21. Để xác định tính axit (hay tính bazơ) của một dung dịch, người ta đã dựa vào độ pH của dung dịch: $pH = -\log [H^+]$ với $[H^+]$ là nồng độ của ion hydro (mol/L hay M).

Dung dịch với độ pH bằng 7 sẽ được coi là trung hòa, độ $pH < 7$ là acid, độ $pH > 7$ là bazơ. Giả sử một dung dịch có nồng độ của ion hydrogen là $[H^+] = 0,00001M$. Hãy xác định xem dung dịch đó có tính axit, bazơ hay trung hòa?

Trả lời:

Câu 22. Cho $\log 3 = a, \log 5 = b$. Tính $\log_{450} 15$.

Trả lời:

Câu 23. Cho $\log_2 x = a$. Tính $\log_2 4x + \log_4 \frac{x}{8} - \log_{\sqrt{2}} 16x^3$ theo a .

Trả lời:

Câu 24. Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 17 lần nồng độ H^+ của cà phê đen. Tính độ pH của dung dịch đó.

Trả lời:

LỜI GIẢI

Câu 1. Rút gọn biểu thức sau: $Q = \sqrt{\log_a^2(ab) - \frac{2\ln b}{\ln a} - 1}$ với a, b là các số thực dương và a khác 1.

Trả lời: $|\log_a b|$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Q &= \sqrt{(\log_a a + \log_a b)^2 - 2\log_a b - 1} \\ &= \sqrt{(1 + \log_a b)^2 - 2\log_a b - 1} \\ &= \sqrt{1 + 2\log_a b + \log_a^2 b - 2\log_a b - 1} = \sqrt{\log_a^2 b} = |\log_a b|. \end{aligned}$$

Câu 2. Cho $a, b > 0$ và đều khác 1 thỏa mãn $\ln a + \ln(8b) = 2\ln(a + 2b)$.

$$\text{Rút gọn biểu thức: } P = \log_b(2a) + \log_{\frac{a}{2}}(2b) - \frac{1}{\log_8 b}.$$

Trả lời: 2

Lời giải

Với a, b là các số thực dương khác 1, ta có:

$$\begin{aligned} \ln a + \ln(8b) = 2\ln(a + 2b) &\Leftrightarrow \ln(8ab) = \ln(a + 2b)^2 \Leftrightarrow 8ab = (a + 2b)^2 \\ &\Leftrightarrow (a - 2b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } P &= \log_b(2a) + \log_{\frac{a}{2}}(2b) - \frac{1}{\log_8 b} = \log_b(4b) + \log_b(2b) - \log_b 8 \\ &= \log_b \frac{8b^2}{8} = \log_b b^2 = 2. \end{aligned}$$

Câu 3. Cho a, b là các số thực dương khác 1 và thỏa mãn $ab \neq 1$.

$$\text{Rút gọn biểu thức } P = (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1.$$

Trả lời: $\log_a b$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= (\log_a b + \log_b a + 2)(\log_a b - \log_{ab} b) \log_b a - 1 \\ &= \left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b} + 2 \right) \left(\log_a b - \frac{\log_a b}{\log_a(ab)} \right) \log_b a - 1 \\ &= \frac{\log_a^2 b + 2\log_a b + 1}{\log_a b} \left(\log_a b - \frac{\log_a b}{1 + \log_a b} \right) \log_b a - 1 \\ &= \frac{(\log_a b + 1)^2}{\log_a b} \frac{\log_a^2 b}{1 + \log_a b} \log_b a - 1 = (\log_a b + 1) \log_a b \log_b a - 1 = \log_a b \end{aligned}$$

Câu 4. Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $Q = \log_a(b^2 c^3)$.

Trả lời: 13

Lời giải

Ta có: $Q = \log_a (b^2 c^3) = \log_a b^2 + \log_a c^3 = 2 \log_a b + 3 \log_a c = 2.2 + 3.3 = 13$.

Câu 5. Cho số thực a thỏa mãn $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $T = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right)$.

Trả lời: 3

Lời giải

$$\text{Ta có: } T = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}} \right) = \log_a \frac{a^{2+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}}{a^{\frac{7}{15}}} = \log_a a^{2+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{7}{15}} = \log_a a^3 = 3.$$

Câu 6. Cho $\log_a b = 3$ và $\log_a c = 4$ với $a; b; c > 0; a \neq 1$. Tính giá trị của $P = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{c^3} \right)$

Trả lời: $\frac{-17}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt{b}}{c^3} \right) = \log_a a^2 + \log_a \sqrt{b} - \log_a c^3 = 2 + \log_a b^{\frac{1}{2}} - 3 \log_a c \\ &= 2 + \frac{1}{2} \log_a b - 3 \log_a c = 2 + \frac{3}{2} - 12 = \frac{-17}{2}. \end{aligned}$$

Câu 7. Tính giá trị biểu thức: $B = \log \frac{1}{1000} + 3 \cdot \log_{\frac{1}{10}} 100 - 10^{1+\log 2}$.

