

MỤC LỤC

▶ BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ	2
Ⓐ. Tóm tắt kiến thức	2
Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản.....	4
♦ Dạng 1: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.....	4
♦ Dạng 2: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số	5
♦ Dạng 3: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số	6
♦ Dạng 4: Ứng dụng thực tế.....	7
Ⓒ. Dạng toán rèn luyện.....	8
♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....	8
♦ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai	24
♦ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....	36

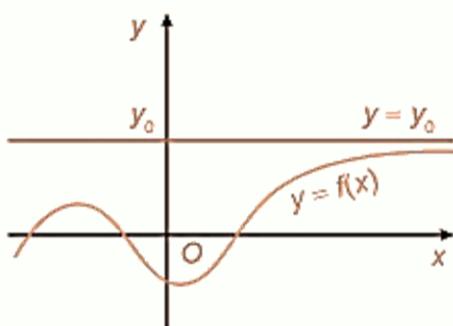
A. Tóm tắt kiến thức

1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

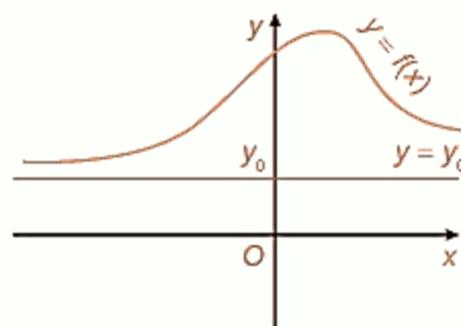
✍ Đường thẳng $y = y_0$ gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số

$y = f(x)$ nếu:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$.



Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



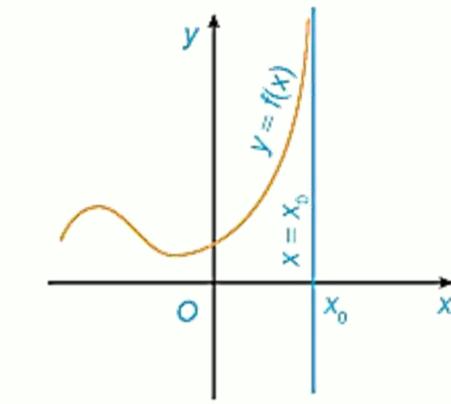
Đường thẳng $y = y_0$ là tiệm cận ngang của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Hình 1.20

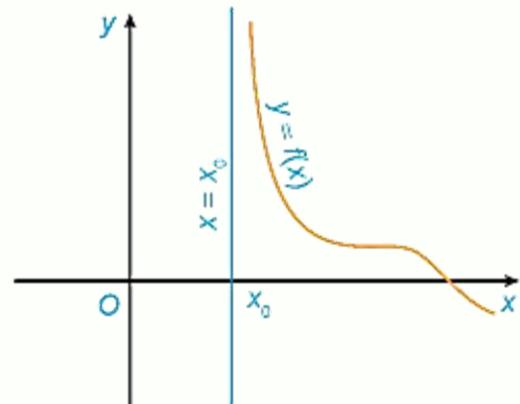
2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = x_0$ gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thoả mãn:

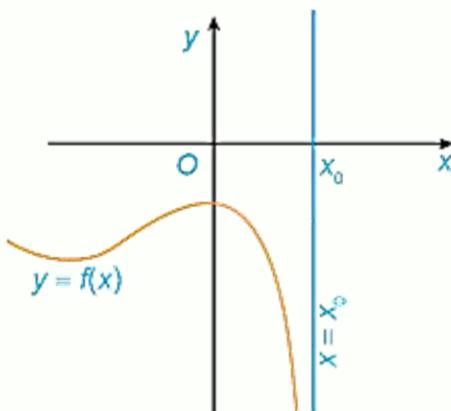
• $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$



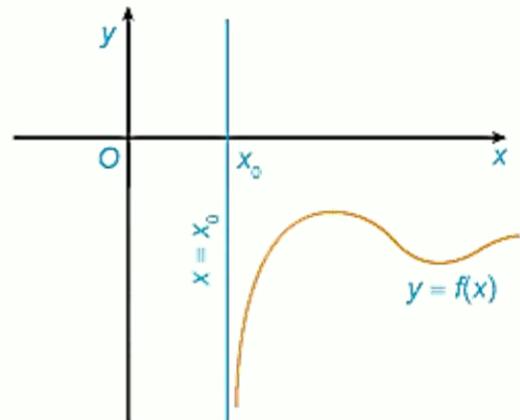
a)



b)



c)



d)

a) và c). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0$).

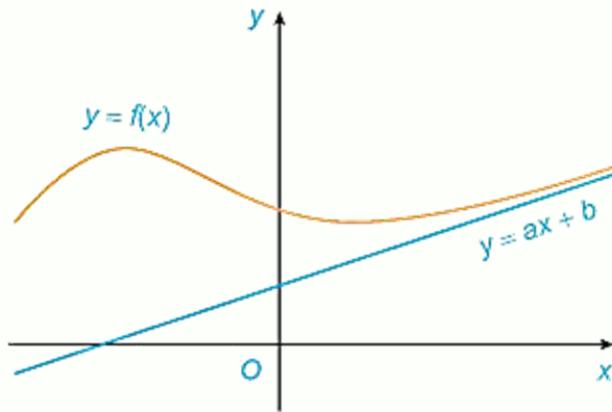
b) và d). Đường thẳng $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị (khi $x \rightarrow x_0$).

Hình 1.23

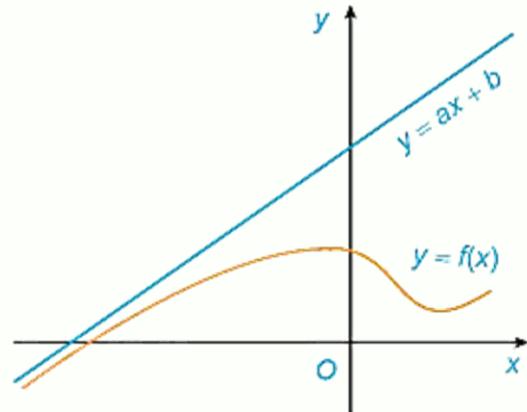
3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

✍ Đường thẳng $y = ax + b (a \neq 0)$ gọi là đường tiệm cận xiên (gọi tắt là tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu:

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow +\infty$).



Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị (khi $x \rightarrow -\infty$).

Hình 1.25

ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

♦ Dạng 1: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

👉 Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$.

Lời giải

♦ Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 3$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$.

