MỤC LỤC

▶BÀI ❶. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

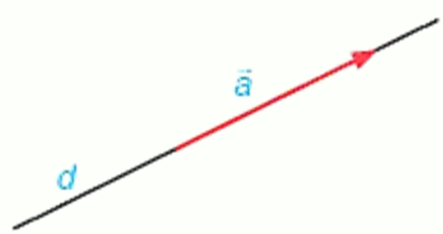
Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

❶. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.
- Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái niệm sau:

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.
- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ â được kí hiệu là |â|.
- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó



Hình 2.4. Đường thẳng d là giá của vectơ ā.

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.
- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.
- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý: Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ ả cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.
- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots$ gọi là các vectơ -không.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0 ,cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ. Do đó, các vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là 0.

❷. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.
- Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ. Bốn điểm A, B, A', B' đồng phẳng và tứ giác $ABB'A'$ là hình bình hành.

Chú ý: Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chát sau:

- Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bât kì thì $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.
- Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.
- Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) Hiệu của hai vectơ trong không gian

- Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ ả được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Chú ý:

- Hai vectơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.
- Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Vectơ 0 được coi là vectơ đối của chính nó.

- Tương tự như hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vectơ trong không gian:
- Vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

❸. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

- Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:
- Cùng hướng với vectơ a nếu $k > 0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k < 0$;
- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.
- Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

Chú ý:

- Quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Nếu $k\vec{a} = \vec{0}$ thì $k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.
- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

Chú ý: Tương tự như phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.
- Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ và $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $1\vec{a} = \vec{a}$ và $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

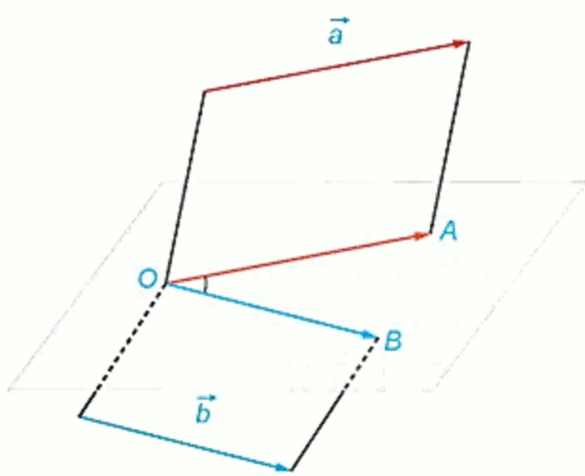
Chú ý: Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tuỳ ý, ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$$

❹. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

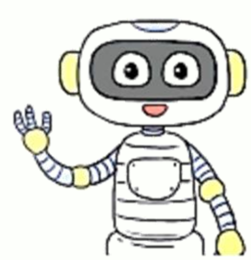
a) Góc giữa hai vectơ trong không gian

- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A, B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}\left(0^\circ \le \widehat{AOB} \le 180^\circ\right)$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.



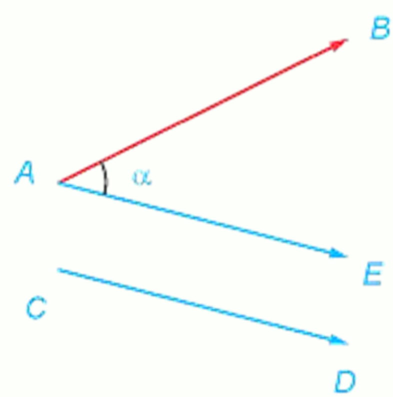
Hình 2.22

Nếu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 90° thì ta nói hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau và kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



Chú ý:

- Để xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \widehat{BAE}$ (H. 2.23).
- Quy ước góc giữa một vectơ bất kì và 0 có thể nhận một giá trị tuỳ ý từ 0° đến 180°.



Hình 2.23

b) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Chú ý:

- Quy ước nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$ thì $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
- Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

⬩Dạng ❶: Nhận biết vectơ trong không gian

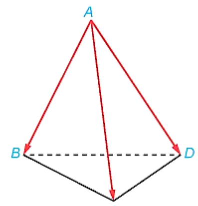
☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.5).

a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?

b) Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) ?

c) Tính độ dài của các



Hình 2.5

Lời giải

a) Có ba vectơ là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

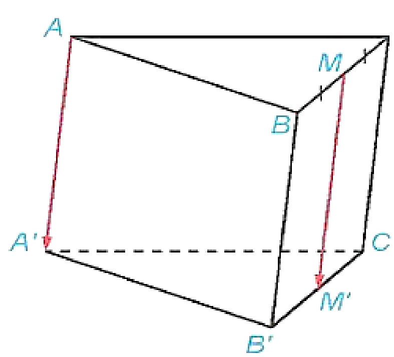
b) Trong ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ chỉ có hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá nằm trong mặt phẳng (ABC).

c) Vì tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 1$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'(H.2.8)$.

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$, vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$.



Hình 2.8

Lời giải

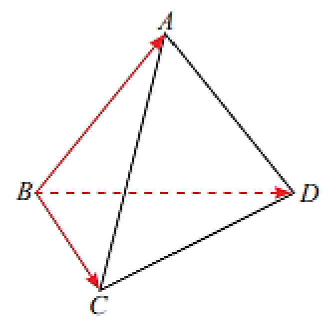
a) Hai đường thẳng AA' và BC chéo nhau nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau.

◆ Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AA'//CC'$ và $AA' = CC'$. Hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vectơ đó bằng nhau.

◆ Tương tự, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ không bằng nhau.

b) Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$. Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $MM'//BB'$ và $MM' = BB'$. Hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có $AA'//BB'$ và $AA' = BB'$, suy ra $MM'//AA'$ và $MM' = AA'$. Hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.

Câu 3: Cho hình tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện.



Hình 2

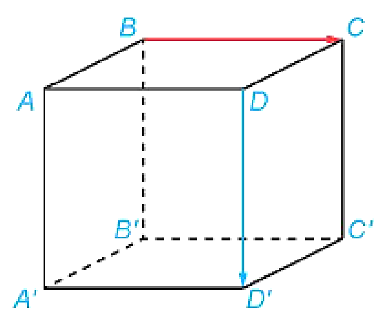
Lời giải

◆ Ta có ba vectơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ có điểm đầu là B và điểm cuối là các đỉnh còn lại của hình tứ diện

◆Dạng ❷: Tổng và hiệu của hai vectơ

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng $1 (H.2.12)$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}$.



Hình 2.12

Lời giải

◆ Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

- Do đó $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'}$.

- Tứ giác $ADD'A'$ là hình vuông nên $AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = \sqrt{2}$, suy ra $\left|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'}\right| = \sqrt{2}$.

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'(H.2.14)$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Lời giải

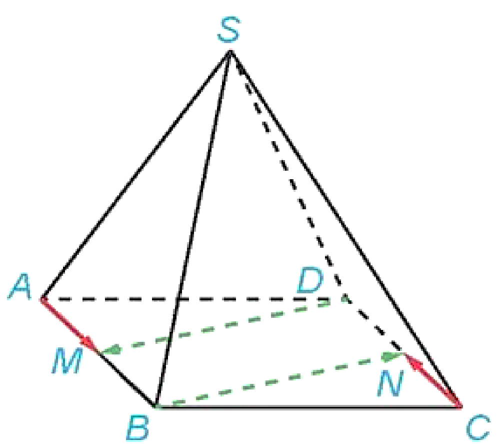
- Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.

- Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD(H. 2.16). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vectơ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SA}$.



Hình 2.16

Lời giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AB//CD$, suy ra $AM = CN$ và $AM//CN$.

- Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vectơ đối nhau.

b) Từ câu a, ta có $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AM}$.

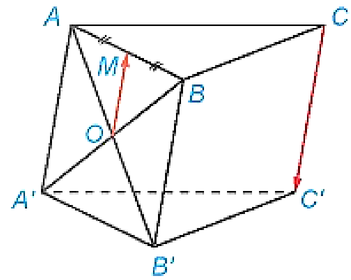
- Suy ra $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CN} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{SA}$.

Dạng ❸: Tích của một số với một vectơ

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong HĐ6, gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$ (H.2.18).

chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.



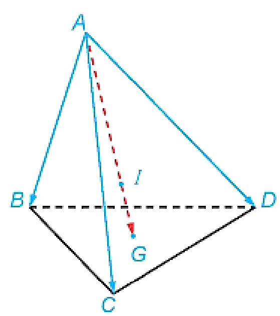
Hình 2.18

Lời giải

- Vì O là trung điểm của AB' nên OM là đường trung bình của tam giác $AB'B$.

- Suy ra $B'B//OM$ và $B'B = 2OM$. Tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $B'B//C'C$ và $B'B = C'C$.
- Do đó $C'C//OM$ và $C'C = 2OM$. Vì hai vectơ $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD (H.2.19). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.



Hình 2.19

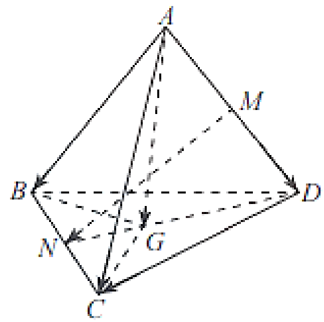
Lời giải

- Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

- Do đó ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{AG} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = 3\overrightarrow{AG} + \vec{0} = 3\overrightarrow{AG}$

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC; G là trọng tâm của tam giác BCD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.



Hình 18

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$.

◆ Do đó $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}$.

◆ Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AD nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

◆ Vì N là trung điểm của đoạn thẳng BC nên $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.

◆ Do đó $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}, \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}, \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}$.

◆ Suy ra $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$.

◆ Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

◆ Do đó $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

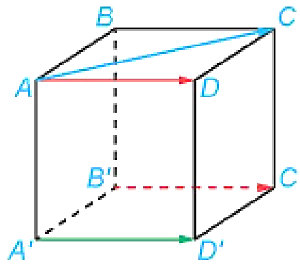
◆Dạng ❹: Tích vô hướng của hai vectơ

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (H.2.24).

Tính góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$;   b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.



Hình 2.24

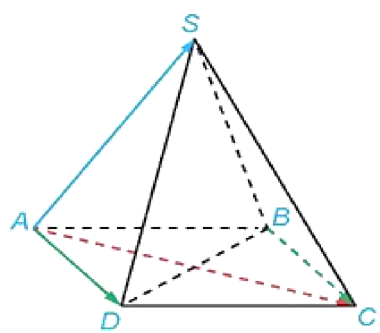
Lời giải

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{B'C'}\right) = 0°$.

b) Vì tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$. Do đó $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}\right) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{CAD}$. Tam giác ADC vuông cân tại D nên $\widehat{CAD} = 45°$, vì vậy $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'D'}\right) = 45°$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a (H.2.26). Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC}$; b) $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC}$.



Hình 2.26

Lời giải

a) giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{SAD} = 60°$.

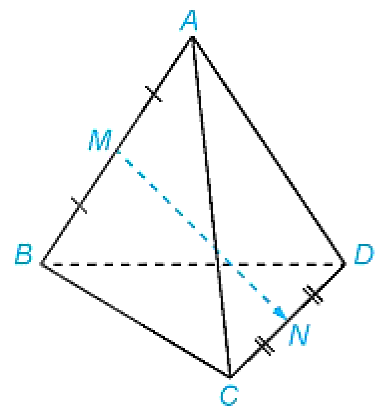
- Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{SAD} = 60°$. Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos\ 60° = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$.

b) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$. Tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S, suy ra $\widehat{SAC} = 45°$.

- Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos\ \widehat{SAC} = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD (H.2.27). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ b) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.



Hình 2.27

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$.

- Do đó $2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN})$.
- Vì M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$.
- Suy ra $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, hay $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

b) Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

- Vì vậy, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

◆Dạng ❺: Ứng dụng thực tế

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Hình 2.15 mô tả một lọ hoa được đặt trên bàn, trọng lượng của lọ hoa tạo nên một lực tác dụng lên mặt bàn và một phản lực từ mặt bàn lên lọ hoa. Có nhận xét về độ dài và hướng của các vecto biểu diễn hai lực đó.

Hình 2.15

Lời giải

◆ Các vectơ biểu diễn hai lực đó có độ dài bằng nhau và hướng của chúng là ngược nhau.

Câu 2: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của đông cơ, lực cản cưa không khí, trọng lực vả lực nâng khí động học (H.2.20). Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và cổ độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc mây bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h, trong quá trình tăng tốc máy bay giứ nguyên hướng bay. Lực cán của khống khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$. Hãy giải thích vì sao $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2}$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Hình 2.20

Lời giải

◆ Vì trong quá trình máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h máy bay giữ nguyên hướng bay nên vectơ $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$ có cùng hướng. Do đó, $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2}$ với k là một số thực dương nào đó (1).

