MỤC LỤC

# ≫§4-KHOẢNG CÁCH

## Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

### Lý thuyết

**❶. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG, ĐẾN MỘT MẶT PHẲNG**

**Định nghĩa**

- Nếu $H$ là hình chiếu vuông góc của điểm $M$ trên đường thẳng $a$ thì độ dại đoạn $MH$ được gọi là khoảng cách từ $M$ đến đường thẳng $a$, kí hiệu $d(M,a)$. Vậy $d(M,a)=MH$.
- Nếu $H$ là hình chiếu vuông góc của điểm $M$ trên mặt phẳng $(P)$ thì độ dại đoạn $MH$ được gọi là khoảng cách từ $M$ đến mặt phẳng $(P)$, kí hiệu $d(M,(P))$. Vậy $d(M,(P))=MH$

***Chú ý:***

Ta quy ước: • $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi $M$ thuộc $a$;

• $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi $M$ thuộc $(P)$.

***Nhận xét:***

a) Lấy điểm $N$ tuỳ ý trên đường thẳng $a$, ta luôn có $d(M, a) \le MN$.

b) Lấy điểm $N$ tuỳ ý trên mặt phẳng $(P)$, ta luôn có $d(M, (P)) \le MN$.

**❷. KHOẢNG CÁCH GIỮA CÁC ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG**

**Định nghĩa**

- **Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song** $a$ **và** $b$ là khoảng cách từ một điểm bất kì trên $a$ đến $b$, kí hiệu $d(a,b)$.
- **Khoảng cách giữa đường thẳng** $a$ **và mặt phẳng** $(P)$ **song song với** $a$ là khoảng cách từ một điểm bất kì trên $a$ đến $(P)$, kí hiệu $d(a,(P))$.
- **Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song** $(P)$ **và** $(Q)$ là khoảng cách từ một điểm bất kì trên $(P)$ đến $(Q)$, kí hiệu $d((P),(Q))$.

**❸. KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU**

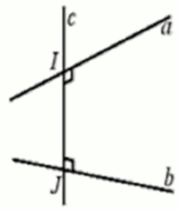
Lý thuyết

*Định nghĩa*

Đường thẳng $c$ vừa vuông góc, vừa cắt hai đường thẳng chéo nhau $a$ và $b$ được gọi là ***đường vuông góc chung*** của $a$ và $b$.

Nếu đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $a$ và $b$ cắt chúng lần lượt tại $I$ và $J$ thì đoạn $IJ$ gọi là ***đoạn vuông góc chung*** của $a$ và $b$.

***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*** là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó, kí hiệu $d(a, b)$.

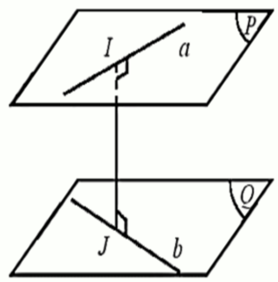


Hình 7

**Chú ý:**

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $a$ và $b$ bằng khoảng cách giữa một trong hai đường đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường còn lại.

b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.



Hình 8

## Ⓑ. Trắc nghiệm Đ/S

**Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh $a$. Biết $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Vẽ đường cao $AH$ của tam giác $SAB$.Vẽ đường cao $AK$ của tam giác $SAD$. Khi đó:
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

| Mệnh đề | | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| a) | $BC \perp AH$ | | |
| b) | Khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ | | |
| c) | Khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBD)$ bằng: $\dfrac{a\sqrt{2}}{7}$ | | |
| d) | Khoảng cách từ $C$ đến mặt phẳng $(AHK)$ bằng: $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$ | | |

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **a)** | $AD//(SBC)$ | | |
| **b)** | Khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng: $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ | | |
| **c)** | Khoảng cách giữa hai đường thẳng $SD, AB$ bằng: $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$ | | |
| **d)** | Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng: $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{3}$ | | |

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên $(SAB)$ vuông góc với mặt đáy và tam giác $SAB$ đều cạnh $2a$. Biết tam giác $ABC$ vuông tại $C$ và cạnh $AC = a\sqrt{3}$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **a)** | $SH \perp (ABC)$ | | |
| **b)** | $d(S,(ABC)) = a\sqrt{3}$ | | |
| **c)** | $d(C,(SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ | | |
| **d)** | Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3}{6}$ | | |

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu của $S$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm $H$ của $AB$ và $SCH = 45^\circ$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **a)** | $BC \perp (SAB)$ | | |
| **b)** | $d(H,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ | | |
| **c)** | Gọi $K$ là trung điểm $CD$ khi đó: $CD \perp (SHK)$ | | |
| **d)** | $d(H,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$ | | |

**Câu 5.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AA' = c$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **a)** | $AB \perp \left(ADD'A'\right)$ | | |
| **b)** | Khoảng cách từ điểm $A$ đến đường thẳng $BD'$ bằng: $\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ | | |
| **c)** | Gọi $I, J$ theo thứ tự là tâm của các hình chữ nhật $ADD'A', BCC'B'$. Khi đó $IJ$ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $AD'$ và $B'C$. | | |
| **d)** | Khoảng cách hai đường thẳng $AD'$ và $B'C$ bằng $2a$ | | |

**Câu 6.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a$, gọi $O$ là tâm của đáy và $SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| a) | $AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ | | |
| b) | $d(O,SA)=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. | | |
| c) | Kẻ đường cao $AI$ của tam giác $ABC$, khi đó: $OI=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ | | |
| d) | $d(O,(SBC))=\dfrac{a\sqrt{15}}{12}$ | | |

**Câu 7.** Cho lăng trụ đứng $ABC\cdot A'B'C'$ có $AC=a, BC=2a, ACB=120^{\circ}$. Gọi $M$ là trung điểm của $BB'$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| a) | $d\left(CC',\left(ABB'A'\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$ | | |
| b) | $d\left(CC',AM\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{12}$ | | |
| c) | $AA'\perp(ABC), AA'\perp\left(A'B'C'\right)$ | | |
| d) | Biết khoảng cách giữa hai mặt đáy lăng trụ bằng $2a$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là: $a^3\sqrt{3}$. | | |

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD), SA=a\sqrt{3}, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| a) | $d(A,(SBC))=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ | | |
| b) | $AD//(SBC)$ | | |
| c) | $d(D,(SBC))=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ | | |
| d) | Gọi $M$ là trung điểm $SA$. Khi đó: $d(M,(SBC))=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$ | | |

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông tại $B$ có $AB=1, ACB=30^{\circ}$. Biết $SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA=2$. Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ trên $SB$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| a) | $d(A,SB)=AH$ | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **b)** | $d(B,(SAC))=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ | | |
| **c)** | $BC=\sqrt{3}$ | | |
| **d)** | Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng: $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ | | |

**Câu 10.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm $A'$ đến mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó:

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

| | Mệnh đề | Đúng | Sai |
|---|---|---|---|
| **a)** | Trong mặt phẳng $\left(A'B'C'\right)$, kẻ $A'H\perp B'C'$ tại $H$. Khi đó: $B'C'\perp(AA'H)$ | | |
| **b)** | $d\left((ABC),\left(A'B'C'\right)\right)=a.$ | | |
| **c)** | Diện tích đáy của lăng trụ là: $a^2\sqrt{5}$ | | |
| **d)** | Thể tích khối lăng trụ là: $a^3\sqrt{3}$ | | |

## LỜI GIẢI

**Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh $a$. Biết $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Vẽ đường cao $AH$ của tam giác $SAB$.Vẽ đường cao $AK$ của tam giác $SAD$. Khi đó:

a) $BC\perp AH$

b) Khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng: $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBD)$ bằng: $\dfrac{a\sqrt{2}}{7}$

d) Khoảng cách từ $C$ đến mặt phẳng $(AHK)$ bằng: $\dfrac{a\sqrt{5}}{5}$

**Lời giải**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a) Đúng** | **b) Đúng** | **c) Sai** | **d) Sai** |

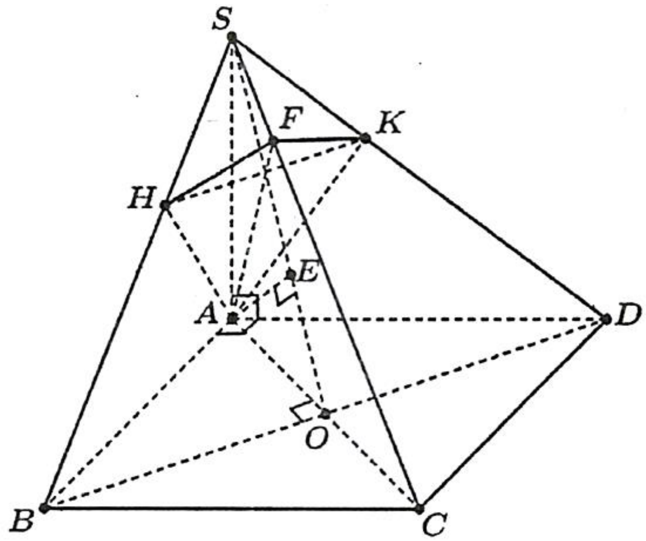
Ta có: $\begin{cases} BC\perp SA(\text{ do } SA\perp(ABCD)) \\ BC\perp AB \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$,

mà $SB\perp AH$ nên $AH\perp(SBC)$ hay $d(A,(SBC))=AH$.

Tam giác $SAB$ vuông tại $A$ có đường cao $AH$ nên

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{SA^2}\Rightarrow AH=\frac{AB\cdot SA}{\sqrt{AB^2+SA^2}}=\frac{a\cdot a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3a^2}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $d(A,(SBC)) = AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.




Gọi $O$ là tâm hình vuông $ABCD$ thì $AO \perp BD$, ta lại có $SA \perp BD$ nên $BD \perp (SAC)$. (*)

Kẻ đường cao $AE$ của $\Delta SAO$ thì $AE \perp BD($ do (*)$)$.

Vậy $AE \perp (SBD)$ hay $d(A,(SBD)) = AE$.

Ta có: $AC = a\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông), suy ra $OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác $SAO$ vuông tại $A$ có: $AE = \dfrac{SA \cdot AO}{\sqrt{SA^2 + AO^2}} = \dfrac{a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3a^2 + \dfrac{2a^2}{4}}} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(A,(SBD)) = AE = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Ta chứng minh được $AK \perp (SCD)$. Khi đó: $\begin{cases} SC \perp AH \\ SC \perp AK \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$.

Gọi $F = SC \cap (AHK)$ thì $SC \perp AF$.

Khi đó: $d(C,(AHK)) = CF$.

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{3a^2 + 2a^2} = a\sqrt{5}$.

Tam giác $SAC$ vuông tại $A$ có đường cao $AF$ nên:

$CF.CS = AC^2 \Rightarrow CF = \dfrac{AC^2}{CS} = \dfrac{2a^2}{a\sqrt{5}} = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}\left(C,(AHK)\right)=CF=\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

**Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=a\sqrt{2}$, $AC=a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Khi đó:

a) $AD//(SBC)$

b) Khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng: $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $SD, AB$ bằng: $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$

d) Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng: $\frac{\sqrt{2}a^3}{3}$

**Lời giải**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a) Đúng** | **b) Sai** | **c) Đúng** | **d) Sai** |

a) Ta có: $AD//BC \Rightarrow AD//(SBC) \Rightarrow d(D,(SBC))=d(A,(SBC))$.

Trong mặt phẳng $(SAB)$, kẻ $AH\perp SB$ tại $H$. (1)

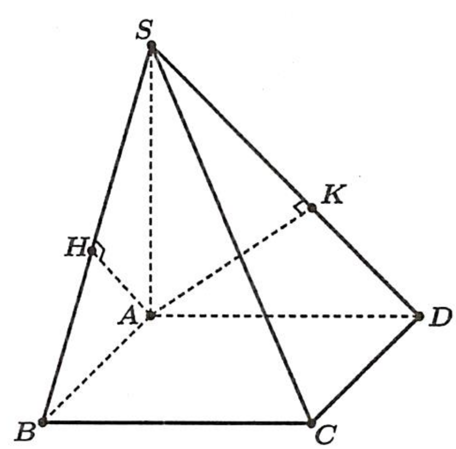
Ta có: $\begin{cases} BC\perp AB \\ BC\perp SA \end{cases} \Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow AH\perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH\perp(SBC)$ hay $d(A,(SBC))=AH$.

Tam giác $SAB$ vuông tại $A$ có đường cao $AH$ nên:

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AB^2}\Rightarrow AH=\frac{SA\cdot AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\frac{2a\cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{4a^2+2a^2}}=\frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(D,(SBC))=d(A,(SBC))=AH=\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.



b) Trong mặt phẳng $(SAD)$, kẻ $AK \perp SD$ tại $K$. (3)

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AK$ .(4)

Từ (3) và (4) suy ra $AK$ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $AB, SD$.

Tam giác $ACD$ vuông tại $D$ nên $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$.

Tam giác $SAD$ vuông tại $A$ có đường cao $AK$ nên

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $d(AB, SD) = AK = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

c) Diện tích đáy hình chóp là: $S_{ABCD} = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

Thể tích khối chóp cần tìm là:

$V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \dfrac{1}{3} \cdot 2a \cdot a^2\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}a^3}{3}$ (đơn vị thể tích).

**Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên $(SAB)$ vuông góc với mặt đáy và tam giác $SAB$ đều cạnh $2a$. Biết tam giác $ABC$ vuông tại $C$ và cạnh $AC = a\sqrt{3}$. Khi đó:

a) $SH \perp (ABC)$

b) $d(S, (ABC)) = a\sqrt{3}$

c) $d(C, (SAB)) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

d) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\dfrac{a^3}{6}$

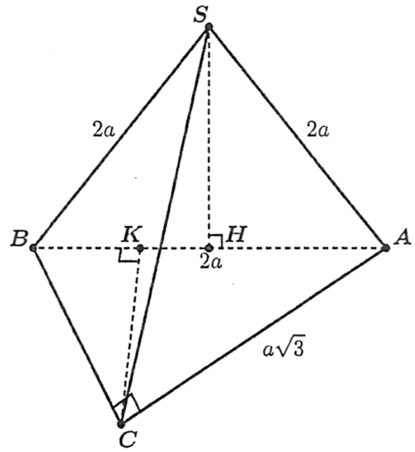
**Lời giải**

| **a) Đúng** | **b) Đúng** | **c) Sai** | **d) Sai** |
|---|---|---|---|

a) Gọi $H$ là trung điểm $AB$, mà tam giác $SAB$ đều nên $SH \perp AB$.

Ngoài ra $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$.

Ta có: $d(S, (ABC)) = SH = \dfrac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$( do tam giác $SAB$ đều cạnh $2a$).




Kẻ đường cao $CK$ của tam giác $ABC$.

Ta có: $\begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SH \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow d(C,(SAB)) = CK$.