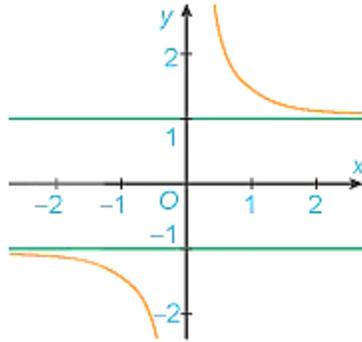
♦ Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 3$.

Câu 2: Tìm các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Lời giải

♦ Ta có:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = -1.$
- ♦ Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.



Hình 1.21

- ♦ **Nhận xét:** Đồ thị hàm số $f(x)$ như Hình 1.21.

Câu 3: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$.

Lời giải

- ♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

• Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -2;$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -2.$

- ♦ Vậy đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

♦ **Dạng 2:** Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

☞ **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{3-x}{x+2}$.

Lời giải

♦ Ta có: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3-x}{x+2} = +\infty.$ Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty.$

- ♦ Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Câu 2: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2+2}{x}$.

Lời giải

- ♦ Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+2}{x} = +\infty$. Tương tự, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.
- ♦ Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$.

Câu 3: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{x^2-1}$; b) $y = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$. Ta có $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$.

- ♦ Suy ra đường thẳng $x = -1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- ♦ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2-1} = +\infty$.

- ♦ Suy ra đường thẳng $x = 1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) Tập xác định: $D = (1; +\infty)$. Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

♦Dạng 3: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2-x+2}{x+1}$.

Lời giải

- ♦ Ta có:

- $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-x+2}{x^2+x} = 1$;

- $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+2}{x+1} = -2$.

- (Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -2$.)

- ♦ Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

Câu 2: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x-2}$.

Lời giải

- ♦ Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- ♦ Ta có: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x} = 1$;
- ♦ $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{x - 2} = -1$.
- ♦ Ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -1$.
- ♦ Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 1$.

Câu 3: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x - 2}$.

Lời giải

- ♦ Ta có: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x}{x(x - 2)} = 1$ và $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x - 2} = 5$.
- ♦ Vậy đường thẳng $y = x + 5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow +\infty$).
- ♦ Tương tự, do $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 5$ nên đường thẳng $y = x + 5$ cũng là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho (khi $x \rightarrow -\infty$).

♦ Dạng 4: Ứng dụng thực tế

☞ Các ví dụ minh họa

Câu 1: Để loại bỏ $p\%$ một loài tảo độc khỏi hồ nước, người ta ước tính chi phí bỏ ra là $C(p) = \frac{45p}{100 - p}$ (triệu đồng), với $0 \leq p < 100$. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa của đường tiệm cận này.

Lời giải

- ♦ Ta có: $\lim_{p \rightarrow 100^-} C(p) = \lim_{p \rightarrow 100^-} \frac{45p}{100 - p} = +\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $C(p)$ là $p = 100$.
- ♦ Ý nghĩa của đường tiệm cận là: Không thể loại bỏ hết loài tảo độc ra khỏi hồ nước dù chi phí là bao nhiêu.

Câu 2: Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng). Khi đó, $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

Lời giải

- ♦ Ta có: $f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x+50}{x}$
- ♦ Vì $f'(x) = \frac{-50}{x^2} < 0$ với mọi số thực x nên hàm số $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ giảm.
- ♦ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+50}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+\frac{50}{x}}{1} = 2$ (đpcm)
- ♦ Tính chất này nói lên: Khi sản xuất càng nhiều sản phẩm thì chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm càng giảm, nhưng không dưới 2.

Câu 3: Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng $144m^2$.

Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là $x(m)$.

- Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.
- Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Lời giải

a) Độ dài cạnh còn lại của mảnh vườn là: $\frac{144}{x}(m)$

♦ Chu vi của mảnh vườn là: $P(x) = 2\left(x + \frac{144}{x}\right) = 2x + \frac{288}{x}(m)$

b) Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{288}{x}\right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2x + \frac{288}{x}\right) = -\infty$

♦ Do đó, đồ thị hàm số $P(x)$ không có tiệm cận ngang.

♦ Vì $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2x + \frac{288}{x}\right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{288}{x}\right) = +\infty$

♦ Do đó, đồ thị hàm số $P(x)$ có tiệm cận đứng là $x = 0$.

♦ Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [P(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x + \frac{288}{x} - 2x\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{288}{x} = 0$

♦ Do đó, đồ thị hàm số $P(x)$ có tiệm cận xiên là: $y = 2x$.

©. Dạng toán rèn luyện

♦ **Dạng 1:** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	5		2

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đồ thị hàm số có hai TCN $y = 2$, $y = 5$ và có một TCD $x = -1$.
- B. Đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận.
- C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.
- D. Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy:

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 5$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2$ nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang $y = 2$, $y = 5$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
y'	-		- 0 +	
y	-3		-5	2

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -3 \Rightarrow y = -3$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty$, suy ra: đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x = -2$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$, suy ra: đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, suy ra: đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 0$

Vậy đồ thị hàm số đã cho có ba đường tiệm cận.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
y'	+		+	
y	0	$+\infty$	$+\infty$	0

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Dựa vào BBT ta có

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = -\infty \Rightarrow x = -3$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow 3^+} y = -\infty \Rightarrow x = 3$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy số đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho là 3.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
y'	-		-	
y	5	4	$+\infty$	$-\infty$

Tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho bằng:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 5 \Rightarrow y = 5$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty \Rightarrow x = 2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 3^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} y = +\infty \Rightarrow x = 3$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy, tổng số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là 3.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
y'		$-$	$-$	0	$+$
y	-1		$+\infty$	0	1

- A. Đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.
- B. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
- C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 1 và có giá trị nhỏ nhất bằng 0.
- D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$

Lời giải

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 1; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -1$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y = 1, y = -1$.

Do $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -1$. Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		$+\infty$	5
	2		3

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 4.
- B. 1.
- C. 3.
- D. 2.

Lời giải

Theo bảng biến thiên của hàm số thì tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 5 \Rightarrow y = 5$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \Rightarrow x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận (2 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng).

Câu 16: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{x+3}$ là

- A. $x = 2$.
- B. $x = -3$.
- C. $y = -1$.
- D. $y = -3$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R} \setminus -3$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -3^+} y = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2-x}{x+3} = +\infty$.

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -3$.

Câu 17: Đường thẳng $x = 3, y = 2$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

- A. $y = \frac{2x-3}{x+3}$.
- B. $y = \frac{x-3}{x+3}$.
- C. $y = \frac{3x-1}{x-3}$.
- D. $y = \frac{2x-3}{x-3}$.

Lời giải

Đồ thị hàm phân thức $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với $ad-bc \neq 0$ luôn có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x = -\frac{d}{c}$ và $y = \frac{a}{c}$.

