

## MỤC LỤC

<b>&gt;&gt;§1- ĐẠO HÀM.....</b>	<b>2</b>
Ⓐ. Tóm tắt kiến thức .....	2
Ⓑ. Trắc nghiệm Đ/S .....	3
Ⓒ. Trả lời ngắn .....	10
Ⓓ. Câu hỏi trắc nghiệm.....	23

**A. Tóm tắt kiến thức**

**Lý thuyết**

**1. ĐẠO HÀM**

- Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên khoảng  $(a; b)$  và  $x_0 \in (a; b)$ .
- Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của  $f(x)$  tại điểm  $x_0$ , kí hiệu là  $f'(x_0)$  hay  $y'(x_0)$ , tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Để tính đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  tại  $x_0 \in (a; b)$ , ta thực hiện theo các bước sau:

- Bước 1. Tính  $f(x) - f(x_0)$ .
- Bước 2. Lập và rút gọn tỉ số  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  với  $x \in (a; b), x \neq x_0$
- Bước 3. Tính giới hạn  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ .

 **Chú ý:** Trong định nghĩa và quy tắc trên đây, thay  $x_0$  bởi  $x$  ta sẽ có định nghĩa và quy tắc tính đạo hàm của hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x \in (a; b)$ .

*Ý nghĩa vật lí của đạo hàm*

- Nếu hàm số  $s = f(t)$  biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian  $t$  thì  $f'(t_0)$  biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm  $t_0$ .
- Nếu hàm số  $T = f(t)$  biểu thị nhiệt độ  $T$  theo thời gian  $t$  thì  $f'(t_0)$  biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm  $t_0$ .

**2. Ý NGHĨA HÌNH HỌC CỦA ĐẠO HÀM**

- Đạo hàm của đồ thị hàm số  $y = f(x)$  tại điểm  $x_0$  là hệ số góc của tiếp tuyến  $M_0T$  của  $(C)$  tại điểm  $M_0(x_0; f(x_0))$
- Tiếp tuyến  $M_0T$  có phương trình là:  $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

**3. SỐ  $e$**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Hơn nữa, người ta còn biết rằng  $e$  là số vô tỉ và  $e = 2,718281828\dots$  (số thập phân vô hạn không tuần hoàn).

**B. Trắc nghiệm Đ/S**

**Câu 1.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số  $y = f(x) = x^2 + 2x$  tại điểm  $x_0 = 1$ . Khi đó: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$		
b)	$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$		
c)	$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4)$		
d)	$f'(1) = a \Rightarrow a > 5$		

**Câu 2.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$  tại điểm  $x_0 = 0$  ta được  $f'(0) = a$ .

Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$		
b)	$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x + 1}$		
c)	Phương trình $3^x = 3$ có nghiệm bằng $x = a - 2$		
d)	$\log_a 9 = 3$		

**Câu 3.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = 2x^3$ . Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Với bất kì $x_0$ : $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$		
b)	$f'(1) = -6$		
c)	$f'(0) = 0$		
d)	$f'(2) = 24$		

**Câu 4.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2}{1-x}$  với  $x \neq 1$ . Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Với bất kì $x_0 \neq 1$ , ta có: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$		
b)	$f'(2) = 2$		
c)	$f'(3) = \frac{1}{3}$		
d)	$f'(2) + f'(3) = \frac{3}{2}$		

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x) = 2x^3$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $M$  thuộc  $(C)$  có hoành độ  $x_0 = -1$ . Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hệ số góc của tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M$ bằng 6		
b)	Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ đi qua điểm $A(0;4)$		
c)	Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ cắt đường thẳng $d: y = 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 4		
d)	Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ vuông góc với đường thẳng $\Delta: y = -\frac{1}{6}x$		

**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2}{1-x}$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $M(3; -1) \in (C)$ . Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	Hệ số góc của tiếp tuyến của $(C)$ tại điểm $M$ bằng $\frac{1}{2}$		
b)	Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ song song với đường thẳng $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$		
c)	Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ vuông với đường thẳng $y = -2x - \frac{5}{2}$		
d)	Phương trình tiếp tuyến của $(C)$ tại $M$ đi qua điểm $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$		

**Câu 7.** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

Mệnh đề		Đúng	Sai
a)	$y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$ có $f'(1) = 1$		
b)	$y = \sqrt{x}$ tại $x_0 = 1$ có $f'(1) = 1$		
c)	$y = \frac{1}{x^2 + 1}$ tại $x_0 = 0$ có $f'(0) = 0$		
d)	$y = \frac{1}{x+1}$ tại $x_0 = 2$ có $f'(2) = -\frac{1}{9}$		

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = x^2 + 3x + 1$  có đồ thị  $(C)$ . Viết được phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại giao điểm của  $(C)$  với trục tung. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 3.		
b)	Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;3)$		
c)	Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 0		
d)	Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{3}x + 1$		

**Câu 9.** Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{4}{x-1}$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = -1$ .

Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 1.		
b)	Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1;2)$		
c)	Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng $y = 2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng $\frac{4}{3}$		
d)	Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = x + 1$		

**Câu 10.** Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+9}{x+1}$  biết tiếp tuyến vuông góc với

đường thẳng  $d: x - 2y + 2 = 0$ . Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.		
b)	Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-2$		
c)	Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;5)$		
d)	Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $B(1;-7)$		

LỜI GIẢI

**Câu 1.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số  $y = f(x) = x^2 + 2x$  tại điểm  $x_0 = 1$ . Khi đó:

a)  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

b)  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

c)  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 4)$

d)  $f'(1) = a \Rightarrow a > 5$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

Ta có:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$$

Vậy  $f'(1) = 4$ .

**Câu 2.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$  tại điểm  $x_0 = 0$  ta được  $f'(0) = a$ .

Khi đó:

a)  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

b)  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x+1}$

c) Phương trình  $3^x = 3$  có nghiệm bằng  $x = a - 2$

d)  $\log_a 9 = 3$

**Lời giải**

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

Ta có:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x-2}{x+1} - (-2)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x+1} = 3.$$

Vậy  $f'(0) = 3$ .

**Câu 3.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = 2x^3$ . Khi đó:

a) Với bất kì  $x_0$ :  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

b)  $f'(1) = -6$

c)  $f'(0) = 0$

d)  $f'(2) = 24$

**Lời giải**

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2x^3 - 2x_0^3}{x - x_0}$$

Với bất kì  $x_0$ , ta có:

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)(x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x^2 + x \cdot x_0 + x_0^2)}{1} = 6x_0^2.$$

Vậy  $f'(x) = (2x^3)' = 6x^2$  trên  $\mathbb{R}$ .

**Câu 4.** Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \frac{2}{1-x}$  với  $x \neq 1$ . Khi đó:

a) Với bất kì  $x_0 \neq 1$ , ta có:  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$

b)  $f'(2) = 2$

c)  $f'(3) = \frac{1}{3}$

d)  $f'(2) + f'(3) = \frac{3}{2}$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	----------------	---------------	----------------

Với bất kì  $x_0 \neq 1$ , ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{2}{1-x} - \frac{2}{1-x_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2(x - x_0)}{(1-x)(1-x_0)(x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)} = \frac{2}{(1-x_0)^2}.$$

Vậy  $f'(x) = \left(\frac{2}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$  trên các khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $(1; +\infty)$ .

**Câu 5.** Cho hàm số  $y = f(x) = 2x^3$  có đồ thị  $(C)$  và điểm  $M$  thuộc  $(C)$  có hoành độ  $x_0 = -1$ . Khi đó:

a) Hệ số góc của tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M$  bằng 6

b) Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M$  đi qua điểm  $A(0; 4)$

c) Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M$  cắt đường thẳng  $d: y = 3x$  tại điểm có hoành độ bằng 4

d) Phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại  $M$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta: y = -\frac{1}{6}x$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	----------------	---------------	----------------

Ta có:  $f'(x) = (2x^3)' = 6x^2$  nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là:

$$f'(-1) = 6 \cdot (-1)^2 = 6; f(-1) = -2$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$\begin{aligned} y - f(-1) &= 6(x+1) \Leftrightarrow y + 2 = 6(x+1) \\ &\Leftrightarrow y = 6x + 4. \end{aligned}$$

**Câu 6.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{2}{1-x}$  có đồ thị (C) và điểm  $M(3; -1) \in (C)$ . Khi đó:

a) Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M bằng  $\frac{1}{2}$

b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng  $y = -\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$

c) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông với đường thẳng  $y = -2x - \frac{5}{2}$

d) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm  $A\left(0; -\frac{5}{2}\right)$

**Hướng dẫn giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	---------------	----------------	----------------

Từ ví dụ 4, ta có:  $f'(x) = \left(\frac{2}{1-x}\right)' = \frac{2}{(1-x)^2}$  nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là:

$$f'(3) = \frac{2}{(1-3)^2} = \frac{1}{2}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:  $y - (-1) = \frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ .

**Câu 7.** Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra. Khi đó:

a)  $y = x^2 - x$  tại  $x_0 = 1$  có  $f'(1) = 1$

b)  $y = \sqrt{x}$  tại  $x_0 = 1$  có  $f'(1) = 1$

c)  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$  tại  $x_0 = 0$  có  $f'(0) = 0$

d)  $y = \frac{1}{x+1}$  tại  $x_0 = 2$  có  $f'(2) = -\frac{1}{9}$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	---------------	----------------	----------------

$$a) f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1.$$

$$b) f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$c) f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2 + 1} - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2 + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x^2 + 1} = 0.$$

$$d) f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x+1} - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{3(x+1)} = -\frac{1}{9}.$$

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = x^2 + 3x + 1$  có đồ thị  $(C)$ . Viết được phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại giao điểm của  $(C)$  với trục tung. Khi đó:

- Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 3.
- Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm  $A(1;3)$
- Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng  $y = 2x + 1$  tại điểm có hoành độ bằng 0
- Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{1}{3}x + 1$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	---------------	----------------	----------------

Với  $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$

$$\text{Ta có } f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x + 3) = 3$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là:  $y = 3x + 1$