Trả lời: -29

Lời giải

$$\log \frac{1}{1000} = \log \frac{1}{10^3} = \log 10^{-3} = -3$$

$$- \log_{\frac{1}{10}} 100 = \log_{10^{-1}} 10^2 = \frac{2}{-1} \log_{10} 10 = -2$$

$$- 10^{1+\log 2} = 10^{\log 10 + \log 2} = 10^{\log(10 \cdot 2)} = 10 \cdot 2 = 20$$

$$\text{Vậy } B = -3 + 3(-2) - 20 = -29.$$

Câu 8. Cho $a = \log_2 5, b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_6 5$ theo a và b .

Trả lời: $\frac{ab}{b+a}$

Lời giải

Ta có: $\log_6 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 6} = \frac{a}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{a}{1 + \log_2 5 \log_5 3} = \frac{a}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{ab}{b+a}$.

Câu 9. Cho $a = \log 2, b = \ln 2$. Hãy biểu diễn $\ln 800$ theo a và b .

Trả lời: $3b + \frac{2b}{a}$

Lời giải

Ta có: $\ln 800 = \ln(2^3 \cdot 10^2) = 3 \ln 2 + 2 \ln 10 = 3 \ln 2 + 2 \ln 2 \cdot \log_2 10$

$= 3 \ln 2 + \frac{2 \ln 2}{\log 2} = 3b + \frac{2b}{a}$.

Câu 10. Cho $a = \log_3 4, b = \log_5 4$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 80$ theo a và b .

Trả lời: $\frac{a(2b+1)}{(a+1)b}$

Lời giải

Ta có: $\log_{12} 80 = \frac{\log_4 80}{\log_4 12} = \frac{\log_4(4^2 \cdot 5)}{\log_4(4 \cdot 3)} = \frac{2 + \log_4 5}{1 + \log_4 3} = \frac{2 + \frac{1}{b}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{\frac{2b+1}{b}}{\frac{a+1}{a}} = \frac{a(2b+1)}{(a+1)b}$.

Câu 11. Cho $a = \log_2 3, b = \log_5 2, c = \log_2 7$. Hãy biểu diễn $\log_{42} 15$ theo a, b, c .

Trả lời: $\frac{ab+1}{b(a+c+1)}$

Lời giải

Ta có: $\log_{42} 15 = \frac{\log_2 15}{\log_2 42} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5}{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 7} = \frac{a + \frac{1}{b}}{1 + a + c} = \frac{ab+1}{b(a+c+1)}$.

Câu 12. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 14xy$. Khi đó:

$\log_2(x+y) = a + \frac{\log_2 xy}{a}$. Tìm a

Trả lời: 2

Lời giải

Ta có: $x^2 + y^2 = 14xy \Leftrightarrow (x+y)^2 = 16xy \Leftrightarrow \log_2(x+y)^2 = \log_2(16xy)$

$\Leftrightarrow 2 \log_2(x+y) = 4 + \log_2(xy) \Leftrightarrow \log_2(x+y) = 2 + \frac{\log_2(xy)}{2}$.

Câu 13. Số tự nhiên 3^{2023} có bao nhiêu chữ số?

Trả lời: 966

Lời giải

Đặt $n = 3^{2023} \Rightarrow \log n = 2023 \log 3 \approx 965,216$.

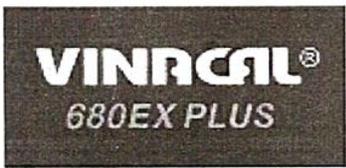
Suy ra $965 < \log n < 966 \Rightarrow 10^{965} < n < 10^{966}$.

Ta biết 10^{965} có 966 chữ số, 10^{966} có 967 chữ số mà n nằm trong khoảng $(10^{965}; 10^{966})$ nên n có tất cả 966 chữ số.

Lưu ý:

Từ cách giải trên ta rút ra cách tính nhanh số các chữ số của n là: $[A]+1 = [2023 \log 3] + 1 = 965 + 1 = 966$ trong đó $[A] = [2023 \log 3]$ là phần nguyên của A (hay phần nguyên của $\log 3^{2023}$).