Xét tam giác $ABC$ vuông tại $C$ có:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{4a^2 - 3a^2} = a; CK = \frac{CA \cdot CB}{AB} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $d(C,(SAB)) = CK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Diện tích đáy hình chóp là: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BC = \dfrac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối chóp là: $V_{S \cdot ABC} = \dfrac{1}{3} SH \cdot S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a^3}{2}$.

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu của $S$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm $H$ của $AB$ và $SCH = 45^\circ$. Khi đó:

a) $BC \perp (SAB)$

b) $d(H,(SBC)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

c) Gọi $K$ là trung điểm $CD$ khi đó: $CD \perp (SHK)$

d) $d(H,(SCD)) = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

**Lời giải**

| **a) Đúng** | **b) Đúng** | **c) Đúng** | **d) Sai** |
|---|---|---|---|

a) Kẻ đường cao $HE$ trong tam giác $SBH$. (1)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SH (\text{ do } SH \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp HE$. (2)

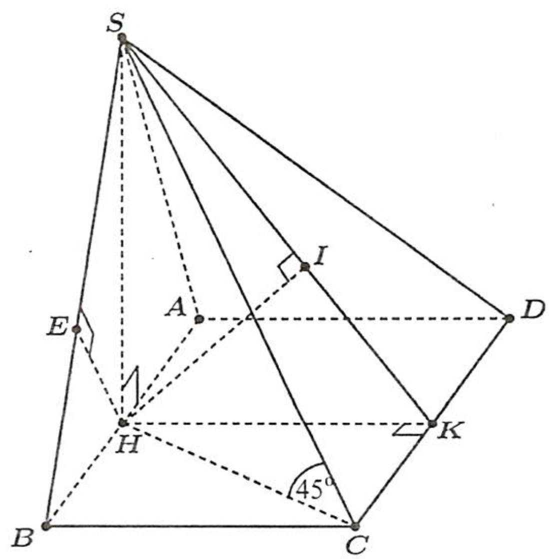
Từ (1) và (2) suy ra $HE \perp (SBC)$ hay $d(H,(SBC)) = HE$.

Tam giác $BCH$ vuông tại $B$ có:

$$\begin{aligned} CH &= \sqrt{BC^2 + BH^2} \\ &= \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Tam giác $SCH$ vuông tại $H$ có:

$$\tan SCH = \frac{SH}{CH} \Rightarrow SH = a\sqrt{2}.$$




Tam giác $SBH$ vuông tại $H$ có đường cao $HE$ nên

$$\begin{aligned} \frac{1}{HE^2} &= \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{BH^2} \\ \Rightarrow HE &= \frac{SH \cdot BH}{\sqrt{SH^2 + BH^2}} \\ &= \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $d(H,(SBC)) = HE = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

b) Gọi $K$ là trung điểm $CD$ thì $HK$ là đường trung bình của hình chữ nhật $ABCD$ nên $HK // BC // AD \Rightarrow HK \perp CD$.

Ta có: $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK)$.

Kẻ đường cao $HI$ của tam giác $SHK$.

Ta có: $\begin{cases} HI \perp SK \\ HI \perp CD(\text{ do } CD \perp (SHK), HI \subset (SHK)) \end{cases} \Rightarrow HI \perp (SCD)$.

Tam giác $SHK$ vuông tại $H$ có đường cao $HI$ nên

$$\frac{1}{HI^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HK^2} \Rightarrow HI = \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $d(H,(SCD)) = HI = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

**Câu 5.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = b, AA' = c$. Khi đó:

a) $AB \perp \left(ADD'A'\right)$

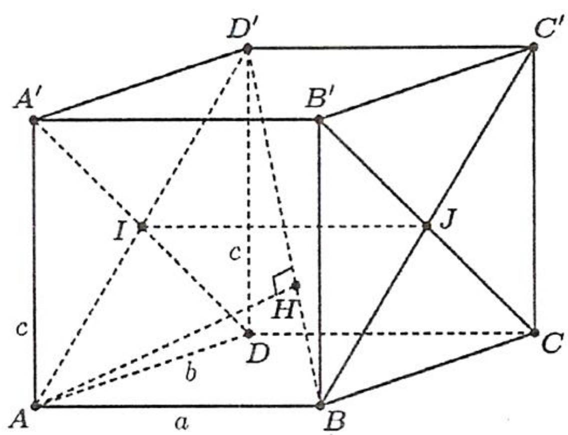
b) Khoảng cách từ điểm $A$ đến đường thẳng $BD'$ bằng: $\dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

c) Gọi $I, J$ theo thứ tự là tâm của các hình chữ nhật $ADD'A', BCC'B'$. Khi đó $IJ$ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $AD'$ và $B'C$.

d) Khoảng cách hai đường thẳng $AD'$ và $B'C$ bằng $2a$

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---|---|---|---|




Kẻ đường cao $AH$ trong tam giác $ABD'$, suy ra $d\left(A, BD'\right) = AH$.

Vì $ABCD \cdot A'B'C'$ là hình hộp chữ nhật nên $AB \perp \left(ADD'A'\right)$,

suy ra $AB \perp AD'$ hay tam giác $ABD'$ vuông tại $A$.

Tam giác $ADD'$ vuông tại $D$ có: $AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{b^2+c^2}$.

Tam giác $ABD'$ vuông tại $A$ có đường cao $AH$ nên

$$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD'^2}\Rightarrow AH=\frac{AB\cdot AD'}{\sqrt{AB^2+AD'^2}}=\frac{a\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Vậy $d\left(A,BD'\right)=\dfrac{a\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Vì $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $\begin{cases}AB//C'D'\\ AB=C'D'\end{cases}$

$\Rightarrow ABC'D'$ là hình bình hành.

Dễ thấy $I,J$ lần lượt là trung điểm của $AD'$ và $BC'$ suy ra $IJ$ là đường trung bình của hình bình hành $ABC'D'\Rightarrow IJ//AB$, mà $AB\perp AD'$ nên $IJ\perp AD'$. (1)

Ta có: $AB\perp\left(BCC'B'\right)\Rightarrow AB\perp B'C\Rightarrow IJ\perp B'C$. (2)

Mặt khác $IJ$ cắt cả hai đường thẳng $AD',B'C$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $IJ$ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $AD'$ và $B'C$. Ta có $IJ=AB=a$.

**Câu 6.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a$, gọi $O$ là tâm của đáy và $SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Khi đó:

a) $AO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

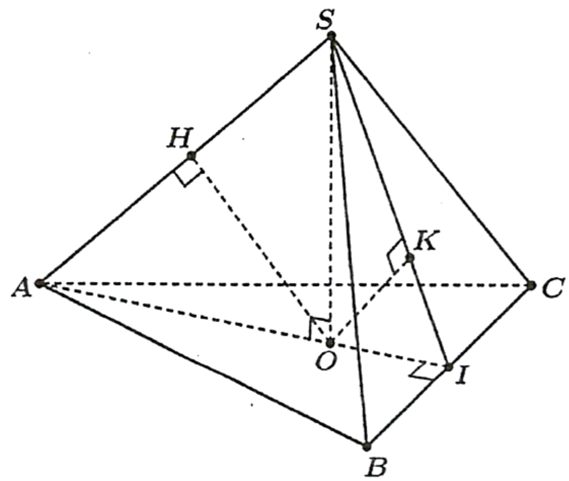
b) $d(O,SA)=\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$.

c) Kẻ đường cao $AI$ của tam giác $ABC$, khi đó: $OI=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$

d) $d(O,(SBC))=\dfrac{a\sqrt{15}}{12}$

**Lời giải**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a) Sai** | **b) Đúng** | **c) Đúng** | **d) Sai** |




Kẻ đường cao $AI$ của tam giác $ABC$, ta có $O$ thuộc $AI$.

Trong mặt phẳng $(SAI)$, dựng $OH \perp SA$ tại $H \Rightarrow d(O,SA) = OH$.

Tam giác $ABC$ đều cạnh $a$ nên $AO = \frac{2}{3}AI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = SO$.

Tam giác $SAO$ vuông cân tại $O$ nên $OH = \frac{SA}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Vậy $d(O,SA) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Ta xét khoảng cách từ $O$ đến mặt bên $(SBC)$.

Kẻ đường cao $OK$ của tam giác $SOI$. (1)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SO (\text{ do } SO \perp (ABC)) \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp OK$ .(2)

Từ (1) và (2) suy ra $OK \perp (SBC)$ hay $OK = d(O,(SBC))$.

Ta có: $OI = \frac{AI}{3} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Tam giác $SOI$ vuông tại $O$ có đường cao $OK$ nên

$$\frac{1}{OK^2} = \frac{1}{SO^2} + \frac{1}{OI^2} \Rightarrow OK = \frac{SO \cdot OI}{\sqrt{SO^2 + OI^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}}{\sqrt{\frac{3a^2}{9} + \frac{3a^2}{36}}} = \frac{a\sqrt{15}}{15}$$

Vậy $d(O,(SBC)) = OK = \frac{a\sqrt{15}}{15}$.

**Câu 7.** Cho lăng trụ đứng $ABC\cdot A'B'C'$ có $AC=a, BC=2a, ACB=120^\circ$. Gọi $M$ là trung điểm của $BB'$. Khi đó:

a) $d\left(CC',\left(ABB'A'\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$

b) $d\left(CC',AM\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{12}$

c) $AA'\perp(ABC), AA'\perp\left(A'B'C'\right)$

d) Biết khoảng cách giữa hai mặt đáy lăng trụ bằng $2a$. Khi đó thể tích khối lăng trụ là: $a^3\sqrt{3}$.

**Lời giải**

| **a) Đúng** | **b) Sai** | **c) Đúng** | **d) Đúng** |
|---|---|---|---|

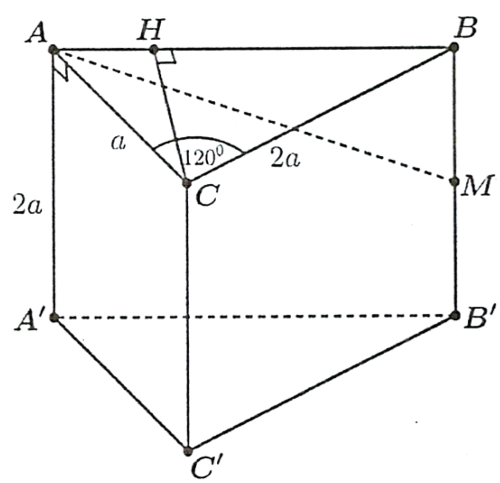
Ta có: $CC'//BB'\Rightarrow CC'//\left(ABB'A'\right)$ nên $d\left(CC',\left(ABB'A'\right)\right)=d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)$.

Trong mặt phẳng $(ABC)$, kẻ $CH\perp AB$ tại $H$. (1)

Vì $ABC\cdot A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên $AA'\perp(ABC)\Rightarrow CH\perp AA'$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $CH\perp\left(ABB'A'\right)\Rightarrow d\left(C,\left(ABB'A'\right)\right)=CH$.

Xét tam giác $ABC$, có $AB^2=CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cdot\cos120^\circ=7a^2 \Rightarrow AB=a\sqrt{7}$.




Diện tích tam giác $ABC$ là: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}CA\cdot CB\cdot\sin C=\dfrac{1}{2}AB\cdot CH$

$$\Rightarrow CH=\frac{CA\cdot CB\cdot\sin120^\circ}{AB}=\frac{a\cdot2a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{7}}=\frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

Vậy $d\left(CC',\left(ABB'A'\right)\right)=CH=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Ta có $AM$ và $CC'$ là hai đường thẳng chéo nhau mà $\begin{cases} CC'//\left(ABB'A'\right) \\ AM\subset\left(ABB'A'\right)\end{cases}$

nên $d\left(CC',AM\right)=d\left(CC',\left(ABB'A'\right)\right)=\dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vì $ABC\cdot A'B'C'$ là hình lăng trụ đứng nên $AA'\perp(ABC), AA'\perp\left(A'B'C'\right)$.

Do vậy $d\left((ABC),\left(A'B'C'\right)\right)=AA'=2a$.

Khối lăng trụ $ABC\cdot A'B'C'$ có chiều cao $h=AA'=2a$, diện tích đáy là:

$S=S_{ABC}=\dfrac{1}{2}CA\cdot CB\cdot\sin120^{\circ}=\dfrac{1}{2}a\cdot 2a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Thể tích khối lăng trụ là: $V=Sh=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot 2a=a^3\sqrt{3}$.

**Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD), SA=a\sqrt{3}, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a$. Khi đó:

a) $d(A,(SBC))=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

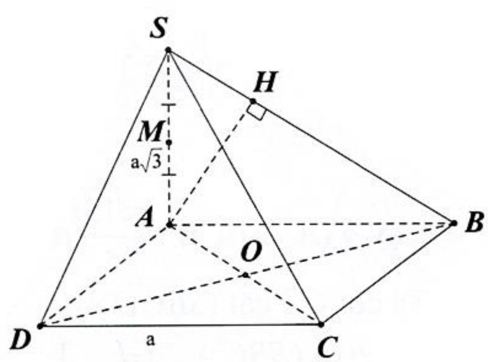
b) $AD//(SBC)$

c) $d(D,(SBC))=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

d) Gọi $M$ là trung điểm $SA$. Khi đó: $d(M,(SBC))=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$

**Lời giải**

| a) Sai | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng |
|---|---|---|---|



Kẻ $AH\perp SB$ tại $H$

Ta có: $\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp AB \end{cases} \Rightarrow BC\perp (SAB)\Rightarrow BC\perp AH$

Ta lại có: $AH\perp SB\Rightarrow AH\perp (SBC)\Rightarrow d(A,(SBC))=AH$

Ta có: $AH=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{(\sqrt{3}a)^2}+\dfrac{1}{a^2}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

Vậy $d(A,(SBC))=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Ta có: $AD//(SBC)\Rightarrow d(D,(SBC))=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Ta có: $MA$ cắt $(SBC)$ tại $S$

$\Rightarrow \dfrac{d(M,(SBC))}{d(A,(SBC))}=\dfrac{MS}{AS}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow d(M,(SBC))=\dfrac{1}{2}d(A,(SBC))=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a.$

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác $ABC$ vuông tại $B$ có $AB=1, ACB=30^\circ$. Biết $SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA=2$. Gọi $H$ là hình chiếu của $A$ trên $SB$. Khi đó:

a) $d(A,SB)=AH$

b) $d(B,(SAC))=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

c) $BC=\sqrt{3}$

d) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng: $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai |
|---|---|---|---|

Vì $AH\perp SB$ nên $d(A,SB)=AH$.