- Gọi v_1, v_2 lần lượt là vận tốc của của chiếc máy bay khi đạt 900 km/h và 920 km/h.
- Suy ra $v_1 = 900(\text{ km/h}), v_2 = 920(\text{ km/h})$

- vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay nên $\frac{|\vec{F_1}|}{|\vec{F_2}|} = \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{900^2}{920^2} = \frac{2025}{2116} \Rightarrow |\overrightarrow{F_1}| = \frac{2025}{2116}|\overrightarrow{F_2}|$

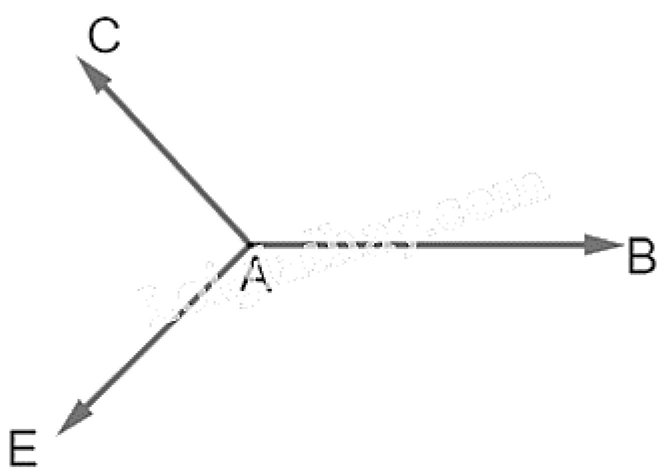
- Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{F_1} = \frac{2025}{2116}\overrightarrow{F_2} \Rightarrow k = \frac{2025}{2116} \approx 0,96$

Câu 3: Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (H.2.31). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.

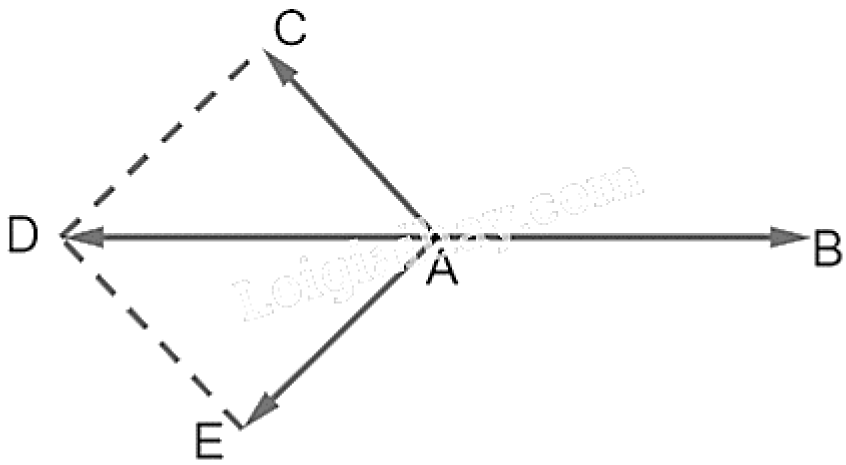
Hình 2.31

Lời giải

- Biểu diễn lực các lực kéo của ba sợi dây bằng các vectơ, đặt tên các vectơ như hình vẽ:



- Lấy điểm D sao cho tứ giác DCAE là hình bình hành (điểm D nằm khác phía với điểm B).



- Do đó, giá của các vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AE}$ cùng nằm trên mặt phẳng (ACDE). (1)
- Vì DCAE là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD}$ (quy tắc hình bình hành)
- Vì các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên nên $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}$,

- do đó hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AB}$ có giá cùng nằm trên một mặt phẳng (ACDE). (2)
- Từ (1) và (2) suy ra ba vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{AB}$ có giá cùng nằm trên mặt phẳng (ACDE).

- Vậy khi các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng

©. Dạng toán rèn luyện

Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

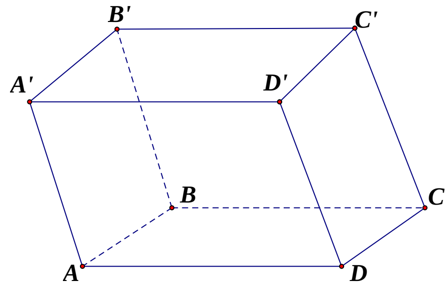
A. 4. **B.** 12. **C.** 8. **D.** 10.

Lời giải

Chọn B

Mỗi vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$ tương ứng một chỉnh hợp chập 2 của 4 phần tử. Từ đó suy ra số vectơ cần tính là $A_4^2 = 12$.

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình dưới), tổng của $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}$ là vectơ nào dưới đây?



A. $\overrightarrow{DB'}$. **B.** $\overrightarrow{DB}$. **C.** $\overrightarrow{BD}$. **D.** $\overrightarrow{BD'}$.

Lời giải

Chọn A

Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{DB'}$.

Câu 3: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Nếu giá của ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vec tơ đó đồng phẳng.

B. Nếu giá của ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ cắt nhau từng đôi một thì ba vec tơ đó đồng phẳng.

C. Nếu trong ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ có một vec tơ bằng vec tơ $\vec{0}$ thì ba vec tơ đó đồng phẳng.

D. Nếu trong ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ có hai vec tơ cùng phương thì ba vec tơ đó đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

C. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề đúng là

A. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$. **B.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}$.

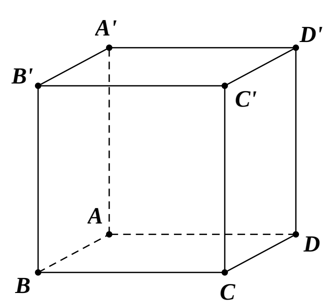
C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BC'}$. **D.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA'}$.

Lời giải

Chọn A

Quy tắc hình hộp.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ) có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC'}$.



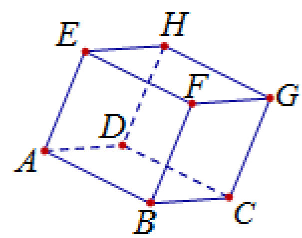
A. $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.   **B.** $a\sqrt{2}$.   **C.** 0.   **D.** a^2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC'}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'}=AB.AB'\cos B'AB=a.a\sqrt{2}.\cos 45^\circ=a^2$.

Câu 7: Cho hình hộp $ABCDEFGH$ (tham khảo hình vẽ). Tính tổng ba véctơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ ta được



A. $\overrightarrow{AH}$.   **B.** $\overrightarrow{AG}$.   **C.** $\overrightarrow{AF}$.   **D.** $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Chọn B

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$.

Câu 8: Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

C. Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

D. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn B

A sai vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ (luôn đúng theo tính chất cộng các vectơ).

B đúng vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Rightarrow\begin{cases}AB\,//\,CD\\ AB=CD\end{cases}$. Vậy tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

C sai.

D sai vì: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}$ (vô lý nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành).

Câu 9: Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Điều kiện nào sau đây khẳng định $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m, n, p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m, n, p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng quy.

Lời giải

Chọn B

Ta có $m+n+p\neq 0$ GS: $m\neq 0$ khi đó: $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}\Rightarrow \vec{a}=-\frac{n}{m}\vec{b}-\frac{p}{m}\vec{c}$

Suy ra $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng (Định lý 1 về sự đồng phẳng của ba vectơ).

Câu 10: Hãy chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

A. Ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba véc tơ đó cùng phương.

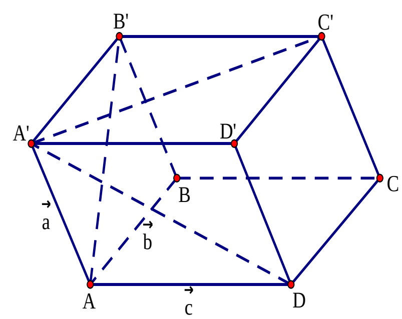
B. Ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba véc tơ bằng véc tơ $\vec{0}$.

C. véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ luôn đồng phẳng với hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

D. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba véc tơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C



Đáp A Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

Đáp án B Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

Đáp án C Sai.

Đáp án D Đúng vì $\begin{cases}\overrightarrow{DA'}=\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AD}=\vec{a}-\vec{c}\\ \overrightarrow{AB'}=\vec{a}+\vec{b}\\ \overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{CA}=-\vec{b}-\vec{c}\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{DA'}-\overrightarrow{CA}$.

Vậy 3 vectơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

Câu 11: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**.

A. Ba véctơ đồng phẳng là ba véctơ cùng nằm trong một mặt phẳng.

B. Ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ với m,n là các số duy nhất.

C. Ba véctơ đồng phẳng khi có $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là véctơ bất kì.

D. Ba véctơ đồng phẳng là ba véctơ có giá cùng song song với một mặt phẳng.

Lời giải

Chọn D

Định nghĩa: Ba véctơ đồng phẳng là ba véctơ có giá cùng song song với cùng một mặt phẳng.

(Câu A sai, ba vectơ đồng phẳng có thể không cùng nằm trong một mặt phẳng.

B sai vì thiếu điều kiện 2 véctơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương. Đẳng thức không xảy ra nếu $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương và $\vec{a},\vec{c}$ không cùng phương.

C sai vì $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là véctơ bất kì không phải là điều kiện để 3 véctơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng, $\vec{d}=\vec{0}$ và m, n, p không đồng thời bằng 0 mới suy ra $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng).

Câu 12: Chỉ ra mệnh đề **đúng** trong các mệnh đề sau.

A. Ba vectơ đồng phẳng là ba vectơ cùng nằm trong một mặt phẳng.

B. Ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng thì có $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ với m,n là các số duy nhất.

C. Ba vectơ không đồng phẳng khi có $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ với $\vec{d}$ là vectơ bất kì.

D. Cả ba mệnh đề trên đều sai.

Lời giải

Chọn D

Chú ý:

+) **Định nghĩa:** Ba vectơ gọi là **đồng phẳng** nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng. *(SGK Hình học nâng cao lớp 11-Trang 87)*

+) **Định lí 1:** Cho ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Điều kiện cần và đủ để ba vec tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng là có các số m,n sao cho $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$. Hơn nữa, các số m,n là duy nhất. *(SGK Hình học nâng cao lớp 11-Trang 88)*

+) **Định lí 2:** Nếu $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ là ba vec tơ không đồng phẳng thì với mỗi vec tơ $\vec{d}$, ta tìm được các số m,n,p sao cho $\vec{d}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$. Hơn nữa, các số m,n,p là duy nhất. *(SGK Hình học nâng cao lớp 11-Trang 89)*.

Câu 13: Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau

A. Nếu trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có một vectơ bằng $\vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

B. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

C. Nếu trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

D. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng quy thì ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn D

Mệnh đề "Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng quy thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng" sai. Chẳng hạn xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ đồng quy, nhưng ba vectơ này không đồng phẳng.

Câu 14: Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác $\vec{0}$. Ba véctơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi giá của chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.

B. Với tứ diện $ABCD$ bất kì ta luôn có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

C. Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì tồn tại một mặt phẳng chứa cả ba đường thẳng đó.

D. Với hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bất kì ta luôn có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{C'A}$.

Lời giải

Chọn B

Với tứ diện $ABCD$ bất kì ta có $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overline{DC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Câu 15: Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào sai?

A. Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ đó đồng phẳng.

B. Nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có một vectơ $\vec{0}$ là thì ba vectơ đồng phẳng.

C. Nếu trong ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ đó đồng phẳng.

D. Nếu giá của ba vectơ cắt nhau từng đôi một thì 3 vectơ đồng phẳng.

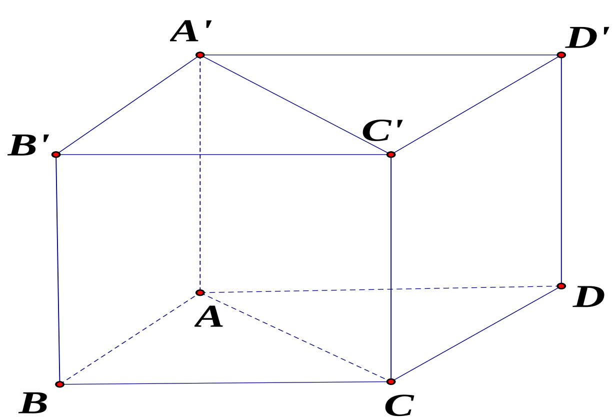
Lời giải

Chọn D

Chọn 3 vectơ $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ của hình chóp $S.ABC$ đôi một cắt nhau và 3 vectơ đó không đồng phẳng.

Câu 16: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Thực hiện phép toán $\vec{u} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'A}$.

A. $\vec{u} = \overrightarrow{A'C}$. **B.** $\vec{u} = \overrightarrow{BC'}$. **C.** $\vec{u} = \overrightarrow{BA'}$. **D.** $\vec{u} = \overrightarrow{BD}$.



Lời giải

Chọn A

Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{A'C}$.

Câu 17: Cho G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AG}$.

B. $\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

D. $\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)=\overrightarrow{PG}$ (P là tùy ý).

Lời giải

Chọn B

Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{AG}$.

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB' và CD'. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CJ}$.

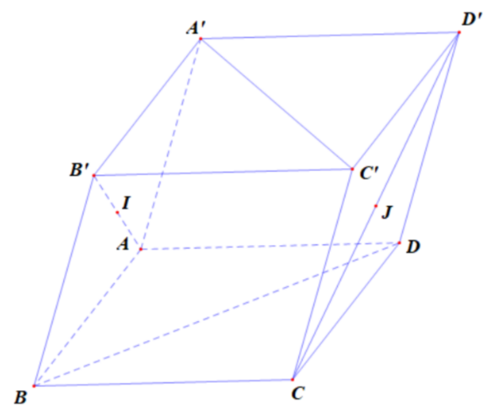
B. $\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{IJ}$.