Kĩ năng bấm máy:

	ẤN PHÍM	HIỂN THỊ
	\boxed{ALPHA} , $\boxed{+}$	Int(...)
	$\boxed{,}$, $\boxed{2}$, $\boxed{,}$, $\boxed{0}$, $\boxed{,}$, $\boxed{2}$, $\boxed{,}$, $\boxed{3}$, $\boxed{\log}$, $\boxed{,}$, $\boxed{3}$, $\boxed{=}$	965

Vậy số đã cho có 966 chữ số.

Câu 14. Dung dịch A có nồng độ H^+ là $0,00001 \text{ mol/L}$ và dung dịch B có nồng độ H^+ là $0,00000001 \text{ mol/L}$.

Tim độ pH của mỗi dung dịch trên. Độ pH của dung dịch nào lớn hơn?

Trả lời: dung dịch B

Lời giải

Độ pH của dung dịch A là $pH_A = -\log [H^+]_A = -\log 0,00001 = 5$.

Độ pH của dung dịch B là $pH_B = -\log [H^+]_B = -\log 0,00000001 = 8$.

Nồng độ pH của dung dịch B là lớn hơn của dung dịch A ($8 > 5$).

Câu 15. Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây, các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần số lượng đã có và giả sử tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

Trả lời: 21

Lời giải

Số lượng bào ban đầu chiếm $0,04$ diện tích mặt hồ.

Sau 1 tuần số lượng bào là $0,04 \times 3$ diện tích mặt hồ.

Sau 2 tuần số lượng bào là $0,04 \times 3^2$ diện tích mặt hồ.

Sau n tuần số lượng bào là $0,04 \times 3^n$ diện tích mặt hồ.

Để bào phủ kín mặt hồ thì: $0,04 \times 3^n = 1 \Rightarrow 3^n = 25 \Rightarrow n = \log_3 25$ (tuần).

Số ngày tương ứng là $7n = 7 \log_3 25 \approx 20,51$ (ngày).

Vậy sau ít nhất 21 ngày thì bào hoa dâu sẽ phủ kín mặt hồ.

Câu 16. Cho $a = \log_{25} 11, b = \log_2 5$. Hãy biểu diễn $\log_{625} \frac{121}{16}$ theo a và b .

Trả lời: $a - \frac{1}{b}$

Lời giải

Ta có: $\log_{625} \frac{121}{16} = \log_{5^4} \frac{121}{16} = \frac{1}{4} \log_5 \frac{121}{16} = \frac{1}{4} (\log_5 11^2 - \log_5 2^4)$

$$= \frac{1}{4} (2 \log_5 11 - 4 \log_5 2) = \frac{1}{2} \log_5 11 - \log_5 2.$$

Theo giả thiết, ta có: $a = \log_{25} 11 = \frac{1}{2} \log_5 11; b = \log_2 5 \Rightarrow \log_5 2 = \frac{1}{b}$.

$$\text{Vậy } \log_{625} \frac{121}{16} = a - \frac{1}{b}.$$

Câu 17. Cho $a = \log_3 5, b = \log_2 7, c = \log_2 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 1260$ theo a, b, c .

Trả lời: $2 + \frac{ca + b}{1 + c}$

Lời giải

Ta có: $\log_6 1260 = \log_6 (6^2 \cdot 35) = 2 + \log_6 35 = 2 + \frac{\log_2 35}{\log_2 6}$

$$= 2 + \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{1 + \log_2 3} = 2 + \frac{\log_2 3 \cdot \log_3 5 + b}{1 + c} = 2 + \frac{ca + b}{1 + c}.$$

Câu 18. Cường độ một trận động đất M (độ Richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỉ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, một trận động đất khác ở Nam Mỹ có

biên độ rung chấn mạnh hơn gấp 4 lần. Hỏi cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu (kết quả được làm tròn đến hàng phần chục)?

Trả lời: $\approx 8,602$

Lời giải

Gọi M_1, M_2 lần lượt là cường độ của trận động đất ở San Francisco và ở Nam Mỹ. Trận động đất ở San Francisco có cường độ là 8 độ Richter nên:

$M_1 = \log A - \log A_0 \Leftrightarrow 8 = \log A - \log A_0$. Trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ là $4A$, khi đó cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

$$M_2 = \log(4A) - \log A_0 = \log 4 + (\log A - \log A_0) = \log 4 + 8 \approx 8,602. \text{ (độ Richter)}$$

Câu 19. Cho $a = \log_5 18$ và $b = \log_5 60$. Tính $\log_3 2$ theo a và b .

Trả lời: $\frac{-a+2b-2}{2a-b+1}$

Lời giải

Đầu tiên ta có hệ $\begin{cases} a = \log_5 18 = \log_5 2 + 2\log_5 3 \\ b = \log_5 60 = 2\log_5 2 + \log_5 3 + 1 \end{cases}$.