Tam giác $SAB$ vuông tại $A$, đường cao $AH$ nên $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AB^2}$

$\Rightarrow AH=\dfrac{SA\cdot AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{2\cdot 1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

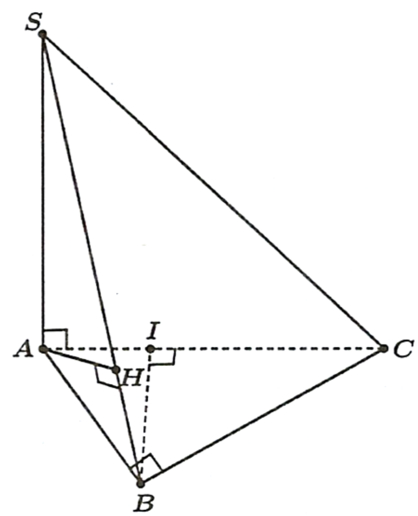
Trong mặt phẳng $(ABC)$, kẻ $BI\perp AC$ tại $I$.

Mặt khác $BI \perp SA$ (do $SA \perp (ABC), BI \subset (ABC)$ ).

Vì vậy $BI \perp (SAC)$ hay $d(B,(SAC)) = BI$ .

Tam giác $ABI$ vuông tại $I$ có: $\sin BAC = \dfrac{BI}{AB} \Rightarrow BI = AB \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(B,(SAC)) = BI = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.




Tam giác $ABC$ vuông tại $B$ có: $\tan ACB = \dfrac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}$.

Diện tích đáy hình chóp là: $S = S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} BA.BC = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Chiều cao hình chóp $h = SA = 2$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}Sh = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ (đơn vị thể tích).

**Câu 10.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm $A'$ đến mặt phẳng $\left(AB'C'\right)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Khi đó:

a) Trong mặt phẳng $\left(A'B'C'\right)$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại $H$. Khi đó: $B'C' \perp (AA'H)$

b) $d\left((ABC),\left(A'B'C'\right)\right) = a.$

c) Diện tích đáy của lăng trụ là: $a^2\sqrt{5}$

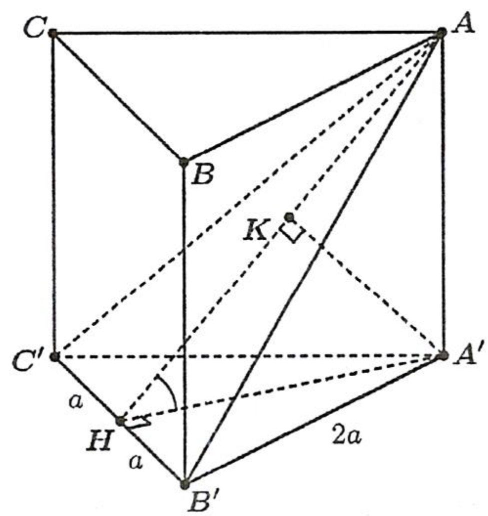
d) Thể tích khối lăng trụ là: $a^3\sqrt{3}$

**Lời giải**

| a) Đúng | b) Đúng | c) Sai | d) Đúng |
|---|---|---|---|

Trong mặt phẳng $\left(A'B'C'\right)$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại $H$.

Trong mặt phẳng $\left(AA'H\right)$, kẻ $A'K \perp AH$ tại $K$. (1)




Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'H \\ B'C' \perp AA'(\text{do } AA' \perp (A'B'C')) \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'H) \Rightarrow A'K \perp B'C'(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $A'K \perp \left(AB'C'\right)$ hay $d\left(A',\left(AB'C'\right)\right) = A'K = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác $A'B'C'$ đều có đường cao $A'H = \dfrac{2a\cdot\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác $AA'H$ vuông tại $A'$ có đường cao $A'K$ nên

$$\frac{1}{A'K^2} = \frac{1}{A'H^2} + \frac{1}{A'A^2} \Rightarrow \frac{1}{\frac{3a^2}{4}} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{A'A^2} \Rightarrow A'A = a.$$

Hai mặt đáy lăng trụ song song với nhau và có khoảng cách là: $d\left((ABC),\left(A'B'C'\right)\right) = AA' = a.$

Diện tích đáy của lăng trụ (đáy là tam giác đều) là: $S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$

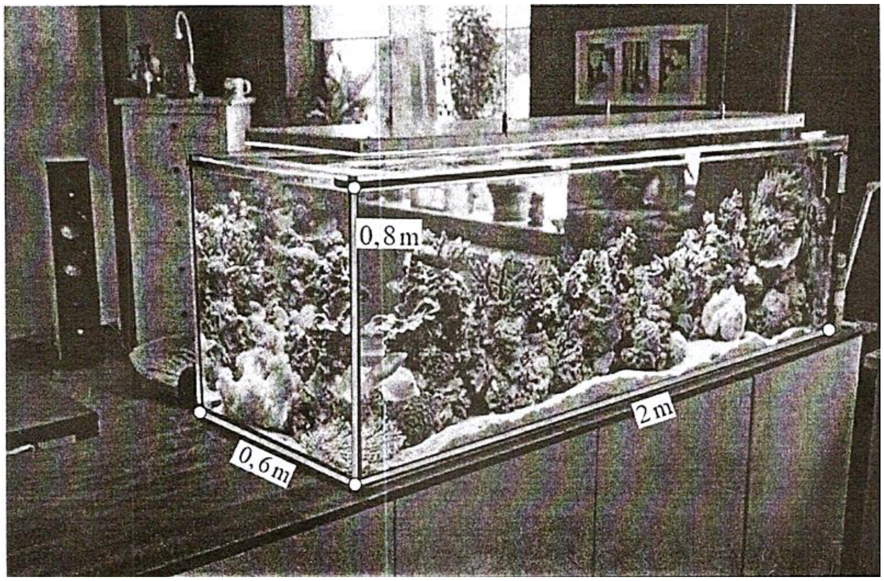
Thể tích khối lăng trụ là: $V = AA' \cdot S_{\Delta A'B'C'} = a \cdot a^2\sqrt{3} = a^3\sqrt{3}$ (đơn vị thể tích).

## Ⓒ. Trả lời ngắn

**Câu 1.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh $2a$. Tìm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $AB, CD$ và tính độ dài của nó theo $a$.

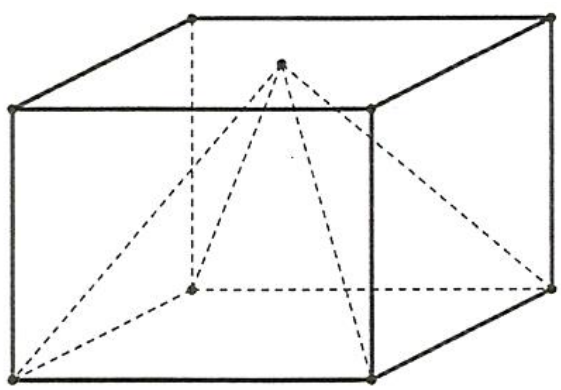
**Trả lời:** ……………………………

**Câu 2.** Một bể cá được làm bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $0,6m; 2m; 0,8m$. Tìm thể tích và độ dài đường chéo của bể cá đó.




**Trả lời:** …………………………

**Câu 3.** Một cái hộp hình lập phương, bên trong nó đựng một mô hình đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều mà đỉnh của hình chóp đó trùng với tâm của một mặt chiếc hộp, giả sử hình vuông đáy của hình chóp trùng với một mặt của chiếc hộp (mặt này cùng với mặt chứa đỉnh hình chóp là hai mặt đối nhau). Biết cạnh của chiếc hộp bằng $30cm$, hãy tính thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp (mô hình đồ chơi được làm bởi chất liệu nhựa đặc bên trong).



**Trả lời:** …………………………

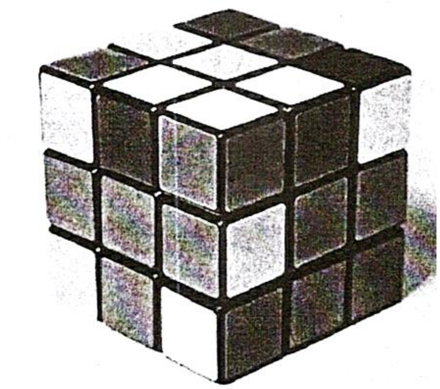
**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, tam giác $SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.
Tìm thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**Trả lời:** …………………………

**Câu 5.** Một hình chóp cụt đều $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng $4a$, cạnh đáy nhỏ bằng $2a$ và chiều cao của nó bằng $\frac{3a}{2}$. Tìm thể tích của khối chóp cụt đều đó.

**Trả lời:** ...............................

**Câu 6.** Một khối rubik $3\times 3$ (được chia làm 27 khối lập phương nhỏ) có dạng một hình lập phương với kích thước cạnh bằng $6cm$.
Tìm thể tích của khối rubik đó, biết khoảng hở giữa các khối lập phương nhỏ không đáng kể.



**Trả lời:** ...............................

**Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp (ABCD), SA=2a, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a$. Gọi $O$ là tâm của $ABCD$.
Tính khoảng cách từ $S$ đến $DM$ với $M$ là trung điểm $OC$.

**Trả lời:** ...............................

**Câu 8.** Cho tứ diện $S.ABC$ trong đó $SA, SB, SC$ vuông góc với nhau từng đôi một và $SA=3a, SB=a, SC=2a$. Tính khoảng cách từ $A$ đến đường thẳng $BC$.

**Trả lời:** ...............................

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SBC)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC=a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(SAC)$.

**Trả lời:** ...............................

**Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA\perp (ABC)$ và $SB=2a$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Tính khoảng cách từ $G$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Trả lời:** ...............................

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, SH\perp (ABC)$ với $H$ là trung điểm $BC$. Biết $AB=SC=a$. Tính khoảng cách từ $B$ đến mặt phẳng $(SAC)$.

**Trả lời:** ...............................

**Câu 12.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh $a$ và cạnh bên $2a$. Tính khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Trả lời:** ...............................

**Câu 13.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy cạnh $2a$ và cạnh bên $a\sqrt{7}$, gọi $M$ là trung điểm $SA$. Tính khoảng cách từ $M$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Trả lời:** ..............................

**Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB=a, AD=2a$. Tam giác $SAD$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBD)$.

**Trả lời:** ..............................

**Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD), SA=3a, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AC$ và $SB$.

**Trả lời:** ..............................

**Câu 16.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA\perp(ABC)$ và $SC=2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Trả lời:** ..............................

**Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SB\perp(ABCD)$ và $SD=3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**Trả lời:** ..............................

**Câu 18.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh $a$ và cạnh bên $2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Trả lời:** ..............................

**Câu 19.** Cho khối lăng trụ đứng $ABC\cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, BC=2a$ và $A'C=a\sqrt{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

**Trả lời:** ..............................

**Câu 20.** Cho khối lăng trụ đều $ABC\cdot A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng $a$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

**Trả lời:** ..............................

**Câu 21.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=2a$. Biết thể tích khối hộp chữ nhật là $14a^3$. Tính chiều cao $A'C$.

**Trả lời:** ..............................

**Câu 22.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy cạnh a và chiều cao $SO=2a$. Gọi $M, N, P$, $Q$ lần lượt là trung điểm của $SA, SB, SC, SD$. Tính thể tích khối chóp cụt đều $ABCD.MNPQ$.

**Trả lời:** ..............................

**Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$, chiều cao của hình chóp kẻ từ $S$ là $2a$. Biết diện tích tam giác $SBC$ là $3a^2$. Tính khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Trả lời:** ..............................

**Câu 24.** Một hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có ba kích thước là $2cm, 3cm$ và $6cm$. Tính thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

**Trả lời:** ..............................

**Câu 25.** Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$. Hình chiếu vuông góc của $A'$ lên mặt phẳng $(ABC)$ trùng với trọng tâm tam giác $ABC$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $AA'$ và $BC$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích $V$ của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

**Trả lời:** …………………………

**Câu 26.** Cho tứ diện $S \cdot ABC$ trong đó $SA, SB, SC$ vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a, SB = a, SC = 2a$. Tính khoảng cách từ $A$ đến đường thẳng $BC$.

**Trả lời:** …………………………

**Câu 27.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SBC)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(SAC)$.

**Trả lời:** …………………………

**Câu 28.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh $a$ và cạnh bên $2a$. Tính khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Trả lời:** …………………………

**Câu 29.** Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, BC = 2a$ và $A'C = a\sqrt{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

**Trả lời:** …………………………

**Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA \perp (ABC)$ và $SC = 2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Trả lời:** …………………………

**Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SB = 2a$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Tính khoảng cách từ $G$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Trả lời:** …………………………

**Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD), SA = 3a, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AC$ và $SB$.

**Trả lời:** …………………………

**Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SB \perp (ABCD)$ và $SD = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**Trả lời:** …………………………

**Câu 34.** Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$. Hình chiếu vuông góc của $A'$ lên mặt phẳng $(ABC)$ trùng với trọng tâm tam giác $ABC$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $AA'$ và $BC$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích $V$ của khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.

**Trả lời:** …………………………

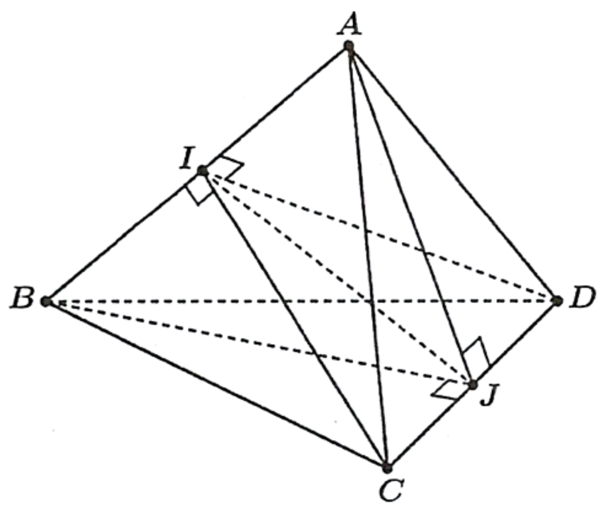
LỜI GIẢI

**Câu 1.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh $2a$. Tìm đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau $AB, CD$ và tính độ dài của nó theo $a$.

**Trả lời:** $a\sqrt{2}$

**Lời giải**

Gọi $I, J$ theo thứ tự là trung điểm của $AB, CD$.