**Câu 9.** Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{4}{x-1}$  tại điểm có hoành độ  $x_0 = -1$ .

Khi đó:

- Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến bằng 1.
- Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm  $M(-1;2)$
- Phương trình tiếp tuyến cắt đường thẳng  $y = 2x + 1$  tại điểm có hoành độ bằng  $\frac{4}{3}$
- Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $y = x + 1$

**Lời giải**

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

Ta có:  $y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(-1) = -1.$

Vì  $x_0 = -1$  nên  $y_0 = -2 \Rightarrow$  Tiếp điểm  $M(-1; -2).$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm  $M(-1; -2)$  là  $y = -x - 3.$

**Câu 10.** Viết được phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số  $y = \frac{x+9}{x+1}$  biết tiếp tuyến vuông góc với

đường thẳng  $d: x - 2y + 2 = 0.$  Khi đó:

- a) Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.
- b) Hệ số góc của tiếp tuyến bằng  $-2$
- c) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm  $A(1; 5)$
- d) Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm  $B(1; -7)$

### Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

Đường thẳng  $d: x - 2y + 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$  nên đường thẳng  $d$  có hệ số góc là  $k_d = \frac{1}{2}.$

Tiếp tuyến cần tìm có hệ số góc  $k$  vuông góc với đường thẳng  $d$

$$\Rightarrow k \cdot k_d = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{k_d} = -2.$$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình  $y' = k \Rightarrow \frac{-8}{(x+1)^2} = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$

Với  $x = 1$ , phương trình tiếp tuyến là  $y = -2x + 7.$

Với  $x = -3$ , phương trình tiếp tuyến là  $y = -2x - 9.$

Vậy có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn là  $d_1: y = -2x + 7; y = -2x - 9.$

**Câu 1.** Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $s(t) = \frac{1}{2}t^2$ , trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây và  $s$  là quãng đường đi được trong  $t$  giây tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại  $t = 5$ .

**Trả lời:** .....

**Câu 2.** Một quả bóng được thả rơi tự do từ đài quan sát trên sân thượng của toà nhà Landmark 81 (Thành phố Hồ Chí Minh) cao  $461,3m$  xuống mặt đất, với phương trình chuyển động  $s(t) = 4,9t^2$ . Tính vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất, bỏ qua sức cản không khí. (Đơn vị  $m/s$ , kết quả gần đúng làm tròn đến hàng phần chục)

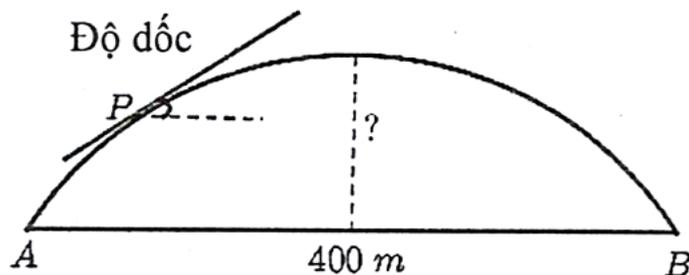
**Trả lời:** .....

**Câu 3.** Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất  $7\%$  / năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi (làm tròn đến hàng phần nghìn) mà người đó nhận được sau 1 năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức:

Lãi kép với kì hạn 6 tháng;

**Trả lời:** .....

**Câu 4.** Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là  $400m$ . Độ dốc của mặt cầu không vượt quá  $10^\circ$  (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



**Trả lời:** .....

**Câu 5.** Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số  $Q(t) = 2t^2 + t$ , trong đó  $t$  được tính bằng giây và  $Q$  được tính theo Culông. Tính cường độ dòng điện tại thời điểm  $t = 4(s)$ .

**Trả lời:** .....

**Câu 6.** Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất, biết độ cao  $h$  của nó (tính bằng mét) sau  $t$  giây được cho bởi phương trình  $h(t) = 24,5t - 4,9t^2$ . Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

**Trả lời:** .....

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x) = -2x^3 + x$  có đồ thị  $(C)$ .

Tính hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$  tại điểm có hoành độ bằng 1 ;

**Trả lời:** .....

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x) = -2x^3 + x$  có đồ thị (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm  $M(-2;14)$ .

**Trả lời:** .....

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x+1}{3x}$  có đồ thị (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

**Trả lời:** .....

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x+1}{3x}$  có đồ thị (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng  $y = x + 1$ .

**Trả lời:** .....

**Câu 11.** Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = 2x^3 + 1$  tại  $x_0 = 2$ .

**Trả lời:** .....

**Câu 12.** Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  tại  $x_0 = -1$ .

**Trả lời:** .....

**Câu 13.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ . Tính  $f'(0)$ .

**Trả lời:** .....

**Câu 14.** Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2x^2 - 3$ .

Tại điểm có hoành độ bằng -2.

**Trả lời:** .....

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-2}$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 3.

**Trả lời:** .....

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  có đồ thị (C). Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -3.