Quan sát 4 đáp án thì ta thấy hàm số $y = \frac{2x-3}{x-3}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 18: Đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x}{x+2}$ có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là:

- A.** $x = -2$ và $y = -3$. **B.** $x = -2$ và $y = 1$.
C. $x = -2$ và $y = 3$. **D.** $x = 2$ và $y = 1$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0$; $ad-bc \neq 0$) có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x = -\frac{d}{c}$ và $y = \frac{a}{c}$.

Hàm số $y = \frac{1-3x}{x+2}$ được viết lại $y = \frac{-3x+1}{x+2}$.

Do đó đồ thị hàm số có các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x = -2$ và $y = -3$.

Câu 19: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2}{-x+3}$ có phương trình là

- A.** $y = 0$. **B.** $y = -2$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{-x+3}}{-1 + \frac{3}{x}} = 0.$$

Vậy đường tiệm cận ngang có phương trình là $y = 0$.

Câu 20: Tìm tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+2}$.

- A.** $(2;1)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-2;-2)$. **D.** $(-2;1)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là đường tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \Rightarrow x = -2$ là đường tiệm cận đứng.

Vậy tọa độ giao điểm của đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $(-2;1)$.

Câu 21: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{6x-3}$ là

A. 3.

B. 2.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} y = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{x-1}{6x-3} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} y = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{x-1}{6x-3} = +\infty$

nên đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{6x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{6-\frac{3}{x}} = \frac{1}{6}$ nên đường thẳng $y = \frac{1}{6}$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{3}{x-2}$. Số tiệm cận của đồ thị hàm số là

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x-2} = 0 \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x-2} = +\infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận.

Câu 23: Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ là $D = (2; +\infty)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2} = 0 \Rightarrow$ đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2} = +\infty \Rightarrow$ đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}+1}{x^2-3x+2}$ có 2 đường tiệm cận.

Câu 24: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+3x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

$$D = -2; 2 \setminus 0 .$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+3x} = -\infty; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2+3x} = +\infty.$$

Vậy đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 0$ làm tiệm cận đứng.

Câu 25: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x^2-2}$ là

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = 0; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+2}{x^2-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = 0 \text{ suy ra đường}$$

thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} (x+2) = 2 + \sqrt{2} > 0, \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} (x^2-2) = 0, x^2-2 > 0 \text{ với mọi } x > \sqrt{2}.$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} y = \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{x+2}{x^2-2} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = \sqrt{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} (x+2) = 2 - \sqrt{2} > 0, \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} (x^2-2) = 0, x^2-2 > 0 \text{ với mọi } x < -\sqrt{2}.$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} y = \lim_{x \rightarrow (-\sqrt{2})^-} \frac{x+2}{x^2-2} = +\infty$ suy ra đường thẳng $x = -\sqrt{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 3 đường tiệm cận.

Câu 26: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ là

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ là $D = [-2; -1) \cup (-1; 2]$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4} = -\infty$$

$\Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-3x-4}$ không có tiệm cận ngang.

Câu 27: Số đường tiệm cận của đồ hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-3}$.

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Tập xác định : $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{1-\frac{3}{x}} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}{1-\frac{3}{x}} = -1.$$

Do đó đồ thị có 2 tiệm cận ngang là: $y = 1$ và $y = -1$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-3} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x-3} = -\infty$$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 3$.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{x}{x^2-2}$ có đồ thị là đường cong (C). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (C) có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

B. (C) có hai tiệm cận đứng và không tiệm cận ngang.

C. (C) có hai tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

D. (C) có hai tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{x}{x^2-2}$ có tập xác định là: $D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2-2} = 0$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} \frac{x}{x^2-2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} \frac{x}{x^2-2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^-} \frac{x}{x^2-2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{x}{x^2-2} = +\infty.$$

Nên đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = -\sqrt{2}; x = \sqrt{2}$

Vậy (C) có hai tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Câu 29: Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4}}{x-1}$ là

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Tập xác định: $D = [4; +\infty)$.

Câu 34: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-2}{x^2-4}$ có đúng hai đường tiệm cận?

A. $m=0$.

B. $m=1$.

C. $m=-1$.

D. $m=\pm 1$.

Lời giải

Với $m=0$, đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$ và hai tiệm cận đứng $x=2, x=-2$. Do đó không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Với $m \neq 0$, đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang $y=0$. Do đó, đồ thị có đúng hai

$$\text{đường tiệm cận} \Leftrightarrow \text{đồ thị có đúng 1 đường tiệm cận đứng} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-2=0 \\ -2m-2 \neq 0 \\ -2m-2=0 \\ 2m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=-1 \end{cases}$$

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+m}$ có hai tiệm cận đứng

A. $m < 0; m \neq 1$.

B. $m < 0$.

C. $m > 0; m \neq 1$.

D. $m < -1$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2+m}$ có hai tiệm cận đứng khi phương trình $x^2+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

Câu 36: Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng là $x=2$ và tiệm cận ngang là $y=3$. Giá trị của $a+b$ bằng

A. 5.

B. 4.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Điều kiện để đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $-2a-b \neq 0$.

$b \neq 0$ vì nếu $b=0$, đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{-2}$ không có tiệm cận.

Tập xác định của hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ là $D = \left(-\infty; \frac{2}{b}\right) \cup \left(\frac{2}{b}; +\infty\right)$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax+1}{bx-2} = \frac{a}{b} \Rightarrow y = \frac{a}{b}$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Theo giả thiết ta có $\frac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow a = 3b$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+1}{bx-2}$ có $x = \frac{2}{b}$ là đường tiệm cận đứng.

Theo giả thiết ta có $\frac{2}{b} = 2 \Leftrightarrow b = 1 \Rightarrow a = 3$.

Vậy $a + b = 4$.

- Câu 37:** Cho hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m \neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng có phương trình nào dưới đây?
A. $2x + y = 0$. **B.** $y = 2x$. **C.** $x - 2y = 0$. **D.** $x + 2y = 0$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{mx+1}{x-2m}$ có tiệm cận đứng $x = 2m$; tiệm cận ngang $y = m$

\Rightarrow Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $I(2m; m)$

$\Rightarrow x = 2y \Rightarrow x - 2y = 0$.

- Câu 38:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^3 - 2}{x^2 - 3x + 2}$ có hai đường tiệm cận đứng.

- A.** $\begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases}$. **B.** $m \neq 0$. **C.** $\begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 1 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases}$.