Các tam giác $ABC, ABD$ đều có $I$ là trung điểm $AB$ nên

$\begin{cases} AB \perp CI \\ AB \perp DI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ICD)$, mà $IJ \subset (ICD) \Rightarrow AB \perp IJ$. (1)

Tương tự, các tam giác $ACD, BCD$ đều có $J$ là trung điểm $CD$ nên

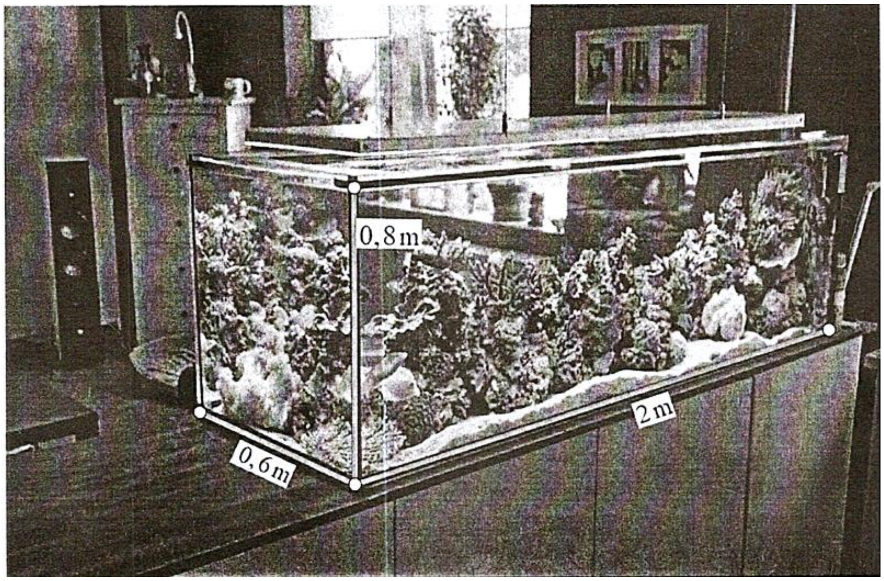
$\begin{cases} CD \perp AJ \\ CD \perp BJ \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ABJ)$,

mà $IJ \subset (JAB) \Rightarrow CD \perp IJ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IJ$ là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $AB, CD$.

Ta có: $CI = \dfrac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}; IJ = \sqrt{CI^2 - CJ^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

**Câu 2.** Một bể cá được làm bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $0,6\,m; 2\,m; 0,8\,m$. Tìm thể tích và độ dài đường chéo của bể cá đó.




**Trả lời:** $0,96\left(m^3\right)$ và $2,236(m)$

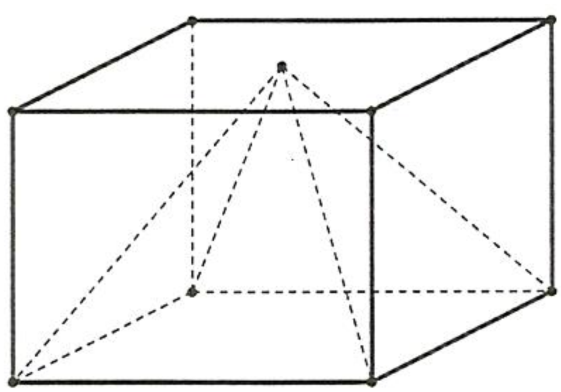
**Lời giải**

Thể tích của bể cá hình hộp chữ nhật có ba kích thước $a=0,6m; b=2m$; $c=0,8m$ là:
$V=abc=0,6\cdot 2\cdot 0,8=0,96\left(m^3\right)$.

Độ dài đường chéo bể kính hình hộp chữ nhật là:

$d=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{0,6^2+2^2+0,8^2}=\sqrt{5}\approx 2,236(m)$.

**Câu 3.** Một cái hộp hình lập phương, bên trong nó đựng một mô hình đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều mà đỉnh của hình chóp đó trùng với tâm của một mặt chiếc hộp, giả sử hình vuông đáy của hình chóp trùng với một mặt của chiếc hộp (mặt này cùng với mặt chứa đỉnh hình chóp là hai mặt đối nhau). Biết cạnh của chiếc hộp bằng $30cm$, hãy tính thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp (mô hình đồ chơi được làm bởi chất liệu nhựa đặc bên trong).



**Trả lời:** $18000\left(cm^3\right)$

**Lời giải**

Thể tích cái hộp (khối lập phương) là: $V_1 = 30^3 = 27000\left(cm^3\right)$.

Xét đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều, chiều cao của hình chóp bằng với một cạnh của hình lập phương, hay $h = 30\,cm$, đáy của hình chóp có diện tích $S = 30^2 = 900\,cm^2$.

Thể tích khối đồ chơi (khối chóp tứ giác đều) là:

$V_2 = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}\cdot 900\cdot 30 = 9000\left(cm^3\right)$.

Thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp:
$V = V_1 - V_2 = 27000 - 9000 = 18000\left(cm^3\right)$.

**Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, tam giác $SAB$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tìm thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**Trả lời:** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

**Lời giải**

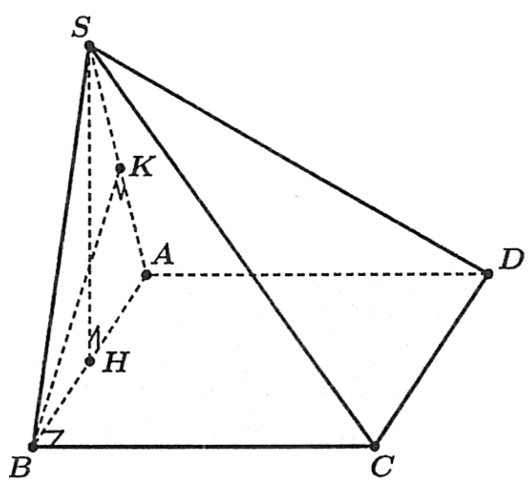
Gọi $H$ là trung điểm $AB$, suy ra $SH \perp AB$ (do tam giác $SAB$ đều).

Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$.

Đường cao hình chóp là $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; diện tích đáy hình chóp $S_{ABCD} = a^2$.

Thể tích khối chóp là:

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH\cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ (đơn vị thể tích).



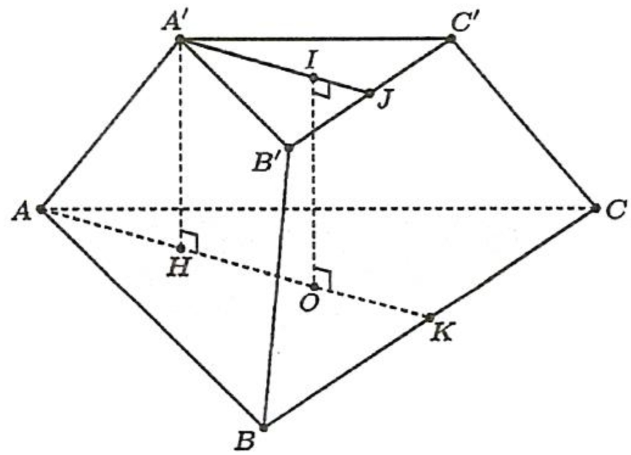

**Câu 5.** Một hình chóp cụt đều $ABC\cdot A'B'C'$ có cạnh đáy lớn bằng $4a$, cạnh đáy nhỏ bằng $2a$ và chiều cao của nó bằng $\frac{3a}{2}$. Tìm thể tích của khối chóp cụt đều đó.

**Trả lời:** $\dfrac{7a^3\sqrt{3}}{2}$

**Lời giải**

Gọi $O, I$ theo thứ tự là tâm của đáy lớn $ABC$ và đáy bé $A'B'C'$; $K, J$ theo thứ tự là trung điểm của $BC$ và $B'C'$.

Ta có $h = IO = \dfrac{3a}{2}$ là chiều cao của hình chóp cụt đều $ABC \cdot A'B'C'$.




Diện tích hai đáy hình chóp cụt đều là:

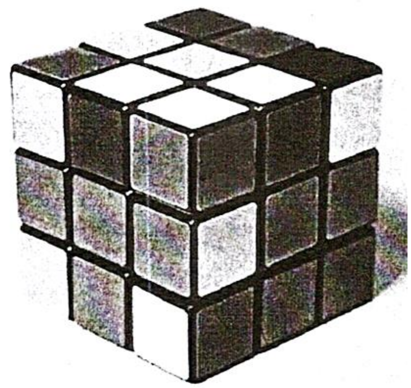
$$S_1 = S_{\Delta ABC} = \frac{(4a)^2\sqrt{3}}{4} = 4a^2\sqrt{3}; S_2 = S_{\Delta A'B'C'} = \frac{(2a)^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

Thể tích khối chóp cụt đều là:

$$V = \frac{1}{3}h\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$$

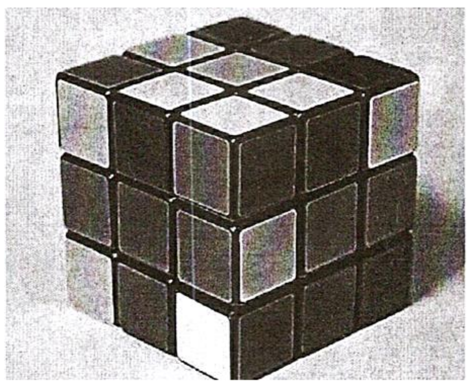
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{3a}{2}\left(4a^2\sqrt{3} + \sqrt{4a^2\sqrt{3}\cdot a^2\sqrt{3}} + a^2\sqrt{3}\right) = \frac{7a^3\sqrt{3}}{2} \text{ (đơn vị thể tích)}$$

**Câu 6.** Một khối rubik $3\times3$ (được chia làm 27 khối lập phương nhỏ) có dạng một hình lập phương với kích thước cạnh bằng $6cm$.
Tìm thể tích của khối rubik đó, biết khoảng hở giữa các khối lập phương nhỏ không đáng kể.



**Trả lời:** $116\left(cm^3\right)$.

**Lời giải**



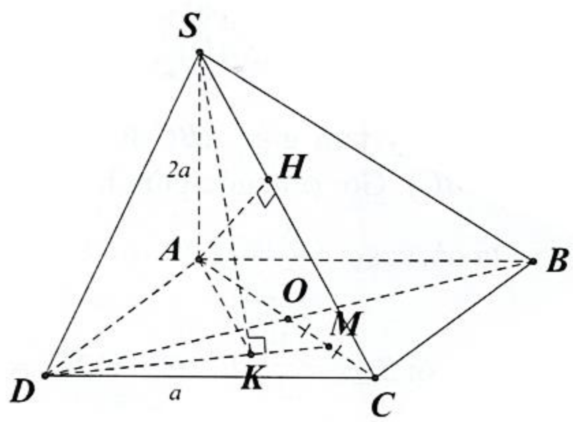
Thể tích khối rubik là:

$V=6^3=116\left(cm^3\right)$.

**Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD), SA=2a, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a$. Gọi $O$ là tâm của $ABCD$.
Tính khoảng cách từ $S$ đến $DM$ với $M$ là trung điểm $OC$.

**Trả lời:** $d(S,DM)=\dfrac{\sqrt{190}}{5}a$

**Lời giải**




Kẻ $SK \perp DM$ tại $K \Rightarrow d(S,DM) = SK$.

Ta có: $\begin{cases} DM \perp SA \\ DM \perp SK \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SAK) \Rightarrow DM \perp AK$

Ta có: $\Delta KMA \backsim \Delta OMD$

$$\Rightarrow \frac{KA}{OD} = \frac{AM}{DM} \Rightarrow KA = \frac{AM \cdot OD}{DM} = \frac{\frac{3}{4}a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}a$$

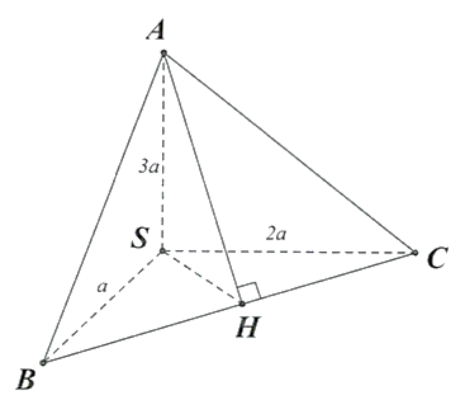
Ta có: $SK = \sqrt{SA^2 + AK^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{3\sqrt{10}}{5}a\right)^2} = \frac{\sqrt{190}}{5}a$

Vậy $d(S,DM) = \frac{\sqrt{190}}{5}a$.

**Câu 8.** Cho tứ diện $S.ABC$ trong đó $SA, SB, SC$ vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a, SB = a, SC = 2a$. Tính khoảng cách từ $A$ đến đường thẳng $BC$.

**Trả lời:** $d(A,BC) = \frac{7\sqrt{5}}{5}a$

**Lời giải**



Kẻ $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow d(A, BC) = AH$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$

Ta có: $SH = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{SC^2} + \dfrac{1}{SB^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{a^2}}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$

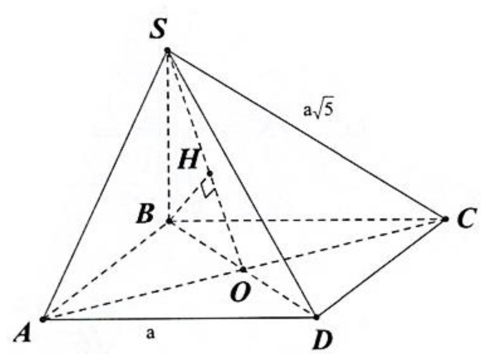
Ta có: $AH = \sqrt{SA^2 + SH^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a\right)^2} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}a$

Vậy $d(A, BC) = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}a$.

**Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SBC)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(SAC)$.

**Trả lời:** $\dfrac{2}{3}a$

**Lời giải**




Kẻ $BH \perp SO$ tại $H$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp SB \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp BH$

Ta lại có: $BH \perp SO \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow d(B, (SAC)) = BH$

Ta có: $SB = \sqrt{SC^2 - BC^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2} = 2a$

Ta có: $BH = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{OB^2}}}$

Vậy $d(B,(SAC))=\frac{2}{3}a$.

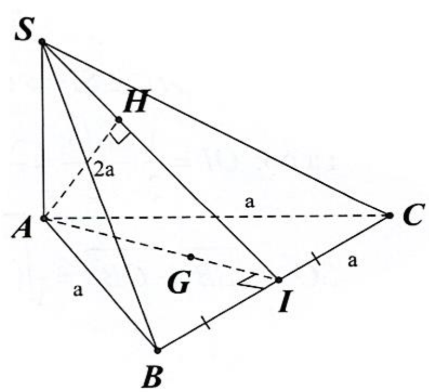
Ta có: $DB$ cắt $(SAC)$ tại $O$

$$\Rightarrow \frac{d(D,(SAC))}{d(B,(SAC))}=\frac{DO}{BO}=1\Rightarrow d(D,(SAC))=d(B,(SAC))=\frac{2}{3}a.$$

**Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA\perp(ABC)$ và $SB=2a$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Tính khoảng cách từ $G$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Trả lời:** $\frac{\sqrt{15}}{15}a$

**Lời giải**




Kẻ $AI\perp BC$, kẻ $AH\perp SI$ tại $H$

Ta có: $\begin{cases} BC\perp SA \\ BC\perp AI \end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAI)\Rightarrow BC\perp AH$

Ta lại có: $AH\perp SI\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow d(A,(SBC))=AH$

Ta có: $SA=\sqrt{SB^2-BA^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$

Ta có: $AH=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SA^2}+\frac{1}{AI^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{3}a)^2}+\frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}}=\frac{\sqrt{15}}{5}a$

Vậy $d(A,(SBC))=\frac{\sqrt{15}}{5}a$.