**Trả lời:** .....

**Câu 17.** Một người gửi tiết kiệm 20 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6% / năm theo thể thức lãi kép liên tục. Tính số tiền người đó nhận được sau: 1 tháng;

**Trả lời:** .....

**Câu 18.** Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Tính sau thời gian ngắn nhất (theo năm) để số tiền người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

**Trả lời:** .....

**Câu 19.** Số lượng vi khuẩn trong một phòng thí nghiệm  $A$  được tính theo công thức  $s(t) = s(0) \cdot 2^t$ , trong đó  $s(0)$  là số lượng vi khuẩn  $A$  lúc ban đầu,  $s(t)$  là số lượng vi khuẩn sau  $t$  phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn  $A$  là 625 nghìn con. Tính thời gian kể từ lúc ban đầu, số lượng loại vi khuẩn  $A$  là 20 triệu con?

**Trả lời:** .....

**Câu 20.** Người ta sử dụng công thức  $S = A \cdot e^{nr}$  để dự báo dân số của một quốc gia, trong đó  $A$  là số dân của năm lấy làm mốc tính,  $S$  là số dân sau  $n$  năm và  $r$  là tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số của Việt Nam là 78685800 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 1,2%. Hãy tính xem dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm nào?

**Trả lời:** .....

**Câu 21.** Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$  tại  $x = 0$ .

**Trả lời:** .....

**Câu 22.** Cho hàm số  $y = x^3 + 2x^2 + 1$  có đồ thị là  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M(1; 4)$ .

**Trả lời:** .....

**Câu 23.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  có đồ thị  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$  song song với đường thẳng  $\Delta: 9x - y + 6 = 0$ .

**Trả lời:** .....

**Câu 24.** Ông Năm gửi tiết kiệm 200 triệu đồng với lãi suất 9,1% / năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà ông Năm nhận được sau một năm nếu tiền lãi được tính theo thể thức lãi kép với kì hạn 3 tháng (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

**Trả lời:** .....

**Câu 25.** Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + x + |x + 1|}{x}$  tại  $x_0 = -1$ .

**Trả lời:** .....

**Câu 26.** Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$  tại  $x_0 = 1$ .

**Trả lời:** .....

**Câu 27.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x^2 + bx + 1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ .

Tìm  $b$  để hàm số này có đạo hàm tại  $x = 1$ .

**Trả lời:** .....

LỜI GIẢI

**Câu 1.** Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  $s(t) = \frac{1}{2}t^2$ , trong đó  $t$  là thời gian tính bằng giây và  $s$  là quãng đường đi được trong  $t$  giây tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại  $t = 5$ .

**Trả lời:**  $5(m/s)$

**Lời giải**

Vận tốc tức thời của chất điểm tại  $t = 5$  là:

$$s'(5) = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{25}{2}}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2}(t-5)(t+5)}{t-5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{1}{2}(t+5) = 5.$$

Vậy  $v(5) = s'(5) = 5(m/s)$ .

**Câu 2.** Một quả bóng được thả rơi tự do từ đài quan sát trên sân thượng của toà nhà Landmark 81 (Thành phố Hồ Chí Minh) cao  $461,3m$  xuống mặt đất, với phương trình chuyển động  $s(t) = 4,9t^2$ . Tính vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất, bỏ qua sức cản không khí. (Đơn vị  $m/s$ , kết quả gần đúng làm tròn đến hàng phần chục)

**Trả lời:**  $95,1(m/s)$

**Lời giải**

Với bất kì  $t_0$ , ta có:

$$s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{4,9t^2 - 4,9t_0^2}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} 4,9(t + t_0) = 9,8t_0.$$

Do đó, vận tốc của quả bóng tại thời điểm  $t$  là  $v(t) = s'(t) = 9,8t$ .

Mặt khác, vì chiều cao của toà tháp là  $461,3m$  nên quả bóng sẽ chạm đất tại thời điểm  $t_1$ .

Từ đó, ta có:  $4,9t_1^2 = 461,3 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{461,3}{4,9}}$  (giây).

Vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất là:

$$v(t_1) = 9,8t_1 = 9,8 \cdot \sqrt{\frac{461,3}{4,9}} \approx 95,1(m/s).$$

**Câu 3.** Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% / năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi (làm tròn đến hàng phần nghìn) mà người đó nhận được sau 1 năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức:

Lãi kép với kì hạn 6 tháng;

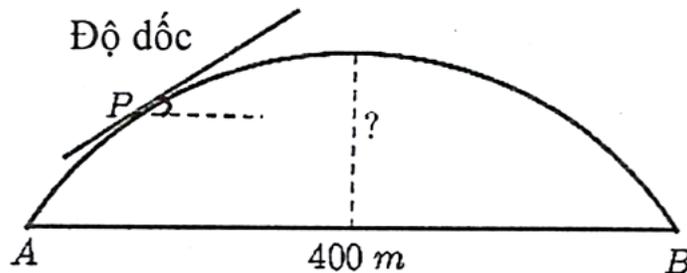
**Trả lời:** 107,123 (triệu đồng)

**Lời giải**

Số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm theo thể thức lãi kép với kì hạn 6 tháng là:

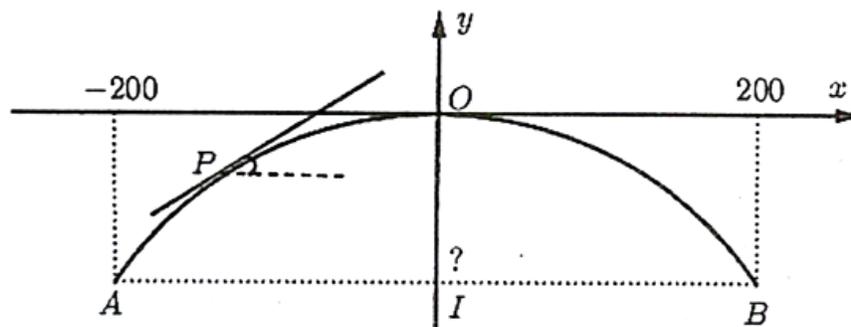
$$T = A \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 = 100(1 + 3,5\%)^2 = 107,123 \text{ (triệu đồng)}$$

**Câu 4.** Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là 400m. Độ dốc của mặt cầu không vượt quá  $10^\circ$  (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



**Trả lời:** 17,6m

**Lời giải**



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, sao cho đỉnh cầu là gốc tọa độ và mặt cắt của cây cầu có hình dạng parabol  $y = -ax^2$  (với  $a$  là hằng số dương).

Hệ số góc của tiếp tuyến của parabol bằng  $k = y'(x_0) = -2ax_0, -200 \leq x_0 \leq 200$ .

Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu (độ dốc dương) là  $|k| = 2a|x| \leq 400a$ .

Vì độ dốc của mặt cầu không vượt quá  $10^\circ$  nên ta có:

$$400a \leq \tan 10^\circ \Leftrightarrow a \leq \frac{4,408174518}{10000}.$$

Chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là đoạn  $OI$ , cũng chính là độ lớn của tung độ điểm  $B$  khi  $a$  đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Do đó, } OI = |-a \cdot 200^2| = 17,6(m).$$

Vậy chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là  $17,6m$ .

**Câu 5.** Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số  $Q(t) = 2t^2 + t$ , trong đó  $t$  được tính bằng giây và  $Q$  được tính theo Culông. Tính cường độ dòng điện tại thời điểm  $t = 4(s)$ .

**Trả lời:**  $17(C/s)$

**Lời giải**

Ta có:  $Q'(t) = (2t^2 + t)' = 4t + 1$  nên cường độ dòng điện tại thời điểm  $t = 4(s)$  là  $Q'(4) = 4 \cdot 4 + 1 = 17(C/s)$

**Câu 6.** Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất, biết độ cao  $h$  của nó (tính bằng mét) sau  $t$  giây được cho bởi phương trình  $h(t) = 24,5t - 4,9t^2$ . Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

**Trả lời:**  $24,5(m/s)$

**Lời giải**

Khi vật chạm đất thì  $h = 0 \Leftrightarrow 24,5t - 4,9t^2 = 0 \Rightarrow t = 5$ .

Ta có:  $v(t) = h'(t) = 24,5 - 9,8t$  nên tốc độ của vật tại thời điểm nó chạm đất  $t = 5$  là

$$v(5) = |h'(5)| = |24,5 - 9,8 \cdot 5| = 24,5(m/s)$$

**Câu 7.** Cho hàm số  $y = f(x) = -2x^3 + x$  có đồ thị  $(C)$ .

Tính hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị  $(C)$  tại điểm có hoành độ bằng 1 ;

**Trả lời:**  $-5$

**Lời giải**

Ta có:  $f'(x) = (-2x^3 + x)' = -6x^2 + 1$  nên hệ số góc của tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm có hoành độ bằng 1

$$\text{là: } f'(1) = -6 \cdot (1)^2 + 1 = -5.$$

**Câu 8.** Cho hàm số  $y = f(x) = -2x^3 + x$  có đồ thị  $(C)$ .

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm  $M(-2;14)$ .

**Trả lời:**  $y = -23x - 32$ .

**Lời giải**

Ta có:  $f'(x) = (-2x^3 + x)' = -6x^2 + 1$  nên hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M(-2;14)$  là:  
 $f'(-2) = -6 \cdot (-2)^2 + 1 = -23$ .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là:

$$y - 14 = -23(x + 2) \Leftrightarrow y = -23x - 32.$$

**Câu 9.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x+1}{3x}$  có đồ thị (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

**Trả lời:**  $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$ .

**Lời giải**

Toạ độ giao điểm của (C) với trục hoành là điểm  $(-1;0)$ .

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $(-1;0)$  là:

$$y - 0 = f'(-1)(x + 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}(x + 1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

**Câu 10.** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{x+1}{3x}$  có đồ thị (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại giao điểm của (C) với đường thẳng  $y = x + 1$ .