C. $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{D'J}$.

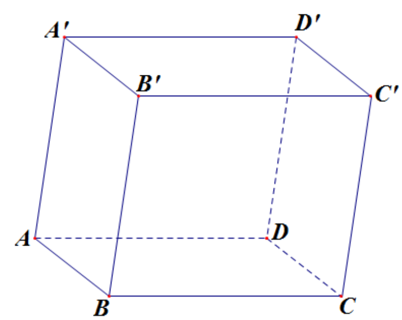
D. $\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{JC}$.

Lời giải

Chọn D



Câu 19: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng?



A. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BC'}$.

B. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$.

C. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}$.

D. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA'}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.

Suy ra $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Khi đó

A. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CG}$. **B.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{GC}$.

C. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{CG}$. **D.** $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CG}$.

Lời giải

Chọn A

G là trọng tâm tam giác ABD nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-3\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

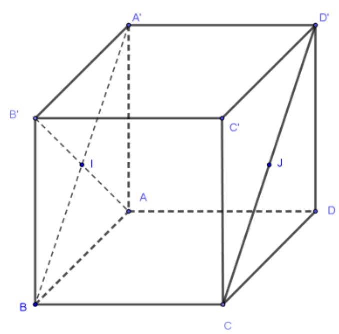
$\Rightarrow\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CG}$.

Câu 21: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB' và CD'. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **đúng**?

A. $\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{IJ}$. **B.** $\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{JC}$. **C.** $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CJ}$. **D.** $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{D'J}$.

Lời giải

Chọn B

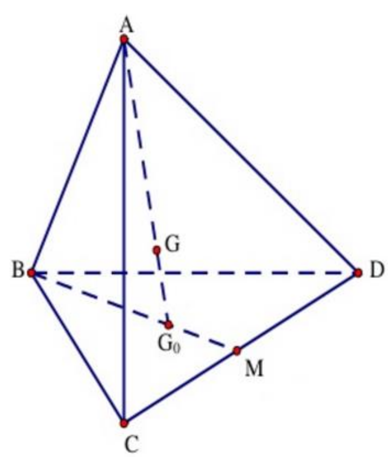


Ta có : $A'BCD'$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{JC}$.

Câu 22: Cho tứ diện *ABCD* và điểm *G* thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ (*G* là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_0 là giao điểm của *GA* và mp *(BCD)*. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{GA}=-2\overrightarrow{G_0G}$. **B.** $\overrightarrow{GA}=4\overrightarrow{G_0G}$. **C.** $\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{G_0G}$. **D.** $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{G_0G}$.

Lời giải



Chọn C

Vì *G₀* là giao điểm của *GA* và mp*(BCD)* suy ra *G₀* là trọng tâm tam giác *BCD*

Khi đó: $\overrightarrow{G_0A}+\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}=\vec{0}$

Ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GA}=-\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)$$
$$=-\left(3\overrightarrow{GG_0}+\overrightarrow{G_0A}+\overrightarrow{G_0B}+\overrightarrow{G_0C}\right)=-3\overrightarrow{GG_0}=3\overrightarrow{G_0G}.$$

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=-3\overrightarrow{AG}$. **B.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AG}$. **D.** $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AG}$.

Lời giải

Chọn B

Theo tính chất trọng tâm ta có: $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AG})+(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AG})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AG})=\vec{0}$

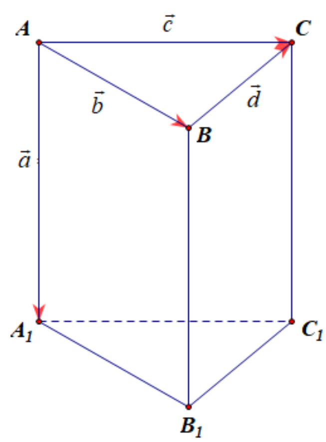
$\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

Câu 24: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{d}$. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$. **B.** $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$. **C.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn C



Vì $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{CC}=\vec{0}$.

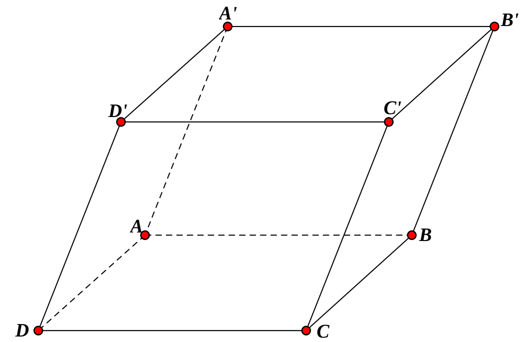
Câu 25: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biểu thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{A'D}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C}$. **B.** $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AD'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC'}$.

Lời giải

Chọn C



Theo qui tắc hình hộp thấy $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$ đúng.

Câu 26: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.
B. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$.
C. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.
D. $\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn A

Câu 27: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn mệnh đề **sai.**

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$.
C. $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AA'}$.
D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{AA'} \neq \overrightarrow{BD'}$.

Câu 28: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$.
B. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 8\overrightarrow{SO}$.
C. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$.
D. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{OS}$.

Lời giải

Chọn A

$ABCD$ là hình bình hành tâm $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SA}\right) + \left(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SB}\right) + \left(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SC}\right) + \left(\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SD}\right) = \vec{0}$

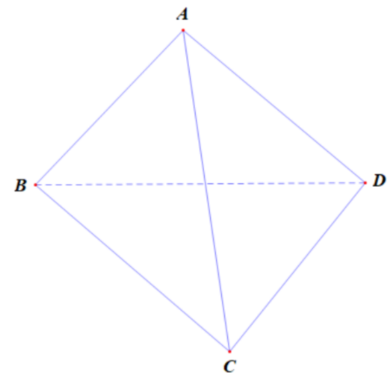
$\Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = -4\overrightarrow{OS} = 4\overrightarrow{SO}$.

Câu 29: Cho tứ diện $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?

A. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$.
B. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$.
C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$.
D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$.

Câu 30: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây.

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD'}$.

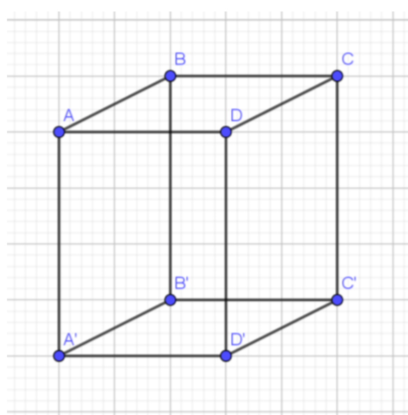
B. $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA'}$.

C. $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB'}$.

D. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD'}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}\neq\overrightarrow{AD'}$ nên A sai.

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DB}\neq\overrightarrow{DB'}$ nên C sai.

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BD}\neq\overrightarrow{BD'}$ nên D sai.

$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA'}$ nên B đúng.

Câu 31: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}$. Độ dài của $\vec{x}$ bằng

A. $\left(1+\sqrt{3}\right)a$.

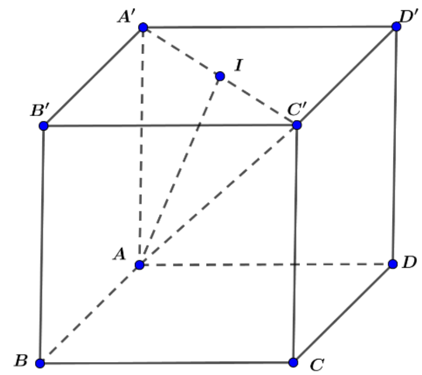
B. $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

C. $a\sqrt{6}$.

D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi I là trung điểm của $A'C'$.

Khi đó $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow |\vec{x}| = 2AI = 2\sqrt{AA'^2 + A'I^2} = 2\sqrt{a^2 + \frac{1}{2}a^2} = a\sqrt{6}$.

Câu 32: Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O. Hãy chỉ ra mệnh đề **sai**?

A. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$.

B. $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$.

C. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

D. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$.

Lời giải

Chọn D

Do $ABCD$ là hình vuông tâm O nên O là trung điểm của AC và BD.

Theo quy tắc trung điểm ta có

$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$.

$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$.

$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

Vậy $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \vec{0}$ sai.

Câu 33: Cho hình tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

B. $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Có G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên:

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

Câu 34: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S thỏa mãn $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Tính độ dài đoạn OS theo a.

A. $OS = 6a$.

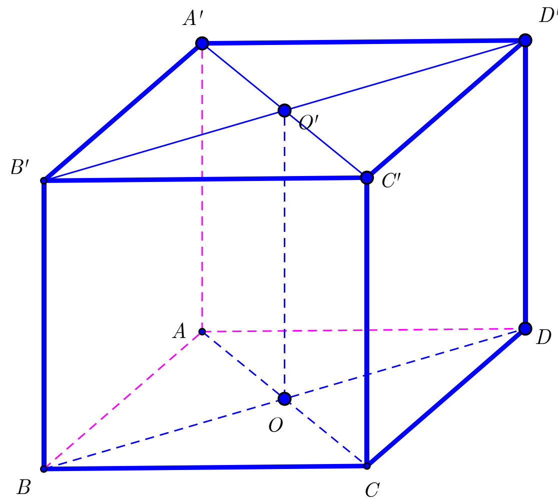
B. $OS = 4a$.

C. $OS = a$.

D. $OS = 2a$.

Lời giải

Chọn B



$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=4\overrightarrow{OO'}$. Với O' là tâm của mặt $A'B'C'D'$
.

Suy ra $OS=\left|\overrightarrow{OS}\right|=\left|4\overrightarrow{OO'}\right|=4OO'=4a$.

Câu 35: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD. Giá trị $\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{CB}$ bằng

A. $\dfrac{a^2}{2}$. **B.** $-\dfrac{a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2}{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}a^2}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Do tất cả các cạnh của hình chóp bằng nhau nên hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều

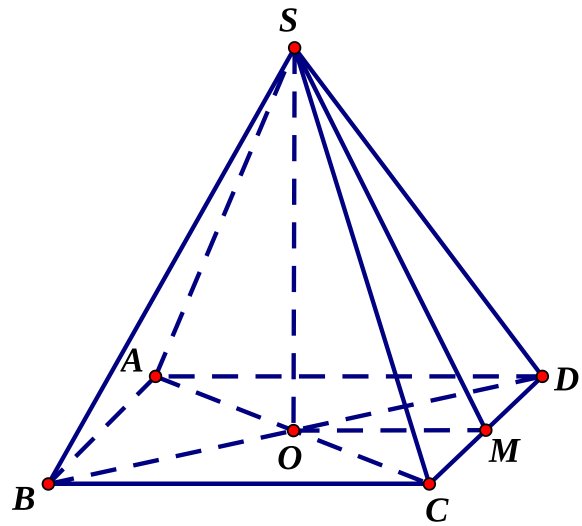
$\Rightarrow \begin{cases} SO\perp(ABCD) \\ AC\perp BD \end{cases}$.

Do M là trung điểm của CD nên ta có:

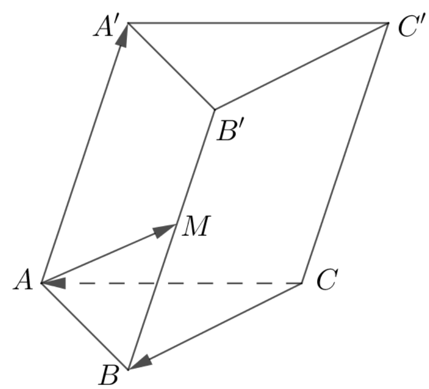
$\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OM}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$.

Do $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OS}$; $\overrightarrow{OD}$ đôi một vuông góc với nhau nên ta có:

$\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{2}OC^2+\dfrac{1}{2}OD^2=OC^2=\dfrac{a^2}{2}$



Câu 36: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$ (Tham khảo hình vẽ).



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

B. $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

C. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$.

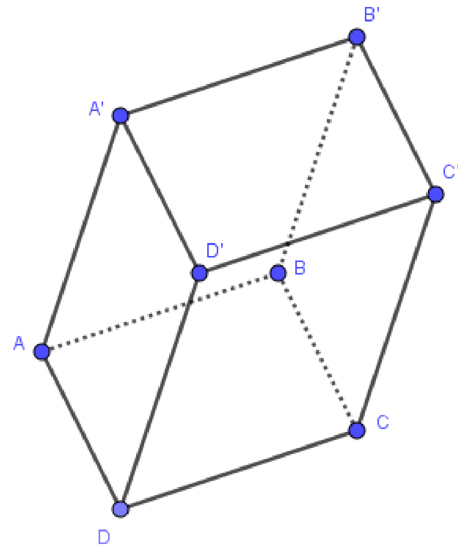
D. $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$

Câu 37: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chọn đẳng thức **đúng:**



A. $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$.

B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

C. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn A

Lý thuyết quy tắc hình hộp, bắt đầu từ đỉnh B.

Câu 38: Cho tứ diện đều $ABCD$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ bằng

A. 0. **B.** $-\dfrac{a^2}{2}$. **C.** $\dfrac{a^2}{2}$. **D.** a^2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a.\text{a}.\cos BAC = \dfrac{a^2}{2}; \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = a.\text{a}.\cos BAD = \dfrac{a^2}{2}$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{a^2}{2} = 0$.

