

MỤC LỤC

► BÀI ②. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ	2
Ⓐ. Tóm tắt kiến thức	2
Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản.....	3
♦ Dạng ①: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số	3
♦ Dạng ②: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên một đoạn	4
♦ Dạng ③: Ứng dụng thực tế.....	5
Ⓒ. Dạng toán rèn luyện.....	7
♦ Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	8
♦ Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai	32
♦ Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	52

A. Tóm tắt kiến thức

1. ĐỊNH NGHĨA

- ✎ Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .
- ✔ Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.
- ✎ Kí hiệu $M = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.
- ✔ Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.
- ✎ Kí hiệu $m = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$.

2. CÁCH TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN MỘT ĐOẠN

- ✎ Giả sử $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$, có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn $[a; b]$ mà đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.
- ✎ Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$:
 - ①. Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
 - ②. Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a)$ và $f(b)$.
 - ③. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

Ta có: $M = \max_{[a; b]} f(x); m = \min_{[a; b]} f(x)$.

♦ Dạng 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Lời giải

♦ Tập xác định của hàm số là $[-1; 1]$.

♦ Cách 1. Sử dụng định nghĩa.

♦ Ta có:

• $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \geq 0$; dấu bằng xảy ra khi $1 - x^2 = 0$, tức là khi $x = -1$ hoặc $x = 1$.

• Do đó $\min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$.

• $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \leq 1$; dấu bằng xảy ra khi $1 - x^2 = 1$, tức là khi $x = 0$.

• Do đó $\max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1$.

♦ Cách 2. Sử dụng bảng biến thiên.

• Với $x \in (-1; 1)$, ta có: $y' = \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

♦ Lập bảng biến thiên của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$:

x	-1		0		1
y'			+	0	-
y				1	
	0				0

• Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{[-1;1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 0$; $\max_{[-1;1]} f(x) = f(0) = 1$.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = 2x + 3$ trên đoạn $[-3; 1]$;

b) $y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Lời giải

a) Xét hàm số $f(x) = 2x + 3$ trên đoạn $[-3; 1]$.

♦ Với mọi $x \in [-3; 1]$, ta có $f(x) = 2x + 3 \geq -3$. Mặt khác $f(-3) = -3$. Do đó $\min_{[-3;1]} f(x) = -3$.

♦ Với mọi $x \in [-3; 1]$, ta có $f(x) = 2x + 3 \leq 5$. Mặt khác $f(1) = 5$. Do đó $\max_{[-3;1]} f(x) = 5$.

b) Xét hàm số $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

- ♦ Tập xác định: $D = [-1; 1]$.
- ♦ Ta có $0 \leq g(x) \leq 1$ với mọi $x \in [-1; 1]$. Mặt khác $g(0) = 1$ và $g(1) = 0$.
- ♦ Do đó $\min_{[-1;1]} g(x) = 0$ và $\max_{[-1;1]} g(x) = 1$.

Câu 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ trên đoạn $[-3; 2]$; b) $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$.

Lời giải

a) Ta có: $f'(x) = x^2 - 4x + 3$. Khi đó, trên khoảng $(-3; 2)$, $f'(x) = 0$ khi $x = 1$.

♦ $f(1) = \frac{7}{3}, f(-3) = -35, f(2) = \frac{5}{3}$.

♦ Vậy $\max_{[-3;2]} f(x) = \frac{7}{3}$ tại $x = 1$,

♦ $\min_{[-3;2]} f(x) = -35$ tại $x = -3$.

b) - Ta có: $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Khi đó, trên khoảng $(1; 4)$, $g'(x) = 0$ khi $x = e$.

♦ $g(1) = 0, g(e) = \frac{1}{e}, g(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$.

♦ Vậy $\max_{[1;4]} g(x) = \frac{1}{e}$ tại $x = e$, $\min_{[1;4]} g(x) = 0$ tại $x = 1$.

♦ Dạng ②: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên một đoạn

📖 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x - 2 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

♦ Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{x^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$).

♦ Tính các giới hạn:

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$

♦ Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$:

x	0	1	$+\infty$
y'		0	
y	$+\infty$	0	$+\infty$

- Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{(0;+\infty)} y = y(1) = 0$;
- hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Lời giải

- ♦ Ta có: $y' = \cos x - \sin x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{4}$ (vì $x \in [0; 2\pi]$);
- ♦ $y(0) = 1$; $y(2\pi) = 1$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.
- ♦ Do đó: $\max_{[0;2\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; $\min_{[0;2\pi]} y = y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

Câu 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

Lời giải

- ♦ Ta có: $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \sqrt{2}$ (vì $x \in [0; 4]$);
- ♦ $y(0) = 3$; $y(4) = 195$; $y(\sqrt{2}) = -1$.
- ♦ Do đó: $\max_{[0;4]} y = y(4) = 195$; $\min_{[0;4]} y = y(\sqrt{2}) = -1$.

♦Dạng ③: Ứng dụng thực tế

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

- Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.
- Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

Lời giải

a) Với $0 \leq t \leq 12$ ta có:

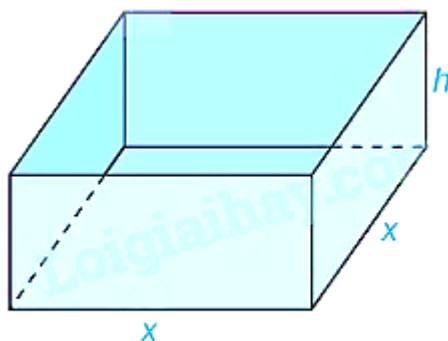
- ♦ $N'(t) = -3t^2 + 24t$, $N'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 24t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0(tm) \\ t = 8(tm) \end{cases}$
- ♦ Ta có: $N(0) = 0$, $N(8) = -8^3 + 12 \cdot 8^2 = 256$, $N(12) = -12^3 + 12 \cdot 12^2 = 0$

- Do đó, số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương là 256 người trong 12 tuần đầu.

b) Hàm số biểu thị tốc độ độ lây lan của virus là: $N'(t) = -3t^2 + 24t$

- ♦ Đặt $f(t) = -3t^2 + 24t$, với $0 \leq t \leq 12$
- ♦ Ta có: $f'(t) = -6t + 24, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4(\text{tm})$
- $f(0) = 0, f(4) = -3.4^2 + 24.4 = 48, f(12) = -3.12^2 + 24.12 = -144$
- Do đó, virus sẽ lây lan nhanh nhất khi $t = 4$ (tuần thứ 4).

Câu 2: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như Hình 1.17. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Hình 1.17

Lời giải

- ♦ Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là x (cm, $x > 0$) và chiều cao là h (cm, $h > 0$)
- ♦ Diện tích bề mặt của hình hộp là 108 cm^2 nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108-x^2}{4x}$ (cm)
- ♦ Thể tích của hình hộp là: $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{108-x^2}{4x} = \frac{108x-x^3}{4}$ (cm^3)
- ♦ Ta có: $V' = \frac{-3x^2+108}{4}, V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (do $x > 0$)
- ♦ Bảng biến thiên:

x	0	6	$+\infty$
V'		0	
V	0	108	$-\infty$

- Do đó, thể tích của hình hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6$ cm. Khi đó, chiều cao của hình hộp là: $\frac{108-6^2}{4 \cdot 6} = 3$ (cm).

Câu 3: Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá $1,2$ nghìn đồng / cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá $0,75$ nghìn đồng / cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

Lời giải

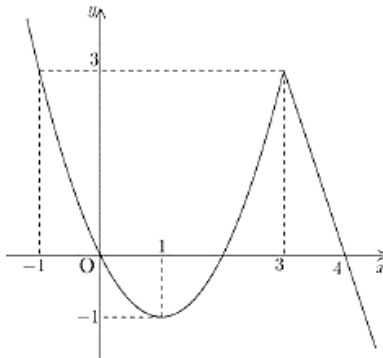
- ♦ Gọi bán kính đáy của bình là x (cm, $x > 0$)
- ♦ Chiều cao của bình là: $\frac{1000}{\pi \cdot x^2}$ (cm)
- ♦ Chi phí để sản xuất một chiếc bình là: $T(x) = 2 \cdot 1,2 \cdot \pi \cdot x^2 + 0,75 \cdot \frac{2000}{x} = 2,4\pi \cdot x^2 + \frac{1500}{x}$
- ♦ (nghìn đồng) Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là thấp nhất thì $T(x)$ là nhỏ nhất.
- $T'(x) = 4,8\pi x - \frac{1500}{x^2}, T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$ (thỏa mãn)
- ♦ Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$	$+\infty$
$T'(x)$	—	0	+
$T(x)$	$+\infty$	$S\left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)$	$+\infty$

- ♦ Để chi phí sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất thì bán kính đáy của bình là $\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}$ cm và chiều cao của bình là: $\frac{1000}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{625}{2\pi}}\right)^2}$ (cm)

♦Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; +\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 4]$.



A. 3.

B. -1.

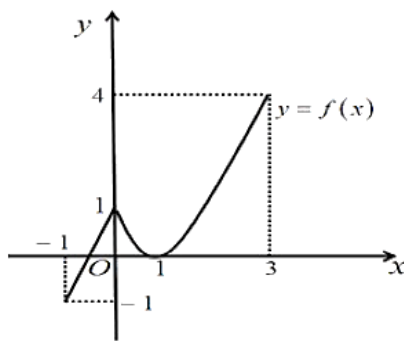
C. -3.

D. 0.

Lời giải

Từ đồ thị ta có, GTNN của hàm số trên đoạn $[-1; 4]$ là: $\min_{[-1;4]} f(x) = -1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Ta có giá trị của $M + 2m$ là



A. $M + 2m = 1$.

B. $M + 2m = 2$.

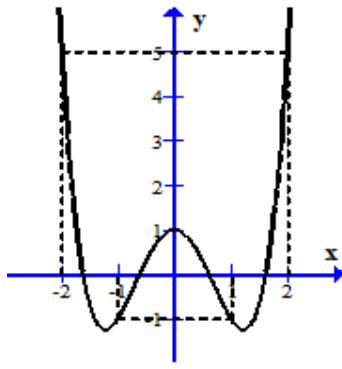
C. $M + 2m = 3$.

D. $M + 2m = 4$.

Lời giải

Ta có $M = \max_{[-1;3]} f(x) = 4$ và $m = \min_{[-1;3]} f(x) = -1$ nên $M + 2m = 2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



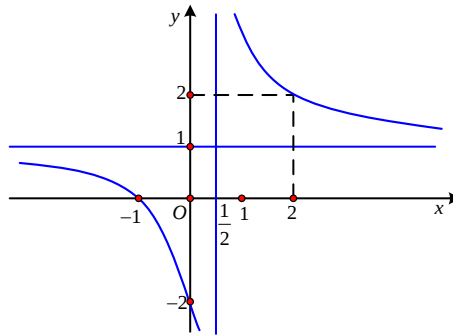
Giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-1; 2]$ bằng?

- A. 5. B. 2.
C. 1. D. không xác định được.

Lời giải

Từ đồ thị ta có $\max_{[-1; 2]} f(x) = f(2) = 5$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong trong hình vẽ bên.



Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

- A. $\max_{[1; 2]} f(x) = 2$. B. $\max_{[-2; 1]} f(x) = 0$.
C. $\max_{[-3; 0]} f(x) = f(-3)$. D. $\max_{[3; 4]} f(x) = f(4)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $f(x)$ luôn giảm với mọi x thuộc tập xác định.

$f(1) > f(2) = 2 \Rightarrow \max_{[1; 2]} f(x) = f(1) > 2$. A sai.

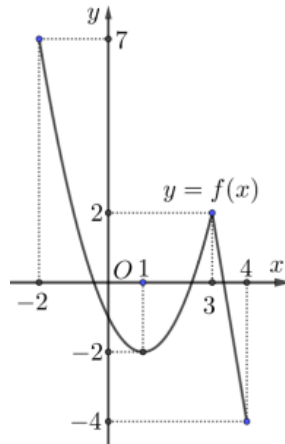
Dựa vào đồ thị ta thấy $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$. Không tồn tại $\max_{[-2;1]} f(x)$. B sai.