Đặt $x = \log_5 2$ và $y = \log_5 3$ từ đó ta có hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$\begin{cases} x + 2y = a \\ 2x + y = b - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 2 = \frac{-a + 2b - 2}{3} \\ y = \log_5 3 = \frac{2a - b + 1}{3} \end{cases}.$$

Nên $\log_3 2 = \frac{\log_5 2}{\log_5 3} = \frac{-a + 2b - 2}{2a - b + 1}$.

Câu 20. Đặt $\log_{27} 5 = a, \log_8 7 = b$ và $\log_2 3 = c$. Hãy biểu diễn $\log_6 35$ theo a, b, c .

Trả lời: $\frac{3ac + 3b}{1 + c}$

Lời giải

Ta có $\log_{27} 5 = \log_{3^3} 5 = \frac{1}{3} \log_3 5 = a \Rightarrow 3a = \log_3 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \Rightarrow \log_2 5 = 3ac$.

$\log_8 7 = \log_{2^3} 7 = \frac{1}{3} \log_2 7 = b \Rightarrow \log_2 7 = 3b$.

Suy ra $\log_6 35 = \frac{\log_2(7.5)}{\log_2(2.3)} = \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{1 + \log_2 3} = \frac{3ac + 3b}{1 + c}$.

Câu 21. Để xác định tính axit (hay tính bazơ) của một dung dịch, người ta đã dựa vào độ pH của dung dịch: $pH = -\log[H^+]$ với $[H^+]$ là nồng độ của ion hydro (mol/L hay M).

Dung dịch với độ pH bằng 7 sẽ được coi là trung hòa, độ $pH < 7$ là acid, độ $pH > 7$ là bazơ. Giả sử một dung dịch có nồng độ của ion hydrogen là $[H^+] = 0,00001M$. Hãy xác định xem dung dịch đó có tính axit, bazơ hay trung hòa?

Trả lời: axit

Lời giải

Độ pH của dung dịch trên là: $pH = -\log[H^+] = -\log 10^{-5} = 5 < 7$ nên dung dịch trên là axit.

Câu 22. Cho $\log 3 = a, \log 5 = b$. Tính $\log_{450} 15$.

Trả lời: $\frac{a+b}{2a+b+1}$

Lời giải

$$\log_{450} 15 = \frac{\log 15}{\log 450} = \frac{\log(3.5)}{\log(3^2.5.10)} = \frac{\log 3 + \log 5}{\log 3^2 + \log 5 + \log 10} = \frac{\log 3 + \log 5}{2\log 3 + \log 5 + \log 10} = \frac{a+b}{2a+b+1}.$$

Câu 23. Cho $\log_2 x = a$. Tính $\log_2 4x + \log_4 \frac{x}{8} - \log_{\sqrt{2}} 16x^3$ theo a .

Trả lời: $-\frac{9}{2}a - \frac{15}{2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \log_2 4x + \log_4 \frac{x}{8} - \log_{\sqrt{2}} 16x^3 &= \log_2 4 + \log_2 x + \log_4 x - \log_4 8 - \log_{2^{1/2}} 16 - \log_{2^{1/2}} x^3 \\ &= 2 + a + \frac{1}{2}\log_2 x - \log_2 2^3 - 2\log_2 2^4 - 2.3\log_2 x \\ &= 2 + a + \frac{1}{2}a - \frac{3}{2} - 8 - 6a = -\frac{9}{2}a - \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Câu 24. Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 17 lần nồng độ H^+ của cà phê đen. Tính độ pH của dung dịch đó.

Trả lời: $\approx 3,77$

Lời giải

$$pH_{dd} = -\log(17 \cdot 10^{-5}) = -[\log 17 + \log 10^{-5}] = -[\log 17 - 5] \approx 3,77.$$

Câu 1: Tính giá trị biểu thức $\log_2(2\sqrt{2})$

- A. -2 . B. $\frac{3}{2}$. C. 3 . D. -3

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } \log_2(2\sqrt{2}) = \log_2\left(2 \cdot 2^{\frac{1}{2}}\right) = \log_2\left(2^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}.$$

Câu 2: Cho a là số thực dương khác 5. Tính $I = \log_{\frac{a}{5}}\left(\frac{a^3}{125}\right)$.