Lời giải

Ta có $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Đồ thị hàm số $y = \frac{mx^3 - 2}{x^2 - 3x + 2}$ có hai đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi $x = 1, x = 2$

không là nghiệm của phương trình: $mx^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ 8m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases}$.

- Câu 39:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - mx - 2m^2}{x - 2}$ có đường tiệm cận đứng.

- A.** $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$. **B.** Không có m thỏa mãn.
C. $\begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$. **D.** $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - mx - 2m^2}{x - 2}$ có đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow 2^2 - m \cdot 2 - 2m^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -2 \\ m \neq 1 \end{cases}$.

- Câu 40:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{5x - 3}{x^2 - 2mx + 1}$ không có tiệm cận đứng.

- A. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 1 \end{cases}$ B. $-1 < m < 1$. C. $m = -1$. D. $m = 1$.

Lời giải

Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng trong hai trường hợp:

TH1: Phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

TH2: Phương trình $x^2 - 2mx + 1 = 0$ có nghiệm kép bằng $\frac{3}{5}$.

$$\text{Xét } \Delta = m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Với $m = 1$, nghiệm kép là $x_0 = m = 1 \neq \frac{3}{5}$.

Với $m = -1$, nghiệm kép là $x_0 = m = -1 \neq \frac{3}{5}$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận đứng khi $-1 < m < 1$.

- Câu 41:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - mx - m + 5}$ không có đường tiệm cận đứng?
A. 8. B. 10. C. 11. D. 9.

Lời giải

$$\text{Nhận xét: } x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 - mx - m + 5.$$

Hàm số đã cho không có đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta_f < 0 \\ \Delta_f > 0 \\ f(1) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m - 20 < 0 \\ m^2 + 4m - 20 > 0 \\ 1 - m - m + 5 = 0 \\ 4 - 2m - m + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 2\sqrt{6} < m < -2 + 2\sqrt{6} \\ m = 3 \end{cases}$$

Vì m là số nguyên nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

- Câu 42:** Biết rằng đồ thị của hàm số $y = \frac{(n-3)x + n - 2023}{x + m + 3}$ (m, n là tham số) nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Tính tổng $m - 2n$.
A. 0. B. -3. C. -9. D. 6.

Lời giải

Theo bài ra tiệm cận ngang là trục hoành suy ra phương trình đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$. Ta có: $n - 3 = 0 \Rightarrow n = 3$.

Theo bài ra tiệm cận đứng là trục tung suy ra phương trình đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 0$. Ta có: $-m - 3 = 0 \Rightarrow m = -3$.

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 2x - 3} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$$

$\Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Vậy $m + n = 1$.

♦ **Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai**

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{2x-1}$ có đồ thị (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đường thẳng $y = -3$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

b) Đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

c) Đường thẳng $x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

d). Đường thẳng $y = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-1}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{2 - \frac{1}{x}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là } y = \frac{3}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \left(\frac{3x-1}{2x-1}\right) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \left(\frac{3x-1}{2x-1}\right) = +\infty \Rightarrow \text{Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là } x = \frac{1}{2}.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-3}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 3$, tiệm cận ngang $y = 3$.

b) Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 2$.

c) Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 2$, tiệm cận ngang $y = 3$.

d) Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 3$, tiệm cận ngang $y = 2$.

Lời giải

a) S

b) S

c) S

d) Đ

Đồ thị có đường tiệm cận đứng $x = 3$, tiệm cận ngang $y = 2$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
- c) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
- d) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

Lời giải

- a) S b) Đ c) S d) S

Theo giả thiết ta có:

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, suy ra đường $y = 1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

+ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, suy ra đường $y = -1$ là một đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang l.
- b) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x = 3$.
- c) Đồ thị hàm số có duy nhất một đường tiệm cận ngang.
- d) Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $x = 3$.

Lời giải

- a) S b) S c) Đ d) S

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận ngang là $y = 3$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-5; -1)$ và có $\lim_{x \rightarrow (-5)^+} f(x) = 5$ $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận đứng.
- b) Đồ thị hàm số $f(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.
- c) Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang.
- d) Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -5$ và $x = -1$.

Lời giải

- a) S b) Đ c) S d) S

Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số $f(x)$ có một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 2$.
- b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$.
- c) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 0$.
- d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 2$.

Lời giải

- a) S b) S c) Đ d) S

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 0$.

Câu 7: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$ là $y = 3$
- b) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$ là $y = 2$
- c) Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x-1}$ là $x = -2$
- d) Đồ thị của hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là $x = -1$

Lời giải

- a) Đ b) S c) S d) Đ

a) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3 \Rightarrow y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. **Chọn Đ**

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty$ do đó đường thẳng $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. **Chọn S**

c) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+2}{x-1} = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x+2}{x-1} = -\infty$.

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 1$. **Chọn S**

d) Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x-2}{x+1} = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x-2}{x+1} = +\infty$.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 1 tiệm cận đứng là $x = -1$. **Chọn Đ**

Câu 8: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đường tiệm cận ngang là $y = 1$

b) Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+x-2}{x-2}$ là $x = 2$

c) Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+2}$ là $x = 3$

d) Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{3x+2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 3$.

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) S

d) S

a) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$, suy ra đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y = 1$. **Chọn Đ**

b) Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+x-2}{x-2} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+x-2}{x-2} = -\infty$

Suy ra hàm số có tiệm cận đứng là $x = 2$. **Chọn Đ**

c) Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \Rightarrow$ Đường tiệm cận đứng là $x = -2$. **Chọn S**

d) Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-1}{3x+2} = 1$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 1$. **Chọn S**

Câu 9: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-	
$f(x)$	0 \searrow	$+\infty \searrow$	$+\infty \searrow$	$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3

b) Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-6}{x+1}$ là $y = 2$

c) Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{3-x}$. Vậy kết quả là: $y = \frac{2}{3}$

d) Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x+1} - \frac{3x}{2x-1}$. Vậy kết quả là: $y = -\frac{3}{2}$

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) S

d) S

a) Dựa vào bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số nhận các đường thẳng $x = -2$, $x = 2$ là các đường tiệm cận đứng, $y = 0$ là tiệm cận ngang

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là 3. **Chọn Đ**

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-6}{x-1} = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-6}{x-1} = 2$.

Do đó $y = 2$ là phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-6}{x+1}$. **Chọn Đ**

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+1}{3-x} = -2$ nên $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. **Chọn S**

d) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x+1} - \frac{3x}{2x-1}$. **Chọn S**

Câu 10: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+5}{-3x-1}$ là $y = \frac{-2}{3}$

b) Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là $x = 1$

c) Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ là 0

d) Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{-3x+2}$ là $y = -\frac{1}{3}$

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) Đ

d) Đ

a) Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{-2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{-2}{3}$$

Vậy tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+5}{-3x-1}$ là đường thẳng $y = \frac{-2}{3}$. **Chọn Đ**

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+1}{x-1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+1}{x-1} = -\infty$.