Câu 39: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M là rung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \dfrac{\vec{b}}{2}$.

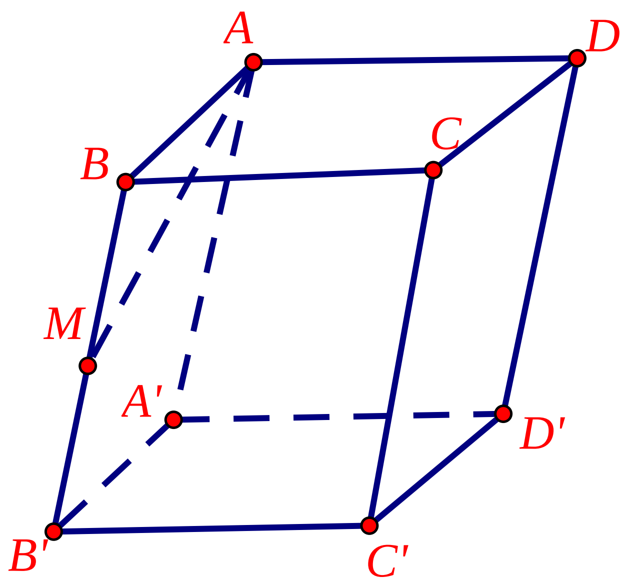
B. $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{\vec{a}}{2} + \vec{b} + \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{\vec{c}}{2}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \dfrac{\vec{b}}{2} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB'} - \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB'} - 2\overrightarrow{CA} = -2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$.

Câu 40: Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}; \vec{y} = -4\vec{a} + 2\vec{b}; \vec{z} = -3\vec{b} - 2\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng?

A. Hai vectơ $\vec{y}; \vec{z}$ cùng phương.

B. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{y}$ không cùng phương.

C. Hai vectơ $\vec{x}; \vec{z}$ cùng phương.

D. Ba vectơ $\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn D

*Hai vectơ $\vec{y}; \vec{z}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k : \vec{y} = k\vec{z} \Leftrightarrow -4\vec{a} + 2\vec{b} = k\left(-3\vec{b} - 2\vec{c}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = k.0 \\ 2 = -3k \\ 0 = -2k \end{cases}$

Do HPT vô nghiệm suy ra hai vectơ $\vec{y}; \vec{z}$ không cùng phương nên loại đáp án A

*Hai vectơ $\vec{x}; \vec{y}$ cùng phương

$\Leftrightarrow$ tồn tại $k \neq 0 : \vec{x} = k\vec{y} \Leftrightarrow 2\vec{a} - \vec{b} = k\left(-4\vec{a} + 2\vec{b}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = -4k \\ -1 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow k = \dfrac{-1}{2}$

suy ra hai vectơ $\vec{x}; \vec{y}$ cùng phương. nên loại đáp án B

* Hai vectơ $\vec{x}; \vec{z}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ tồn tại $k \neq 0 : \vec{x} = k\vec{z} \Leftrightarrow 2\vec{a} - \vec{b} = k\left(-3\vec{b} - 2\vec{c}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 0.k \\ -1 = -3k \\ 0 = -2k \end{cases}$

Do HPT vô nghiệm suy ra hai vectơ $\vec{x}; \vec{z}$ không cùng phương nên loại đáp án C

* Do $\vec{y}; \vec{z}$ không cùng phương

$\vec{x}; \vec{y}; \vec{z}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \vec{x} = \alpha\vec{y} + \beta\vec{z} \Leftrightarrow 2\vec{a} - \vec{b} = \alpha\left(-4\vec{a} + 2\vec{b}\right) + \beta\left(-3\vec{b} - 2\vec{c}\right)$

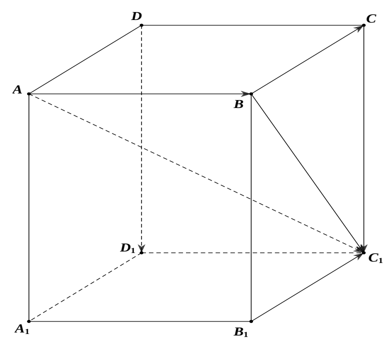
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha = 2 \\ 2\alpha - 3\beta = -1 \\ -2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{2} \\ \beta = 0 \end{cases}$$. Vậy chọn đáp án D

Câu 41: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$

A. $k = 4$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 0$. **D.** $k = 2$.

Lời giải

Chọn B



Vì $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{CC_1}$ nên ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$.

Vậy $k = 1$.

Câu 42: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

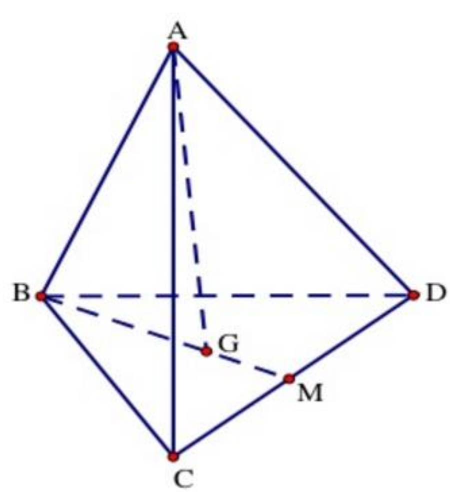
A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

B. $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

Lời giải



Chọn B

Gọi M là trung điểm CD

Ta có:

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$$

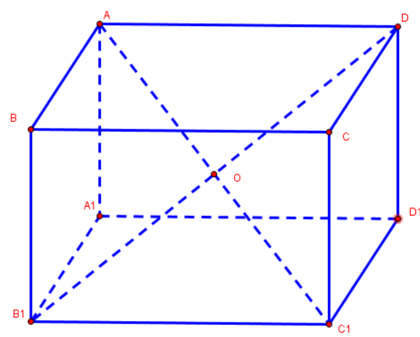
$$=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}-2\vec{a}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right).$$

Câu 43: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Chọn đẳng thức đúng?

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.
B. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.
C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.
D. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.

Lời giải

Chọn B



Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$

Mà $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC_1}\Rightarrow\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}\right)$.

Câu 44: Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng:

A. G, S, O không thẳng hàng.
B. $\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$.
C. $\overrightarrow{GS}=5\overrightarrow{OG}$.
D. $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow\overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}.$$

Câu 45: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.
B. $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.
C. $\overrightarrow{BC'}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.
D. $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Lời giải

Chọn D

Trong hình bình hành $BCC'B'$ ta có $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC}$

Mà $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Vậy $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

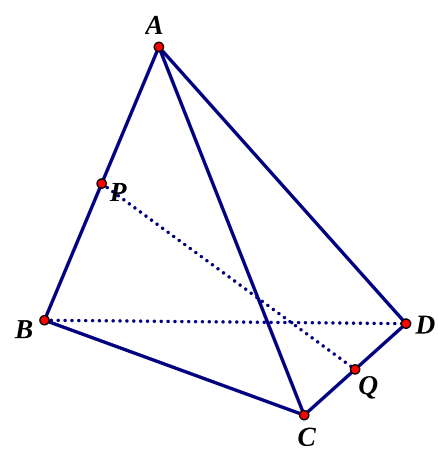
Câu 46: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)$.
B. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}\right)$.
D. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} \\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ} \end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{PQ} = \left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA}\right) + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{AQ}\right)$

Theo giả thiết : $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PA} = \vec{0}; \overrightarrow{CQ} + \overrightarrow{DQ} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

Câu 47: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hệ thức nào đúng?

A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$.
C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.
D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB'}$.

Lời giải

Chọn C

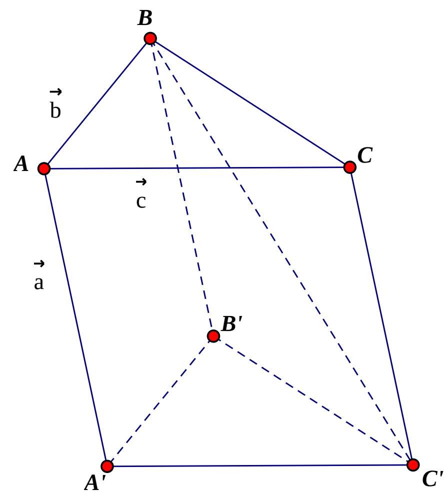
Theo quy tắc hình hộp.

Câu 48: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu diễn) véc tơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các véc tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

A. $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$. **C.** $\overrightarrow{BC'} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn D



Vì mặt bên $\left(BCC'B'\right)$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ nên $\overrightarrow{BC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 49: Trong không gian cho 3 vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các vectơ $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b},\ \vec{y}=-4\vec{a}+2\vec{b},\ \vec{z}=-3\vec{a}-2\vec{b}$. Khẳng định nào đúng?

A. Hai vectơ $\vec{y},\ \vec{z}$ cùng phương

B. Hai vectơ $\vec{x},\ \vec{y}$ cùng phương

C. Hai vectơ $\vec{x},\ \vec{z}$ cùng phương.

D. 3 vectơ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b},\ \vec{y}=-4\vec{a}+2\vec{b}=-2\vec{x}$, Do đó hai vectơ $\vec{x},\vec{y}$ cùng phương.

Câu 50: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\ \overrightarrow{AC}=\vec{b},\ \overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.

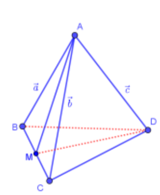
B. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$.

Lời giải

Chọn B



$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.

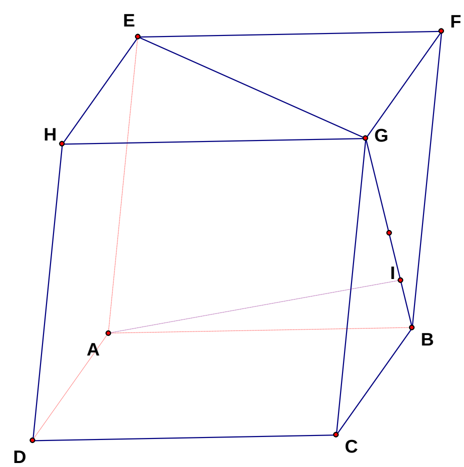
Câu 51: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$ có $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AE}=\vec{c}$. Gọi I là điểm thuộc đoạn thẳng BG sao cho $4BI=BG$. Biểu thị $\overrightarrow{AI}$ qua $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ ta được

A. $\overrightarrow{AI}=\vec{a}+\frac{7}{4}\vec{b}+\frac{7}{4}\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AI}=\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{AI}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AI}=\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$.

Lời giải

Chọn D



$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BG}$ (theo giả thiết $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BG}$)

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}$ (vì $BCGF$ là hình bình hành)

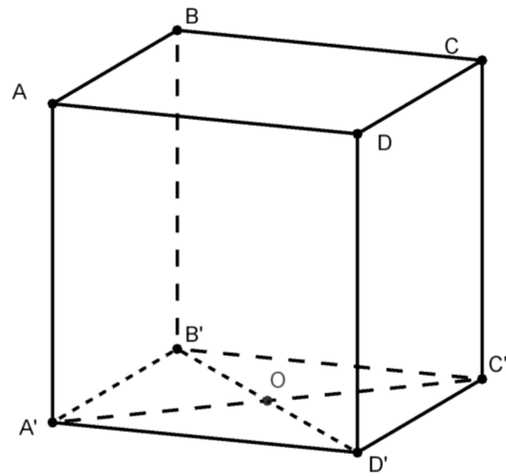
$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ (vì $ABCD.EFGH$ là hình hộp)

$=\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$.

Câu 52: Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài vecto $\vec{x}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}$ theo a.

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $\left(1+\sqrt{3}\right)a$. **C.** $a\sqrt{6}$. **D.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải



Chọn C

Gọi $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$, ta có: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AO'}$.

Lại có $\triangle AA'O'$ vuông tại A' nên:

$$AO' = \sqrt{AA'^2 + A'O'^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AO'}\right| = 2\left|\overrightarrow{AO'}\right| = 2.\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = a\sqrt{6}.$$

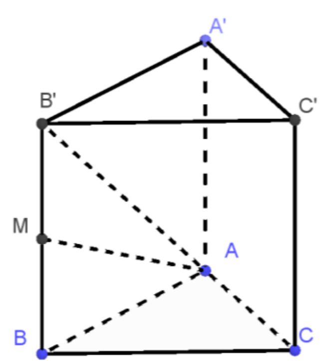
Câu 53: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khi đó

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{\vec{b}}{2}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = -\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b} + \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{\vec{b}}{2} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'}\right) = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}\right) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$.

Câu 54: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giá BCD Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AG}=-\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Vì G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{AG}$.