- A. $I = -\frac{1}{3}$. B. $I = -3$.
C. $I = \frac{1}{3}$. D. $I = 3$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } I = \log_{\frac{a}{5}}\left(\frac{a^3}{125}\right) = \log_{\frac{a}{5}}\left(\frac{a}{5}\right)^3 = 3.$$

Câu 3: Với a là số thực dương tùy ý, $\log_4(4a)$ bằng

- A. $1 - \log_4 a$. B. $1 + \log_4 a$.
C. $4 - \log_4 a$. D. $4 + \log_4 a$.

Lời giải

Chọn B

Với $a > 0$ ta có: $\log_4(4a) = \log_4 4 + \log_4 a = 1 + \log_4 a$.

Câu 4: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_{\sqrt[3]{a}} a$ bằng

- A. $\frac{-1}{3}$. B. 3 . C. -3 . D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \log_{\sqrt[3]{a}} a = \log_{\frac{1}{a^3}} a = 3 \log_a a = 3$$

Câu 5: Với a là số dương tùy ý khác 1, $\log_a \sqrt{a}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $2a$.
C. 2 . D. $\frac{1}{2}a$.

Lời giải

A. $P = 10$

C. $P = 12$

B. $P = 25$

D. $P = 125$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_a(3a^5) = \log_a 3 + \log_a a^5 = 5 + 5 = 10$.

Câu 17: Với mọi số thực a dương, $\log_2 \frac{a}{2}$ bằng

A. $\frac{1}{2} \log_2 a$.

B. $\log_2 a + 1$.

C. $\log_2 a - 1$.

D. $\log_2 a - 2$.

Lời giải

Chọn C

Có $\log_2 \frac{a}{2} = \log_2 a - \log_2 2 = \log_2 a - 1$.

Câu 18: Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng

A. $1 - \log a$.

B. $2 + \log a$.

C. $2 - \log a$.

D. $1 + \log a$.

Lời giải

Chọn B

$\log(100a) = \log(100) + \log a = 2 + \log a$

Câu 19: Giá trị của $\log_a \frac{1}{\sqrt{a^3}}$ với $a > 0$ và $a \neq 1$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$.

B. $\frac{3}{2}$.

C. $-\frac{2}{3}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_a \frac{1}{\sqrt{a^3}} = \log_a a^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$.

Câu 20: Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a - 3\log_2 b = 2$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a = 4b^3$.

B. $a = 3b + 4$.

C. $a = 3b + 2$.

D. $a = \frac{4}{b^3}$.

Lời giải

Chọn A

ĐK: $a, b > 0$

$$\log_2 a - 3\log_2 b = 2 \Leftrightarrow \log_2 a - \log_2 b^3 = 2 \Leftrightarrow \log_2 \frac{a}{b^3} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b^3} = 4 \Leftrightarrow a = 4b^3$$

Câu 21: Với a, b là hai số dương tùy ý thì $\log(a^3b^2)$ có giá trị bằng biểu thức nào sau đây?

A. $3\log a + \frac{1}{2}\log b$.

B. $2\log a + 3\log b$.

C. $3\log a + 2\log b$.

D. $3\left(\log a + \frac{1}{2}\log b\right)$.

Lời giải

Chọn C

Do a, b là hai số dương nên ta có: $\log(a^3b^2) = \log a^3 + \log b^2 = 3\log a + 2\log b$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = \log_2 x$. Với $x > 0$, giá trị của biểu thức $P = f\left(\frac{6}{x}\right) + f\left(\frac{8x}{3}\right)$ bằng

A. $P = 2$.

B. $P = 1$.

C. $P = 4$.

D. $P = 3$.

Lời giải

Chọn C

$$P = f\left(\frac{6}{x}\right) + f\left(\frac{8x}{3}\right) = f\left(\frac{6}{x} \cdot \frac{8x}{3}\right) = f(16) = 4.$$

Câu 23: Cho a, b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^2}\left(\frac{a^3}{\sqrt[5]{b^3}}\right) = 3$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$

bằng

A. -5 .

B. 5 .

C. $\frac{1}{5}$.

D. $-\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } \log_{a^2}\left(\frac{a^3}{\sqrt[5]{b^3}}\right) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\log_a a^3 - \log_a b^{\frac{3}{5}}\right) = 3 \Leftrightarrow 3 - \frac{3}{5}\log_a b = 6 \Leftrightarrow \log_a b = -5.$$

Câu 24: Cho $\log_2 5 = a; \log_5 3 = b$. Tính $\log_5 24$ theo a và b .