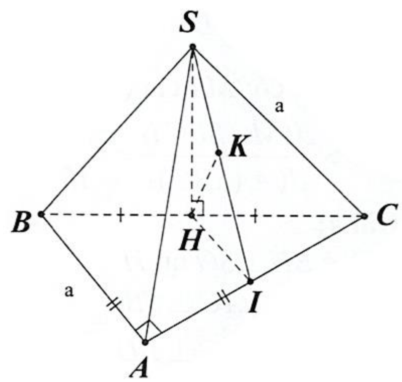
Ta có: $GA$ cắt $(SBC)$ tại $I$

$$\Rightarrow \frac{d(G,(SBC))}{d(A,(SBC))} = \frac{GI}{AI} = \frac{1}{3} \Rightarrow d(G,(SBC)) = \frac{1}{3} d(A,(SBC)) = \frac{\sqrt{15}}{15} a.$$

**Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, SH \perp (ABC)$ với $H$ là trung điểm $BC$. Biết $AB = SC = a$. Tính khoảng cách từ $B$ đến mặt phẳng $(SAC)$.

**Trả lời:** $\frac{\sqrt{6}}{3} a$

**Lời giải**




Kẻ $HI \perp AC$, kẻ $HK \perp SI$ tại $K$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp SH \\ AC \perp HI \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHI) \Rightarrow AC \perp HK$

Ta lại có: $HK \perp SI \Rightarrow HK \perp (SAC) \Rightarrow d(H,(SAC)) = HK$

Ta có: $HI = \frac{1}{2} a$;

$$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a$$

Ta có: $HK = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{(1)^2}}} = \frac{\sqrt{6}}{6} a$

Vậy $d(H,(SAC)) = \frac{\sqrt{6}}{6} a$.

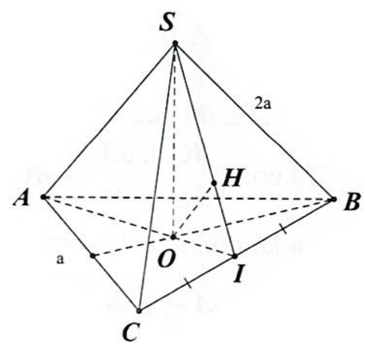
Ta có: $BH$ cắt $(SAC)$ tại $C$

$$\Rightarrow \frac{d(B,(SAC))}{d(H,(SAC))} = \frac{BC}{HC} = 2 \Rightarrow d(B,(SAC)) = 2d(H,(SAC)) = \frac{\sqrt{6}}{3} a.$$

**Câu 12.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh $a$ và cạnh bên $2a$. Tính khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Trả lời:** $\frac{\sqrt{165}}{45}a$

**Lời giải**




Kẻ $OH \perp SI$ tại $H$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI) \Rightarrow BC \perp OH$

Ta lại có: $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$

Ta có: $OI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$;

$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$$

Ta có: $OH = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{SO^2} + \dfrac{1}{OI^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{33}}{3}a\right)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}}} = \dfrac{\sqrt{165}}{45}a$

Vậy $d(O,(SBC)) = \frac{\sqrt{165}}{45}a$

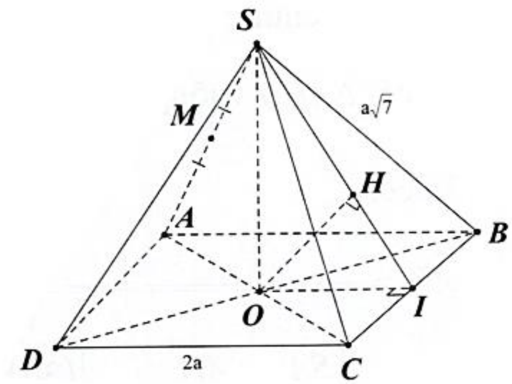
Ta có: $AO$ cắt $(SBC)$ tại $I$

$$\Rightarrow \frac{d(A,(SBC))}{d(O,(SBC))} = \frac{AI}{OI} = 3 \Rightarrow d(A,(SBC)) = 3d(O,(SBC)) = \frac{\sqrt{165}}{45}a$$

**Câu 13.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy cạnh $2a$ và cạnh bên $a\sqrt{7}$, gọi $M$ là trung điểm $SA$. Tính khoảng cách từ $M$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Trả lời:** $\frac{\sqrt{30}}{6}a$

**Lời giải**




Dựng và chứng minh được $d(O,(SBC))=OH$

Ta có: $OI=\frac{1}{2}.2a=a$

$$SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{7}\right)^2-\left(\frac{2a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{5}a$$

Ta có: $OH=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{SO^2}+\frac{1}{OI^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\left(\sqrt{5}a\right)^2}+\frac{1}{a^2}}}=\frac{\sqrt{30}}{6}a$

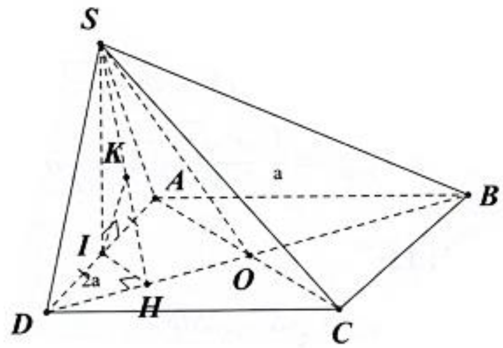
Vậy $d(O,(SBC))=\frac{\sqrt{30}}{6}a.$

Ta lại có: $MO//(SBC)\Rightarrow d(M,(SBC))=d(O,(SBC))=\frac{\sqrt{30}}{6}a$

**Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB=a, AD=2a$. Tam giác $SAD$ đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBD)$.

**Trả lời:** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

**Lời giải**




Gọi $I$ là trung điểm của $AD$

Vì $\Delta SAD$ đều nên $SI \perp AD$

Ta có $\begin{cases}(SAD)\cap(ABCD)=AD\\(SAD)\perp(ABCD)\\\text{Trong}\,(SAD), SI\perp AD\end{cases} \Rightarrow SI\perp(ABCD)$

Dựng và chứng minh được $d(I,(SBD))=IK$

Ta có: $\Delta HDI \sim \Delta ADB$

$$\Rightarrow \frac{IH}{AB}=\frac{ID}{BD}\Rightarrow IH=\frac{AB.ID}{BD}=\frac{a.a}{\sqrt{a^2+(2a)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}a$$

Ta có: $IK=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{SI^2}+\dfrac{1}{HI^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{5}a\right)^2}}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$

Vậy $d(I,(SBD))=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$.

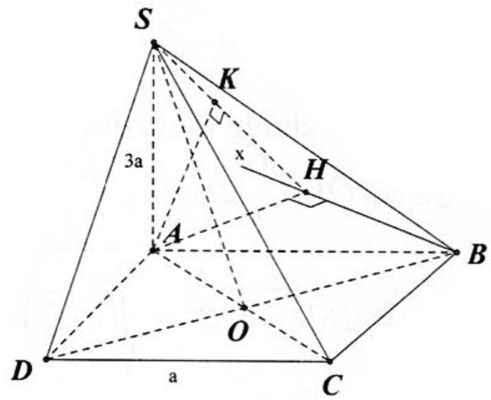
Ta có: $AI$ cắt $(SBD)$ tại $D$

$$\Rightarrow \frac{d(A,(SBD))}{d(I,(SBD))}=\frac{AD}{ID}=2\Rightarrow d(A,(SBD))=2d(I,(SBD))=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

**Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD), SA=3a, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AC$ và $SB$.

**Trả lời:** $d(AC,SB)=\dfrac{3\sqrt{19}}{19}a$

**Lời giải**




Dựng $Bx//AC \Rightarrow AC//(SBx)$

Suy ra $d(AC,SB)=d(AC,(SBx))=d(A,(SBx))$

Dựng và chứng minh được $d(A,(SBx))=AK$

Ta có: $\Delta AHB$ vuông cân tại $H$ nên $AH=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

Ta có:

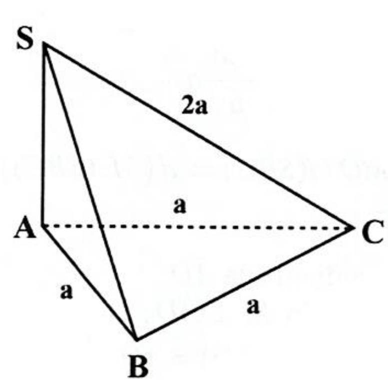
$$AK=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AH^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{(3a)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}}}=\frac{3\sqrt{19}}{19}a$$

Vậy $d(AC,SB)=\dfrac{3\sqrt{19}}{19}a$.

**Câu 16.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA\perp(ABC)$ và $SC=2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Trả lời:** $\dfrac{1}{4}a^3$

**Lời giải**



$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABC}\cdot SA$

$S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

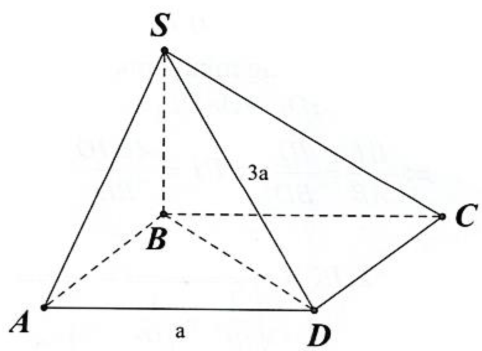
$SA=\sqrt{SC^2-AC^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}a$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{3}a=\frac{1}{4}a^3$

**Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SB\perp(ABCD)$ và $SD=3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**Trả lời:** $\frac{\sqrt{7}}{3}a^3$

**Lời giải**




$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{ABCD}\cdot SB$

$S_{ABCD}=a^2$

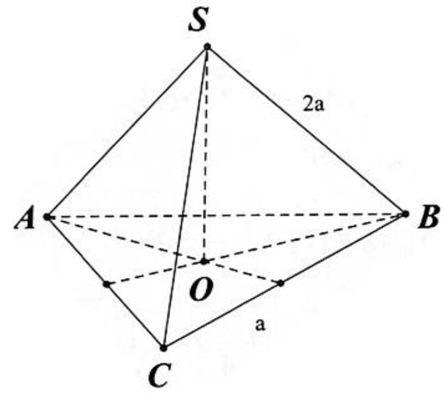
$SB=\sqrt{SD^2-BD^2}=\sqrt{(3a)^2-(a\sqrt{2})^2}=\sqrt{7}a$

$\Rightarrow V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\sqrt{7}a=\frac{\sqrt{7}}{3}a^3$

**Câu 18.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh $a$ và cạnh bên $2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Trả lời:** $\frac{\sqrt{11}}{12}a^3$

**Lời giải**




$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} SO$

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

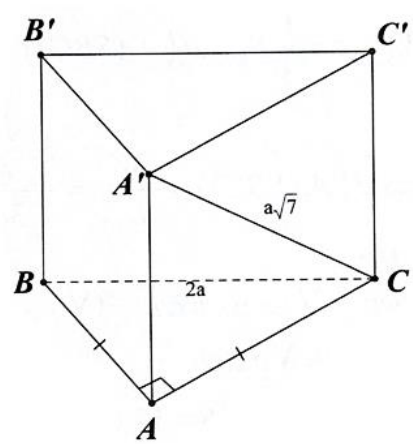
$SO = \sqrt{SB^2 - BO^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{33}}{3}a = \frac{\sqrt{11}}{12}a^3$

**Câu 19.** Cho khối lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, BC = 2a$ và $A'C = a\sqrt{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

**Trả lời:** $\sqrt{5}a^3$

**Lời giải**




$V = S_{ABC} \cdot A'A$

$AB = AC = \frac{2a}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a$

$$S_{ABC}=\frac{(\sqrt{2}a)^2}{2}=a^2$$

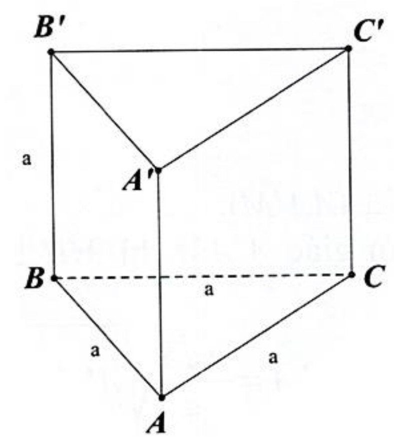
$$A'A=\sqrt{A'C^2-AC^2}=\sqrt{(a\sqrt{7})^2-(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{5}a$$

$$\Rightarrow V_{S.ABC}=a^2\cdot\sqrt{5}a=\sqrt{5}a^3$$

**Câu 20.** Cho khối lăng trụ đều $ABC\cdot A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng $a$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

**Trả lời:** $\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$

**Lời giải**



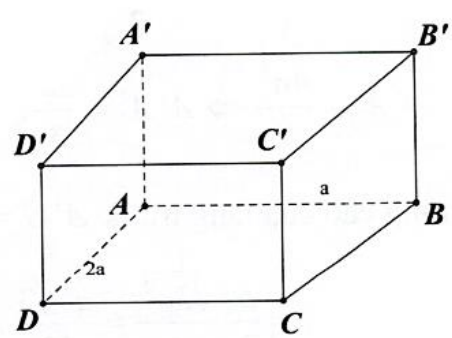

$$V=S_{ABC}\cdot A'A$$

$$=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot a=\frac{\sqrt{3}}{2}a^3$$

**Câu 21.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có $AB=a, AD=2a$. Biết thể tích khối hộp chữ nhật là $14a^3$. Tính chiều cao $A'C$.

**Trả lời:** $3\sqrt{6}a$

**Lời giải**



$V = AB \cdot AD \cdot AA'$

$\Rightarrow AA' = \dfrac{V}{AB \cdot AD} = \dfrac{14a^3}{a \cdot 2a} = 7a$

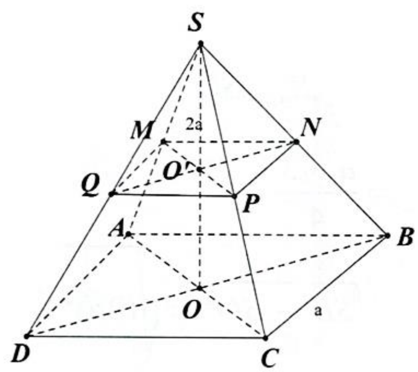
$A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{AA'^2 + AB^2 + AD^2}$

$= \sqrt{(7a)^2 + (2a)^2 + a^2} = 3\sqrt{6}a$

**Câu 22.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy cạnh a và chiều cao $SO = 2a$. Gọi $M, N, P$, $Q$ lần lượt là trung điểm của $SA, SB, SC, SD$. Tính thể tích khối chóp cụt đều $ABCD.MNPQ$.