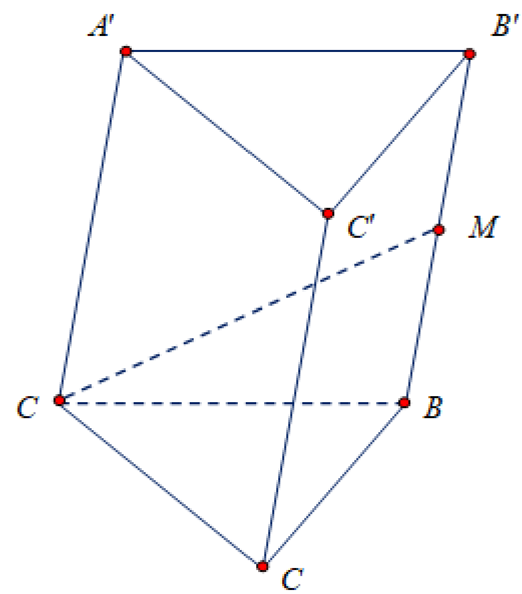
Câu 55: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi M là trung điểm cạnh bên BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CC'}=\vec{c}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AM}=-\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB'}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB'}-\overrightarrow{CA}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB'}-2\overrightarrow{CA}\right)$.

Theo quy tắc hình bình hành ta lại có: $\overrightarrow{CB'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CB}$.

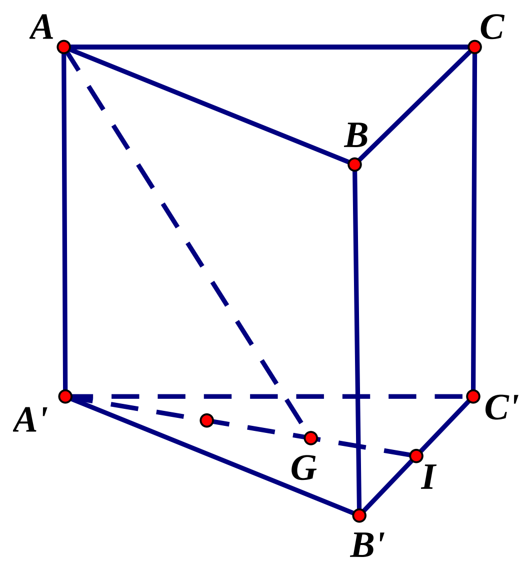
Do đó: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC'}-2\overrightarrow{CA}\right)=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CC'}=-\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 56: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng:

A. $\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$. **B.** $\vec{a}+\frac{1}{4}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\vec{a}+\frac{1}{6}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$. **D.** $\vec{a}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải

Chọn A



$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G}=\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\vec{a}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right).$

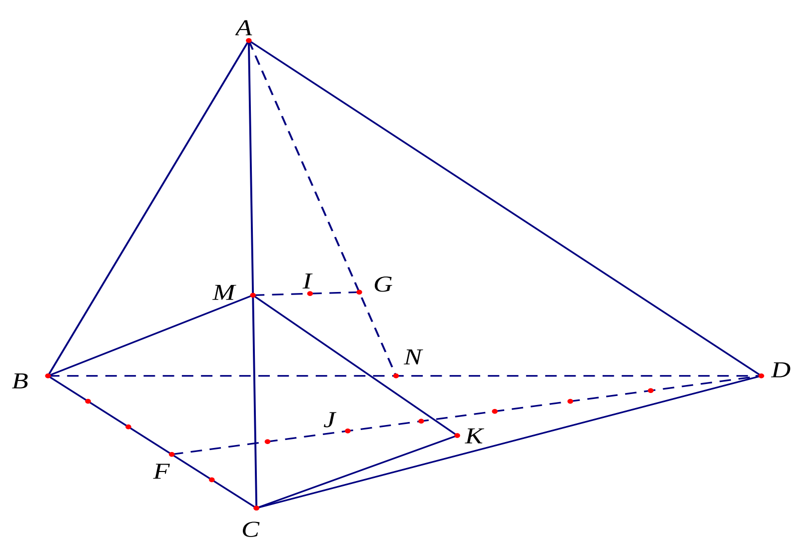
Câu 57: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD; G là trọng tâm tam giác ABD; I là trung điểm của đoạn GM. Điểm F thuộc cạnh BC sao cho $2FB=3FC$, điểm J thuộc cạnh DF sao cho $7DJ=5DF$. Dựng hình bình hành $BMKC$. Trong các khẳng định sau khẳng định nào **sai**?

A. $GM \parallel DK$. **B.** $3DK=10GM$.

C. A, I, J thẳng hàng. **D.** $7\overrightarrow{AJ}=12\overrightarrow{AI}$.

Lời giải

Chọn B



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Ta có

$\overrightarrow{GM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{2}{3}.\frac{1}{2}.\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{c}$ (1)

$\overrightarrow{DK}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CK}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}-\vec{c}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\overrightarrow{DK}=3\overrightarrow{GM}$ $\Rightarrow GM\ //\ DK$ và $DK=3GM$ $\Rightarrow$ A đúng, B sai.

Mặt khác

$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AG}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AN}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{3}.\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$

(3)

$\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}=\overrightarrow{AD}+\frac{5}{7}\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{5}{7}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}\right)=\overrightarrow{AD}+\frac{5}{7}\left(\overrightarrow{DC}+\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}\right)$

$=\overrightarrow{AD}+\frac{5}{7}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}+\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\right)=\vec{c}+\frac{5}{7}\left[\vec{b}-\vec{c}+\frac{2}{5}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]\Rightarrow\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}$ (4)

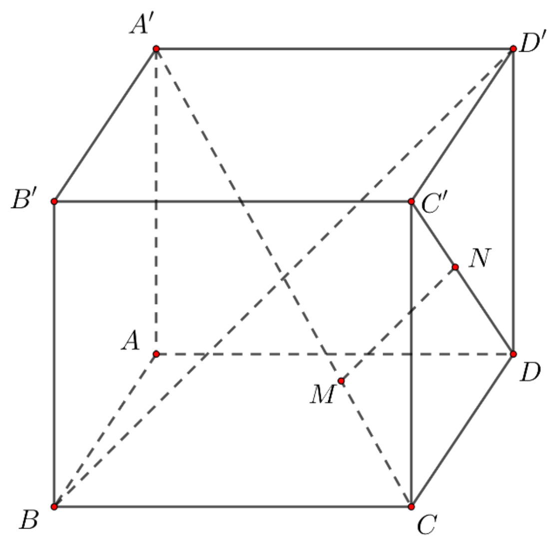
Từ (3) và (4) ta được $7\overrightarrow{AJ}=12\overrightarrow{AI}$ $\Rightarrow$ A, I, J thẳng hàng nên C, D đúng.

Câu 58: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA'}=k.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'}=l.\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k-l=-\frac{3}{2}$. **B.** $k+l=-3$. **C.** $k+l=-4$. **D.** $k+l=-2$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Từ $\overrightarrow{MA'}=k.\overrightarrow{MC}$ $\Rightarrow\overrightarrow{AA'}-\overrightarrow{AM}=k\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AM}\right)$ $\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AA'}-k\overrightarrow{AC}}{1-k}=\dfrac{-k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}}{1-k}$.

và $\overrightarrow{NC'}=l.\overrightarrow{ND}$ $\Rightarrow\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AN}=l.\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AN}\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=\dfrac{\overrightarrow{AC'}-l\overrightarrow{AD}}{1-l}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-l\vec{b}}{1-l}$.

Vậy $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\dfrac{-k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}}{1-k}-\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-l\vec{b}}{1-l}$

$=\left(-\dfrac{k}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}\right)\vec{a}+\left(-\dfrac{k}{1-k}-1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{1}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}\right)\vec{c}$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{AD'}-\overrightarrow{AB}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Để $MN//BD'$ thì $\overrightarrow{MN}//\overrightarrow{BD'}$ $\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{k}{1-k}+\dfrac{1}{1-l}=-\dfrac{k}{1-k}-1\\ -\dfrac{k}{1-k}-1=\dfrac{1}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2k}{1-k}+\dfrac{1}{1-l}=-1\\ \dfrac{k+1}{1-k}-\dfrac{1}{1-l}=-1\end{cases}$

$\Rightarrow\dfrac{3k+1}{1-k}=-2\Leftrightarrow k=-3$. Từ đó ta có: $\dfrac{1}{1-l}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow l=-1$.

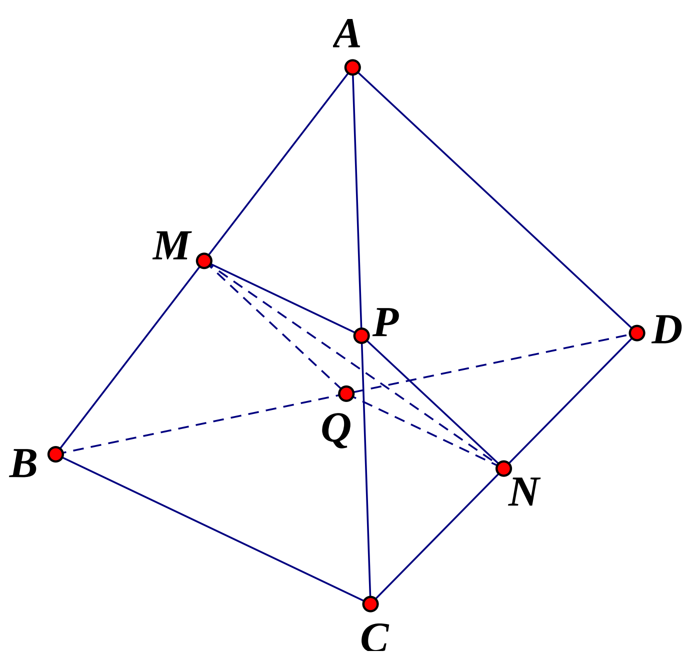
Vậy $k+l=-4$.

Câu 59: Cho tứ diện $ABCD$, M,N theo thứ tự là trung điểm của AB,CD. Bộ ba vectơ nào dưới đây đồng phẳng?

A. $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{MN}$. **B.** $\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{MN}$. **C.** $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BD};\overrightarrow{AD}$. **D.** $\overrightarrow{AC};\overrightarrow{DC};\overrightarrow{MA}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của AC,BD. Khi đó $MPNQ$ là hình bình hành.

Mặt khác $MQ//AD, NQ//BC$ nên bộ ba vectơ $\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AD};\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

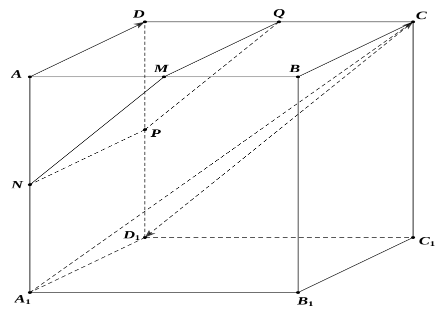
Câu 60: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BD_1},\overrightarrow{BC_1}$ đồng phẳng. **B.** $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1B_1}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{CD_1},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng. **D.** $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C_1A}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C



Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AA_1, DD_1, CD.

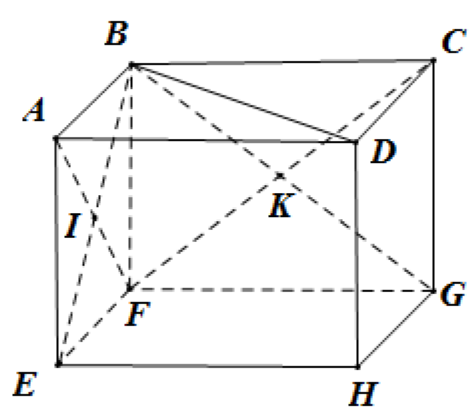
Ta có: $\begin{cases} CD_1 // (MNPQ) \\ AD // (MNPQ) \\ A_1C // (MNPQ) \end{cases}$ nên $\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{A_1C}$ đồng phẳng.

Câu 61: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
B. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.
D. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\begin{cases} BD // FH \\ FH \subset (EFGH) \end{cases} \Rightarrow BD // (EFGH)$.

$GF \subset (EFGH)$.

Xét ΔBEG, ta có: IK là đường trung bình trong ΔBEG. Suy ra $IK // EG$

Suy ra $\begin{cases} IK // EG \\ EG \subset (EFGH) \end{cases} \Rightarrow IK // (EFGH)$

Ta suy ra ba đường thẳng BD, IK, FG cùng song song với một mặt phẳng. Do đó ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

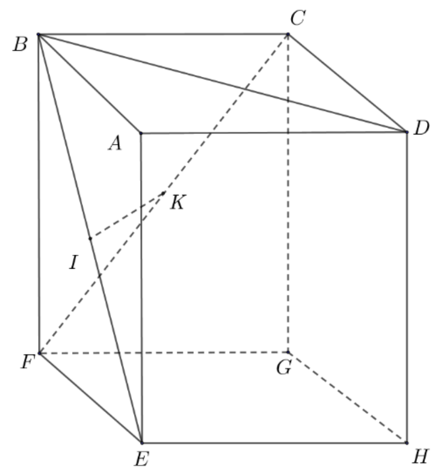
Câu 62: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Gọi I là tâm hình bình hành $ABEF$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{EK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. **B.** $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. **D.** $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AK}, \overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn C



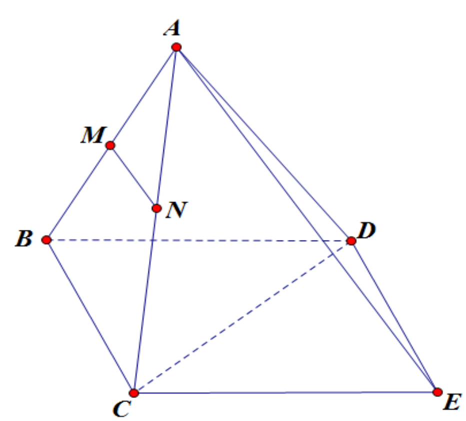
Dễ thấy BD, IK, GF nằm trên các mặt phẳng song song nên ba vectơ đồng phẳng.