Hàm liên tục và giảm trên đoạn $[-3;0]$ nên $\max_{[-3;0]} f(x) = f(-3)$. C đúng.

Hàm liên tục và giảm trên đoạn $[3;4]$ nên $\max_{[3;4]} f(x) = f(3)$. D sai.

Nhận xét: Ngoài ra có thể sử dụng các dữ kiện đề bài để tính ra hàm số $f(x) = \frac{2x+2}{2x-1}$ nhưng khá lâu và cũng thật sự không cần thiết.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đồ thị trên đoạn $[-2;4]$ như hình vẽ bên. Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;4]$ bằng



A. 5.

B. 3.

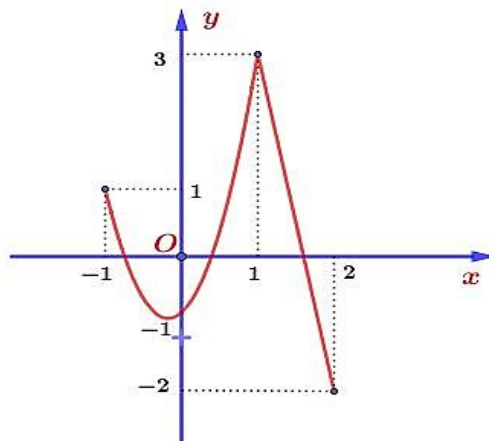
C. 0.

D. -2

Lời giải

Nhìn đồ thị ta thấy trên $[-2;4]$ ta có: $M = 7, m = -4$ nên $M + m = 3$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ và có đồ thị như hình vẽ?



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$.

Ta có $M + m$ bằng:

A. 2.

B. 0.

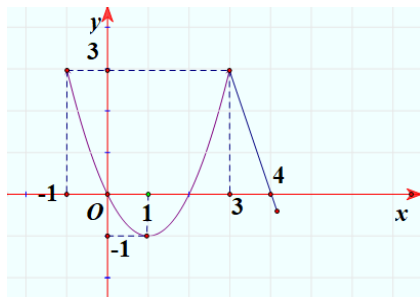
C. 4.

D. 1.

Lời giải

Nhìn đồ thị ta thấy trên $[-1; 2]$ ta có: $M = 3, m = -2$ nên $M + m = 1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-1; +\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 4]$.

A. 0.

B. 1.

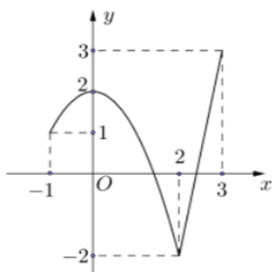
C. 4.

D. 3.

Lời giải

Dựa vào đồ thị trên, ta có giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[1; 4]$ bằng 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị $M - m$ bằng



A. 0.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị lớn nhất $M = 3$, giá trị nhỏ nhất $m = -2$

Vậy $M - m = 3 + 2 = 5$.

Câu 9: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tỉ số $\frac{M}{m}$ bằng

A. $-\frac{6}{5}$.

B. -3 .

C. $\frac{5}{2}$.

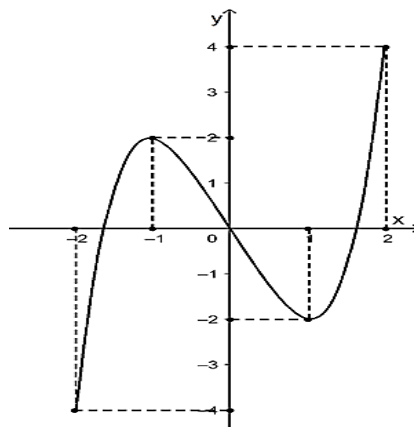
D. -2 .

Lời giải

Ta có $y' = 6x^2 + 6x - 12$. Nghiệm của đạo hàm trên đoạn $[-1; 2]$ là $x = 1$.

Vì $y(-1) = 15$, $y(1) = -5$ và $y(2) = 6$. Suy ra $M = 15$ và $m = -5$, suy ra tỉ số $\frac{M}{m} = -3$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ.



Đặt $M = \max_{[-2; 2]} f(x)$, $m = \min_{[-2; 2]} f(x)$. Khi đó $M + m$ bằng

A. 0.

B. 8.

C. 2.

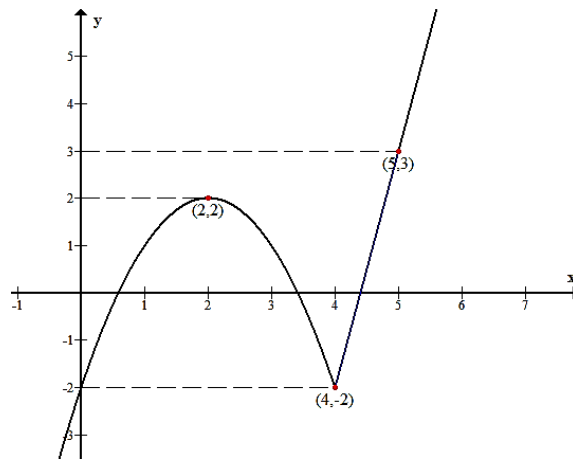
D. 4.

Lời giải

Từ đồ thị suy ra $M = 4$ và $m = -4$.

Vậy $M + m = 4 - 4 = 0$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xác định giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0; 5]$.



A. $\max_{[0;5]} y = 5.$

B. $\max_{[0;5]} y = 3.$

C. $\max_{[0;5]} y = 4.$

D. $\max_{[0;5]} y = 2.$

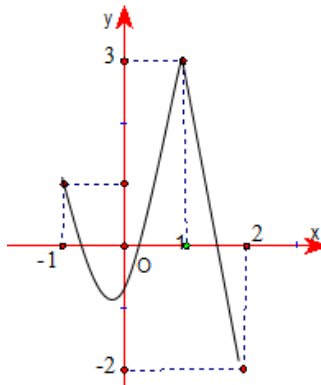
Lời giải

Nhìn trên đồ thị ta có BBT sau

x	0	2	4	5	
y'	+	0	-	0	+
y					

Vậy $\max_{[0;5]} y = 3.$

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$. Ta có $M + m$ bằng



A. 1.

B. 4.

C. 2.

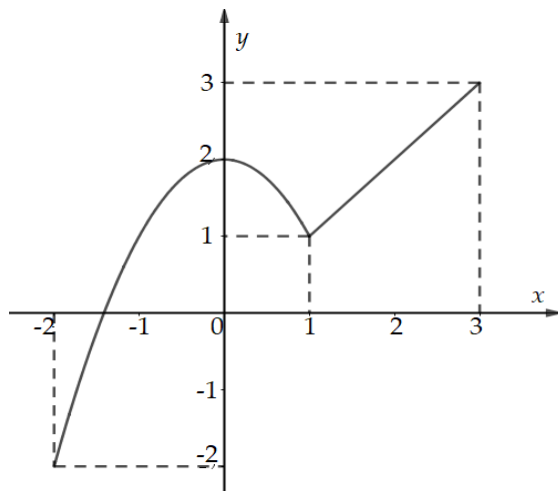
D. 0.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số trên $[-1; 2]$ suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là $M = 3$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là $m = -2$.

Suy ra $M + m = 1$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$, $x \in [-2; 3]$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2; 3]$. Giá trị $M + m$ là



A. 6.

B. 1.

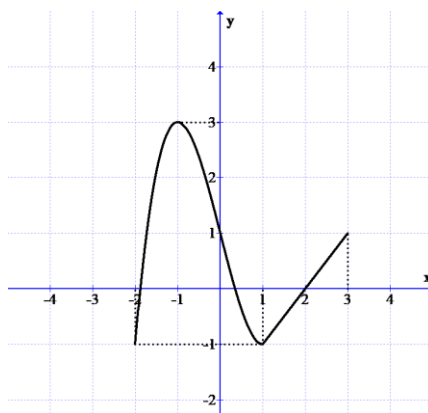
C. 5.

D. 3.

Lời giải

Dựa vào đồ thị nhận thấy $M = 3$ và $m = -2$. Vậy $M + m = 1$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 3]$.

Giá trị của $M - m$ bằng

A. 0.

B. 1.

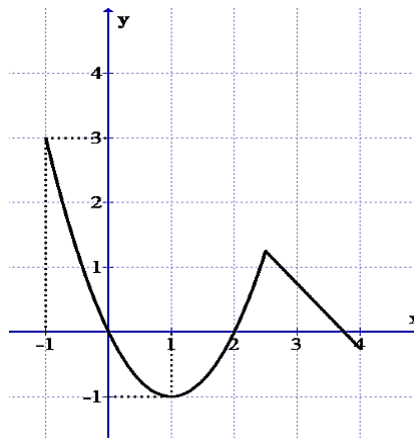
C. 4.

D. 5.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy $M = 3, m = -1$ nên $M - m = 4$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 4]$.

Giá trị của $M + m$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 5.

Lời giải

Chọn C.

Từ đồ thị ta thấy $M = 3, m = -1$ nên $M + m = 2$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1; 3]$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

x	-1	0	2	3		
y'		+	0	-	0	+
y	0	5	1	4		

- A. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$. B. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(3)$.
C. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(2)$. D. $\max_{[-1;3]} f(x) = f(-1)$.

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy $\max_{[-1;3]} f(x) = f(0)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	+		- 0	+
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.** Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 .
- B.** Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.
- C.** Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .
- D.** Hàm số có đúng hai cực trị.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta dễ thấy ý A, B, D đúng.

Do $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số đã cho không có giá trị lớn nhất và không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau.

x	-3	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	3	0	2	1

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

- A.** 3.
- B.** 2.
- C.** 1.
- D.** 4.

Lời giải

Từ bảng biến thiên trên ta có:

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 2]$ là $M = 3$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 2]$ là $m = 0$

Suy ra $M + m = 3$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{5}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	0	2	-2	$2\sqrt{5}$	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5})} y = 0.$

B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5})} y = 2\sqrt{5}.$

C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5})} y = 2.$

D. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5})} y = -2$

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có: $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5})} y = y(1) = -2.$

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			3		0		$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng:

A. 1.

B. 3.

C. -1.

D. 0.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 0.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{5}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	0	2	-2	$2\sqrt{5}$	

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 0.$

B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2.$

C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2\sqrt{5}.$

D. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 1.$

Lời giải

Dựa vào BBT có $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = -2, \max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]} y = 2\sqrt{5}$

Có 2 đáp án đúng.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có bảng biến thiên như sau. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$. Tính $M + m$.

x	-3		-1		0		1		2
y'		+	0	-	0	+	0	-	
y	-2			3			2		
					0				1

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

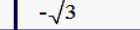
Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là 0 khi $x = 0$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 2]$ là 3 khi $x = -1$

nên ta có: $M = 3, m = 0$

Vậy $M + m = 3$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{5}]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{5}$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5})} y = 0$.

B. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5})} y = 2\sqrt{5}$.

C. $\max_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5})} y = 2$.

D. $\min_{[-\sqrt{3}; \sqrt{5})} y = -2$.

Lời giải

Trên $[-\sqrt{3}; \sqrt{5})$ hàm số không có giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -2 .

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
y'	$-$	$ $	$+$	0	$-$	
y	5			4		-1

Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** Hàm số không có giá trị lớn nhất và có giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
- B.** Hàm số có hai điểm cực trị.
- C.** Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang.
- D.** Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 5 và giá trị nhỏ nhất bằng -2 .

Lời giải

Hàm số không có giá trị lớn nhất do: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ và có giá trị nhỏ nhất bằng -2 tại $x = -1$.

.