**Trả lời:** $\dfrac{7}{12}a^3$

**Lời giải**




$V = \dfrac{1}{3}\left(S_{ABCD} + S_{MNPQ} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{MNPQ}}\right) \cdot OO'$

$S_{ABCD} = a^2$

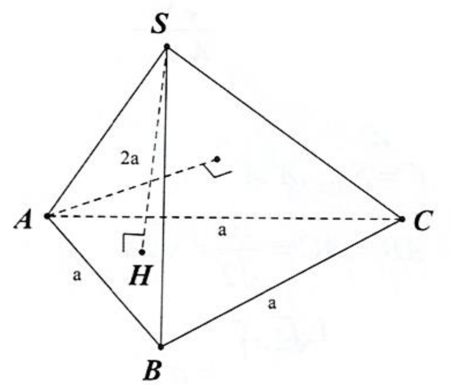
$S_{MNPQ} = \left(\dfrac{1}{2}a\right)^2 = \dfrac{1}{4}a^2$

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\left(a^2 + \dfrac{1}{4}a^2 + \sqrt{a^2 \cdot \dfrac{1}{4}a^2}\right) \cdot a = \dfrac{7}{12}a^3$

**Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$, chiều cao của hình chóp kẻ từ $S$ là $2a$. Biết diện tích tam giác $SBC$ là $3a^2$. Tính khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Trả lời:** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$

**Lời giải**




$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$$

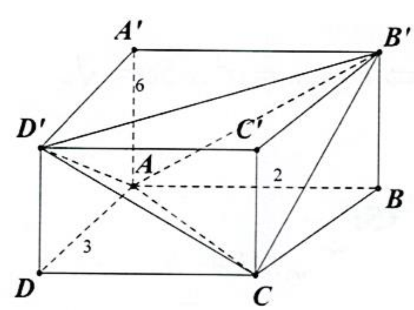
$$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{SBC} \cdot d(A,(SBC))$$

$$\Rightarrow d(A,(SBC)) = \frac{3V}{S_{SBC}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}a^3}{3a^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$$

**Câu 24.** Một hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có ba kích thước là $2cm, 3cm$ và $6cm$. Tính thể tích của khối tứ diện $ACB'D'$.

**Trả lời:** $12\left(cm^3\right)$

**Lời giải**




$$V_{A \cdot CB'D'} = V_{ABCD \cdot A'B'C'D'} - \left(V_{D' \cdot ACD} + V_{B' \cdot ABC} + V_{A \cdot A'B'D'} + V_{C \cdot B'C'D'}\right)$$

$$= 2.3.6 - 4 \cdot V_{D' \cdot ACD}$$

$$= 36 - 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 = 12\left(cm^3\right)$$

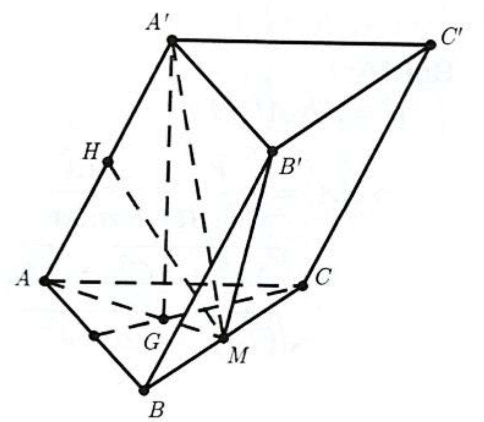
**Câu 25.** Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$. Hình chiếu vuông góc của $A'$ lên mặt phẳng $(ABC)$ trùng với trọng tâm tam giác $ABC$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $AA'$ và $BC$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích $V$ của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

**Trả lời:** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$

**Lời giải**

$M$ là trung điểm của $BC$ thì $BC \perp \left(AA'M\right)$.

Gọi $MH$ là đường cao của tam giác $A'AM$ thì $MH \perp A'A$ và $HM \perp BC$ nên $HM$ là khoảng cách $AA'$ và $BC$.




Ta có $A'A.HM = A'G.AM \Leftrightarrow \dfrac{a\sqrt{3}}{4}.A'A = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\sqrt{A'A^2 - \dfrac{a^2}{3}}$

$\Leftrightarrow A'A^2 = 4\left(A'A^2 - \dfrac{a^2}{3}\right) \Leftrightarrow 3A'A^2 = \dfrac{4a^2}{3}$

$\Leftrightarrow A'A^2 = \dfrac{4a^2}{9} \Leftrightarrow A'A^2 = \dfrac{2a}{3}$.

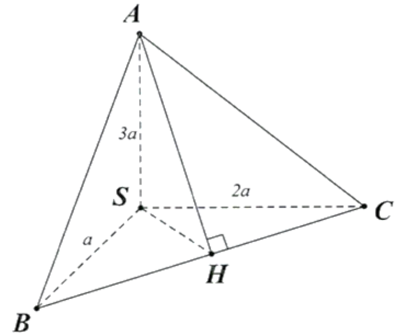
Đường cao của lăng trụ là $A'G = \sqrt{\dfrac{4a^2}{9} - \dfrac{3a^2}{9}} = \dfrac{a}{3}$.

Thể tích $V_{LT} = \dfrac{a}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3a^2}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

**Câu 26.** Cho tứ diện $S \cdot ABC$ trong đó $SA, SB, SC$ vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a, SB = a, SC = 2a$. Tính khoảng cách từ $A$ đến đường thẳng $BC$.

**Trả lời:** $d(A, BC) = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}a$

**Lời giải**




Kẻ $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow d(A, BC) = AH$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$

Ta có: $SH = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{SC^2} + \dfrac{1}{SB^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{a^2}}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}a$

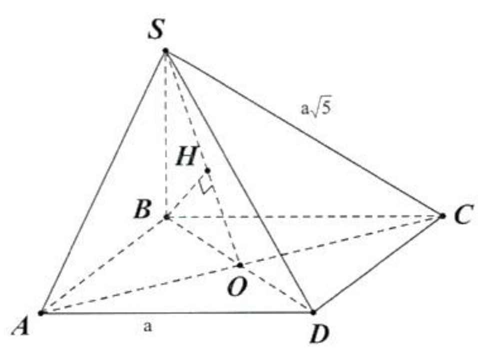
Ta có: $AH = \sqrt{SA^2 + SH^2} = \sqrt{(3a)^2 + \left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}a\right)^2} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}a$

Vậy $d(A, BC) = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}a$.

**Câu 27.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, hai mặt phẳng $(SAB)$ và $(SBC)$ cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = a\sqrt{5}$. Tính khoảng cách từ $D$ đến mặt phẳng $(SAC)$.

**Trả lời:** $\dfrac{2}{3}a$

**Lời giải**




Kẻ $BH \perp SO$ tại $H$

Ta có: $\begin{cases} AC \perp SB \\ AC \perp BD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp BH$

Ta lại có: $BH \perp SO \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow d(B,(SAC)) = BH$.

Ta có: $SB = \sqrt{SC^2 - BC^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2} = 2a$

Ta có: $BH = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{OB^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}}} = \dfrac{2}{3}a$

Vậy $d(B,(SAC)) = \dfrac{2}{3}a$.

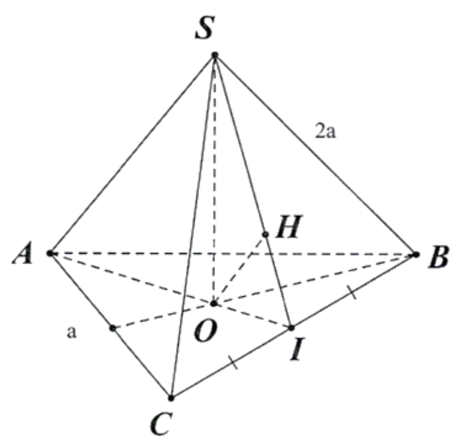
Ta có: $DB$ cắt $(SAC)$ tại $O$

$\Rightarrow \dfrac{d(D,(SAC))}{d(B,(SAC))} = \dfrac{DO}{BO} = 1 \Rightarrow d(D,(SAC)) = d(B,(SAC)) = \dfrac{2}{3}a.$

**Câu 28.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có đáy cạnh $a$ và cạnh bên $2a$. Tính khoảng cách từ $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Trả lời:** $\dfrac{\sqrt{165}}{15}a$

**Lời giải**




Kẻ $OH \perp SI$ tại $H$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOI) \Rightarrow BC \perp OH$

Ta lại có: $OH \perp SI \Rightarrow OH \perp (SBC) \Rightarrow d(O,(SBC)) = OH$

Ta có: $OI = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}a$ ; $SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{33}}{3}a$

Ta có: $OH=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{SO^2}+\dfrac{1}{OI^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{33}}{3}a\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}}}=\dfrac{\sqrt{165}}{45}a$

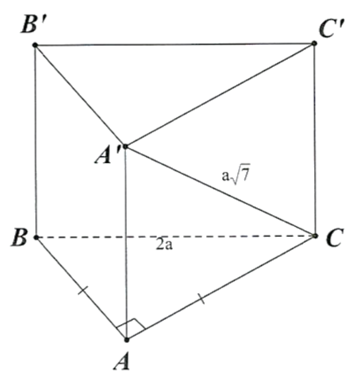
Vậy $d(O,(SBC))=\dfrac{\sqrt{165}}{45}a$.

Ta có: $AO$ cắt ( $SBC$) tại $I\Rightarrow\dfrac{d(A,(SBC))}{d(O,(SBC))}=\dfrac{AI}{OI}=3\Rightarrow d(A,(SBC))=3d(O,(SBC))=\dfrac{\sqrt{165}}{15}a.$

**Câu 29.** Cho khối lăng trụ đứng $ABC\cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại $A, BC=2a$ và $A'C=a\sqrt{7}$. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

**Trả lời:** $\sqrt{5}a^3$.

**Lời giải**




$V=S_{ABC}\cdot A'A$

$AB=AC=\dfrac{2a}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}a$

$S_{ABC}=\dfrac{(\sqrt{2}a)^2}{2}=a^2$

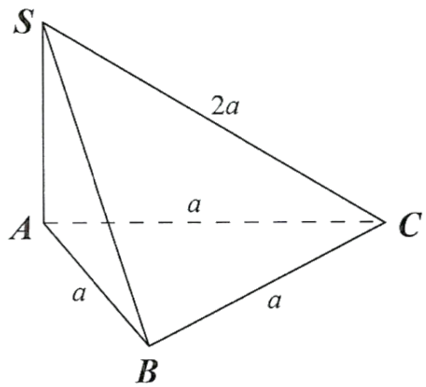
$A'A=\sqrt{A'C^2-AC^2}=\sqrt{(a\sqrt{7})^2-(\sqrt{2}a)^2}=\sqrt{5}a$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=a^2\cdot\sqrt{5}a=\sqrt{5}a^3.$

**Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA\perp(ABC)$ và $SC=2a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**Trả lời:** $\dfrac{1}{4}a^3$

**Lời giải**




$V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SA$

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

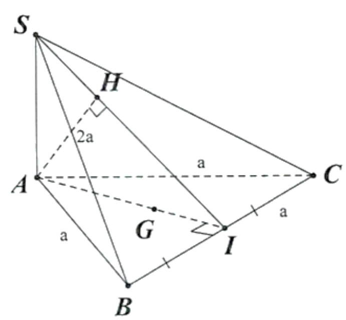
$SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

$\Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{3}a = \frac{1}{4}a^3$

**Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SB = 2a$. Gọi $G$ là trọng tâm tam giác $ABC$. Tính khoảng cách từ $G$ đến mặt phẳng $(SBC)$.

**Trả lời:** $\frac{\sqrt{15}}{15}a$

**Lời giải**




Kẻ $AI \perp BC$, kẻ $AH \perp SI$ tại $H$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$.

Ta lại có: $AH \perp SI \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH$

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - BA^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

Ta có: $AH=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AI^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\left(\sqrt{3}a\right)^2}+\dfrac{1}{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}a$

Vậy $d(A,(SBC))=\dfrac{\sqrt{15}}{5}a$.

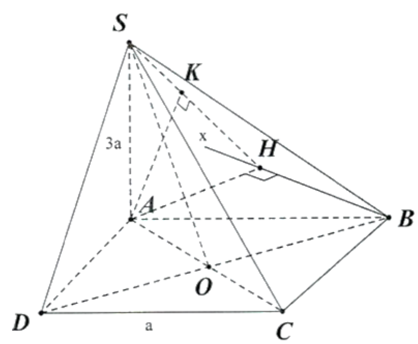
Ta có: $GA$ cắt $\left(SBC\right)$ tại $I$

$\Rightarrow \dfrac{d(G,(SBC))}{d(A,(SBC))}=\dfrac{GI}{AI}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow d(G,(SBC))=\dfrac{1}{3}d(A,(SBC))=\dfrac{\sqrt{15}}{15}a.$

**Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA\perp(ABCD), SA=3a, ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $AC$ và $SB$.

**Trả lời:** $d(AC,SB)=\dfrac{3\sqrt{19}}{19}a$

**Lời giải**




Dựng $Bx//AC\Rightarrow AC//(SBx)$

Suy ra $d(AC,SB)=d(AC,(SBx))=d(A,(SBx))$

Dựng và chứng minh được $d(A,(SBx))=AK$

Ta có: $\Delta AHB$ vuông cân tại $H$ nên $AH=\dfrac{AB}{\sqrt{2}}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$

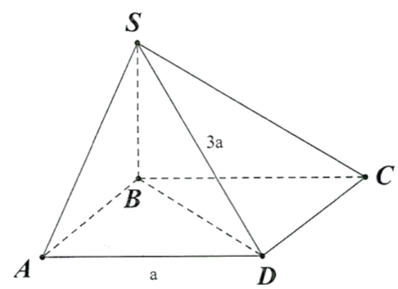
Ta có: $AK=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{SA^2}+\dfrac{1}{AH^2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{(3a)^2}}}=\dfrac{3\sqrt{19}}{19}a$

Vậy $d(AC,SB)=\dfrac{3\sqrt{19}}{19}a$.

**Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SB \perp (ABCD)$ và $SD = 3a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

**Trả lời:** $\frac{\sqrt{7}}{3}a^3$

**Lời giải**




$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SB$

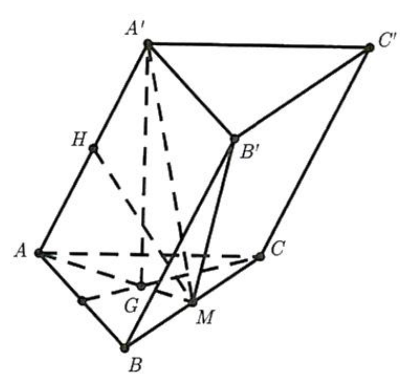
$S_{ABCD} = a^2$

$SB = \sqrt{SD^2 - BD^2} = \sqrt{(3a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}a \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \sqrt{7}a = \frac{\sqrt{7}}{3}a^3.$

**Câu 34.** Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$. Hình chiếu vuông góc của $A'$ lên mặt phẳng $(ABC)$ trùng với trọng tâm tam giác $ABC$. Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng $AA'$ và $BC$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích $V$ của khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$.