Do đó tiệm cận đứng của đồ thị có phương trình $x = 1$. **Chọn Đ**

c) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng. **Chọn Đ**

d) Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{-3x+2} = -\frac{1}{3}$. Vậy $y = -\frac{1}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. **Chọn Đ**

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- c) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $x = 2$ và $x = -2$.
- d) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = 2$ và $y = -2$.

Lời giải

a) S

b) S

c) S

d) Đ

Theo định nghĩa về tiệm cận, ta có:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ suy ra $y = -2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ suy ra $y = 2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 12: Cho bảng biến thiên hàm số $y = f(x)$,

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	2		$+\infty$
	$\rightarrow -\infty$		$\rightarrow 2$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
- b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$.
- c) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- d) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 2$.

Lời giải

a) S

b) Đ

c) Đ

d) Đ

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 2$.

Vậy câu A sai.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- c) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

d) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x=1$ và $x=-1$.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \text{Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là } y = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1 \Rightarrow \text{Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là } y = -1.$$

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây, trong đó $m \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$		
y'	-		+	0	-		+
y	$m-1$			-2			$3-m$
		$-\infty$	-5		-5	$-\infty$	

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R}$.

b) Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

c) Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R}$.

d) Đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) S

Từ BBT ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty \text{ nên đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ là đường thẳng } x = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} y = -\infty \text{ nên đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ là đường thẳng } x = 4.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = m - 1 \text{ nên đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ là đường thẳng } y = m - 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3 - m \text{ nên đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số } y = f(x) \text{ là đường thẳng } y = 3 - m.$$

Với $m - 1 \neq 3 - m \Leftrightarrow m \neq 2$ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số đã cho có đúng một tiệm cận ngang.
- c) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
- d) Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.

Lời giải

- a) S b) S c) Đ d) S

Ta có :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 1$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = -1$.

Vậy đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây, trong đó $m \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$	1	2	4	$+\infty$	
y'	-		+	-		+
y	$m-1$		-2	-5		$3-m$

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 1 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R}$.
- b) Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- c) Đồ thị hàm số có đúng 2 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R}$.
- d) Đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận đứng và 2 đường tiệm cận ngang với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Lời giải

- a) S b) Đ c) S d) S

Từ BBT ta có:

+ $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$ nên đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $x = 1$.

+ $\lim_{x \rightarrow 4^+} y = -\infty$ nên đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $x = 4$.

+ $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = m-1$ nên đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $y = m-1$.

+ $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 3 - m$ nên đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $y = 3 - m$.

Với $m - 1 \neq 3 - m \Leftrightarrow m \neq 2$ thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x^2-9}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = 3; x = -3$.
- b) Đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng là $x = -3$.
- c) Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- d) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y = 1$.

Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) S

Ta có $y = \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3} \Rightarrow$ tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x+3} = 0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

$\lim_{x \rightarrow (-3)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^+} \frac{1}{x+3} = +\infty \Rightarrow$ đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x = -3$.

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{-x-1}$ (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.
- b) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
- c) Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.
- d) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -2$.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) Đ

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2$ nên đường tiệm cận ngang của ĐTHS là đường thẳng $y = -2$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$ suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang. Vậy đồ thị hàm số chỉ có đúng một tiệm cận đứng.

Câu 21: Cho hàm số $y = \frac{2x+1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^2+x-2}}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
- b) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 0$.
- c) Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là đường thẳng $y = -2$.
- d) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là hai đường thẳng $y = -2$ và $y = 2$.

Lời giải

a) S

b) S

c) S

d) Đ

Tập xác định: $D = (1; +\infty)$.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^2+x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^2+x-2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}} = -2$$

Vậy, đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = -2$ và $y = 2$.

Câu 22: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Hàm số có tập xác định $D = (-1; 1)$.
- b) Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.
- c) Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = -1$.
- d) Hàm số có một cực trị.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) Đ

Đk để hàm số xác định là: $1 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \rightarrow D = (-1; 1)$.

Do hàm số có tập xác định $D = (-1; 1)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ do đó đồ thị hàm số này không có đường tiệm cận ngang.

Do $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ nên đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = -1$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{(x+2)' \sqrt{1-x^2} - (\sqrt{1-x^2})' \cdot (x+2)}{1-x^2} = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x(x+2)}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} = \frac{2x+1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}.$$

Do y' bị đổi dấu qua $x = -\frac{1}{2}$ nên hàm số có một cực trị.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- b) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $y = 1$, $y = -1$ và hai đường tiệm cận ngang là $x = 2$, $x = -2$.
- c) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y = 1$, $y = -1$ và hai đường tiệm cận đứng là $x = 2$, $x = -2$.
- d) Đồ thị hàm số có **đúng** một đường tiệm cận ngang là $y = 1$, hai đường tiệm cận đứng là $x = 2$, $x = -2$.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus [-2; 2]$.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} y = -\infty$. \Rightarrow Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x = 2$, $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{|x| \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}} = -1 \Rightarrow \text{Đồ thị có hai đường tiệm cận ngang là } y = 1, y = -1.$$

Vậy $m+n=9$.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{5x-3}{x^2+4x-m}$ với m là tham số thực. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Nếu $m > -4$ đồ thị hàm số có ít nhất một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.
- b) Nếu $m = -4$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang và một tiệm cận đứng.
- c) Với mọi m hàm số luôn có hai tiệm cận đứng.
- d) Nếu $m < -4$ đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang.

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) Đ

d) S

Xét phương trình $x^2 + 4x - m = 0$, với $\Delta' = 4 + m < 0 \Leftrightarrow m < -4$ thì phương trình này vô nghiệm nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. M và N là hai điểm thuộc đồ thị của hàm số sao cho hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M và N song song với nhau. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Hai điểm M và N đối xứng với nhau qua gốc tọa độ.
- Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN .
- Hai điểm M và N đối xứng với nhau qua giao điểm của hai đường tiệm cận.
- Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đi qua trung điểm của đoạn thẳng MN .

Lời giải

a) S

b) Đ

c) Đ

d) Đ

$$\text{Ta có } y = 1 + \frac{2}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Gọi $M\left(m; 1 + \frac{2}{m-1}\right)$, $N\left(n; 1 + \frac{2}{n-1}\right)$ là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$.