Hàm số có hai điểm cực trị là $x = -1$ và $x = 2$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y = 5$ và $y = -1$.

Câu 25: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ trên đoạn $[-1; 1]$. Tính $M + m$.

- A.** 1.
- B.** 0.
- C.** 2.
- D.** 3.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \in [-1; 1] \\ x = 2 \notin [-1; 1] \end{cases}$.

$$y(0) = 2, y(1) = 0, y(-1) = -2$$

Do đó $M = 2, m = -2$.

Vậy $M + m = 0$.

Chọn B

Câu 26: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ trên $[1; 5]$ là.

- A.** 15.
- B.** -6 .
- C.** 10.
- D.** 22.

Lời giải

Cách 1:

Đặt $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Giải pt $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \in [1; 5] \end{cases}$.

$f(1) = -6; f(3) = -22; f(5) = 10$.

Vậy chọn **C**.

Cách 2: Dùng CASIO.

Câu 27: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^4 + 4x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. 1.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $y' = -4x^3 + 8x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (TM) \\ x = \sqrt{2} & (TM) \\ x = -\sqrt{2} & (L) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	-1		0		$\sqrt{2}$		2
y'		-	0	+	0	-	
y	3						
			0		4		0

Từ bảng biến thiên suy ra $\max_{[-1; 2]} f(x) = f(\sqrt{2}) = 4$.

Cách 2:

Sử dụng mode 7

$f(x) = -x^4 + 4x^2$.

Start -1; end 2; step 0,3.

Câu 28: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 15$ trên đoạn $[-3; 2]$.

A. $\max_{[-3;2]} y = 54.$

B. $\max_{[-3;2]} y = 7.$

C. $\max_{[-3;2]} y = 48.$

D. $\max_{[-3;2]} y = 16.$

Lời giải

Hàm số đã cho đã xác định và liên tục trên đoạn $[-3;2]$.

Ta có $\begin{cases} x \in (-3;2) \\ y' = 4x^3 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Tính $y(-3) = 48; y(2) = -7; y(0) = -15; y(\pm 1) = -16 \Rightarrow \max_{[-3;2]} y = y(-3) = 48.$

Câu 29: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ trên đoạn $[1;3]$ lần lượt là

A. $\frac{3}{4}$ và $\frac{1}{2}.$

B. 0 và $-1.$

C. 3 và $-1.$

D. $-\frac{1}{3}$ và $-1.$

Lời giải

Do $y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$ với mọi $x \in [1;3]$ nên hàm số $y = \frac{x}{x+1}$ đồng biến trên $[1;3]$.

Ta có $y(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}; y(3) = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}.$

Vậy $\max_{[1;3]} y = y(3) = \frac{3}{4}; \min_{[1;3]} y = y(1) = \frac{1}{2}.$

Câu 30: Tính tổng bình phương giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[-1;1]$?

A. 121.

B. 64.

C. 73.

D. 22

Lời giải

$y' = 4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in [-1,1]$

$y(0) = 3, y(-1) = 8, y(1) = 8$

Vậy $\max_{[-1;1]} y = 8$ khi $x = \pm 1, \min_{[-1;1]} y = 3$ khi $x = 0. \Rightarrow 8^2 + 3^2 = 73.$

Câu 31: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số: $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right].$

A. $m = 5.$

B. $m = 3.$

C. $m = \frac{17}{4}.$

D. $m = 10.$

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right].$

Ta có $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}; y(1) = 3; y(2) = 5.$$

Vậy $m = 3$.

Câu 32: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. -5. B. $-\frac{1}{3}$. C. 5. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{-8}{(x-3)^2} < 0$ do đó hàm nghịch biến $\Rightarrow y_{\max} = y(0) = \frac{1}{3}$.

Câu 33: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x+5}{x-7}$ trên đoạn $[8; 12]$ là:

- A. 15. B. $\frac{17}{5}$. C. 13. D. $\frac{13}{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{-12}{(x-7)^2} < 0 \quad \forall x \neq 7$.

Do đó hàm số nghịch biến trên $[8; 12]$ nên giá trị lớn nhất là $y(8) = 13$.

Câu 34: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+5}$ trên đoạn $[-1; 3]$.

- A. $\frac{5}{8}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{-3}{4}$. D. $-\frac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{11}{(x+5)^2} > 0$ với $\forall x \in [-1; 3]$.

Do $y(-1) = \frac{-3}{4}$, $y(3) = \frac{5}{8}$ nên $\max_{[-1; 3]} y = y(3) = \frac{5}{8}$.

Câu 35: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$ là

- A. $\min_{[2; 4]} y = 6$. B. $\min_{[2; 4]} y = \frac{25}{4}$. C. $\min_{[2; 4]} y = -6$. D. $\min_{[2; 4]} y = \frac{13}{2}$.

Lời giải

Ta có $y' = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 3 \xrightarrow{x \in [2;4]} x = 3$$

Ta có: $y(2) = \frac{13}{2}; y(3) = 6; y(4) = \frac{25}{4}$

Vậy $\min_{[2;4]} y = 6$.

Câu 36: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng.

A. $\max_{[1;3]} y = 3$.

B. $\max_{[1;3]} y = 4$.

C. $\max_{[1;3]} y = 6$.

D. $\max_{[1;3]} y = 5$

Lời giải

Ta có $y' = 1 - \frac{4}{x^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1;3] \\ x = -2 \notin [1;3] \end{cases}$$

Khi đó $y(1) = 5, y(2) = 4, y(3) = \frac{13}{3}$.

Vậy $\max_{[1;3]} y = 5$.

Câu 37: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x-3}{x-5}$ trên đoạn $[0;2]$ là.

A. $\frac{3}{5}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 2.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$y' = \frac{-7}{(x-5)^2} < 0 \text{ và hàm số xác định và liên tục trên } [0;2].$$

Suy ra $\min_{[0;2]} y = y_{(2)} = -\frac{1}{3}$.

Câu 38: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0;3]$. Tính giá trị $M - m$.

A. $M - m = -\frac{9}{4}$. **B.** $M - m = 3$. **C.** $M - m = \frac{9}{4}$. **D.** $M - m = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên đoạn $[0; 3]$.

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in [0; 3] \text{ nên } m = f(0) = -1, M = f(3) = \frac{5}{4} \Rightarrow M - m = \frac{9}{4}.$$

Câu 39: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên $[0; 2]$ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** 5. **C.** -5. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{-8}{(x-3)^2}$, $y(0) = \frac{1}{3}$, $y(2) = -5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên $[0; 2]$ là $\frac{1}{3}$.

Câu 40: Gọi M , m thứ tự là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[-2; 0]$.
Tính $P = M + m$.

A. $P = 1$. **B.** $P = -\frac{13}{3}$. **C.** $P = -5$. **D.** $P = -3$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $[-2; 0]$.

Ta có đạo hàm $y' = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \notin [-2; 0] \end{cases}$$

$$y(-2) = \frac{-7}{3};$$

$$y(-1) = -2;$$

$$y(0) = -3.$$

Vậy $m = -3$; $M = -2$, suy ra $m + M = -5$.

Câu 41: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{16}{x}$ trên đoạn $[1; 5]$ bằng

A. 8.

B. $\frac{41}{5}$.

C. 17.

D. -8.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4 \in [1; 5]$.

$$f(1) = 17, f(5) = \frac{41}{5}, f(4) = 8.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là 8.

Câu 42: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 - \frac{16}{x}$ trên đoạn $[-4; -1]$. Tính $T = M + m$.

A. $T = 32$.

B. $T = 16$.

C. $T = 37$.

D. $T = 25$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ta có $f'(x) = 2x + \frac{16}{x^2}$;

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{16}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 16 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -8 \Leftrightarrow x = -2$$

Ta thấy $f(-4) = 20$; $f(-1) = 17$; $f(-2) = 12$

$$\text{Vậy } \begin{cases} M = 20 \\ m = 12 \end{cases} \Leftrightarrow T = M + m = 20 + 12 = 32.$$

Câu 43: Trên khoảng $(0; +\infty)$ thì hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$.

A. Có giá trị nhỏ nhất là $\text{Min } y = -1$.

B. Có giá trị lớn nhất là $\text{Max } y = 3$.

C. Có giá trị nhỏ nhất là $\text{Min } y = 3$.

D. Có giá trị lớn nhất là $\text{Max } y = -1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = -3x^2 + 3, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên.

$\Rightarrow$ Hàm số có giá trị lớn nhất là $\text{Max } y = 3$.

Câu 44: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^4 + 4x^3 + 1$ bằng

A. 11.

B. 0.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Ta có $y' = -12x^3 + 12x^2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$. Khi đó ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	+	0	-
y	$-\infty$	1	2	$-\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2.

Câu 45: Hàm số nào dưới đây có giá trị nhỏ nhất trên tập xác định?

A. $y = x^3 - 3x + 2$.

B. $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$.

C. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

D. $y = -x^4 + 4x^2$.

Lời giải

Ta nhận thấy 3 hàm số: $y = x^3 - 3x + 2$, $y = -2x^3 + 3x^2 - 1$, $y = -x^4 + 4x^2$ đều không có giá trị nhỏ nhất trên tập xác định $\mathbb{R}$ do

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + 3x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-x^4 + 4x^2) = -\infty.$$

Xét hàm: $y = x^4 - 2x^2 - 1$. Ta nhận thấy: $\begin{cases} a > 0 \\ ab < 0 \end{cases}$ nên hàm số có 1 điểm cực đại và 2 điểm

cực tiểu. Suy ra hàm số có giá trị nhỏ nhất trên tập xác định chính là giá trị cực tiểu.

Câu 46: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng:

A. 5.

B. 1.

C. -1.

D. 3.

Lời giải

Ta có: $y' = -3x^2 + 3$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1(l) \end{cases}$.

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng 3.

Câu 47: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $f(x) = x^6 + 6x$ trên nửa khoảng $(-2; 1]$. Kết quả đúng là

- A.** M không tồn tại. **B.** $M = 52$. **C.** $M = 7$. **D.** $M = -5$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 6x^5 + 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^5 + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \in (-2; 1]$.

Bảng biến thiên

x	-2	-1	1
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	52	-5	7

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số không tồn tại giá trị lớn nhất trên nửa khoảng $(-2; 1]$.

.

Câu 48: Hàm số nào dưới đây có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = x^4 - 2x^2$. **B.** $y = -3x^3 + x^2 - 5$.
C. $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 1$. **D.** $y = -2x^4 - x^2 + 5$.

Lời giải

Cách 1:

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 2x^2) = +\infty$ suy ra hàm số $y = x^4 - 2x^2$ không có giá trị lớn nhất. Loại **A**.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + x^2 - 5) = +\infty$ suy ra hàm số $y = -3x^3 + x^2 - 5$ không có giá trị lớn nhất.

Loại **B**.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 3x^2 - 7x + 1) = +\infty$ suy ra hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 7x + 1$ không có giá trị lớn nhất.

Loại **C**.

Cách 2:

Hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có giá trị lớn nhất khi $a < 0$, có giá trị nhỏ nhất khi $a > 0 \Rightarrow$.

Câu 49: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng:

- A. Hàm số có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
- B. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất.
- C. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.
- D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất, có giá trị lớn nhất

Lời giải

Ta có: TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				5				$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 4 4

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất, không có giá trị lớn nhất.

Câu 50: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ với $x > 0$ bằng

- A. 4.
- B. 2.
- C. 1.
- D. 3.

Lời giải

Ta có: $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Lập bảng biến thiên, suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(1) = 3$.

Câu 51: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{4}{x^2 + 2}$ là

- A. 10.
- B. 3.
- C. 5.
- D. 2.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $x^2 + 2 \geq 2$ suy ra $\frac{4}{x^2 + 2} \leq 2 \Leftrightarrow y \leq 2$ nên $\max_{\mathbb{R}} y = 2$.