Câu 63: Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm củ AB, AC Bộ ba véc tơ nào sau đây đồng phẳng?

A. $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$. **B.** $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$. **C.** $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$. **D.** $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Lời giải

Chọn C



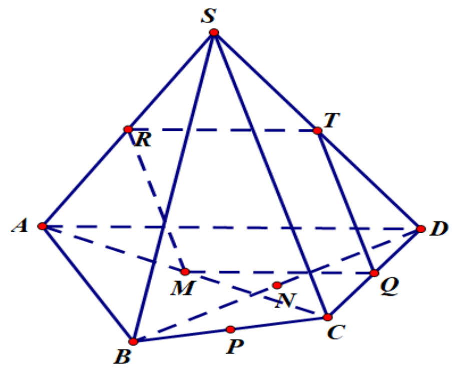
Dựng hình bình hành $BCED$. Theo tính chất đường trung bình ta có $MN//BC$ và $BC//DE$. Suy ra $MN//DE$ và $MN//(ADE)$. Do đó ba vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng vì có giá cùng song song hoặc nằm trong mặt phẳng (ADE).

Câu 64: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M,N,P,Q,R,T lần lượt là trung điểm của $AC,BD,BC,$ CD,SA,SD Bốn điểm nào sau đây đồng phẳng?

A. P,Q,R,T. **B.** M,P,R,T. **C.** M,Q,T,R. **D.** M,N,R,T.

Lời giải

Chọn C



Xét tam giác ΔCAD ta có MQ là đường trung bình nên suy ra $MQ//AD$ (1).

Xét tam giác SAD ta có RT là đường trung bình nên suy ra $RT//AD(2)$.

Từ $(1);(2) \Rightarrow MQ//RT$. Suy ra 4 điểm M,Q,R,T đồng phẳng.

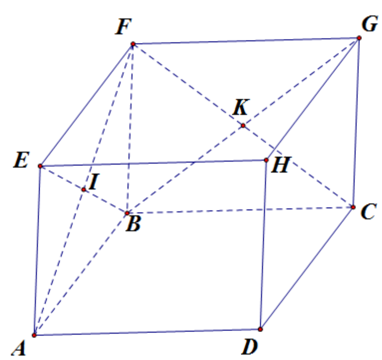
Câu 65: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$, gọi I là tâm hình bình hành $ABFE$ và K là tâm hình bình hành $BCGF$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AK},\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. **B.** $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{EK},\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng. **D.** $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{GC}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn B



Ta có $IK//AC \Rightarrow IK//(ABCD)$; $GF//BC \Rightarrow GF//(ABCD)$.

Do đó giá các vectơ $\overrightarrow{IK},\overrightarrow{GF}$ cùng song song với mặt phẳng $(ABCD)$ chứa vectơ $\overrightarrow{BD}$.

Vậy $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{IK},\overrightarrow{GF}$ đồng phẳng.

Câu 66: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định dưới đây.

A. Ba vectơ $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$ không đồng phẳng. **B.** G là trung điểm MN.

C. Ba vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng. **D.** $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

Chọn C

G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ nên G là trung điểm MN và $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OG}$.

Suy ra B, D đúng.

$ABCD$ là một tứ diện nên bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng.

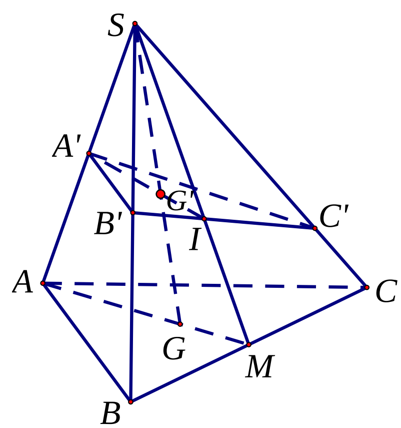
Suy ra ba vectơ $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}$ không đồng phẳng. Suy ra A đúng.

Câu 67: Cho hình chóp $S.ABC$ có A', B' lần lượt là trung điểm SA, SB. G là trọng tâm tam giác ABC. C' là điểm di động trên cạnh SC. Gọi G' là giao điểm với SG với $\left(A'B'C'\right)$. Khi C' di động trên SC, biểu thức nào sau đây có giá trị không đổi?

A. $\frac{SG}{SG'}-\frac{SC}{SC'}$. **B.** $2\frac{SG}{SG'}-3\frac{SC}{SC'}$. **C.** $\frac{2SG}{3SG'}-\frac{SC}{SC'}$ **D.** $3\frac{SG}{SG'}-\frac{SC}{SC'}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là trung điểm của BC. Trong $\left(SBC\right)$ có $B'C'\cap SM=I$.

Trong $\left(SAM\right)$ có $A'I\cap SG=G'\Rightarrow G'=SG\cap\left(A'B'C'\right)$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $3\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}$.

Ta có: $\overrightarrow{SA}=2\overrightarrow{SA'}$, $\overrightarrow{SB}=2\overrightarrow{SB'}$, $\overrightarrow{SG}=\frac{SG}{SG'}.\overrightarrow{SG'}$ và $\overrightarrow{SC}=\frac{SC}{SC'}.\overrightarrow{SC'}$.

Do đó $3\frac{SG}{SG'}.\overrightarrow{SG'}=2\overrightarrow{SA'}+2\overrightarrow{SB'}+\frac{SC}{SC'}.\overrightarrow{SC'}$. Vì các điểm A', B', C', G' đồng phẳng nên

$3\frac{SG}{SG'}=2+2+\frac{SC}{SC'}\Rightarrow 3\frac{SG}{SG'}-\frac{SC}{SC'}=4$.

Câu 68: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c};\vec{y}=-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c};\vec{z}=\vec{a}+4\vec{b}+m\vec{c}$. Giá trị của m để các vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải

Chọn B

Do $\vec{y};\vec{z}$ không cùng phương, để các vectơ $\vec{x};\vec{y};\vec{z}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow$ tồn tại

$$\alpha,\beta\in\mathbb{R}:\vec{x}=\alpha\vec{y}+\beta\vec{z}\Leftrightarrow 2\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}=\alpha\left(-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}\right)+\beta\left(\vec{a}+4\vec{b}+m\vec{c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-\alpha+\beta=2\\2\alpha+4\beta=-1\\\alpha+m\beta=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-\dfrac{3}{2}\\\beta=\dfrac{1}{2}\\m=1\end{cases}.$$

Câu 69: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N xác định bởi $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các véc tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

A. $x=-1$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\left(3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}$.

$=\left(3\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{DC}-2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+x\overrightarrow{DC}$

$=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}+(x+3)\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+(x+3)\overrightarrow{DC}$

$=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+(x+2)\overrightarrow{DC}$.

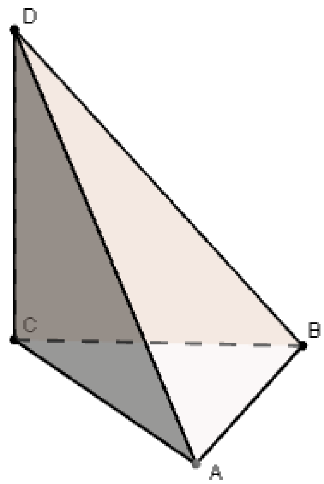
Ba véc tơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$.

Câu 70: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc với nhau và $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$. Độ dài đoạn thẳng AD bằng

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $\sqrt{-a^2+b^2+c^2}$. **C.** $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. **D.** $\sqrt{a^2-b^2+c^2}$.

Lời giải

Chọn A



Xét ΔABC có $AB \perp BC$ nên $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + b^2$.

Ta có $CD \perp AB$ và $CD \perp BC$ nên $CD \perp (ABC)$.

Mà $AC \subset (ABC) \Rightarrow CD \perp AC$.

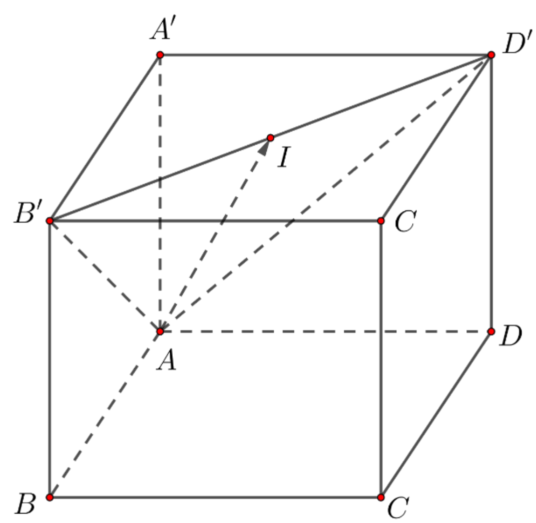
$AD^2 = AC^2 + CD^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow AD = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Câu 71: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Tính độ dài vectơ $\vec{x} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}$ theo a.

A. $|\vec{x}| = 2a\sqrt{2}$. **B.** $|\vec{x}| = 2a\sqrt{6}$. **C.** $|\vec{x}| = a\sqrt{2}$. **D.** $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\vec{x} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'} = 2\overrightarrow{AI}$, với I là trung điểm của $B'D'$. Khi đó $|\vec{x}| = 2AI$.

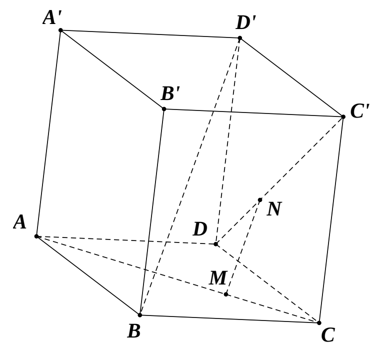
Do tam giác $AB'D'$ đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AI = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Vậy $|\vec{x}| = a\sqrt{6}$.

Câu 72: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. M là điểm trên AC sao cho $AC = 3MC$. Lấy N trên đoạn $C'D$ sao cho $xC'D = C'N$. Với giá trị nào của x thì $MN // D'B$

A. $x = \dfrac{2}{3}$. **B.** $x = \dfrac{1}{3}$. **C.** $x = \dfrac{1}{4}$. **D.** $x = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $C'N = xC'D$, theo giả thiết $\Rightarrow x\overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{C'N}; (x > 0)$

$\Rightarrow x\left(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC'}\right) = \left(\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BC'}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BD} + (1-x)\overrightarrow{BC'} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BC'}$.

hay $\overrightarrow{BN} = x\overrightarrow{BA} + x\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BC'} = x\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BB'}(1)$

Lại có: $AC = 3MC \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = 3\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}(2)$

Từ Từ (1) và (2) ta có

$\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BB'} - \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right) = \left(x - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BB'}$

Mặt khác ta có: $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} \Rightarrow MN // BD' \Leftrightarrow \exists k \neq 0 : \overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BD'}$

$\left(x - \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + (1-x)\overrightarrow{BB'} = k\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}\right)$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3} - k\right)\overrightarrow{BA} + \left(\frac{1}{3} - k\right)\overrightarrow{BC} + (1-x-k)\overrightarrow{BB'} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} - k = 0 \\ \frac{1}{3} - k = 0 \\ 1 - x - k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

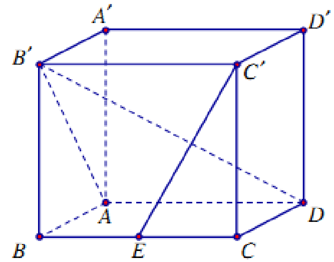
(do $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'}$ không đồng phẳng).

Câu 73: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 6\,\text{cm}$, $BC = BB' = 2\,\text{cm}$. Điểm E là trung điểm cạnh BC. Một tứ diện đều $MNPQ$ có hai đỉnh M và N nằm trên đường thẳng EC', hai đỉnh P và Q nằm trên đường thẳng đi qua điểm B' và cắt đường thẳng AD tại điểm F. Khoảng cách DF bằng

A. $3\,\text{cm}$. **B.** $2\,\text{cm}$. **C.** $6\,\text{cm}$. **D.** $1\,\text{cm}$.

Lời giải

Chọn B



Do tứ diện $MNPQ$ đều nên ta có $MN \perp PQ$ hay $EC' \perp B'F$.

Ta có: $\overrightarrow{B'F} = \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA'} + k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BA'} + k\overrightarrow{B'C'}$.

Và $\overrightarrow{EC'} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CC'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} - \overrightarrow{B'B}$.

Khi đó $\overrightarrow{EC'}.\overrightarrow{B'F} = -B'B^2 + \dfrac{k}{2}B'C'^2 = -4 + \dfrac{k}{2}.4 = 0 \Rightarrow k = 2$.

Vậy $\overline{AF} = 2\overline{AD}$ suy ra D là trung điểm của AF. Do đó $DF = BC = 2\text{cm}$.