Theo đề bài tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M và N song song với nhau nên $y'(m) = y'(n)$

$$\Leftrightarrow \frac{-2}{(m-1)^2} = \frac{-2}{(n-1)^2} \Rightarrow m+n=2.$$

Vậy M và N không đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

♦ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy , hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ đồ thị là (C) . Giao điểm của hai tiệm cận của (C)

có tọa độ là:

Trả lời: $(-1; 1)$

Lời giải

Tiệm cận ngang là: $y = 1$.

Tiệm cận đứng là: $x = -1$.

Vậy tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) là $(-1; 1)$.

Câu 2: Tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-7}{x+2}$ là

Trả lời: $(-2; 3)$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 3$ tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có phương trình là $y = 3$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} y = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số có phương trình là } x = -2$$

Suy ra: tọa độ giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số là $I(-2;3)$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng

Trả lời: $x = -2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x-1}{x+2} = -\infty.$$

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -2$.

Câu 4: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+2}{x^2-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

Trả lời: 2.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty$ nên đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng.

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x-1} = 0$ nên đồ thị nhận đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'		-	0	+
y	0 ↙ -4	$+\infty$ ↘ -3	-3 ↗ 3	

Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị đã cho bằng

Trả lời: 3.

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ có hai tiệm cận ngang.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ có một tiệm cận đứng.

Vậy tổng cộng có ba tiệm cận.

Câu 6: Đường thẳng $y = \frac{1}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

Trả lời: $y = \frac{x+1}{3x-3}$

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{3x-3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{3 - \frac{3}{x}} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ Đường thẳng $y = \frac{1}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 7: Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số?

Trả lời: $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \frac{a}{c}$.

Câu 8: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-5}{4x-8}$ là

Trả lời: $y = \frac{3}{4}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x-5}{4x-8} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3-\frac{5}{x}}{4-\frac{8}{x}} = \frac{3}{4}$$

\Rightarrow Đường $y = \frac{3}{4}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 9: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{2x-1}$ là

Trả lời: $y = 0$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{2x-1} = 0.$$

\Rightarrow Đường $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 10: Tìm phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$.

Trả lời: $x = -2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} y = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x-1}{x+2} = -\infty.$$

Vậy phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ là $x = -2$.

Câu 11: Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{9-6x}{3x+12}$

Trả lời: $x = -4$; $y = -2$.

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{9-6x}{3x+12} = -2 \Rightarrow y = -2$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow (-4)^+} \frac{9-6x}{3x+12} = +\infty \Rightarrow x = -4$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Câu 12: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+3}$.

Trả lời: $y = x - 6$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số y

Lời giải

Ta có: $y = f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+3} = x - 6 + \frac{20}{x+3}$.

Xét $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 6)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{20}{x+3} = 0$.

Vậy đường thẳng $y = x - 6$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x+3}$

Câu 13: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+3x}{x-5}$.

Trả lời: đường thẳng $x = 5$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{5\}$.

Ta có:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 5^-} y = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x^2+3x}{x-5} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} y = \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2+3x}{x-5} = +\infty \end{cases}$$

Vậy đường thẳng $x = 5$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho

Câu 14: Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$.

Trả lời: đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = -2$.

Vậy đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x) = x + \frac{1}{x+2}$. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Trả lời: đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0$. Tương tự $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = 0$.

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x$.

Câu 16: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x+1}$.

Trả lời: đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

Lời giải

Ta có:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^2 + x} = 1;$$

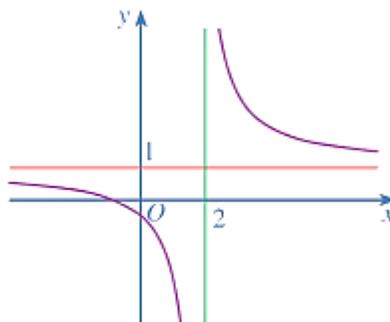
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x + 2}{x + 1} = -2.$$

(Tương tự, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = -2$.)

Vậy đồ thị hàm số $f(x)$ có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

Câu 17: Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

Lời giải



Hình 14

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1.$$

Vậy đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(1 + \frac{3}{x-2}\right) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(1 + \frac{3}{x-2}\right) = +\infty.$$

Vậy đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

Câu 18: Tìm tiệm cận đứng, ngang, xiên (nếu có) của đồ thị mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{2-x}$

b) $y = \frac{2x^2-3x+2}{x-1}$

c) $y = x - 3 + \frac{1}{x^2}$

Trả lời:

a) đường thẳng $y = -1$ và $x = 2$ lần lượt là đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{2-x}$

b) đường thẳng $x = 1$ và đường thẳng $y = 2x - 1$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2-3x+2}{x-1}$

c) đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $y = x - 3$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = x - 3 + \frac{1}{x^2}$

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{x}{2-x} = -1$

Mặt khác, $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} y = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{2-x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} y = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{2-x} = -\infty \end{cases}$

Vậy đường thẳng $y = -1$ và $x = 2$ lần lượt là đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x}{2-x}$

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3x + 2}{x-1} = +\infty \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác, } y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x-1} = 2x - 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (2x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Vậy đường thẳng $x = 1$ và đường thẳng $y = 2x - 1$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x-1}$

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} y = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x - 3 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} y = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x - 3 + \frac{1}{x^2}\right) = +\infty \end{cases}$$

Xét

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x - 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Vậy đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $y = x - 3$ lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = x - 3 + \frac{1}{x^2}$

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$	

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(3-x)-2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng

Trả lời: 3.

Lời giải

Ta thấy $f(x) = 2$ có 3 nghiệm \Rightarrow đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(3-x)-2}$ có 3 tiệm cận đứng.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Hỏi đồ thị hàm số đó có mấy tiệm cận.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		-	-
y	2		-2

$\xrightarrow{\text{from } x=2} \begin{matrix} \text{to } y=2 \\ \text{to } y=-\infty \end{matrix}$
 $\xrightarrow{\text{from } x=+\infty} \begin{matrix} \text{to } y=+\infty \\ \text{to } y=-2 \end{matrix}$

Trả lời: 2.

Lời giải

Ta có.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2 \Rightarrow y = -2 \text{ là tiệm cận ngang.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} y = -\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} y = +\infty \Rightarrow x = 2 \text{ là tiệm cận đứng.}$$

Câu 21: Cho hàm số $y = \sqrt{4x - x^2}$, tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số là

Trả lời: 0.

Lời giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 4$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Đồ thị hàm số cũng không có tiệm cận đứng.

Vậy tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số là 0.

Câu 22: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$ là

Trả lời: 3.

Lời giải

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(tm) \\ x = 2(tm) \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 1, x = 2$ là TCD

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^2-3x+2} = 0$$

$\Rightarrow y = 0$ là TCN

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2-3x+2}$ có ba đường tiệm cận.