Cách khác: dùng đạo hàm.

Câu 52: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng bao nhiêu?

- A. 0. B. -1. C. -3. D. -2

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô – si ta có:

$$y = x + \frac{1}{x} - 5 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} - 5 = -3$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad x > 0$.

Vậy $\min_{(0; +\infty)} y = -3$.

Câu 53: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$ khi $x > 0$.

- A. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$. B. $-\frac{1}{4}$. C. 0. D. $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên $(0; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{-3}{x^4} + \frac{1}{x^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{x^4} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{cases}$$

Có $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$.

Lập bảng biến thiên của hàm số trên $(0; +\infty)$, ta được:

x	0	$\sqrt{3}$	$+\infty$
y'	+	0	-
y	$+\infty$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	0

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $(0; +\infty)$ bằng $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 54: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Tìm m ?

A. $m = 2$.

B. $m = 5$.

C. $m = 3$.

D. $m = 4$.

Lời giải

Ta có: $y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$. Cho $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$.

Mà $y(3) = 4$; $\lim_{n \rightarrow 1^+} y = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 4 khi $x = 3$.

Câu 55: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2}{x-2}$ trên $(2; 6]$.

A. $\min_{(2;6]} y = 9$.

B. $\min_{(2;6]} y = 8$.

C. $\min_{(2;6]} y = 4$.

D. $\min_{(2;6]} y = 3$.

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên $(2; 6]$.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$. Do đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4$

Trên $(2; 6]$ ta có $y(4) = 8$; $y(6) = 9$ và $\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x-2} = +\infty$.

Do đó $\min_{(2;6]} y = 8$.

Câu 56: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng:

A. $4\sqrt{3}$.

B. $4\sqrt{2}$.

C. $\frac{301}{5}$.

D. 7.

Lời giải

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

Ta có: $y' = 3 - \frac{4}{x^2}$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\sqrt{3}}{3}(n) \\ x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}(l) \end{cases}$$

BBT:

x	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	$+\infty$		$4\sqrt{3}$	$+\infty$

Câu 57: Trên khoảng $(0;1)$ hàm số $y = x^3 + \frac{1}{x}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại x_0 bằng

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

C. $\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Cách 1:

Do $x \in (0;1)$ nên $x^3 > 0$ và $\frac{1}{x} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cau-chy cho bốn số dương $x^3, \frac{1}{3x}, \frac{1}{3x}, \frac{1}{3x}$ ta có

$$x^3 + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{3x} \geq 4\sqrt[4]{x^3 \cdot \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{3x} \cdot \frac{1}{3x}} \Leftrightarrow x^3 + \frac{1}{x} \geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{27}}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x^3 = \frac{1}{3x} \Leftrightarrow x^4 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Cách 2: Ta có $y' = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$;

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 3x^4 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Do $x \in (0;1)$ nên $\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	1
y'	-	0	+
y			

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Câu 58: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 2x^2$ trên khoảng $(-2;2)$ là

A. $\max_{(-2;2)} y = 0; \min_{(-2;2)} y = -1..$

B. $\min_{(-2;2)} y = -1; \text{ không có giá trị lớn nhất.}$

C. $\max_{(-2;2)} y = 0; \text{ không có giá trị nhỏ nhất.}$

D. $\max_{(-2;2)} y = 8; \min_{(-2;2)} y = -1.$

Lời giải

$$y' = 4x^3 - 4x, y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	8	-1	0	-1	8	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, $\min_{(-2;2)} y = -1; \text{ không có giá trị lớn nhất.}$

Câu 59: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng

A. 0.

B. $-\sqrt{2}$.

C. -1.

D. -2.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = \left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x-1)}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{x+1}{(\sqrt{x^2+1})^3}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y		$-\sqrt{2}$	

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\sqrt{2}$.

♦ **Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai**

Câu 1: Xét hàm số $y = \frac{x-1}{2x+1}$ trên $[0;1]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

a) $\min_{[0;1]} y = -\frac{1}{2}.$

b) $\max_{[0;1]} y = 0.$

c) $\max_{[0;1]} y = 1.$

d) $\min_{[0;1]} y = \frac{1}{2}.$

Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

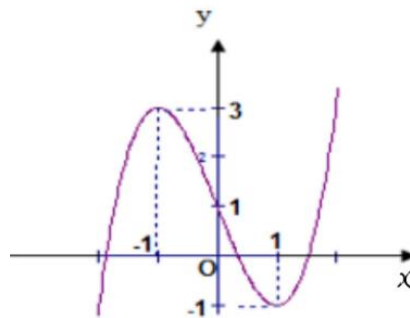
d) S

Ta có $y' = \frac{3}{(2x+1)^2} > 0 \quad \forall x \in [0;1]$ nên hàm số luôn đồng biến trên $[0;1]$.

Hàm số có giá trị lớn nhất trên $[0;1]$ bằng 0 tại $x=1$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?



a) $\max_{[-1;1]} f(x) = 3.$

b) $\max_{[-1;+\infty)} f(x) = 3.$

c) $\max_{[-1;+\infty)} f(x) = +\infty.$

d) $\max_{[-1;1]} f(x) = 1.$

Lời giải

a) Đ

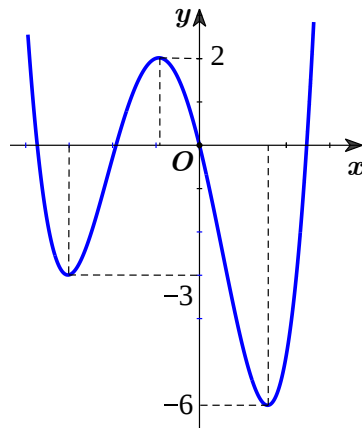
b) S

c) S

d) S

Từ đồ thị suy ra $\max_{[-1;1]} f(x) = 3$ tại $x = -1$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -6 .
- b) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2 .
- c) Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = -6$.
- d) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

d) S

Dựa vào đồ thị, hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -6 .

Câu 4: Hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong $[-1; 3]$ cho bởi hình dưới đây. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

x	-1		0		2		3
y'		+	0	-	0	+	
y			5				4
	0				1		

- a) $M = 1$.
- b) $M = 5$.
- c) $M = 0$.
- d) $M = 4$.

Lời giải

a)

b)

c)

d)

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ bằng 5.

Vậy $M = 5$.

Câu 5: Một hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	$ $	$-$
y			4		5			
	1			2				0

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

b) $\min_{\mathbb{R}} y = 2$.

c) $\max_{\mathbb{R}} y = 4$.

d) $\min_{\mathbb{R}} y = 0$.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

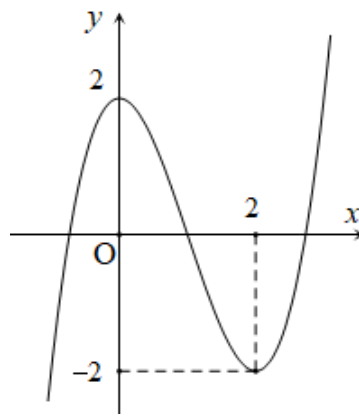
d) S

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$; $y(-2) = 4$; $y(0) = 2$; $y(1) = 5$.

Vậy $\max_{\mathbb{R}} y = 5$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



a) $m + M = 2$.

b) $m + M = -2$.

c) $m + M = 0$.

d) $m + M = 4$.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

Dựa vào đồ thị, ta thấy trên đoạn $[0; 2]$, hàm số đạt:

+) Giá trị lớn nhất $M = 2$ tại $x = 0$.

+) Giá trị nhỏ nhất $m = -2$ tại $x = 2$.

Suy ra $m + M = 0$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$-$	0	$+$
y'	$-\infty$	0	-1	$+\infty$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị cực tiểu bằng 1.

b) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

c) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

d) Hàm số $y = f(x)$ có đúng một cực trị.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy:

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -1 .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Suy ra, hàm số $y = f(x)$ không có giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất trên tập xác định của nó.

Câu 8: Cho hàm số $y = \sqrt{x+2}$ có bảng biến thiên dưới đây. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

x	-2				$+\infty$
y'	$ $			$+$	
y					$+\infty$
	0				

a) Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất.

c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -2 .

d) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 .

Lời giải

a) S

b) S

c) S

d) Đ

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 0 , đạt được khi $x = -2$.

Câu 9: Hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1; 3]$ cho trong hình bên. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

x	-1	0	2	3			
y'		+	0	-	0	+	
y			5		1		4
	0						

a) $M = f(-1)$.

b) $M = f(0)$.

c) $M = f(5)$.

d) $M = f(4)$.

Lời giải

a) S

b) Đ

c) Đ

d) S

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1; 3]$ là: $M = f(0)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+		-	0	+
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

b) Hàm số có hai cực trị.

c) Hàm số có đúng một cực trị.

d) Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1.

Lời giải

a) S

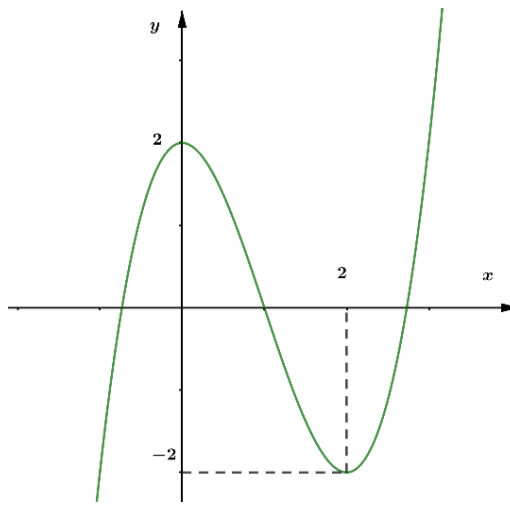
b) Đ

c) S

d) S

Dựa vào BBT ta thấy hàm số có hai cực trị là -1 và 0.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0; 2]$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



- a) $m + M = 2$.
- b) $m + M = -2$.
- c) $m + M = 0$.
- d) $m + M = 4$.

Lời giải

- a) S
- b) S
- c) Đ
- d) S

Dựa vào đồ thị, $m = -2$; $M = 2$; $M + m = 0$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
y'		$-$	$+$	0	$-$
y	5		4		

$\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -2 -1

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số $y = f(x)$ không có giá trị lớn nhất.
- b) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -2 .
- c) Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = -1$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 5 .

Lời giải

- a) S
- b) S
- c) S
- d) Đ

Dựa vào BBT ta thấy Hàm số $y = f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 5.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	1	-1	$+\infty$	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\max_{(-\infty;1)} f(x) = 1$.
- b) $\min_{(0;+\infty)} f(x) = -1$.
- c) $\max_{(-\infty;1)} f(x) = f(-1)$.
- d) $\min_{[2;+\infty)} f(x) = f(2)$.

Lời giải

- a) Đ
- b) Đ
- c) S
- d) Đ

Nhìn vào bảng biến thiên suy ra $\max_{(-\infty;1)} f(x) = f(-1)$ là khẳng định sai

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$			
y'		+		-	0	+	
y			2		-3		$+\infty$
	$-\infty$						

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số chỉ có giá trị nhỏ nhất không có giá trị lớn nhất.
- b) Hàm số có một điểm cực trị.
- c) Hàm số có hai điểm cực trị.
- d) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -3.

Lời giải

- a) S
- b) S
- c) Đ
- d) S

Tại $x = 0$ và $x = 1$ ta có y' đổi dấu và y tồn tại nên hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ và có bảng biến thiên trên $[-5; 7)$ như sau:

x	$-\infty$	-5		1		7	$+\infty$
y'			$-$	0	$+$		
y		6		2		9	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$ và hàm số không đạt giá trị lớn nhất trên $[-5; 7)$.
- b) $\max_{[-5;7)} f(x) = 6$ và $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$.
- c) $\max_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$.
- d) $\max_{[-5;7)} f(x) = 9$ và $\min_{[-5;7)} f(x) = 6$.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

d) S

Dựa vào bảng biến thiên dễ dàng ta thấy $\min_{[-5;7)} f(x) = 2$ khi $x = 1$.