**Trả lời:** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

**Lời giải**




$M$ là trung điểm của $BC$ thì $BC \perp \left(AA'M\right)$.

Gọi $MH$ là đường cao của tam giác $A'AM$ thì $MH \perp A'A$ và $HM \perp BC$ nên $HM$ là khoảng cách $AA'$ và $BC$.

Ta có $A'A\cdot HM = A'G\cdot AM \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot A'A = \frac{a\sqrt{3}}{2}\sqrt{A'A^2 - \frac{a^2}{3}}$

$\Leftrightarrow A'A^2 = 4\left(A'A^2 - \frac{a^2}{3}\right) \Leftrightarrow 3A'A^2 = \frac{4a^2}{3}$

$\Leftrightarrow A'A^2 = \frac{4a^2}{9} \Leftrightarrow A'A = \frac{2a}{3}$.

Đường cao của lăng trụ là $A'G = \sqrt{\frac{4a^2}{9} - \frac{3a^2}{9}} = \frac{a}{3}$.

Thể tích $V_{LT} = \frac{a}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

## D. Câu hỏi trắc nghiệm

**Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $O$, $SA \perp (ABCD)$. Gọi $I$ là trung điểm của $SC$. Khoảng cách từ $I$ đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng độ dài đoạn thẳng nào?

**A.** $IB$. **B.** $IA$. **C.** $IC$. **D.** $IO$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 2:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác cân tại $B$, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy, $M$ là trung điểm $BC$ $J$ là hình chiếu của $A$ lên $BC$. Kí hiệu $d(A,(SBC))$ là khoảng cách giữa điểm $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $d(A,(SBC)) = AK$ với $K$ là hình chiếu của $A$ lên $SB$.

**B.** $d(A,(SBC)) = AK$ với $K$ là hình chiếu của $A$ lên $SJ$.

**C.** $d(A,(SBC)) = AK$ với $K$ là hình chiếu của $A$ lên $SC$.

**D.** $d(A,(SBC)) = AK$ với $K$ là hình chiếu của $A$ lên $SM$.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Câu 3:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng

**A.** $AC'$. **B.** $AB'$.

**C.** $AD'$. **D.** $AA'$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 4:** Cho khối hộp chữ nhật có 3 kích thước $3;4;5$. Thể tích của khối hộp đã cho bằng?

**A.** $10$. **B.** $20$. **C.** $12$. **D.** $60$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 5:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABC$ là tam giác đều cạnh $a$. Biết $SA\perp(ABC)$ và $SA=a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

**A.** $\frac{a}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$.

**C.** $\frac{a^3}{4}$. **D.** $\frac{3a^3}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 6:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a$, tam giác $SAB$ cân tại $S$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SA=2a$. Tính theo $a$ thể tích khối chóp $S.ABCD$

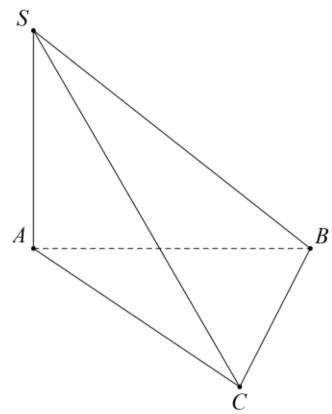
**A.** $V=2a^3$. **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{12}$.

**C.** $V=\frac{a^3\sqrt{15}}{6}$. **D.** $V=\frac{2a^3}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 7:** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$, $AB=6$, $BC=8$, $AC=10$. Tính khoảng cách $d$ giữa hai đường thẳng $SA$ và $BC$.




**A.** Không tính được $d$.
**B.** $d = 8$.
**C.** $d = 6$.
**D.** $d = 10$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$, $SA$ vuông góc với đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $SB$ và $CD$ là

**A.** $a$.
**B.** $2a$.
**C.** $a\sqrt{2}$.
**D.** $a\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 9:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, cạnh bên $SA$ vuông góc với đáy. Biết khoảng cách từ $A$ đến $(SBD)$ bằng $\frac{6a}{7}$. Tính khoảng cách từ $C$ đến mặt phẳng $(SBD)$?

**A.** $\frac{12a}{7}$.
**B.** $\frac{3a}{7}$.
**C.** $\frac{4a}{7}$.
**D.** $\frac{6a}{7}$

**Lời giải**

**Chọn D**

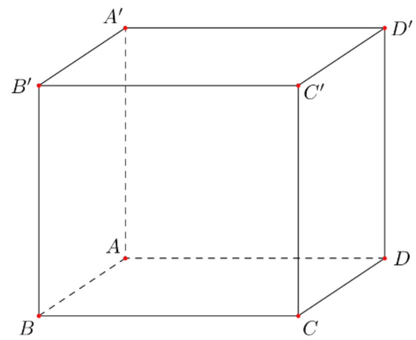
**Câu 10:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $ABC$ tam giác đều cạnh $2a$, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Gọi $M$ là trung điểm của $BC$, khi đó khoảng cách từ $A$ đến đường thẳng $SM$ bằng:

**A.** $a\sqrt{2}$.
**B.** $a\sqrt{3}$.
**C.** $a\sqrt{6}$.
**D.** $a\sqrt{11}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 11:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a$ (tham khảo hình vẽ).




Khoảng cách giữa đường thẳng $BD$ và mặt phẳng $\left(A'B'C'D'\right)$ bằng

**A.** $a$ . **B.** $a\sqrt{3}$ .

**C.** $3a$ . **D.** $a\sqrt{2}$ .

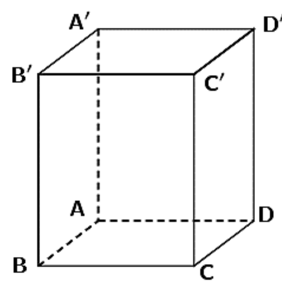
**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $BD//B'D'$ nên $BD//(A'B'C'D')$ .

Do đó $d(BD,(A'B'C'D'))=d(B,(A'B'C'D'))=BB'=a$ .

**Câu 12:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=a,\ AD=\sqrt{3}a,\ AA'=2\sqrt{3}a$ (tham khảo hình vẽ).




Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng

**A.** $a$ . **B.** $2a\sqrt{3}$ .

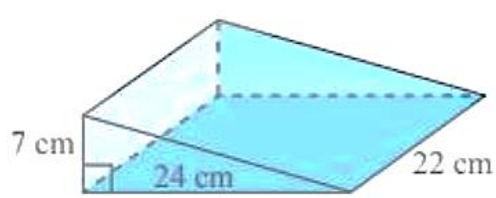
**C.** $3a$ . **D.** $a\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì $(ABCD)//(A'B'C'D')$ nên $d((ABCD),(A'B'C'D'))=d(A,(A'B'C'D'))=AA'=2a\sqrt{3}$ .

**Câu 13:** Cho cái nêm hình lăng trụ đứng như hình vẽ.




Thể tích của cái nêm bằng

**A.** $3696\,cm^3$ . **B.** $1848\,cm^3$ .

**C.** $3669\,cm^3$.

**D.** $1884\,cm^3$.

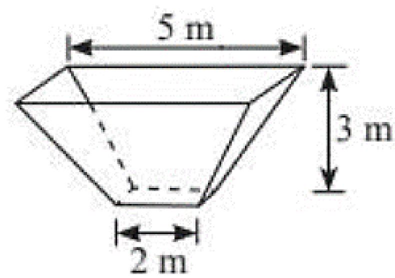
**Lời giải**

**Chọn B**

Diện tích đáy lăng trụ là $S=\dfrac{1}{2}.7.24=84\,cm^2$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V=S.h=84.22=1848\,cm^3$.

**Câu 14:** Tính thể tích của bồn chứa có dạng khối chóp cụt đều (tham khảo hình vẽ)?




**A.** $39\,m^3$.

**B.** $37\,m^3$.

**C.** $38\,m^3$.

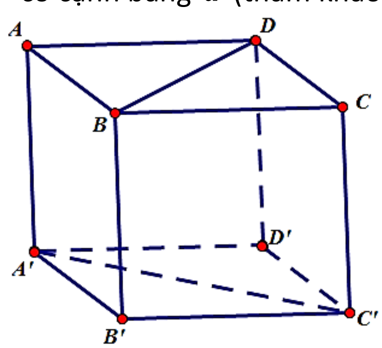
**D.** $40\,m^3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Thể tích của bồn chứa là $V=\dfrac{1}{3}h\left(S+\sqrt{S.S'}+S'\right)=\dfrac{1}{3}.3\left(5^2+\sqrt{5^2.2^2}+2^2\right)=39\,m^3$.

**Câu 15:** Cho lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a$ (tham khảo hình bên).




Khoảng cách giữa hai đường thẳng $BD$ và $A'C'$ bằng

**A.** $a$.

**B.** $a\sqrt{3}$.

**C.** $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

**D.** $a\sqrt{2}$.

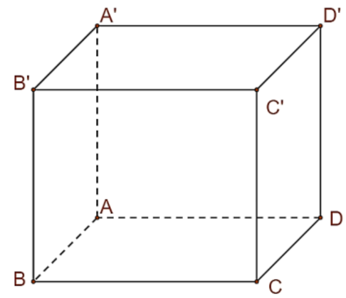
**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $BD//B'D'$ nên $BD//(A'B'C'D')$.

Do đó $d(BD,A'C')=d(BD,(A'B'C'D'))=d(B,(A'B'C'D'))=BB'=a$.

**Câu 16:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1, BC=2; AA'=3$ (tham khảo hình vẽ).




Khoảng cách giữa hai đường $AB'$ và $CC'$ bằng?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $\sqrt{2}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì $\begin{cases} AB' \subset (ABB'A') \\ CC' \subset (CDD'C') \\ (ABB'A') // (CDD'C') \end{cases}$

nên $d(AB', CC') = d((ABB'A'), (CDD'C')) = d(A, (CDD'C')) = AD = 2$.

**Câu 17:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a$. Biết $SA = 2a$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách từ điểm $S$ đến mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

**A.** $a$. **B.** $2a$.

**C.** $3a$. **D.** $a\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $d(S, (ABCD)) = SA = 2a$.

**Câu 18:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 3a$. Biết $SA = 2a$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách từ điểm $C$ đến đường thẳng $AD$ bằng

**A.** $a$. **B.** $2a$.

**C.** $3a$. **D.** $a\sqrt{10}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $CD \perp AD$ nên $d(C, AD) = CD = a$.

**Câu 19:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$. Biết $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

**A.** $a^3$. **B.** $a^3\sqrt{3}$.

**C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

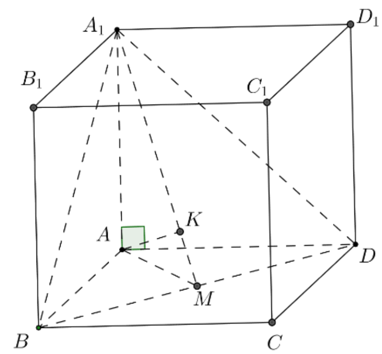
Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.2a=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

**Câu 20:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có ba kích thước $AB=a, AD=2a, AA_1=3a$. Khoảnh cách từ $A$ đến mặt phẳng $(A_1BD)$ bằng bao nhiêu?

**A.** $a$. **B.** $\frac{7}{6}a$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{6}{7}a$

**Lời giải**

**Chọn D**




Trong tam giác $ABD$ kẻ $AM\perp BD$ suy ra $\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}$.

.Trong tam giác $A_1AM$ kẻ $AK\perp A_1M \Rightarrow \frac{1}{AK^2}=\frac{1}{AA_1^2}+\frac{1}{AM^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{9a^2}\Rightarrow AK=\frac{6}{7}a$.

Khi đó $AK\perp(A_1BD)$ hay $d\left(A;(A_1BD)\right)=AK=\frac{6}{7}a$.

Cách 2 : Vì $A.BDA_1$ là tam diện vuông đỉnh $A$ nên đặt $h=d\left(A,(BDA_1)\right)$

thì $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AA_1^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}+\frac{1}{9a^2}=\frac{49}{36a^2}\Rightarrow h=\frac{6a}{7}$.

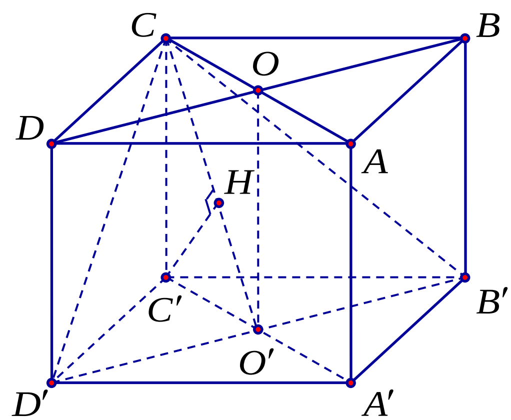
**Câu 21:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA'=2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng $BD$ và $CD'$.

**A.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

**C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $O,\ O'$ lần lượt là tâm của hai mặt đáy.Khi đó tứ giác $COO'C'$ là hình bình hành và

$C'O' = \dfrac{AC}{2} = a$

Do $BD \,//\, B'D' \Rightarrow BD \,//\, (CB'D')$ nên $d(BD;CD') = d(O;(CB'D')) = d(C';(CB'D'))$.

Ta có : $\begin{cases} B'D' \perp A'C' \\ B'D' \perp CC' \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (COO'C') \Rightarrow (CB'D') \perp (COO'C')$

Lại có $(CB'D') \cap (COO'C') = CO'$.

Trong $\Delta CC'O'$ hạ $C'H \perp CO' \Rightarrow C'H \perp (CB'D') \Rightarrow d(BD;CD') = C'H$

Khi đó : $\dfrac{1}{C'H^2} = \dfrac{1}{CC'^2} + \dfrac{1}{C'O'^2} = \dfrac{1}{(2a)^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow C'H = \dfrac{2\sqrt{5}a}{5}$.

Cách 2: Vì $CD'//AB'$ nên $CD'//(BDA')$.

Do đó $d(BD,CD') = d(CD',(BDA')) = d(C,(BDA')) = d(A,(BDA'))$.