A. $\log_5 24 = \frac{3a+b}{b}$.

B. $\log_5 24 = \frac{a+3b}{a}$.

C. $\log_5 24 = \frac{3+ab}{a}$.

D. $\log_5 24 = \frac{a+b}{3ab}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned}\log_5 24 &= \log_5 8.3 = \log_5 8 + \log_5 3 \\ &= 3 \cdot \log_5 2 + \log_5 3 = \frac{3}{\log_2 5} + \log_5 3 = \frac{3}{a} + b = \frac{3+ab}{a}\end{aligned}$$

Câu 25: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng

A. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b.$

B. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b.$

C. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b.$

C. $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b.$

Lời giải

Chọn A

$$\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = \log_2 (2a^3) - \log_2 b = \log_2 2 + \log_2 a^3 - \log_2 b = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b.$$

Câu 26: Cho các số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 - 16b = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\sqrt{2}} a - \log_2 b$

A. $P = 2.$

B. $P = 4.$

C. $P = 16.$

D. $P = \sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn B

$$P = \log_{\sqrt{2}} a - \log_2 \frac{a^2}{16} = 2\log_2 a - 2\log_2 a + \log_2 16 = \log_2 16 = 4.$$

Câu 27: Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Khi đó $\log_{\sqrt{a}} a^2$ bằng

A. 1.

B. $\frac{1}{4}.$

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Với } a > 0 \text{ và } a \neq 1, \text{ ta có: } \log_{\sqrt{a}} a^2 = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{a}^4 = 4 \cdot \log_{\sqrt{a}} \sqrt{a} = 4 \cdot 1 = 4.$$

Câu 28: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2 b^5 = 64$. Giá trị của $P = 2\log_2 a + 5\log_2 b$ là

A. $P = 7.$

B. $P = 64.$

C. $P = 6.$

D. $P = 2.$

Lời giải

Chọn C

Theo bài ra: $a, b > 0$; $a^2 b^5 = 64 \Leftrightarrow \log_2(a^2 b^5) = \log_2 64 \Leftrightarrow 2 \log_2 a + 5 \log_2 b = 6$.

Vậy $P = 6$.

Câu 29: Cho x, y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2 \log_{12}(x + 3y)}$.

A. $M = \frac{1}{4}$.

B. $M = \frac{1}{2}$.

C. $M = \frac{1}{3}$.

D. $M = 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2 + 9y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x - 3y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y$.

Suy ra $M = \frac{1 + \log_{12} 3y + \log_{12} y}{2 \log_{12}(6y)} = \frac{\log_{12} 36y^2}{\log_{12} 36y^2} = 1$.

Câu 30: Cho a, b là các số thực dương ($a, b \neq 1$) và $\log_a b = 16$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a \sqrt{b}$.

A. 256.

B. 4.

C. 23.

D. 8.

Lời giải

Chọn D

Theo tính chất của logarit ta có $P = \log_a \sqrt{b} = \log_a (b)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_a b = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$.

Câu 31: Cho a, b là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a b = \sqrt{3}$. Giá trị của $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}} \right)$ là

A. $-\sqrt{3}$.

B. $-2\sqrt{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\log_a b = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = a^{\sqrt{3}} \Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}} \right) = \log_{\frac{a^{\frac{\sqrt{3}}{2}}}{a}} \left(\frac{a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 32: Cho $\log_a b = 2$ với a, b là các số thực dương và a khác 1. Giá trị biểu thức $T = \log_{a^2} b^6 + \log_a \sqrt{b}$ bằng

A. 8.

B. 7.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn B

$$T = \log_{a^2} b^6 + \log_a \sqrt{b} = 3\log_a b + \frac{1}{2}\log_a b = \frac{7}{2}\log_a b = 7.$$

Câu 33: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $3\log a + 2\log b = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a^3 + b^2 = 1$. B. $3a + 2b = 10$.
 C. $a^3 b^2 = 10$. D. $a^3 + b^2 = 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $3\log a + 2\log b = 1 \Leftrightarrow \log a^3 + \log b^2 = 1 \Leftrightarrow \log(a^3 b^2) = 1 \Leftrightarrow a^3 b^2 = 10$.

Câu 34: Cho a, b là các số thực dương và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a(a^2 b) = \frac{1}{2}$. Giá trị của $\log_{a^2} b$ bằng

- A. $-\frac{3}{4}$. B. $-\frac{3}{2}$. C. -3 . D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết ta có $\log_a(a^2 b) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_a a^2 + \log_a b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$.

Câu 35: Với mọi a, b thỏa mãn $\log_3(3a^2) + \log_3 b^3 = 4$, khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $a^2 b^3 = 81$. B. $a^3 + b^3 + 1 = 81$.
 C. $a^2 b^3 = 27$. D. $a^2 + b^3 = 27$.

Lời giải

Chọn C

$\log_3 3a^2 + \log_3 b^3 = 4 \Leftrightarrow \log_3(3a^2 \cdot b^3) = 4 \Leftrightarrow 3a^2 b^3 = 81 \Leftrightarrow a^2 b^3 = 27$.