$\max_{[-5;7)} f(x) = 6$ là sai vì $f(x)$ sẽ nhận các giá trị $7; 8$ lớn hơn 6 khi $x \rightarrow 7$.

$\max_{[-5;7)} f(x) = 9$ là sai vì $f(x)$ không bằng 9 mà chỉ tiến đến 9 khi $x \rightarrow 7$, ($x \neq 7$).

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $(-4; 4)$ và có bảng biến thiên trên $(-4; 4)$ như bên.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

x	-4	-2		0		4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	-10		0		-4	10

- a) $\max_{(-4;4)} y = 0$ và $\min_{(-4;4)} y = -4$.
- b) $\max_{(-4;4)} y = 10$ và $\min_{(-4;4)} y = -4$.
- c) $\max_{(-4;4)} y = 10$ và $\min_{(-4;4)} y = -10$.

d) Hàm số không có GTLN, GTNN trên $(-4; 4)$.

Lời giải

a) S

b) S

c) S

d) Đ

Dựa vào bảng biến thiên. Ta thấy không tồn tại GTLN, GTNN trên $(-4; 4)$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$				2				3
			-1				1		

a) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 3 và giá trị nhỏ nhất bằng 1.

c) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 2 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 .

d) Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số.

Lời giải

a) S

b) S

c) S

d) Đ

Không tồn tại giá trị lớn nhất của hàm số vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+3)(x-2)^3(x^2-4)$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $f(-2) > \max\{f(-3); f(2)\}$.

b) $f(-3) < f(-2) < f(2)$

c) $f(-2) < \min\{f(-3); f(2)\}$

d) $f(-3) > f(-2) > f(2)$

Lời giải

a) S

b) S

c) S

d) Đ

Ta có:

$$f'(x) = (x+3)(x+2)^3(x^2-4) = (x+3)(x+2)^3(x-2)(x+2) = (x+3)(x+2)^4(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$$

Xét bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-3; 2]$:

x	-3	-2	2
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$f(-3)$	$f(-2)$	$f(2)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(-3) > f(-2) > f(2)$

Câu 19: Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $m + M = \frac{13}{3}$.

b) $m + M = 5$.

c) $m + M = 9$.

d) $m + M = 4$.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Tính đạo hàm, $\forall x \neq 0, f'(x) = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$. Suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in [1; 3] \\ x = -2 \notin [1; 3] \end{cases}$.

Ta có $f(1) = 5; f(2) = 4; f(3) = \frac{13}{3}$. Vậy $m = 4; M = 5 \Rightarrow m + M = 9$.

Câu 20: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-m}{x+2}$ trên $[0; 2]$ bằng 8

(m là tham số thực). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $m > 10$.

b) $-15 < m \leq -10$.

c) $0 < m \leq 8$.

d) $-9 < m \leq -2$.

Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) S

Ta có $y(0) = -\frac{m}{2}; y(2) = \frac{2-m}{4}$.

Hàm số $y = \frac{x-m}{x+2}$ xác định trên $[0; 2]$ và đạt các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất tại hai đầu mút. Do

đó $\max_{[0;2]} y + \min_{[0;2]} y = -\frac{m}{2} + \frac{2-m}{4} = \frac{-3m+2}{4}$.

Từ giả thiết suy ra $\frac{-3m+2}{4} = 8 \Leftrightarrow -3m+2 = 32 \Leftrightarrow m = -10$.

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{mx+2}{x}$ thỏa mãn $\min_{[1;3]} y = 19$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $m > 18$.

b) $m < 0$.

c) $3 < m \leq 17$.

d) $1 \leq m \leq 3$.

Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) S

Ta có $y' = \frac{-2}{x^2} < 0, \forall x \neq 0$.

Khi đó $\min_{[1;3]} y = y(3) = \frac{3m+2}{3} = 19$.

Suy ra $m = \frac{55}{3}$.

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 + (m^2 + 3)x + m^2 - 4$. Biết hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 0]$ bằng

$\frac{1}{4}$ tại $m = m_0$ ($m_0 > 0$). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $1 < m_0 < 2$.

b) $3 < m_0 < 4$.

c) $2 < m_0 < 3$.

d) $0 < m_0 < 1$.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

Ta có $y' = 3x^2 + m^2 + 3 \Rightarrow y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $[-2; 0]$.

Suy ra $\max_{[-2; 0]} y = y(0) = m^2 - 4$.

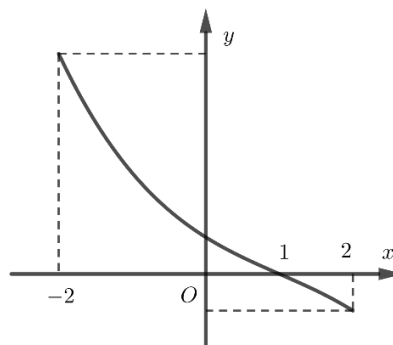
Theo đề bài hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-2; 0]$ bằng $\frac{1}{4}$ nên $m^2 - 4 = \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow m^2 = \frac{17}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{\sqrt{17}}{2} & (\text{t/m}) \\ m = -\frac{\sqrt{17}}{2} & (\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy $m = m_0 = \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[-2; 2]$ là đường cong trong hình bên. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



a) $\max_{[-2; 2]} f(x) = f(1)$.

b) $\max_{[-2; 2]} f(x) = f(-2)$.

c) $\min_{[-2;2]} f(x) = f(1).$

d) $\max_{[-2;2]} f(x) = f(2).$

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

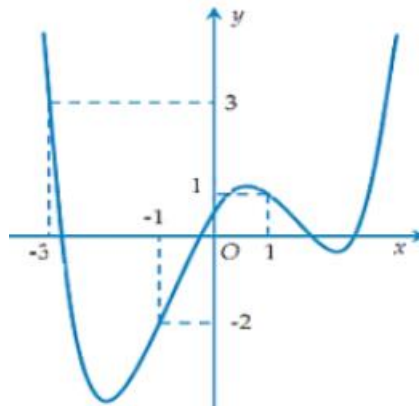
d) S

Dựa vào đồ thị ta có bảng biến thiên:

x	-2	1	2
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$f(1)$	

Do đó $\max_{[-2;2]} f(x) = f(1).$

Câu 24: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Xét hàm số $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2025$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $g(0) < g(1).$

b) $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1).$

c) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3; -1).$

d) $\max_{[-3;1]} g(x) = \max_{[-3;1]} \{g(-3); g(1)\}.$

Lời giải

a) Đ

b) Đ

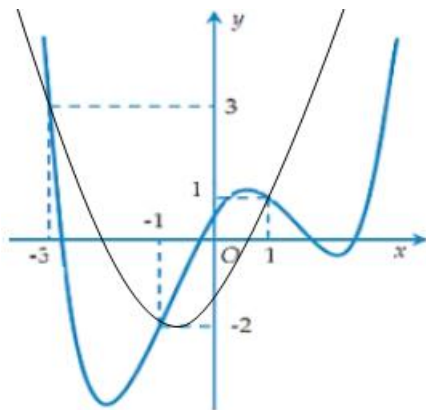
c) Đ

d) Đ

Ta có: $g'(x) = f'(x) - \left(x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}\right) = f'(x) - h(x)$.

Ta vẽ đồ thị hàm số $h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ và $y = f'(x)$ trên cùng một hệ trục:

Đồ thị hàm số $y = h(x)$ có đỉnh $I(-1; -2)$ và đi qua các điểm $(-3; -3)$, $(1; 1)$.



Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$ trên đoạn $[-3; 1]$.

x	-3	-1	1
$g'(x)$	0	-	0
$g(x)$	$g(-3)$	$g(-1)$	$g(1)$

Từ bảng biến thiên suy ra

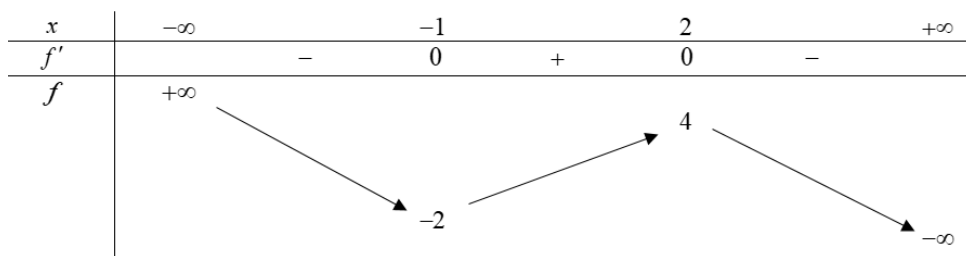
a) $g(0) < g(1)$. **Đúng.**

b) $\min_{[-3;1]} g(x) = g(-1)$. **Đúng.**

c) Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-3; -1)$. **Đúng.**

d) $\max_{[-3;1]} g(x) = \max_{[-3;1]} \{g(-3); g(1)\}$. **Đúng.**

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R và có bảng biến thiên như sau



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = g(x) = f(3-x)$ trên $[0; 3]$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $M = f(0)$.

b) $M = f(3)$.

c) $M = f(1)$.

d) $M = f(2)$.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

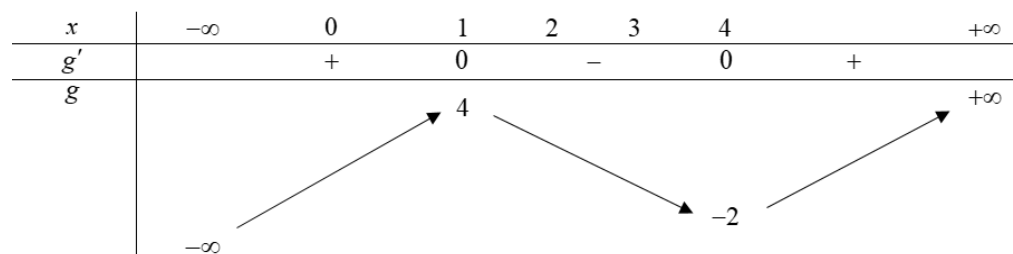
Ta có $g'(x) = -f'(3-x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -f'(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -1 \\ 3-x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x < -1 \\ 3-x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 1 \end{cases}.$$

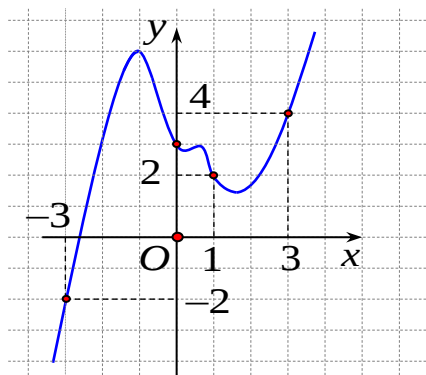
$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-x) > 0 \Leftrightarrow -1 < 3-x < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 4.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên



Vậy $M = f(1)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên R . Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Đặt $g(x) = 2f(x) - (x+1)^2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

b) $\max_{[-3;3]} g(x) = g(1)$.

c) $\max_{[-3;3]} g(x) = g(3)$.

d) Không tồn tại giá trị nhỏ nhất của $g(x)$ trên $[-3;3]$.

Lời giải

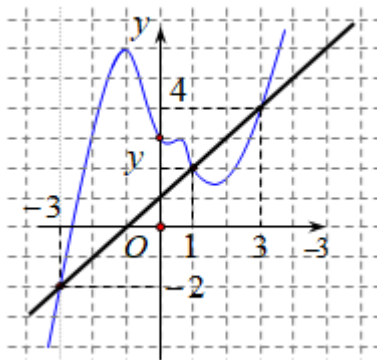
a) S

b) Đ

c) S

d) S

Ta có $y = g(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $g'(x) = 2(f'(x) - (x+1))$. Để xét dấu $g'(x)$ ta xét vị trí tương đối giữa $y = f'(x)$ và $y = x+1$.