Vì $A.BDA'$ là tam diện vuông tại $A$ nên đặt $h = d(A,(BDA'))$

thì $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AD^2} + \dfrac{1}{AA'^2} = \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{2a^2} + \dfrac{1}{4a^2} = \dfrac{5}{4a^2} \Rightarrow h = \dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

**Câu 22:** Cho khối lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $a$. Khoảng cách từ điểm $A'$ đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho là

**A.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

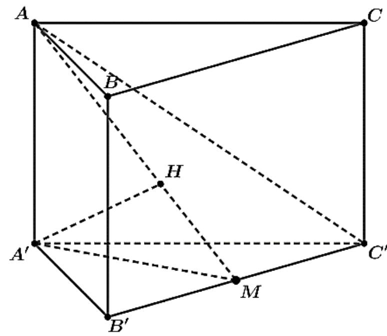
**B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

**C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

**D.** $\dfrac{3a^3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $M$ là trung điểm của $B'C'$.

Ta có $\begin{cases} AA' \perp B'C' \\ A'M \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (AA'M) \Rightarrow (AB'C') \perp (AA'M)$ theo giao tuyến $AM$.

Kẻ $A'H \perp AM$ trong mặt phẳng $(AA'M)$, suy ra $\Rightarrow A'H \perp (AB'C')$.

Vậy khoảng cách từ $A'$ đến mặt phẳng $(AB'C')$ là $A'H = \dfrac{2a\sqrt{3}}{\sqrt{19}}$.

Ta có $\dfrac{1}{A'H^2} = \dfrac{1}{A'A^2} + \dfrac{1}{A'M^2} \Rightarrow \dfrac{1}{A'A^2} = \dfrac{1}{A'H^2} - \dfrac{1}{A'M^2} = \dfrac{1}{4a^2} \Rightarrow A'A = 2a$.

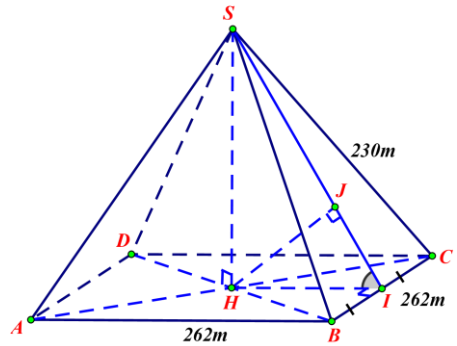
Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AA'.S_{A'B'C'} = 2a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3.\sqrt{3}}{2}$.

**Câu 23:** Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài 262 mét, cạnh bên dài 230 mét. Khi xây dựng kim tự tháp người Ai Cập cổ đại đã tính toán xây dựng một đường hầm lấy sáng tự nhiên từ một mặt bên đến tâm hình vuông ở mặt đáy. Khoảng cách xây đường hầm đó gấn với giá trị nào nhất?

**A.** $89m$. **B.** $95m$.
**C.** $94m$. **D.** $93m$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Ta giả sử các cạnh và đỉnh của kim tự tháp như hình vẽ. Vì $S.ABCD$ hình chóp tứ giác đều nên $SH$ vuông góc với mặt phẳng $S.ABCD$ ($H = AC \cap BD$).

Xét $ABC$ vuông tại $A$, ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{262^2 + 262^2} = 262\sqrt{2}$ (m)

$\Rightarrow HC = \dfrac{AC}{2} = 131\sqrt{2}$ (m)

Xét $SHC$ vuông tại $H$, ta có: $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{230^2 - (131\sqrt{2})^2} = \sqrt{18578} \approx 136$ (m). Vậy chiều cao của kim tự tháp là khoảng 136 mét.

Kẻ $HJ$ vuông góc với $SI$, suy ra $HI$ là đoạn đường ngắn nhất.

Trong tam giác $SHI$ vuông tại *H*, ta có: $\dfrac{1}{HJ^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{SI^2} = \dfrac{1}{18578} + \dfrac{1}{17161} = \dfrac{35739}{18578.17161}$

$\Rightarrow HJ^2 = \dfrac{18578.17161}{35739} \Rightarrow HJ \approx 94$ (m)

**Câu 24:** Cho tứ diện $ABCD$ đều có cạnh bằng $2\sqrt{2}$. Gọi $G$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và $M$ là trung điểm $AB$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $BG$ và $CM$ bằng

**A.** $\dfrac{2}{\sqrt{14}}$.

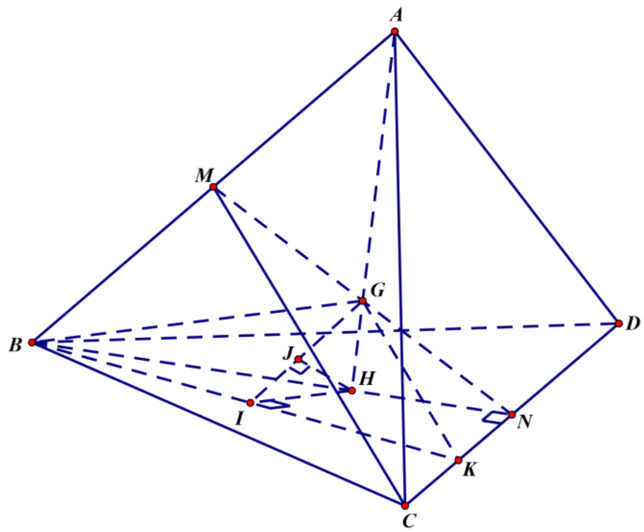
**B.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

**C.** $\dfrac{3}{2\sqrt{5}}$.

**D.** $\dfrac{2}{\sqrt{10}}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Gọi $N$ là trung điểm $CD$, khi đó $G$ là trung điểm $MN$ và $AG$ đi qua trọng tâm $H$ của tam giác $BCD$. Ta có $AH \perp (BCD)$ và $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $GH = \frac{1}{4}AH = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Gọi $K$ là trung điểm $CN$ thì $GK // CM$ nên $CM // (BGK)$. Do đó:

$d(BG;CM) = d\left(C;(BGK)\right) = d\left(N;(BGK)\right) = \frac{3}{2}d\left(H;(BGK)\right)$.

Kẻ $HI \perp BK$, $HJ \perp GI$ với $I \in BK$, $J \in GI$. Khi đó $HJ \perp (BGK)$ và $HJ = d\left(H;(BGK)\right)$.

Ta có $BK = \sqrt{BN^2 + NK^2} = \sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$.

Ta có $HI = BH.\sin KBN = BH.\frac{KN}{BK} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{26}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{13}}$.

Do đó: $HJ = \frac{HI.HG}{\sqrt{HI^2 + HG^2}} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{13}}.\frac{\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}}$.

Vậy $d(BG;CM) = \frac{3}{2}d\left(H;(BGK)\right) = \frac{3}{2}HJ = \frac{3}{2}.\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$.

**Câu 25:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a$. Biết $SA = a\sqrt{3}$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Khoảng cách từ điểm $S$ đến đường thẳng $BC$ bằng

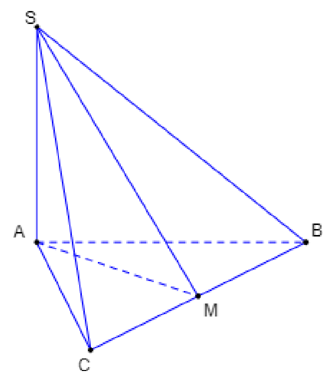
**A.** $a\sqrt{3}$. **B.** $a$.

**C.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

**D.** $\dfrac{a\sqrt{15}}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Gọi $M$ là trung điểm của $BC$.

Khi đó $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$.

Do đó $d(S,BC) = SM$.

Xét $\Delta SAM$ vuông tại $A$ có $SM = \sqrt{SA^2 + AM^2} = \sqrt{3a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Vậy $d(S,BC) = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

**Câu 26:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B$, $AB = a$. Biết $SA = 2a$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng $(ABC)$. Khoảng cách từ điểm $A$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng

**A.** $a$.

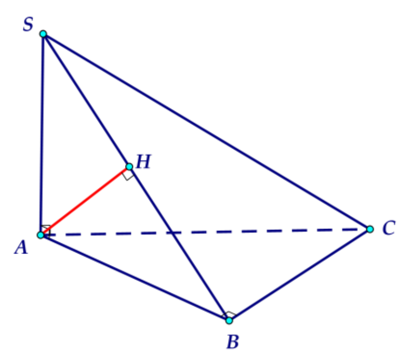
**B.** $2a$.

**C.** $\dfrac{2a\sqrt{5}}{5}$.

**D.** $\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Trong mặt phẳng $(SAB)$, kẻ $AH \perp SB$ (1).

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$ suy ra $BC \perp (SAB)$.

Mà $AH \subset (SAB)$ nên $BC \perp AH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$ hay $d(A,(SBC)) = AH$.

Xét $\Delta SAB$ vuông tại $A$ có: $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Vậy $d(A,(SBC)) = AH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

**Câu 27:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $a$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi $O$ là tâm của $ABCD$ và $G$ là trọng tâm của tam giác $ACD$. Khoảng cách từ điểm $G$ đến mặt phẳng $(SBC)$ bằng

**A.** $\frac{a\sqrt{210}}{30}$.

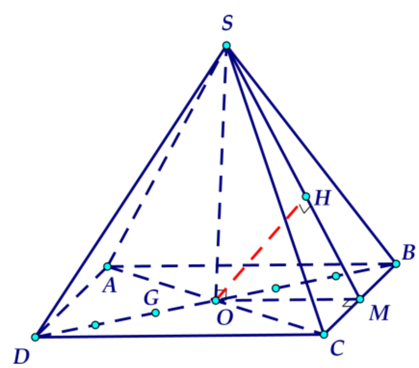
**B.** $\frac{2a\sqrt{210}}{45}$.

**C.** $\frac{a\sqrt{210}}{45}$.

**D.** $\frac{a\sqrt{210}}{15}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Vì $\frac{d(G,(SBC))}{d(O,(SBC))} = \frac{GB}{OB} = \frac{4}{3} \Rightarrow d(G,(SBC)) = \frac{4}{3} d(O,(SBC))$.

Gọi $M$ là trung điểm của $BC$.

Khi đó $\begin{cases} BC \perp OM \\ BC \perp SO \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SOM)$.

Trong mặt phẳng $(SOM)$, kẻ $OH \perp SM$.

Khi đó $OH \subset (SOM)$ nên $BC \perp OH$, suy ra $OH \perp (SBC)$ hay $d(O,(SBC)) = OH$.

Ta có $SO = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Xét $\Delta SOM$ vuông tại $O$ có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{SO^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{14}}{2}\right)^2} = \frac{30}{7a^2} \Rightarrow OH = \frac{a\sqrt{210}}{30}$.

Vậy $d(G,(SBC))=\frac{4}{3}d(O,(SBC))=\frac{2a\sqrt{210}}{45}$.

**Câu 28:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB=a, AD=2a$. Biết $SA=2a$ và $SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $BD$ và $SC$ bằng

**A.** $\frac{a\sqrt{30}}{6}$.

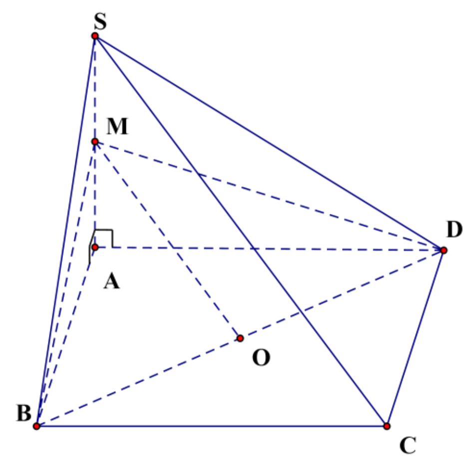
**B.** $\frac{2\sqrt{21}a}{21}$.

**C.** $\frac{4\sqrt{21}a}{21}$.

**D.** $\frac{a\sqrt{30}}{12}$.

**Lời giải**

**Chọn B**




Gọi $O$ là tâm hình chữ nhật và $M$ là trung điểm $SA$, ta có: $SC//(BMD)$.

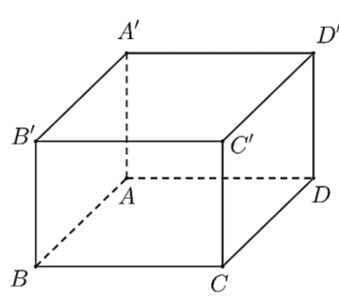
Do đó $d(SC,BD)=d(SC,(BMD))=d(S,(BMD))=d(A,(BMD))=h$

Ta có: $AM, AB, AD$ đôi một vuông góc nên

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AD^2}=\frac{4}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{4a^2}$$

Vậy $d(SC,BD)=\frac{2a\sqrt{21}}{21}$.

**Câu 29:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=1$, $BC=2$, $AA'=2$ (tham khảo hình bên).




Khoảng cách giữa hai đường thẳng $AD'$ và $DC'$ bằng

**A.** $\sqrt{2}$.

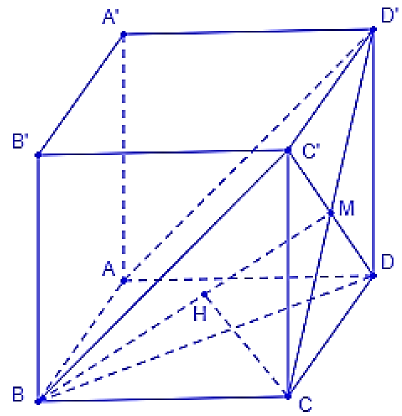
**B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

**C.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

**D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

**Lời giải**

**Chọn D**




Vì $AD'//BC'$ nên $AD'//(DBC')$.

Do đó $d(AD',DC') = d(AD',(DBC')) = d(A,(DBC')) = d(C,(DBC')) = h$.

Xét tứ diện $C.BC'D$ có các cạnh $CD,CB,CC'$ đôi một vuông góc nên ta có

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{CB^2} + \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CC'^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $d(AD',DC') = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

**Câu 30:** Bạn An muốn làm các viên đá có dạng khối chóp cụt tứ giác đều có cạnh của đáy lớn bằng $3cm$, cạnh của đáy nhỏ bằng $1,5cm$ và cao $3cm$ bằng cách dùng khay đá, mỗi khay sẽ tạo được $6$ viên đá. Hỏi bạn An cần ít nhất bao nhiêu khay để chứa đồng thời $2$ lít nước?

**A.** $21$. **B.** $22$. **C.** $23$. **D.** $24$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Thể tích nước mà một khay đá chứa được tối đa là:

$$V = 6V_1 = 6.\left[\frac{1}{3}h\left(S+\sqrt{S.S'}+S'\right)\right] = 6.\left[\frac{1}{3}.3\left(3^2+\sqrt{3^2.1,5^2}+1,5^2\right)\right] = \frac{189}{2}cm^3.$$

Ta có $2$ lít $= 2000\,cm^3$.

Ta có $2000 \div \dfrac{189}{2} \approx 21,16$

Vậy cần dùng tối thiểu $22$ cái khay để đựng đủ $2$ lít nước.