Nên: $MI^2 = \dfrac{12 - \left(IA^2 + IB^2 + 2IC^2\right)}{4} = \dfrac{12-5}{4} = \dfrac{7}{4}$. Suy ra $IM = \sqrt{\dfrac{7}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

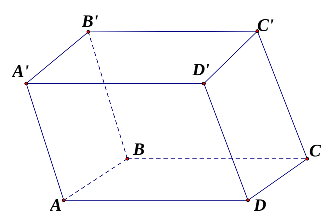
Vậy, tập hợp các điểm M là mặt cầu có bán kính $R = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

⬩Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu véctơ khác véctơ $\vec{0}$ mà mỗi véctơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$ là 12.

b) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình dưới), tổng của $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'}$ là vectơ $\overrightarrow{DB'}$



c) Nếu giá của ba vec tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cắt nhau từng đôi một thì ba vec tơ đó đồng phẳng.

d) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ) có cạnh bằng a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC'} = a^2$

Lời giải

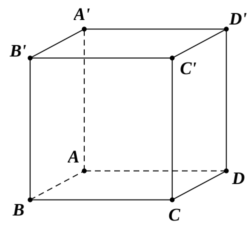
a) Đ **b) Đ** **c) S** **d) Đ**

a) Số véctơ thỏa mãn đề bài là $A_4^2 = 12$.

b) Theo quy tắc hình hộp: $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{DB'}$.

c) Chọn S

d) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB'} = AB.AB'\cos B'AB = a.a\sqrt{2}.\cos 45° = a^2$.



Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC}$

Lời giải

a) S	b) Đ	c) S	d) S

a) Sai

b) Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$. Đúng

c) Sai

d) Sai

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD}$

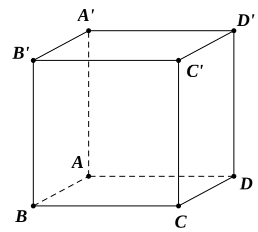
c) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$

d) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BA'}$

Lời giải

a) Đ **b) S** **c) S** **d) S**

a) Quy tắc hình hộp. Đúng



b) Sai

c) Sai

d) Sai

Câu 4: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho hình hộp $ABCDEFGH$ (tham khảo hình vẽ). Tính tổng ba véctơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$ = $\overrightarrow{AG}$.

b) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các véc tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc tơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{A'B'}$; $\overrightarrow{D'C'}$

c) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ là vectơ $\overrightarrow{D'C'}$

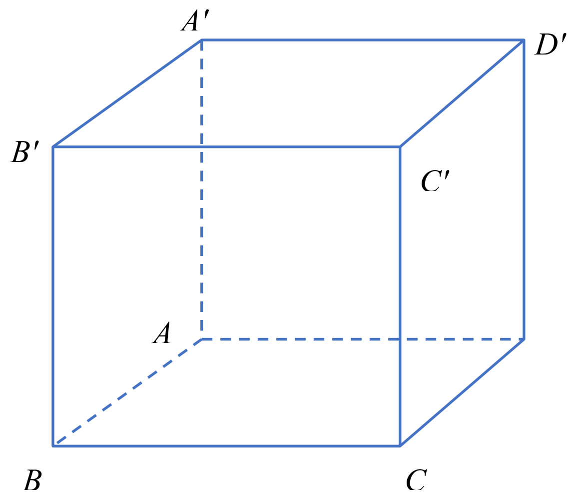
d) Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$ là 12.

Lời giải

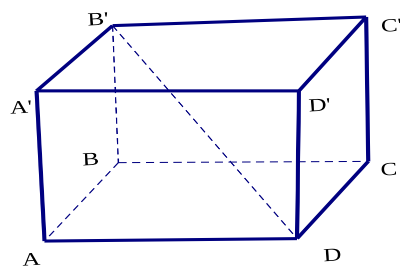
a) Đ **b) Đ** **c) Đ** **d) Đ**

a) Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$.

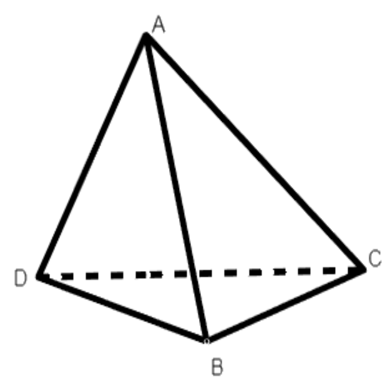
b) Dựa vào hình ta có: Các véc tơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng véc tơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{A'B'}$; $\overrightarrow{D'C'}$.



c) Dễ dàng thấy $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$.



d) Các vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$ là: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$.



Câu 5: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có một vectơ bằng $\vec{0}$ thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

b) Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với một mặt phẳng thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

c) Nếu trong ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ có hai vectơ cùng phương thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

d) Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng quy thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

a) Đ **b) Đ** **c) Đ** **d)S**

Mệnh đề "Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng quy thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng" sai. Chẳng hạn xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ đồng quy, nhưng ba vectơ này không đồng phẳng.

a) Chọn Đ

b) Chọn Đ

c) Chọn Đ

d) Mệnh đề "Nếu giá của ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng quy thì ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng" sai. Chẳng hạn xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ đồng quy, nhưng ba vectơ này không đồng phẳng.

Câu 6: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác $\vec{0}$. Ba véctơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi giá của chúng cùng nằm trên một mặt phẳng.

b) Với tứ diện $ABCD$ bất kì ta luôn có $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

c) Một đường thẳng cắt hai đường thẳng cho trước thì tồn tại một mặt phẳng chứa cả ba đường thẳng đó.

d) Với hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bất kì ta luôn có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{C'A}$.

Lời giải

a) S **b) Đ** **c) S** **d) S**

a) Chọn sai

b) Với tứ diện $ABCD$ bất kì ta có $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$. Chọn Đ

c) Chọn sai

d) Chọn sai

Câu 7: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$.

b) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

c) Cho hình chóp $S.ABCD$. Nếu có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

d) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

a) S **b) Đ** **c)S** **d) S**

a) sai vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$ (luôn đúng theo tính chất cộng các vectơ).

b) đúng vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB//CD \\ AB=CD \end{cases}$. Vậy tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

c) sai.

d) sai vì: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}$ (vô lý nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành).

Câu 8: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba véc tơ đó cùng phương.

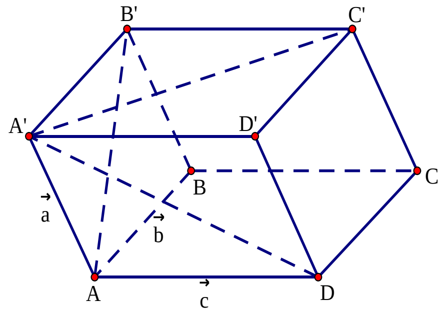
b) Ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có một trong ba véc tơ bằng véc tơ $\vec{0}$.

c) véc tơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ luôn đồng phẳng với hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

d) Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba véc tơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

Lời giải

a) Đ **b) Đ** **c) S** **d) Đ**



Đáp án a) Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

Đáp án b) Đúng vì theo định nghĩa đồng phẳng.

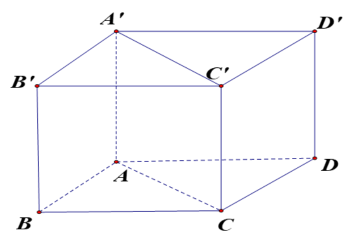
Đáp án c) Sai.

Đáp án d) Đúng vì $\begin{cases} \overrightarrow{DA'} = \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{c} \\ \overrightarrow{AB'} = \vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{CA} = -\vec{b} - \vec{c} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{DA'} - \overrightarrow{CA}$.

Vậy 3 vectơ $\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{C'A'}, \overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

Câu 9: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Thực hiện phép toán $\vec{u} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'A}$ bằng $\vec{u} = \overrightarrow{A'C}$



b) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Khi đó $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CG}$

c) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vectơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng $\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$

d) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$. Độ dài của $\vec{x}$ bằng $a\sqrt{2}$

Lời giải

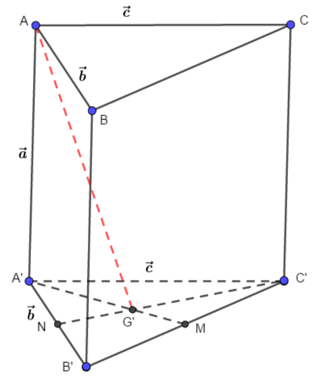
a) Đ **b) Đ** **c) S** **d) S**

a) Ta có $\vec{u} = \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{A'C'} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{A'C}$

b) G là trọng tâm tam giác ABD nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - 3\overrightarrow{CG} = \vec{0}$

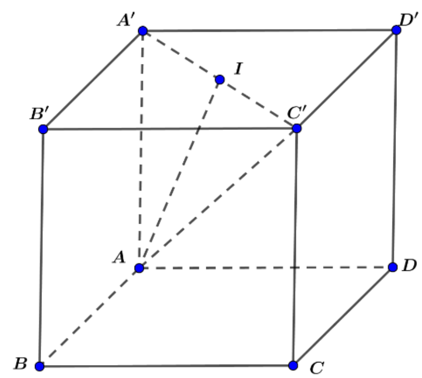
$\Rightarrow \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CG}$.

c)



$\overrightarrow{AG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G'}=\vec{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A'M}=\vec{a}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)=\vec{a}+\frac{1}{3}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

d)



Gọi I là trung điểm của $A'C'$.

Khi đó $\vec{x}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AI}\Rightarrow\left|\vec{x}\right|=2AI=2\sqrt{AA'^2+A'I^2}=2\sqrt{a^2+\frac{1}{2}a^2}=a\sqrt{6}$.

Câu 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{A'C'}$

c) $\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{AA'}$

d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

Lời giải

a) S **b) S** **c) Đ** **d) S**

a) Chọn sai

b) Chọn sai

c) $\overrightarrow{C'D'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BA}+\ \overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}\ +\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{AA'}\neq\overrightarrow{BD'}$.

d) Chọn sai

Câu 11: Trong không gian gọi G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=0$

c) $GA=GB=GC=GD$

d) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Lời giải

a) Đ	**b) S**	**c) S**	**d) S**

a) G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

b) Chọn sai

c) Chọn sai

d) Chọn sai

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB' và CD'. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{CJ}$.

b) $\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{IJ}$

c) $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{D'J}$.

d) $\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{JC}$.

Lời giải

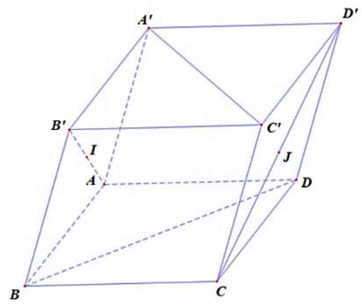
a) S	**b) S**	**c) S**	**d) Đ**

a) Chọn sai

b) Chọn sai

c) Chọn sai

d) Chọn đúng



Câu 13: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Khi đó $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CG}$

b) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{AA'}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Vectơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng $\overrightarrow{AG'}=\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$

c) Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. Khi đó: $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CG}$

d) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}$. Độ dài của $\vec{x}$ bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

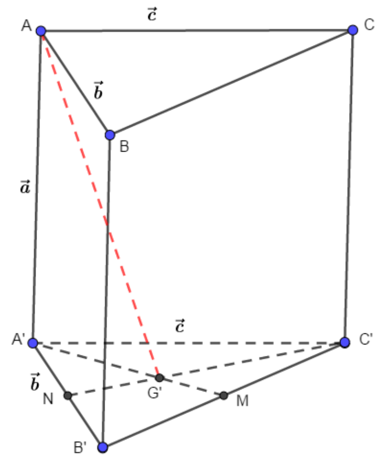
Lời giải

a) Đ **b) Đ** **c) Đ** **d) S**

a) G là trọng tâm tam giác ABD nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}-3\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

$\Rightarrow\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CG}$ .Chọn đúng

b)



$\overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \vec{a} + \frac{2}{3}\overrightarrow{A'M} = \vec{a} + \frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}\right) = \vec{a} + \frac{1}{3}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \frac{1}{3}\left(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$. Chọn đúng

c) G là trọng tâm tam giác ABD nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - 3\overrightarrow{CG} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CG}$. Chọn đúng

d) Chọn sai

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}$.

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}$

d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$

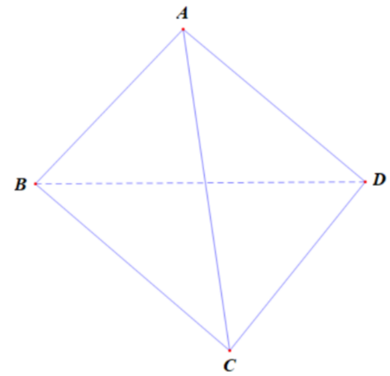
Lời giải

a) S	b) S	c) Đ	d) S

a) Chọn sai

b) Chọn sai

c)



Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$.

d) Chọn sai

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD'}$

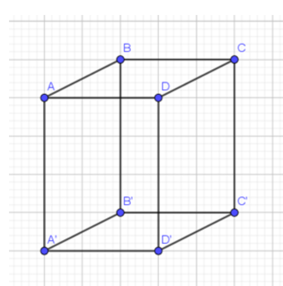
b) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA'}$

c) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DB'}$

d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BD'}$

Lời giải

a) S **b) Đ** **c) S** **d) S**



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}\neq\overrightarrow{AD'}$ nên a) chọn sai.