Từ đồ thị ta thấy $y = f'(x)$ và $y = x+1$ có ba điểm chung là $A(-3; -2), B(1; 2), C(3; 4)$;

đồng thời $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3; 1) \cup (3; +\infty)$ và $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -3) \cup (1; 3)$. Trên đoạn

$[-3; 3]$ ta có BBT:

x	-3	1	3		
$g'(x)$	0	+	0	-	0
$g(x)$			$g(1)$		
	$g(-3)$				$g(3)$

Từ BBT suy ra B đúng.

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$. Các mệnh đề sau

đúng hay sai?

- a) $m \leq 0$
- b) $m > 4$
- c) $0 < m \leq 2$
- d) $2 < m \leq 4$

Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) S

Ta có $y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}$.

☑ Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

☑ Nếu $m < 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2]$, suy ra $\min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = \frac{16}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{m+2}{3} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5.$$

☑ Nếu $m > 1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$,

$$\text{Suy ra } \min_{[1;2]} y + \max_{[1;2]} y = y(2) + y(1) \Leftrightarrow \frac{2+m}{3} + \frac{1+m}{2} = \frac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\sin^2 x + \sin x + 1}$. Gọi M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm

số đã cho. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $M = m + \frac{3}{2}$.

b) $M = \frac{3}{2}m$.

c) $M = m + 1.$

d) $M = m + \frac{2}{3}.$

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

Đặt $\sin x = t, (-1 \leq t \leq 1)$ ta được $y = \frac{t+1}{t^2+t+1}.$

Xét hàm số $y = \frac{t+1}{t^2+t+1}$ trên đoạn $[-1;1]$ ta có $y' = \frac{-t^2-2t}{(t^2+t+1)^2}.$

Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow -t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \text{ (t/m)} \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{cases}.$

Vì $y(-1) = 0; y(0) = 1; y(1) = \frac{2}{3}$ nên

$$\max_{[-1;1]} y = y(0) = 1 \Rightarrow M = 1; \min_{[-1;1]} y = y(-1) = 0 \Rightarrow m = 0.$$

Vậy $M = m + 1.$

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-9)(x-4)^2$. Xét hàm số $y = g(x) = f(x^2)$ trên $\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

b) Hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$.

c) Hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị.

d) $\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = f(9).$

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) S

d) Đ

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) = 2x \cdot x^4(x^2-9)(x^2-4)^2.$

Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y = g(x)$:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
		$f(9)$		$f(0)$		$f(9)$		$+\infty$	

Suy ra hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$, đạt giá trị nhỏ nhất bằng $f(9)$ tại $x = \pm 3$ và có 3 điểm cực trị. Tức là các phát biểu I, II, IV là đúng còn phát biểu III sai. Do đó chọn đáp án

♦Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 4]$.

Trả lời: $\max_{[0;4]} y = y(4) = 195; \min_{[0;4]} y = y(\sqrt{2}) = -1.$

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2); y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \sqrt{2}$ (vì $x \in [0; 4]$);

$$y(0) = 3; y(4) = 195; y(\sqrt{2}) = -1.$$

Do đó: $\max_{[0;4]} y = y(4) = 195; \min_{[0;4]} y = y(\sqrt{2}) = -1.$

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$.

Trả lời: $\max_{[0;2\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; \min_{[0;2\pi]} y = y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$

Lời giải

Ta có: $y' = \cos x - \sin x; y' = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{4}$ (vì $x \in [0; 2\pi]$);

$$y(0) = 1; y(2\pi) = 1; y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

Do đó: $\max_{[0;2\pi]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}; \min_{[0;2\pi]} y = y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$

Câu 3: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ trên đoạn $[0; 5]$.

Trả lời: $\max_{[0;5]} f(x) = 10, \min_{[0;5]} f(x) = -22.$

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \notin (0; 5) \\ x = 3 \in (0; 5). \end{cases}$$

Ta có $f(0) = 5; f(5) = 10; f(3) = -22$.

Vậy $\max_{[0;5]} f(x) = 10, \min_{[0;5]} f(x) = -22$.

Câu 4: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ trên đoạn $[0;3]$

b) $g(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 5)$

c) $h(x) = x\sqrt{2-x^2}$

Trả lời:

a) $\min_{[0;3]} f(x) = f(0) = 1$ và $\max_{[0;3]} f(x) = f(3) = 10$

b) $\min_{(0;5)} f(x) = f(1) = 2$ và hàm số không tồn tại giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; 5)$

c) $\min_D f(x) = f(-1) = -1$ và $\max_D f(x) = f(1) = 1$

Lời giải

a) Xét $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ trên đoạn $[0;3]$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	2	3		
f'(x)		+	0	-	0	+
f(x)						

A graph showing the function values at the endpoints and critical points. Arrows connect the points (0, 1), (1, 6), (2, 5), and (3, 10). The value at x=0 is 1, at x=1 is 6, at x=2 is 5, and at x=3 is 10.

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min_{[0;3]} f(x) = f(0) = 1$ và $\max_{[0;3]} f(x) = f(3) = 10$

b) Xét $g(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 5)$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	5
g'(x)	-	0	+
g(x)	$+\infty$		$\frac{26}{5}$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min_{(0;5)} f(x) = f(1) = 2$ và hàm số không tồn tại giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; 5)$

c) Xét $h(x) = x\sqrt{2-x^2}$

Tập xác định: $D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

$$h'(x) = \sqrt{2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}}$$

Tập xác định mới: $D_1 = (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$	
h'(x)	$\parallel$		-	0	+	0	-	$\parallel$
h(x)	$\parallel$							$\parallel$
	0					1		
				-1				0

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min_D f(x) = f(-1) = -1$ và $\max_D f(x) = f(1) = 1$

Câu 5: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 12x + 1$ trên đoạn $[-1; 3]$

b) $y = -x^3 + 24x^2 - 180x + 400$ trên đoạn $[3; 11]$

c) $y = \frac{2x+1}{x-2}$ trên đoạn $[3; 7]$

d) $y = \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]$

Trả lời:

a) $\max_{[-1;3]} y = y(-1) = 12$ và $\min_{[-1;3]} y = y(2) = -15$

b) $\max_{[3;11]} y = y(3) = 49$ và $\min_{[3;11]} y = y(6) = -32$

c) $\max_{[3;7]} y = y(3) = 7$ và $\min_{[3;7]} y = y(7) = 3$

d) $\max_{[0; \frac{7\pi}{12}]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ và $\min_{[0; \frac{7\pi}{12}]} y = y\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}$

Lời giải

a) Xét $y = x^3 - 12x + 1$ trên đoạn $[-1;3]$

$$y' = 3x^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	-1		2		3
y'		-	0	+	
y	12		-15		-8

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_{[-1;3]} y = y(-1) = 12$ và $\min_{[-1;3]} y = y(2) = -15$

b) Xét $y = -x^3 + 24x^2 - 180x + 400$ trên đoạn $[3;11]$

$$y' = -3x^2 + 48x - 180 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 6 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	3		6		10		11
y'		-	0	+	0	-	
y	49		-32		0		-7

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_{[3;11]} y = y(3) = 49$ và $\min_{[3;11]} y = y(6) = -32$

c) Xét $y = \frac{2x+1}{x-2}$ trên đoạn $[3;7]$

$$y' = \frac{-5}{(x-2)^2} < 0 \forall x \in [3;7]$$

Bảng biến thiên:

x	3	7
y'	-	
y	7	3

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_{[3;7]} y = y(3) = 7$ và $\min_{[3;7]} y = y(7) = 3$

d) Xét $y = \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]$

$$y' = 2\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

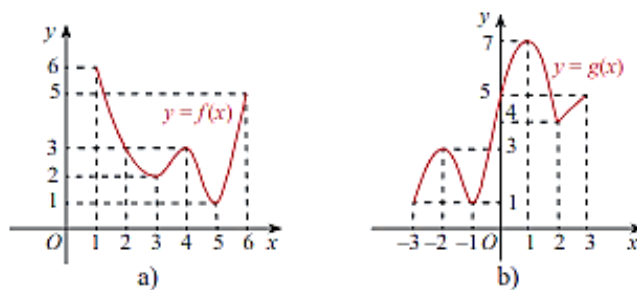
Ta có: $x \in \left[0; \frac{7\pi}{12}\right] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{12}$
y'	+	0	+
y	0	1	$-\frac{1}{2}$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_{\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ và $\min_{\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]} y = y\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\frac{1}{2}$

Câu 6: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có đồ thị được cho ở Hình 5



Hình 5

Trả lời:

a) $\max_{[1;6]} f(x) = f(1) = 6$ và $\min_{[1;6]} f(x) = f(5) = 1$

b) $\max_{[-3;3]} g(x) = g(-3) = g(-1) = 1$ và $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1) = 7$

Lời giải

a) Từ đồ thị, ta thấy $\max_{[1;6]} f(x) = f(1) = 6$ và $\min_{[1;6]} f(x) = f(5) = 1$

b) Từ đồ thị, ta thấy $\max_{[-3;3]} g(x) = g(-3) = g(-1) = 1$ và $\min_{[-3;3]} g(x) = g(1) = 7$

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = x + \frac{4}{x^2}$ trên đoạn $[1;4]$

Trả lời: $\min_{[1;4]} g(x) = g(2) = 3$ và $\max_{[1;4]} g(x) = g(1) = 5$

Lời giải

Xét $g(x) = x + \frac{4}{x^2}$ trên đoạn $[1;4]$

$$g'(x) = 1 - \frac{8}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên:

x	1	2	4
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	5	3	$\frac{17}{4}$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min_{[1;4]} g(x) = g(2) = 3$ và $\max_{[1;4]} g(x) = g(1) = 5$

Câu 8: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $y = x - 2 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Trả lời: $\min_{(0;+\infty)} y = y(1) = 0$; hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (vì $x > 0$).

Tính các giới hạn:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) = +\infty$$

Lập bảng biến thiên của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$:

x	0	1	$+\infty$
y'		-	0
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta được: $\min_{(0;+\infty)} y = y(1) = 0$;

hàm số không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 9: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số $f(x) = \frac{x^2+9}{x}$

trên khoảng $(0; +\infty)$.

Trả lời: $\min_{(0;+\infty)} f(x) = 6$ tại $x = 3$ và hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = \frac{x^2+9}{x}$ với $x \in (0; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{x^2-9}{x^2}$. Khi đó, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (do $x > 0$).

Ngoài ra $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	6	$+\infty$

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\min_{(0;+\infty)} f(x) = 6$ tại $x = 3$ và hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất.

Câu 10: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sqrt{1-x^2} + x^2$

Trả lời: $\max_D y = y(0) = 2$ và $\min_D y = y(-1) = y(1) = 1$

Lời giải

Tập xác định: $D = [-1; 1]$

$$y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tập xác định mới: $D_1 = (-1; 1)$

Bảng biến thiên:

x	-1	0	1
y'		+ 0 -	
y	1	2	1

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_D y = y(0) = 2$ và $\min_D y = y(-1) = y(1) = 1$

Câu 11: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$

Trả lời: $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2}$

Lời giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(x) = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$ với $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 1$. Vậy $\max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$

$$\text{Do } \sin^2 x \leq 1; \forall x \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 x \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 x \geq \frac{1}{2}; \forall x$$

$$\text{Lại có: } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \frac{1}{2}$$

Câu 12: Hộp sữa 1l được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh x cm. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

Trả lời: $x = 1$ cm thì diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất và bằng 6 cm^2

Lời giải

Gọi chiều cao của hộp là h (cm)

$$\text{Thể tích của hộp là: } V = h \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow h = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Diện tích toàn phần của hộp là: } y = S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = 4hx + 2x^2 = 4 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot x + 2x^2 = 2x^2 + \frac{4}{x}$$

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

$$y' = 4x - \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
y'			-	0	+
y	$+\infty$			6	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min_D y = y(1) = 6$

Vậy $x = 1$ cm thì diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất và bằng 6 cm^2

Câu 13: Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x} - 7$

trên khoảng $(0; +\infty)$.