**Trả lời:**  $y = -3x + \frac{7}{3}$

**Lời giải**

Toạ độ giao điểm của (C) với đường thẳng  $y = x + 1$  là nghiệm của hệ

$$\text{phương trình: } \begin{cases} y = \frac{x+1}{3x} \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+1}{3x} = x+1 \\ y = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2x - 1 = 0 \\ y = x+1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 0 \\ x = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $(-1;0)$  là:

$$y - 0 = f'(-1)(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}(x+1) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$  là:

$$y - \frac{4}{3} = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow y = -3\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{4}{3} \Leftrightarrow y = -3x + \frac{7}{3}.$$

**Câu 11.** Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = 2x^3 + 1$  tại  $x_0 = 2$ .

**Trả lời:** 24

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 16}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} 2(x^2 + 2x + 4) = 24.$$

Vậy  $f'(2) = 24$ .

**Câu 12.** Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  tại  $x_0 = -1$ .

**Trả lời:**  $\frac{1}{\sqrt{2}}$

**Lời giải**

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Câu 13.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ . Tính  $f'(0)$ .

**Trả lời:**  $\frac{1}{16}$

**Lời giải**

Với  $x \neq 0$  xét:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4 - x)}{4x(2 + \sqrt{4 - x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4 - x})} = \frac{1}{4(2 + \sqrt{4 - 0})} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

**Câu 14.** Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số  $y = x^3 + 2x^2 - 3$ .

Tại điểm có hoành độ bằng  $-2$ .

**Trả lời:**  $y = 4x + 5$

**Lời giải**

Ta có:  $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 3 = -3$

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2(x + 2)}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = 4$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là:  $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = 4(x + 2) - 3 = 4x + 5$ .

**Câu 15.** Cho hàm số  $y = \frac{2x-1}{x-2}$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tung độ tiếp điểm bằng 3.

**Trả lời:**  $y = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$

**Lời giải**

+ Ta có:  $y_0 = 3 \Rightarrow \frac{2x_0 - 1}{x_0 - 2} = 3 \Rightarrow x_0 = 5$

$$+ f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{2x-1}{x-2} - 3}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{-x+5}{x-5} = -\frac{1}{3}$$

+ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:  $y = -\frac{1}{3}(x - 5) + 3 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$

**Câu 16.** Cho hàm số  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  có đồ thị (C). Tìm hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ bằng -3.

**Trả lời:** -1

**Lời giải**

Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại  $x_0 = -3$  là:

$$f'(-3) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\frac{1}{x+2} + 1}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x+2} = -1$$

**Câu 17.** Một người gửi tiết kiệm 20 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6% / năm theo thể thức lãi kép liên tục. Tính số tiền người đó nhận được sau: 1 tháng;

**Trả lời:** 20100250 đồng.

**Lời giải**

Ta có  $r = 6\% = 0,06$ ; 1 tháng  $= \frac{1}{12}$  năm.

Công thức tính tổng số tiền lãi và vốn sau  $t$  năm là  $T = A \cdot e^{rt}$

Số tiền người đó nhận được sau 1 tháng là  $S = 20 \cdot 10^6 \cdot e^{0,06 \cdot \frac{1}{12}} \approx 20100250$  đồng.

**Câu 18.** Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Tính sau thời gian ngắn nhất (theo năm) để số tiền người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

**Trả lời:** ít nhất 10 năm

### Lời giải

Giả sử số tiền người đó gửi vào ngân hàng là  $A$ . Sau  $n$  năm số tiền người đó nhận được là  $2A$ .

Áp dụng công thức  $S = Ae^{0,075t}$  ta có  $2A \leq A \cdot e^{0,075t}$

$$\Leftrightarrow 0,075t \geq \ln 2 \Leftrightarrow t \geq \approx 9,24.$$

Người đó phải gửi ít nhất 10 năm thì số tiền thu được gấp đôi số tiền ban đầu.

**Câu 19.** Số lượng vi khuẩn trong một phòng thí nghiệm  $A$  được tính theo công thức  $s(t) = s(0) \cdot 2^t$ , trong đó  $s(0)$  là số lượng vi khuẩn  $A$  lúc ban đầu,  $s(t)$  là số lượng vi khuẩn sau  $t$  phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn  $A$  là 625 nghìn con. Tính thời gian kể từ lúc ban đầu, số lượng loại vi khuẩn  $A$  là 20 triệu con?

**Trả lời:** 8 phút

### Lời giải

Ta có  $s(3) = 625$  nghìn con  $\Rightarrow s(0) \cdot 2^3 = 625 \Rightarrow s(0) = \frac{625}{8}$  nghìn con.

Để số lượng vi khuẩn là 20 triệu con  $\Rightarrow s(0) \cdot 2^t = 20000 \Rightarrow 2^t = 20000 : \frac{625}{8}$

$$\Rightarrow 2^t = 2^8 \Rightarrow t = 8.$$

Vậy thời gian để số vi khuẩn đạt 20 triệu con là 8 phút.

**Câu 20.** Người ta sử dụng công thức  $S = A \cdot e^{nr}$  để dự báo dân số của một quốc gia, trong đó  $A$  là số dân của năm lấy làm mốc tính,  $S$  là số dân sau  $n$  năm và  $r$  là tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số của Việt Nam là 78685800 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 1,2%. Hãy tính xem dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm nào?