Câu 36: Với a là số thực dương bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\ln a^4 = 4 \ln a$. B. $\ln(4a) = 4 \ln a$.
 C. $\ln(4a) = \frac{1}{4} \ln a$. D. $\ln a^3 = \frac{1}{3} \ln a$.

Lời giải

Chọn A

Mệnh đề đúng là $\ln a^4 = 4 \ln a$.

Câu 37: Cho $\log_a b = 2; \log_a c = 3$. Tính $Q = \log_a(b^3 c)$.

- A. $Q = 4$. B. $Q = 9$.
 C. $Q = 10$. D. $Q = 12$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $Q = \log_a(b^3 c) = 3\log_a b + \log_a c = 3 \cdot 2 + 3 = 9$.

$$= \frac{1}{2} \log_a b + \frac{1}{\frac{1}{5} \log_b a + \frac{2}{5}} = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5}} = 1 + 2 = 3.$$

Câu 41: Cho $a, b, c > 0, a \neq 1$ và $\log_a b = \sqrt{2022}$. Tính $\log_{\sqrt[6]{a}} \left(a^{\frac{7}{4}} \cdot \sqrt[6]{b} \right)$.

A. $42 + \frac{\sqrt{2022}}{6}$.

B. $\frac{7}{4} + 6\sqrt{2022}$.

C. $\frac{21}{2} + \sqrt{2022}$.

D. $\frac{2}{21} + \sqrt{2022}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\log_{\sqrt[6]{a}} \left(a^{\frac{7}{4}} \cdot \sqrt[6]{b} \right) = \log_{\sqrt[6]{a}} a^{\frac{7}{4}} + \log_{\sqrt[6]{a}} \sqrt[6]{b} = 6 \cdot \frac{7}{4} + \sqrt{2022} = \frac{21}{2} + \sqrt{2022}$.

Câu 42: Cho $a = \log_{25} 7$; $b = \log_2 5$. Tính $\log_5 \frac{49}{8}$ theo a, b .

A. $\frac{4a-3}{b}$.

B. $\frac{4ab+3}{b}$.

C. $\frac{5ab-3}{b}$.

D. $\frac{4ab-3}{b}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $a = \log_{25} 7 = \log_{5^2} 7 = \frac{1}{2} \log_5 7 \Rightarrow \log_5 7 = 2a$ và $b = \log_2 5 \Rightarrow \log_5 2 = \frac{1}{b}$

$\log_5 \frac{49}{8} = \log_5 49 - \log_5 8 = \log_5 7^2 - \log_5 2^3 = 2 \log_5 7 - 3 \log_5 2 = 2 \cdot 2a - 3 \cdot \frac{1}{b} = \frac{4ab-3}{b}$

Câu 43: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $\log_a b = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \left(a \cdot \sqrt[3]{b} \right)$.

A. $P = \frac{2}{15}$.

B. $P = -\frac{2}{9}$.

C. $P = -\frac{10}{9}$.

D. $P = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $P = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \left(a \cdot \sqrt[3]{b} \right) = \frac{\log_a \left(a \cdot \sqrt[3]{b} \right)}{\log_a \left(\frac{\sqrt{a}}{b} \right)} = \frac{\log_a a + \log_a b^{\frac{1}{3}}}{\log_a a^{\frac{1}{2}} - \log_a b} = \frac{1 + \frac{1}{3} \log_a b}{\frac{1}{2} - \log_a b} = \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot 2}{\frac{1}{2} - 2} = -\frac{10}{9}$.

$$= \frac{3}{5} - 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_a 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \log_2 a^{-2} = \frac{3}{5} + \frac{3}{2} \cdot \log_a 2 \cdot \log_2 a = \frac{3}{5} + \frac{3}{2} = \frac{21}{10}.$$

Câu 47: Cho số thực $a > 0$; $a \neq 1, a \neq \frac{1}{27}$ và số thực x thỏa mãn $\log_a 3 = x$. Tính $\log_{27a} 9$ theo x .