Trả lời: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số có giá trị nhỏ nhất là -5 tại $x = 1$. Hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Trên khoảng $(0; +\infty)$, ta có $y' = f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (do } x \in (0; +\infty)\text{)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x} - 7 \right) = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{1}{x} - 7 \right) = +\infty$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		-5	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $f(x) \geq -5, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = -5$.

Suy ra trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số có giá trị nhỏ nhất là -5 tại $x = 1$.

Hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 14: Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x - 4$ trên nửa khoảng $[-3; 2)$ b) $y = \frac{3x^2-4x}{x^2-1}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$

Trả lời:

a) $\min_{[-3; 2)} y = y(-3) = -22$

b) hàm số không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-1; +\infty)$

Lời giải

a) Xét $y = x^3 - 3x - 4$ trên nửa khoảng $[-3; 2)$

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	-3	-1		1		2
y'		+	0	-	0	+
y			-2		-6	-2

The graph illustrates the function $y = \frac{3x^2 - 4x}{x^2 - 1}$ on the interval $[-3, 2]$. The curve starts at the point $(-3, -22)$, rises to a local maximum at $(-1, -2)$, falls to a local minimum at $(1, -6)$, and finally rises to the point $(2, -2)$. The x-axis is marked with values -3, -1, 1, and 2, while the y-axis is marked with -22, -2, and -6. The first derivative y' is indicated above the x-axis, showing positive values for $x < -1$ and $x > 1$, and negative values for $-1 < x < 1$.

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min_{[-3;2]} y = y(-3) = -22$

b) Xét $y = \frac{3x^2 - 4x}{x^2 - 1}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$

Tập xác định: $D = (-1; +\infty) \setminus \{1\}$

$$y' = \frac{4x^2 - 6x + 4}{(x^2 - 1)^2} > 0 \forall x \in D$$

Bảng biến thiên:

x	-1	1	$+\infty$
y'		-	-
y		$+\infty$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số không tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-1; +\infty)$

Câu 15: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + m^2 - 5$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 2]$ là 19.

Trả lời: $m = 2$ và $m = -2$.

Lời giải

Ta có $f(x) = x^3 + 3x^2 + m^2 - 5$.

$$f'(x) = 3x^2 + 6x. \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có: $f(0) = m^2 - 5$, $f(-1) = m^2 - 3$, $f(2) = m^2 + 15$

Do $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 2]$ khi đó:

$$\max_{x \in [-1; 2]} f(x) = \max \{ f(0), f(-1), f(2) \} = f(2) = m^2 + 15$$

Suy ra $f(x)$ đạt GTLN tại $x = 2$.

$$\text{Khi đó } m^2 + 15 = 19 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x+1}$ $m > 1$. Với giá trị nào của tham số m để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[1; 4]$ bằng 3.

Trả lời: $m = 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{1-m}{(x+1)^2}.$$

$$m > 1 \Rightarrow 1-m < 0 \Rightarrow y' = \frac{1-m}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1.$$

$$\Rightarrow \text{Hàm số } y = \frac{x+m}{x+1} \text{ nghịch biến trên } [1; 4] \Rightarrow \max_{[1; 4]} y = y(1) = \frac{m+1}{2}.$$

$$\text{Theo đề ta có } \frac{m+1}{2} = 3 \Leftrightarrow m = 5.$$

Câu 17: Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2}$ (con) trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Trả lời: Số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

Lời giải

$$\text{Xét hàm số } N(t) = 1000 + \frac{100t}{100+t^2} (t > 0).$$

$$\text{Ta có: } N'(t) = \frac{100 \cdot (100+t^2) - 100t \cdot 2t}{(100+t^2)^2} = \frac{100 \cdot (100-t^2)}{(100+t^2)^2}.$$

Khi đó, với $t > 0$, $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 100 \Leftrightarrow t = 10$.

Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0	10	$+\infty$
$N'(t)$		+	0 -
$N(t)$	1 000	1 005	1 000

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1005

Tại $t = 10$.

Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1005 con.

Câu 18: Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: diện tích lớn nhất của tam giác là $\frac{5}{2}$

Lời giải

Đặt một cạnh góc vuông là $x (x > 0)$ thì cạnh còn lại là $\sqrt{5 - x^2}$

Diện tích tam giác vuông là: $f(x) = x\sqrt{5 - x^2}$

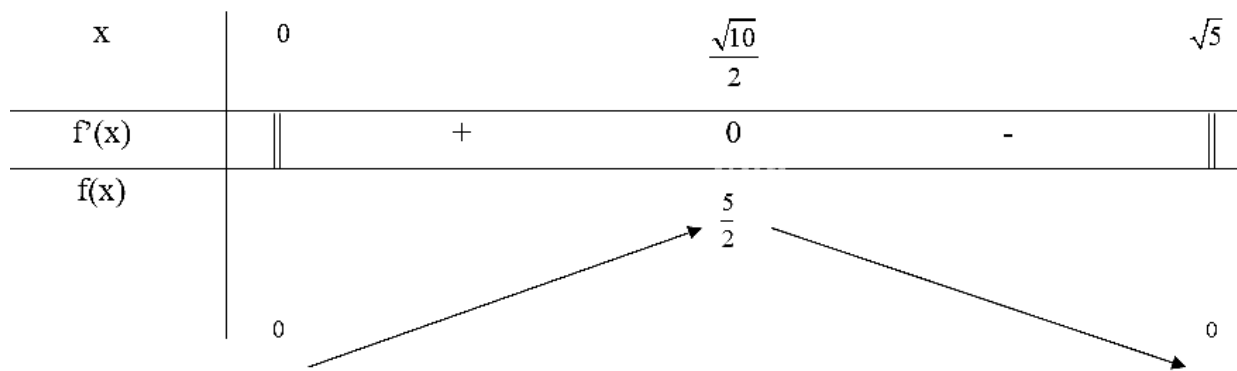
Tập xác định: $D = (0; \sqrt{5}]$

$$f'(x) = \sqrt{5 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{5 - x^2}}$$

Tập xác định mới: $D_1 = (0; \sqrt{5})$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_D f(x) = f\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right) = \frac{5}{2}$

Vậy diện tích lớn nhất của tam giác là $\frac{5}{2}$

Câu 19: Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$. Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

Trả lời: $\max_D y = y(7,5) = 112,5$

Lời giải

Ta có: $p = 15 - \frac{1}{2}q \Leftrightarrow q = 2(15 - p)$

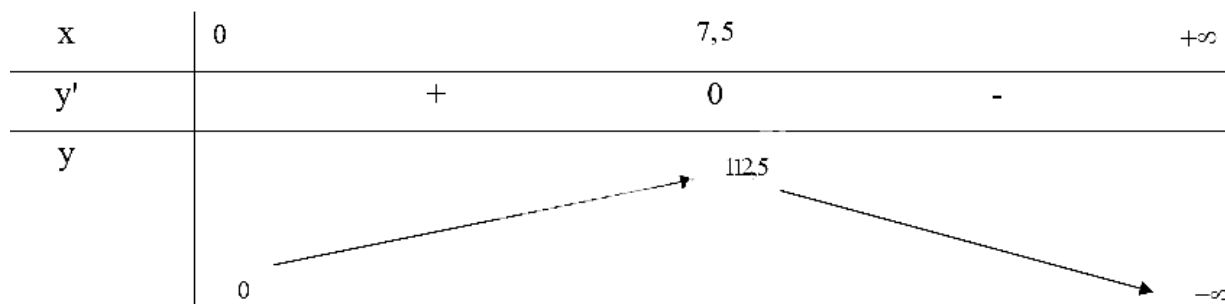
Thay vào $R = pq$ ta được: $R = p \cdot 2(15 - p) = -2p^2 + 30p$

Đặt $y = -2p^2 + 30p$

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

$y' = -4p + 30 = 0 \Leftrightarrow p = 7,5$

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_D y = y(7,5) = 112,5$

Vậy nếu giá bán mỗi kilôgam sản phẩm là 7,5 nghìn đồng/kg thì sẽ đạt được doanh thu cao nhất là 112,5 nghìn đồng

Câu 20: Một hợp tác xã nuôi cá trong hồ. nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng: $P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Trả lời: phải thả 12 con cá

Lời giải

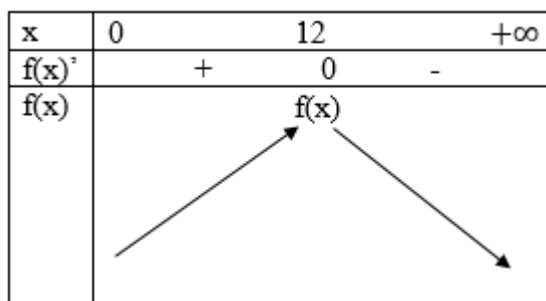
Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì sau một vụ, số cá trên mỗi đơn vị diện tích mặt hồ trung bình cân nặng:

$$f(n) = n.P(n) = 480n - 20n^2 \text{ (gam)} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Xét hàm số $f(x) = 480x - 20x^2$ trên $(0; +\infty)$

(Biến n lấy các giá trị nguyên dương được thay bằng biến số x lấy các giá trị trên khoảng $(0; +\infty)$)

$$f'(x) = 480 - 40x; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 12$$



Tren $(0; +\infty)$ hàm số $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 12$

Suy ra trên tập hợp $\mathbb{N}^*$ các số nguyên dương, hàm số f đạt giá trị lớn nhất tại điểm $n = 12$.

Vậy muốn thu hoạch được nhiều cá nhất sau một vụ thì trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ phải thả 12 con cá.

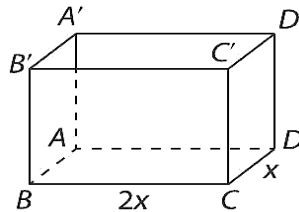
Câu 21: Ông Nam cần xây dựng một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp đậy để phục vụ cho việc tưới cây trong vườn. Do các điều kiện về diện tích vườn, ông Nam cần bể có thể tích là 36 m^3 , đáy bể có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và chiều rộng không quá 4 m, biết rằng chi phí vật liệu xây dựng mỗi mét vuông diện tích bề mặt là như nhau. Hỏi chiều cao bể nước bằng bao nhiêu để tổng chi phí vật liệu là nhỏ nhất?

Trả lời: cần xây bể có chiều cao là 2(m).

Lời giải

Xem bể chứa có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ như Hình 1.8.

Gọi $x(\text{m})$ là chiều rộng của bể, ta có $0 < x \leq 4$.



Hình 1.8

Chiều dài của bể là $2x(\text{ m})$.

Gọi $h(\text{ m})$ là chiều cao bể nước, ta có thể tích của bể là $V = x \cdot (2x) \cdot h$.

$$\text{Suy ra } h = \frac{V}{2x^2} = \frac{36}{2x^2} = \frac{18}{x^2} (\text{ m}).$$

Tổng diện tích các mặt cần xây là:

$$\begin{aligned} S &= S_{ABCD} + 2 \cdot S_{ABB'A'} + 2 \cdot S_{BCC'B'} \\ &= 2x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{18}{x^2} + 2 \cdot 2x \cdot \frac{18}{x^2} = 2x^2 + \frac{108}{x}. \end{aligned}$$

Xét hàm số $S(x) = 2x^2 + \frac{108}{x}$ ($0 < x \leq 4$), ta có:

$$S'(x) = 4x - \frac{108}{x^2} = \frac{4x^3 - 108}{x^2} = \frac{4(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2}.$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Do $x^2 > 0$ và $x^2 + 3x + 9 > 0$ khi $x \in (0; 4]$ nên dấu của $S'(x)$ trên $(0; 4]$ phụ thuộc dấu của biểu thức $x - 3$.