**Trả lời:** 2029

### Lời giải

Theo công thức tăng trưởng mũ:  $S = A \cdot e^{nr}$

$$\Rightarrow 110000000 = 78685800 \cdot e^{1,2\% \cdot n} \Leftrightarrow n = \frac{1}{1,2\%} \ln \frac{110000000}{78685800} \approx 27,91$$

$\Rightarrow$  Sau 28 năm thì dân số Việt Nam đạt 110 triệu người.

Vậy dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm 2029.

**Câu 21.** Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$  tại  $x=0$ .

**Trả lời:**  $f'(0) = \frac{1}{2}$

**Lời giải**

Ta có:  $f(0) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3+x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{\sqrt{x^3+x^2+1}+1} = \frac{1}{2}$ .

Vậy  $f'(0) = \frac{1}{2}$ .

**Câu 22.** Cho hàm số  $y = x^3 + 2x^2 + 1$  có đồ thị là (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm  $M(1;4)$ .

**Trả lời:**  $y = 7x - 3$

**Lời giải**

Ta có:  $y' = 3x^2 + 4x$ . Do đó  $y'(1) = 7$ .

Phương trình tiếp tuyến tại điểm  $M(1;4)$  là  $y = 7x - 3$ .

**Câu 23.** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng  $\Delta: 9x - y + 6 = 0$ .

**Trả lời:**  $y = 9x - 6$

**Lời giải**

Đường thẳng  $\Delta: 9x - y + 6 = 0 \Rightarrow y = 9x + 6$  có hệ số góc là 9.

Vì tiếp tuyến cần tìm song song với đường thẳng  $\Delta$  nên tiếp tuyến có hệ số góc  $k = 9$ .

Suy ra hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình  $y' = k \Rightarrow 3x^2 - 6x = 9 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$ .

Với  $x = -1$ , phương trình tiếp tuyến là  $y = 9x + 6$  (loại vì trùng với đường thẳng  $\Delta$ ).

Với  $x = 3$ , phương trình tiếp tuyến là  $y = 9x - 26$  (thỏa mãn).

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là  $y = 9x - 6$ .

**Câu 24.** Ông Năm gửi tiết kiệm 200 triệu đồng với lãi suất 9,1% / năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà ông Năm nhận được sau một năm nếu tiền lãi được tính theo thể thức lãi kép với kì hạn 3 tháng (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).

**Trả lời:** 218,8 triệu đồng.

### Lời giải

Ta có:  $A = 200; r = 14\%$  và  $n = \frac{12}{3} = 4$ .

Vậy tổng số tiền vốn và lãi mà ông Năm nhận được sau một năm nếu tiền lãi được tính theo thể thức lãi kép với kì hạn 3 tháng là  $T = A \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = 200 \cdot \left(1 + \frac{9,1\%}{4}\right)^4 \approx 218,8$  triệu đồng.

**Câu 25.** Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x^2 + x + |x+1|}{x}$  tại  $x_0 = -1$ .

**Trả lời:** không có đạo hàm

### Lời giải

Ta có:  $\frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \frac{x^2 + x + |x+1|}{x(x+1)}$

Nên  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x+1)} = 0$  và  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x(x+1)} = 2$ .

Do đó  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$ .

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm  $x_0 = -1$ .

**Câu 26.** Tính đạo hàm của hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$  tại  $x_0 = 1$ .

**Trả lời:** không có đạo hàm

### Lời giải

Ta có:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+3) = 5$ ;

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 2x^2 - 7x + 4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 3x - 4) = 0$ . Dẫn tới  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ .

Suy ra hàm số không liên tục tại  $x_0 = 1$  nên hàm số không có đạo hàm tại  $x_0 = 1$ .

**Câu 27.** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{khi } x \leq 1 \\ x^2 + bx+1 & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ .

Tìm  $b$  để hàm số này có đạo hàm tại  $x=1$ .

**Trả lời:**  $b=1$

### Lời giải

Ta có:  $f(1) = 3; \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+1) = 3; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + bx + 1) = b + 2.$

Hàm số  $f(x)$  có đạo hàm tại  $x=1$  thì  $f(x)$  liên tục tại  $x=1$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow b + 2 = 3 \Rightarrow b = 1.$  Với  $b=1$ , thì  $f'(1^+) = f'(1^-) = 3.$

Vậy  $b=1$  thì hàm số đã cho có đạo hàm tại  $x=1.$

### ⓓ. Câu hỏi trắc nghiệm

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm tại điểm  $x_0.$  Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

A.  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

B.  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}.$

C.  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0}.$

D.  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}.$

### Lời giải

**Chọn A**

Theo định nghĩa đạo hàm ta có  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2.$  Kết quả đúng là

A.  $f'(2) = 3.$

B.  $f'(x) = 2.$

C.  $f'(x) = 3.$

D.  $f'(3) = 2.$

### Lời giải

**Chọn D**

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm ta có



Ta có:  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1+|x|}$ .

Mà  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1+x} = 3$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1-x} = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{1+|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{1+|x|} = 3$

$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{1+|x|} = 3$ .

Kết luận:  $f'(0) = 3$ .

**Câu 6:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{-5}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ . Tính  $f'(1)$ .