Câu 23: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ là

Trả lời: 2.

Lời giải

$$+ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = 1 \text{ nên đồ thị hàm số có tiệm cận ngang } y = 1$$

$$+ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x-2}{x+1} = +\infty$$

$$+ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x-2}{x+1} = -\infty$$

nên đồ thị hàm số tiệm cận đứng $x = -1$

$$+ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2} \text{ nên đường thẳng } x = -1 \text{ không là tiệm cận đứng}$$

$$+ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2}$$

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{x-1}{x^2-2mx+4}$ có 3 đường

tiệm cận.

$$\text{Trả lời: } \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ nên đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 0, \forall m$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận

\Leftrightarrow phương trình $x^2 - 2mx + 4 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ m \neq \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \frac{5}{2} \\ m > 2 \\ m < -2 \end{cases}.$$

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x+4}{x-m}$ có tiệm cận đứng.

Trả lời: $m \neq -2$.

Lời giải

YCBT \Leftrightarrow Phương trình $x-m=0$ có nghiệm khác $-2 \Rightarrow m \neq -2$.

Câu 26: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-4}$ là

Trả lời: 2.

Lời giải.

Tập xác định $D = (-\infty; -2) \cup (-2; 1)$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-4} = 0$. Suy ra $y = 0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-4} = +\infty$. Suy ra $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-4}$ có hai đường tiệm cận.

Câu 27: Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-4x}{2x-1}$?

Trả lời: $y = -2$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -2$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -2$

Suy ra đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = -2$.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{3x-9}{x+m}$ có tiệm cận đứng

Trả lời: $m \neq -3$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

Để dàng chọn được A

Câu 29: Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2+1}$.

Trả lời: 1.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Vì $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y = 0$.

Vậy đồ thị hàm số có một đường tiệm cận.

Câu 30: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ có các đường tiệm cận ngang là

Trả lời: $y=1$ và $y=-1$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = 1$$

\Rightarrow Đường $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = -1$$

\Rightarrow Đường $y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 31: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 1 + \frac{2x+1}{x+2}$ có phương trình là:

Trả lời: $y = 3$.

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2x+1}{x+2}\right) = 1 + 2 = 3$ nên đồ thị hàm số có TCN: $y = 3$.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$					
y'		-	0	+		+			
y	1		$-\sqrt{2}$		$+\infty$		$-\infty$		-1

Trả lời: 3.

Lời giải

Do $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1 \Rightarrow$ đồ thị có 2 tiệm cận ngang là $y = \pm 1$

Vậy, đồ thị hàm số đã cho có tổng số TCĐ và TCN là 3.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Hỏi đồ thị hàm số đã cho có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$					
y'		-		-	0	+			
y	3		$+\infty$		$-\infty$		-2		5

Trả lời: 3.

Lời giải

Ta có

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 3$ nên $y = 3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 5$ nên $y = 5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty \end{cases}$ nên $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có 3 tiệm cận đứng và ngang.

Câu 34: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$ là:

Trả lời: 3.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}$.

Tập xác định: $D = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

$$+) \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = -1 \text{ nên } y = -1 \text{ là một đường tiệm cận ngang của } (C).$$

$$+) \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{9}{x^2}}} = 1 \text{ nên } y = 1 \text{ cũng là một đường tiệm cận ngang của } (C).$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 3^+} y = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+3}} = 0 \text{ nên } x = 3 \text{ không phải là đường tiệm cận đứng của } (C).$$

$$+) \lim_{x \rightarrow (-3)^-} y = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}} = -\infty \text{ nên } x = -3 \text{ là đường tiệm cận đứng của } (C).$$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có 3 đường tiệm cận.

Câu 35: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx + \sqrt{x^2 - 2x + 3}}{2x - 1}$ có một tiệm cận ngang

là: $y = 2$.

Trả lời: 2.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{m+1}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{m-1}{2}$.

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là: $y = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m+1}{2} = 2 \\ \frac{m-1}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 5 \end{cases}$.

Câu 36: Giá trị của m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+m}$ đi qua $M(2;3)$ là

Trả lời: -2 .

Lời giải

TCD: $x = -m$ qua $M(2;3) \Leftrightarrow m = -2$.

Câu 37: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

Trả lời: 6 .

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$ có các đường tiệm cận là $x = 3, y = 2$.

Do vậy hai đường tiệm cận tạo với hai trục tọa độ hình chữ nhật diện tích bằng 6 .

Câu 38: Xác định m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2}$ có đúng hai đường tiệm cận đứng.

Trả lời: $m < \frac{3}{2}; m \neq 1; m \neq -3$.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2}$ có đúng hai tiệm cận đứng

\Leftrightarrow phương trình $f(x) = x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 - (m^2 - 2) > 0 \\ 1 + 2(m-1) + m^2 - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m + 3 > 0 \\ m^2 + 2m - 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m \neq 1 \\ m \neq -3 \end{cases}$$

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{mx^2 + 1}$ có tiệm cận ngang.

Trả lời: $m = 1$.

Lời giải

Nếu $m = 0$ thì $y = x + 1$. Suy ra, đồ thị của nó không có tiệm cận ngang.

Nếu $m < 0$ thì hàm số xác định $\Leftrightarrow mx^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{-m}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{-m}}$.

Do đó, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$ không tồn tại nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Với $0 < m < 1$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \sqrt{m + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{m + \frac{1}{x^2}} \right) = -\infty$ nên đồ thị

hàm số không có tiệm cận ngang.

Với $m = 1$ thì $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = 0.$$

Suy ra đường thẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x \rightarrow -\infty$.

- Với $m > 1$ thì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \sqrt{m + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 - \sqrt{m + \frac{1}{x^2}} \right) = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Câu 40: Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{mx^2 - 3x + 4}$ có đúng một

tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang. Số phần tử của S bằng:

Trả lời: 3.

Lời giải

TH1: $m = 0$ từ đó $y = \frac{x-1}{-3x+4}$

Đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang là $y = \frac{-1}{3}$ và một tiệm cận đứng là $x = \frac{4}{3}$

TH2: $m \neq 0$ từ $y = \frac{x-1}{mx^2-3x+4}$ ta có đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang là $y = 0$ để đồ thị hàm số có

1 tiệm đứng thì phương trình $mx^2 - 3x + 4 = 0$ có nghiệm kép hoặc có 2 nghiệm phân biệt một nghiệm là 1 và một nghiệm khác 1.