A. $\frac{2x}{x+3}$.

B. $\frac{2x}{3x+1}$.

C. $2(3x+1)$.

D. $\frac{2}{3x+1}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } \log_{27a} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 27a} = \frac{2}{\log_3 27 + \log_3 a} = \frac{2}{3 + \log_3 a} = \frac{2}{\frac{1}{\log_a 3} + 3} = \frac{2}{\frac{1}{x} + 3} = \frac{2x}{3x+1}.$$

Câu 48: Cho a, b là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_2 a = 2$ và $\log_4 b = 3$. Giá trị biểu thức

$$P = \log_a (a^2 b)$$
 bằng

A. $P = 10$.

B. $P = 5$.

C. $P = 2$.

D. $P = 1$.

Lời giải

Chọn B

Với a, b là các số thực dương khác 1 ta có:

$$\log_2 a = 2 \Leftrightarrow a = 2^2 = 4.$$

$$\log_4 b = 3 \Leftrightarrow b = 4^3$$

$$\text{Vậy } P = \log_a (a^2 b) = \log_4 (4^2 \cdot 4^3) = 5.$$

Câu 49: Cho a, b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^3} \frac{a^5}{\sqrt[4]{b}} = 2$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng

A. 4.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $-\frac{1}{4}$.

D. -4

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } 2 = \log_{a^3} \frac{a^5}{\sqrt[4]{b}} = \frac{1}{3} \log_a \frac{a^5}{b^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{3} \left(\log_a a^5 - \log_a b^{\frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{3} \left(5 - \frac{1}{4} \log_a b \right)$$

$$\Rightarrow 5 - \frac{1}{4} \log_a b = 6 \Rightarrow \log_a b = -4.$$

Câu 50: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $\log_a b = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} (a \sqrt[3]{b})$.

A. $P = \frac{2}{15}$.

B. $P = -\frac{2}{9}$.

C. $P = -\frac{10}{9}$.

D. $P = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } P = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}}(a \cdot \sqrt[3]{b}) = \frac{\log_a(a \cdot \sqrt[3]{b})}{\log_a\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)} = \frac{\log_a a + \log_a b^{\frac{1}{3}}}{\log_a a^{\frac{1}{2}} - \log_a b} = \frac{1 + \frac{1}{3} \log_a b}{\frac{1}{2} - \log_a b} = \frac{1 + \frac{1}{3} \cdot 2}{\frac{1}{2} - 2} = -\frac{10}{9}.$$

Câu 51: Cho các số dương a, b khác 1 sao cho $\log_{16} \sqrt[3]{a} = \log_{a^2} \sqrt[2]{b} = \log_b 2$. Giá trị của $\frac{b}{a^3}$ bằng:

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 8.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } \log_{16} \sqrt[3]{a} = \log_{a^2} \sqrt[2]{b} = \log_b 2 = t \Leftrightarrow \begin{cases} a = 16^{3t} \\ b = a^{18t} \\ 2 = b^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 16^{3t} \\ b = 16^{54t^2} \\ 2 = 16^{54t^3} \end{cases} (*).$$

Từ (*) suy ra $2 = 2^{216t^3} \Leftrightarrow 216t^3 = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6}$. Suy ra $a = 4, b = 4^3 \Rightarrow \frac{b}{a^3} = 1$.

Câu 52: Giá trị của biểu thức $4^{\log_2 \sqrt{3}}$ bằng

A. $\sqrt{3}$.

B. 3.

C. $2^{\sqrt{3}}$.

D. $2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$4^{\log_2 \sqrt{3}} = (2^2)^{\log_2 \sqrt{3}} = (2^{\log_2 \sqrt{3}})^2 = (\sqrt{3})^2 = 3.$$

Vậy giá trị của $\log_{a^2} b = \frac{1}{2} \log_a b = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

Câu 53: Đơn giản biểu thức $A = \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$ ($a, b > 0$) ta được:

A. $A = a - b$.

B. $A = a$.

C. $A = \frac{1}{a}$.

D. $A = a + b$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $A = \left(1 - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 : (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2 : (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{1}{a}$.

Câu 54: Rút gọn biểu thức $P = \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}\right)^{2023} \cdot \left(3 - \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}\right)^{2024}$.

A. $P = 1$.

B. $P = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}$.

C. $P = \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$.

D. $P = \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}\right)^{4047}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $x = \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$ ta có

$$x^3 = 9 + \sqrt{80} + 3 \cdot \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} + 3 \cdot \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} \cdot \left(\sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}\right)^2 + 9 - \sqrt{80}$$

$$= 18 + 3 \cdot \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} + \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}\right)$$

$$= 18 + 3x \cdot \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = 18 + 3x \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 3 - \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} = \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$$

Ta có $P = \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}\right)^{2023} \cdot \left(3 - \sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}\right)^{2024} = \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}}\right)^{2023} \cdot \left(\sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}\right)^{2024}$

$$= \left(\sqrt[3]{9 + \sqrt{80}} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}\right)^{2023} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = \left(\sqrt[3]{1}\right)^{2023} \cdot \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}} = \sqrt[3]{9 - \sqrt{80}}$$