A. Không tồn tại.

B. 0

C.  $-\frac{7}{50}$ .

D.  $-\frac{9}{64}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1-4x^2}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-4x-1}{\sqrt{3x+1}+2x} = \frac{-5}{4} = f(1)$$

$\Rightarrow$  Hàm số liên tục tại  $x=1$ .

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1} + \frac{5}{4}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4\sqrt{3x+1}-3x-5}{4(x-1)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{16(3x+1) - (3x+5)^2}{4(x-1)^2(4\sqrt{3x+1}+3x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-9}{4(4\sqrt{3x+1}+3x+5)} = -\frac{9}{64} \end{aligned}$$

**Câu 7:** Cho hàm số  $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1. \end{cases}$  Mệnh đề sai là

A.  $f'(1) = 2$ .

B.  $f$  không có đạo hàm tại  $x_0 = 1$ .

C.  $f'(0) = 2$ .

D.  $f'(2) = 4$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có 
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-2}{x-1} = 2;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2.$$

Vậy  $f'(1^-) = f'(1^+) = f'(1) = 2$ . Suy ra hàm số có đạo hàm tại  $x_0 = 1$ . Vậy B sai.

**Câu 8:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{ khi } x \geq 1 \\ 2x-1 & \text{ khi } x < 1 \end{cases}$ . Để hàm số đã cho có đạo hàm tại  $x=1$  thì  $2a+b$  bằng:

A. 2.

B. 5.

C. -2.

D. -5.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1-1}{x-1} = 2;$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax^2 + bx - a - b}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x^2-1) + b(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)[a(x+1) + b]}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} [a(x+1) + b] = 2a + b \end{aligned}$$

Theo yêu cầu bài toán:  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \Leftrightarrow 2a + b = 2.$

**Câu 9:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0 \\ ax - b - 1, & x < 0 \end{cases}$ . Khi hàm số  $f(x)$  có đạo hàm tại  $x_0 = 0$ . Hãy tính  $T = a + 2b$ .

A.  $T = -4$ .

B.  $T = 0$ .

C.  $T = -6$ .

D.  $T = 4$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $f(0) = 1$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax - b - 1) = -b - 1.$$

Để hàm số có đạo hàm tại  $x_0 = 0$  thì hàm số phải liên tục tại  $x_0 = 0$  nên

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x). \text{ Suy ra } -b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1, & x \geq 0 \\ ax + 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Xét:

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - 2) = -2.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a) = a.$$

Hàm số có đạo hàm tại  $x_0 = 0$  thì  $a = -2$ .

Vậy với  $a = -2, b = -2$  thì hàm số có đạo hàm tại  $x_0 = 0$  khi đó  $T = -6$ .

**Câu 10:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ . Khi đó  $f'(0)$  là kết quả nào sau đây?

A.  $\frac{1}{4}$ .

B.  $\frac{1}{16}$ .

C.  $\frac{1}{32}$ .

D. Không tồn tại.

**Lời giải**

**Chọn B**

Với  $x \neq 0$  xét:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4-x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4-x)}{4x(2 + \sqrt{4-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-x})} = \frac{1}{4(2 + \sqrt{4-0})} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

**Câu 11:** Tính đạo hàm của hàm số số  $y = x(x-1)(x-2)\dots(x-2021)$  tại điểm  $x = 0$ .

A.  $f'(0) = 0$ .

B.  $f'(0) = 2021!$ .

C.  $f'(0) = 2021$ .

D.  $f'(0) = -2021!$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-2021)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)(x-2)\dots(x-2021) = (-1) \cdot (-2) \cdot \dots \cdot (-2021) = -2021!. \end{aligned}$$

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm tại điểm  $x_0 = 2$ . Tìm  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x-2}$ .

A. 0.

B.  $f'(2)$ .

C.  $2f'(2) - f(2)$ .

D.  $f(2) - 2f'(2)$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Do hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm tại điểm  $x_0 = 2$  suy ra  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2)$ .

Ta có  $I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x-2} \Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2) + 2f(2) - xf(2)}{x-2}$

$\Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(f(x) - f(2))}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2)(x-2)}{x-2} \Leftrightarrow I = 2f'(2) - f(2)$ .

**Câu 13:** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$  có đạo hàm tại điểm  $x_0 = 0$  là?

A.  $f'(0) = 0$ .

B.  $f'(0) = 1$ .

C.  $f'(0) = -2$ .

D. Không tồn tại.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:  $f(0) = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0$ .

Ta thấy  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  nên hàm số không liên tục tại  $x_0 = 0$ .

Vậy hàm số không có đạo hàm tại  $x_0 = 0$ .

**Câu 14:** Cho hàm số  $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$ . Biết hàm số có đạo hàm tại điểm  $x = 2$ . Giá trị của

$a^2 + b^2$  bằng

A. 20.

B. 17.

C. 18.

D. 25.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có  $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 2x + a & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại điểm  $x = 2 \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$ .

Mặt khác hàm số có đạo hàm tại điểm  $x = 2$  thì hàm số liên tục tại điểm  $x = 2$ .

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\Rightarrow 4 + 2a + b = -2 \Rightarrow b = 2.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 = 20.$$