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} \Delta = 0 \\ \Delta > 0 \\ m(1)^2 - 3 \cdot 1 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 16m = 0 \\ 9 - 16m > 0 \\ m(1)^2 - 3 \cdot 1 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{16} \\ m < \frac{9}{16} \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{9}{16} \\ m = -1 \end{cases}$$

Kết hợp 2 trường hợp ta có 3 giá trị m .

Câu 41: Đồ thị hàm số $y = \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

Trả lời: 1

Lời giải

Tập xác định: $D = -1; +\infty \setminus 0$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} - \sqrt{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}}}{1 + \frac{2}{x}} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ là đường tiệm cận ngang của đồ}$$

thị hàm số.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+1^2-x-1}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x^2+9x}{x^2+2x} \frac{5x+1+\sqrt{x+1}}{5x+1+\sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{25x+9}{x-2} \frac{5x+1+\sqrt{x+1}}{5x+1+\sqrt{x+1}} = \frac{-9}{4} \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 0$ **không** là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có tất cả 1 đường tiệm cận.

Câu 42: Đồ thị hàm số $y = \frac{1 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 2x - 3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang

là n . Giá trị của $m + n$ là

Trả lời:1.

Lời giải

Tập xác định: $D = [-2; 2] \setminus \{-1\}$

Dựa vào tập xác định của hàm số ta suy ra đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang hay $n = 0$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 2x - 3} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{1 - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - 2x - 3} = -\infty$.

Do đó, đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Như vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng hay $m = 1$.

Vậy $m + n = 1$.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận?

Trả lời: 2.

Lời giải

Ta có $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x) = mx^2 - 1$ và $g(x) = x^2 - 3x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{m - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = m; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{m - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = m$$

Suy ra đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ luôn có một tiệm cận ngang $y = m$ với mọi $m \in \mathbb{R}$

$$\text{Ta có } g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Để đồ thị hàm số $y = \frac{mx^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ có đúng hai đường tiệm cận thì nó cần thêm đúng một tiệm cận đứng là $x = 1$ hoặc $x = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m - 1 = 0 \\ m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ m = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \\ 4m - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m \neq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ m = 1 \end{cases}$$

Vậy có hai giá trị m

Câu 44: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để đồ thị hàm số

$$y = \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x-1} \text{ có ba đường tiệm cận?}$$

Trả lời: 7.

Lời giải

TH1: Với $m \leq 0$ thì hàm số không xác định nên không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: Với $m > 0$

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{m}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{m}}; +\infty\right) \\ x \neq 1 \end{cases}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x-1} = \sqrt{m}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x-1} = -\sqrt{m}$, do đó đồ thị hàm số luôn có hai đường tiệm cận ngang là $y = \sqrt{m}$ và $y = -\sqrt{m}$.

+) Nếu $-\frac{2}{\sqrt{m}} < 1 < \frac{2}{\sqrt{m}} \Leftrightarrow m < 4$ thì đồ thị hàm số chỉ có 2 đường tiệm cận ngang mà không có đường tiệm cận đứng. Do đó không thỏa mãn.

+) Nếu $m = 4$ khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{4x^2 - 4}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ nên $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị. Khi đó đồ thị có 3 đường tiệm cận nên $m = 4$ thỏa mãn yêu cầu

+) Nếu $m > 4$ khi đó $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x-1} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{mx^2 - 4}}{x-1} = -\infty$ nên $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị. Khi đó đồ thị có 3 đường tiệm cận nên $m > 4$ thỏa mãn yêu cầu

Do m nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m \in \{4;5;6;7;8;9;10\}$. Vậy có 7 giá trị nguyên của m thuộc $[-10;10]$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 45: Gọi S là tập các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 6}$ có đúng hai đường tiệm cận. Số phần tử của S là:

Trả lời: 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2m}{x} + \frac{m^2 - 2m - 6}{x^2}} = 0.$$

Nên đồ thị hàm số luôn có một đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Do đó để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì phương trình: $x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 6 = 0$ có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng 1.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 2m+6=0 \\ 2m+6>0 \\ m^2-4m-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m>-3 \\ m=-1 \\ m=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=-1 \\ m=5 \end{cases}.$$

Vậy $S = \{-3; -1; 5\}$. Nên tập S có 3 phần tử.

Câu 46: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ (C). Biết rằng $M_1(x_1; y_1)$ và $M_2(x_2; y_2)$ là hai điểm trên đồ thị (C) có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận của (C) nhỏ nhất. Tính giá trị $P = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Trả lời: -1.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Vì $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} y = -\infty \Rightarrow \Delta_1 : x = -1$ là tiệm cận đứng của (C).

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 2 \Rightarrow \Delta_2 : y = 2$ là tiệm cận ngang của (C).

Ta có $y = \frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$, gọi $M \left(a; 2 - \frac{3}{a+1} \right) \in (C), (a \neq -1)$.

$$d(M, \Delta_1) = |a+1|.$$

$$d(M, \Delta_2) = \left| \frac{-3}{a+1} \right| = \frac{3}{|a+1|}.$$

$$S = d(M, \Delta_1) + d(M, \Delta_2) = |a+1| + \frac{3}{|a+1|} \geq 2 \cdot \sqrt{|a+1| \cdot \frac{3}{|a+1|}} = 2\sqrt{3}, \forall a \neq -1.$$

$$\text{Suy ra } \min S = 2\sqrt{3}, \text{ đạt được khi } |a+1| = \frac{3}{|a+1|} \Leftrightarrow (a+1)^2 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 - \sqrt{3} \\ a = -1 + \sqrt{3} \end{cases}.$$

Do đó $M_1(-1-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3})$, $M_2(-1+\sqrt{3}; 2-\sqrt{3})$ là hai điểm trên (C) có tổng khoảng cách đến hai tiệm cận nhỏ nhất.

$$\text{Vậy } P = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = (-1-\sqrt{3})(-1+\sqrt{3}) + (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = -1.$$

Câu 47: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C). Tính tổng tung độ các điểm M thỏa mãn M thuộc đồ thị (C) đồng thời khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng của đồ thị (C) bằng khoảng cách từ M đến trục Ox

Trả lời: 2

Lời giải

Gọi $M\left(x; \frac{2x+1}{x-1}\right) \in (C)$. Theo đề bài ta có: $d(M, TCD) = d(M, Ox)$

$$\Leftrightarrow |x-1| = \left| \frac{2x+1}{x-1} \right| \text{ điều kiện } (x \neq 1) \Leftrightarrow |(x-1)^2| = |2x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

Có hai điểm $M_1(0; -1)$ và $M_2(4; 3)$. Vậy $y_1 + y_2 = -1 + 3 = 2$