Bảng biến thiên:

x	0	3	4
$S'(x)$	-	0	+
$S(x)$		54	

Chi phí vật liệu xây dựng thấp nhất khi tổng diện tích các mặt cần xây $S(x)$ là nhỏ nhất. Dựa vào bảng biến thiên, ta có $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 3$, suy ra $h = 2$.

Vậy cần xây bể có chiều cao là 2(m).

Câu 22: Ông A dự định sử dụng hết 5m^2 kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: $1,01\text{m}^3$.

Lời giải

Gọi chiều rộng của bể cá là x $x > 0$.

Ông A dùng hết 5m^2 kính để làm bể cá nên $2x^2 + 6xh = 5 \Rightarrow h = \frac{5 - 2x^2}{6x}$.

Do $x > 0$ và $h > 0$ nên $0 < x < \sqrt{\frac{5}{2}}$.

Thể tích bể cá $V = \frac{1}{3}(5x - 2x^3)$.

$V' = \frac{1}{3}(5 - 6x^2)$, $V' = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

Bảng biến thiên của V :

x	0	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'	+	0	-
V	0	1,01	0

Từ BBT suy ra bể cá có thể tích lớn nhất bằng $1,01\text{m}^3$.

Câu 23: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 9t^2 + t + 10$ trong đó t tính bằng (s) và S tính bằng (m). Thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất là

Trả lời: $t = 3\text{s}$.

Lời giải

Ta có $v = S' = -3t^2 + 18t + 1 = -3(t - 3)^2 + 28 \leq 28, \forall t > 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $t = 3$.

Vậy vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng 28 khi $t = 3$.

Câu 24: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Trả lời: 105 (m/s)

Lời giải

Ta có $v = s' = -6t^2 + 48t + 9$.

Theo đề, ta cần tìm vận tốc lớn nhất trong 10 giây đầu tiên nên bài toán trở thành tìm GTLN của hàm số $v(t) = -6t^2 + 48t + 9$ trên đoạn $[0; 10]$.

Khi đó $v'(t) = -12t + 48, v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4 \in [0; 10]$.

Ta có $v(0) = 9; v(4) = 105; v(10) = -111$. Suy ra $v_{\max} = 105 \text{ (m/s)}$.

Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được trong khoảng 10 giây đầu tiên là 105 (m/s) .

Câu 25: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với t là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Khi đó vận tốc $v \text{ (m/s)}$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên bằng

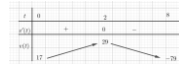
Trả lời: 29 m/s .

Lời giải

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t + 17$.

$v'(t) = -6t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Xét trong khoảng 8 giây đầu tiên, nghĩa là $t \in [0; 8]$, ta được bảng biến thiên của hàm số $v(t)$:



Vậy $\max_{[0;8]} v(t) = 29 \text{ (m/s)}$ tại thời điểm $t = 2$.

Câu 26: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 3t^2 - 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính theo mét. Chuyển động có vận tốc lớn nhất là

Trả lời: 3 m/s.

Lời giải

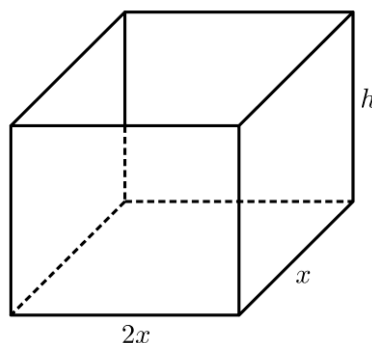
$$S = -t^3 + 3t^2 - 2 \Rightarrow v = -3t^2 + 6t = -3(t-1)^2 + 3 \leq 3.$$

Do đó $\max v = 3 \text{ (m/s)}$.

Câu 27: Ông A dự định sử dụng hết $6,5 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Trả lời: $1,50 \text{ m}^3$.

Lời giải



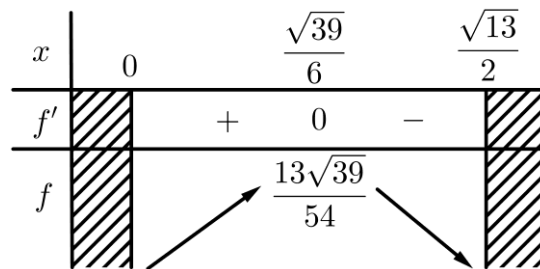
Giả sử bể cá có kích thước như hình vẽ.

$$\text{Ta có: } 2x^2 + 2xh + 4xh = 6,5 \Leftrightarrow h = \frac{6,5 - 2x^2}{6x}.$$

$$\text{Do } h > 0, x > 0 \text{ nên } 6,5 - 2x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Lại có $V = 2x^2h = \frac{6,5x - 2x^3}{3} = f(x)$, với $x \in \left(0; \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$.

$$f'(x) = \frac{13}{6} - 2x^2, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{39}}{6}.$$



$$\text{Vậy } V \leq f\left(\frac{\sqrt{39}}{6}\right) = \frac{13\sqrt{39}}{54} \approx 1,50 \text{ m}^3.$$

Câu 28: Một ông nông dân có 2400 m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là bao nhiêu?

Trả lời: 720000 m².

Lời giải

Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là x và y , với $2x + y = 2400$ ($0 < x, y < 2400$).

$$\text{Diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là: } S = xy = \frac{1}{2} 2x \cdot y \stackrel{AM-GM}{\leq} \frac{(2x + y)^2}{8} = \frac{2400^2}{8} = 720000.$$

Vậy ông nông dân có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là 720000 m².

Câu 29: Tìm m để tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng 5.

Trả lời: $m = 3$.

Lời giải

Ta có hàm số $y = f(x) = x^4 - 2x^2 + m$ liên tục trên $[-1; 1]$.

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4x.$$

$$\begin{cases} y' = 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 4x = 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

$$+) \quad x = \pm 1 \Rightarrow y = m - 1.$$

+) $x = 0 \Rightarrow y = m$.

Suy ra: Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ lần lượt là m và $m-1$.

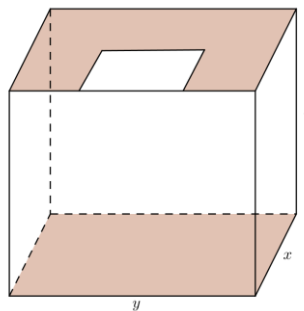
Theo đề bài ta có: $m + m - 1 = 5 \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 30: Ông An muốn xây một bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật, phần nắp trên ông để trống một ô có diện tích bằng 20% diện tích của đáy bể. Biết đáy bể là một hình chữ

Nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, biết bể có thể chứa tối đa $10m^3$ nước và giá tiền thuê nhân công là 500000 đồng/ m^2 . Số tiền trả ít nhất cho nhân công mà ông phải trả với số là:

Trả lời: 14 triệu đồng.

Lời giải



Gọi x, y, z lần lượt là chiều rộng, chiều dài và chiều cao của cái bể ($x, y, z > 0; y = 2x$). Đơn vị đo độ dài là mét (m).

Theo đề bài ta có: $V = xyz = 2x^2z = 10 \Leftrightarrow z = \frac{5}{x^2} (m)$.

Diện tích toàn phần cái bể:

$$S = 2xz + 2xy + 2yz - \frac{1}{5} \cdot xy = 2x \cdot \frac{5}{x^2} + 2x \cdot 2x + 2 \cdot 2x \cdot \frac{5}{x^2} - \frac{1}{5} \cdot x \cdot 2x (m^2).$$

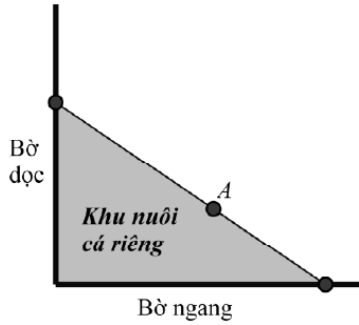
$$\Leftrightarrow S = \frac{30}{x} + \frac{16}{5}x^2 = \frac{15}{x} + \frac{15}{x} + \frac{18}{5}x^2 \geq 3\sqrt[3]{810} (Cos i).$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \frac{15}{x} = \frac{18}{5}x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{75}{18}} \Rightarrow S \approx 27,965 (m^2).$$

Vậy số tiền trả cho nhân công ít nhất là: $27,965 \times 500000 = 13.982.500$.

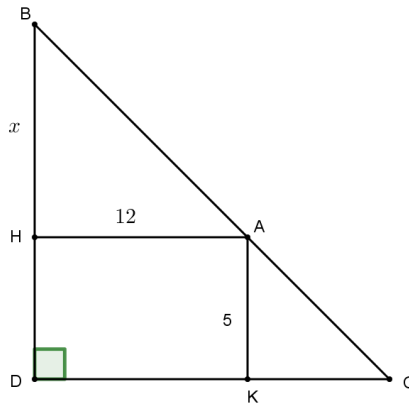
Câu 31: Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc hồ. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua một cái

cọc đã cắm sẵn ở vị trí A . Hỏi diện tích nhỏ nhất có thể giăng là bao nhiêu, biết rằng khoảng cách từ cọc đến bờ ngang là $5m$ và khoảng cách từ cọc đến bờ dọc là $12m$



Trả lời: $120m^2$.

Lời giải



Gọi H, K là hình chiếu của A trên bờ dọc và bờ ngang. Đặt $BH = x (x > 0)$.

$$\text{Khi đó, } \frac{BH}{HD} = \frac{BA}{AC} = \frac{DK}{KC} \Rightarrow KC = \frac{HD \cdot DK}{BH} = \frac{60}{x}.$$

Diện tích khu nuôi cá là:

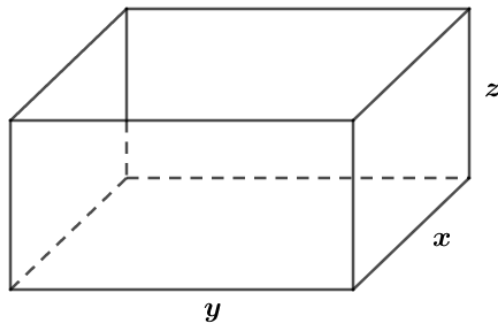
$$S = \frac{1}{2} BD \cdot DC = \frac{1}{2} (x + 5) \left(\frac{60}{x} + 12 \right) = 6x + \frac{150}{x} + 60 \geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{150}{x}} + 60$$

$\Rightarrow S \geq 120, S = 120$ khi $x = 5$. Vậy diện tích nhỏ nhất có thể giăng là $120m^2$.

Câu 32: Ông A dự định sử dụng hết $6,7m^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: $1,57m^3$.

Lời giải



Hình hộp chữ nhật không nắp lần lượt có chiều rộng, dài, cao là x, y, z , biết $y = 2x$

Diện tích không nắp $S = xy + 2xz + 2yz = 2x^2 + 6xz = 6,7m^2$ và thể tích $V = xyz = 2x^2z$

$$S = 2x^2 + 3xz + 3xz \geq 3\sqrt[3]{18x^4z^2} = 3\sqrt[3]{\frac{9V^2}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{S}{3}\right)^3 \geq \frac{9V^2}{2} \Leftrightarrow V \leq \frac{1}{3}\sqrt{2\left(\frac{S}{3}\right)^3}$$

$$\text{Suy ra: } \max V = \frac{1}{3}\sqrt{2\left(\frac{S}{3}\right)^3} \approx 1,57m^3;$$

$$\text{khi } 2x^2 = 3xz \Leftrightarrow z = \frac{2}{3}x \Leftrightarrow S = 2x^2 + 6x\left(\frac{2}{3}x\right) = 6x^2 = 6,7m^2 \Leftrightarrow x \approx 1,06.$$