$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA'}$ nên b) chọn đúng.

$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{DB}\neq\overrightarrow{DB'}$ nên c) chọn sai.

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BD}\neq\overrightarrow{BD'}$ nên d) chọn sai

Câu 16: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S thỏa mãn $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}$. Vậy độ dài đoạn $OS=4a$

b) Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Vậy độ dài véctơ $\vec{x}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

c) Cho tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Biết luôn tồn tại số thực k thỏa mãn đẳng thức vecto $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=k.\overrightarrow{AG}$. Hỏi số thực đó bằng 4

d) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD. Giá trị $\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{CB}$ bằng $\dfrac{a^2}{3}$

Lời giải

a) Đ **b) Đ** **c) S** **d) S**

a) $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=4\overrightarrow{OO'}$. Với O' là tâm của mặt $A'B'C'D'$.

Suy ra $OS=\left|\overrightarrow{OS}\right|=\left|4\overrightarrow{OO'}\right|=4OO'=4a$. Chọn đúng

b) Gọi O' là tâm hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có: $\vec{x}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AO'}\Rightarrow\left|\vec{x}\right|=2\left|\overrightarrow{AO'}\right|=2AO'=2\sqrt{AA'^2+AO^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. Chọn đúng

c) Vì G là trọng tâm ΔBCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{AG}$.

Vậy $k=3$. Chọn sai

d) Do tất cả các cạnh của hình chóp bằng nhau nên hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều

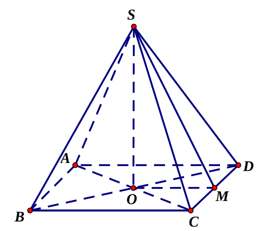
$$\Rightarrow\begin{cases}SO\perp(ABCD)\\AC\perp BD\end{cases}.$$

Do M là trung điểm của CD nên ta có: $\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OS}$,

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$.

Do $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OS}$; $\overrightarrow{OD}$ đôi một vuông góc với nhau nên ta có:

$\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}OC^2+\frac{1}{2}OD^2=OC^2=\frac{a^2}{2}$. Chọn sai



Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC và BD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GM}$

b) G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

c) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

d) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{MN}$

Lời giải

a) Đ **b) Đ** **c) Đ** **d) S**

a) theo tính chất trung điểm đoạn thẳng .Chọn đúng

b) theo định nghĩa trọng tâm của tứ diện. Chọn đúng

c) theo tính chất trọng tâm của tứ diện. Chọn đúng

d) vì $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{MN}\neq 2\overrightarrow{MN}$. Chọn sai

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm CD. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$

c) $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

d) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

Lời giải

a) Đ **b) S** **c) S** **d) S**

a) Theo tính chất trung điểm của đoạn thẳng ta có:

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Chọn đúng.

b) Chọn sai

c) Chọn sai

d) Chọn sai

Câu 19: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho tứ diện $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Biết luôn tồn tại số thực k thỏa mãn đẳng thức vecto $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = k.\overrightarrow{AG}$.Vậy số thực đó bằng 3

b) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và điểm S thỏa mãn $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OD'}$. Vậy độ dài đoạn OS theo a là $OS = 4a$

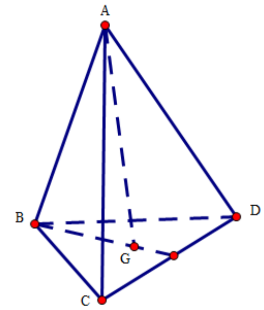
c) Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.Vậy độ dài véctơ $\vec{x} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'}$ theo a là $a\sqrt{6}$

d) Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a và $ABCD$ là hình vuông. Gọi M là trung điểm của CD. Giá trị $\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{CB}$ bằng $-\frac{a^2}{2}$

Lời giải

a) Đ **b) Đ** **c) S** **d) Đ**

a)

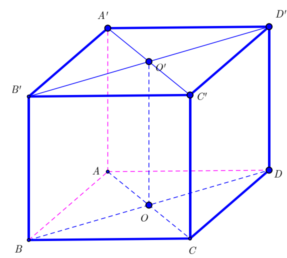


Vì G là trọng tâm ΔBCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{AG}$.

Vậy $k=3$.

b)



$\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OD'}=4\overrightarrow{OO'}$. Với O' là tâm của mặt $A'B'C'D'$

Suy ra $OS=\left|\overrightarrow{OS}\right|=\left|4\overrightarrow{OO'}\right|=4OO'=4a$.

c) Gọi O' là tâm hình vuông $A'B'C'D'$.

Ta có: $\vec{x}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC'}=2\overrightarrow{AO'}\Rightarrow\left|\vec{x}\right|=2\left|\overrightarrow{AO'}\right|=2AO'=2\sqrt{AA'^2+AO^2}=\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$

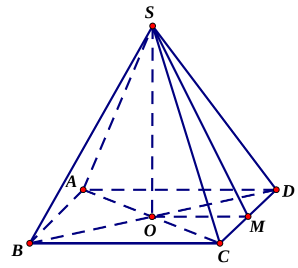
d) Do tất cả các cạnh của hình chóp bằng nhau nên hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều $\Rightarrow\begin{cases}SO\perp(ABCD)\\AC\perp BD\end{cases}$.

Do M là trung điểm của CD nên ta có: $\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OM}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OS}$,

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$.

Do $\overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{OS}$; $\overrightarrow{OD}$ đôi một vuông góc với nhau nên ta có:

$\overrightarrow{MS}.\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{2}OC^2+\dfrac{1}{2}OD^2=OC^2=\dfrac{a^2}{2}$



Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC và BD. Gọi G là trung điểm của đoạn thẳng MN. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GM}$

b) $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{MN}$

c) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

d) $2\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$

Lời giải

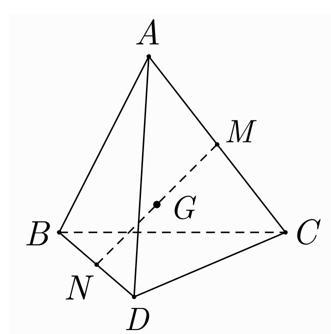
a) Đ **b) Đ** **c) Đ** **d) S**

a) Chọn đúng.

b) Chọn đúng.

c) Chọn đúng.

d) Chọn sai



$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GM}$ đúng theo tính chất trung điểm đoạn thẳng

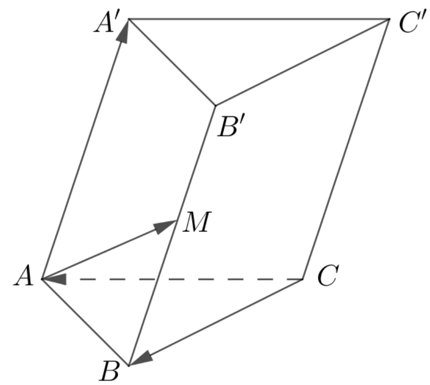
$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{MN}$ đúng vì $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ đúng vì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}\right)=\vec{0}$.

$2\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ sai vì:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\right)+\left(\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{ND}\right)$$
$$=2\overrightarrow{MN}+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CM}\right)+\left(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND}\right)=2\overrightarrow{MN}+\vec{0}+\vec{0}=2\overrightarrow{MN}.$$

Câu 21: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$ (Tham khảo hình vẽ).



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AM}=\vec{a}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}$

b) $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}$

c) $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$

d) $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$

Lời giải

a) S	b) S	c) S	d) Đ

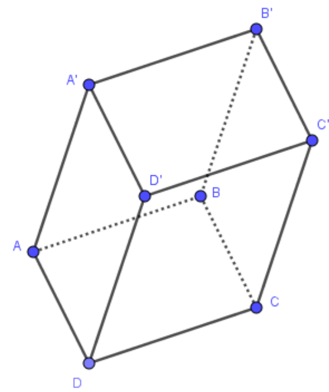
a) Chọn sai

b) Chọn sai

c) Chọn sai

d) Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=\vec{b}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$ .Chọn đúng

Câu 22: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



a) $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}$

b) $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC}$

d) $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$

Lời giải

a) Đ **b) S** **c) S** **d) S**

a) Lý thuyết quy tắc hình hộp, bắt đầu từ đỉnh B.Chọn đúng

b) Chọn sai

c) Chọn sai

d) Chọn sai

Câu 23: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Cho tứ diện đều $ABCD$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ bằng 0

b) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. M là trung điểm của BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}, \overrightarrow{CB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA'} = \vec{c}.$

Khi đó $\overrightarrow{AM} = -\dfrac{\vec{a}}{2} + \vec{b} + \vec{c}$

c) Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy phân tích (biểu thị) vectơ $\overrightarrow{BC'}$ qua các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.vậy $\overrightarrow{BC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

d) Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ với G là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Khi đó $\overrightarrow{AG}$ bằng: $\vec{a} + \dfrac{1}{4}\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.

Lời giải

a) Đ **b) S** **c) Đ** **d) S**

a) Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=a.\text{a}.\cos BAC=\frac{a^2}{2}; \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=a.\text{a}.\cos BAD=\frac{a^2}{2}$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{2}=0$.

b) Chọn sai

c) Trong hình bình hành $BCC'B'$ ta có $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}$

Mà $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{\text{AA}'}, \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{\text{AC}}-\overrightarrow{\text{AB}}$

Vậy $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{\text{AA}'}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

d) Chọn sai

Câu 24: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}$

c) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

d) $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB'}$

Lời giải

a) S **b) S** **c) Đ** **d) S**

a) Chọn sai

b) Chọn sai

c) Theo quy tắc hình hộp.Chọn đúng

d) Chọn sai

Câu 25: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của BB' .

Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}, \overrightarrow{CA}=\vec{b}, \overrightarrow{CB}=\vec{c}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{AM}=-\vec{b}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$

b) $\overrightarrow{AM}=\vec{b}+\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{a}$

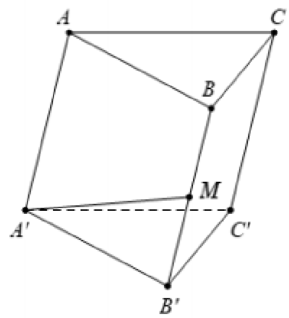
c) $\overrightarrow{AM}=\vec{b}-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

d) $\overrightarrow{AM}=\vec{a}-\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$

Lời giải

a) Đ **b) S** **c) S** **d) S**

a)



Vì M là trung điểm của $BB' \Rightarrow \overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=-\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB'}=-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}=-\vec{b}+\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{a}$

.Chọn đúng

b) Chọn sai

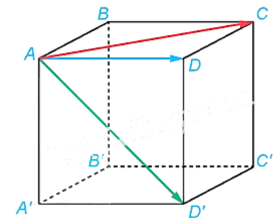
c) Chọn sai

d) Chọn sai

⬩Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'(H.2.6)$. Trong các vectơ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD'}$:

a) Hai vectơ nào có giá cùng nằm trong mặt phẳng (ABCD) ? b) Hai vectơ nào có cùng độ dài?



Hình 2.6

Lời giải

a) Trong các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD'}$, hai vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ có giá nằm trong mặt phẳng (ABCD)

b) Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $AD = DC = DD'$

Tam giác ADD' vuông tại D nên theo định lý Pythagore ta có:

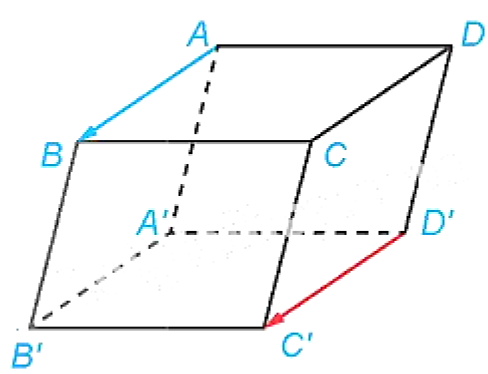
$AD' = \sqrt{AD^2 + DD'^2} = AD\sqrt{2}$

Tam giác ADC vuông tại D nên theo định lý Pythagore ta có:

$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = AD\sqrt{2}$

Do đó, $AD' = AC$ hay $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD'}|$. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD'}$ có cùng độ dài.

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (H.2.7)



Hình 2.7

a) So sánh độ dài hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.

b) Nhận xét về giá của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.

c) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?

Lời giải

a) Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $ABCD$ và $DCC'D'$ là các hình bình hành. Suy ra, $AB = CD = D'C'$. Do đó, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{D'C'}|$.

b) Vì $ABCD$ và $DCC'D'$ là các hình bình hành nên $AB//CD, CD//C'D'$. Do đó, $AB//C'D'$. Vậy giá của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ song song với nhau.

c) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{D'C'}$ cùng phương và cùng hướng.

Câu 3: Nếu hai vectơ cùng bằng một vectơ thứ ba thì hai vectơ đó có bằng nhau không?

Lời giải

Giả sử có ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ sao cho: $\vec{a} = \vec{b}$ và $\vec{b} = \vec{c}$.

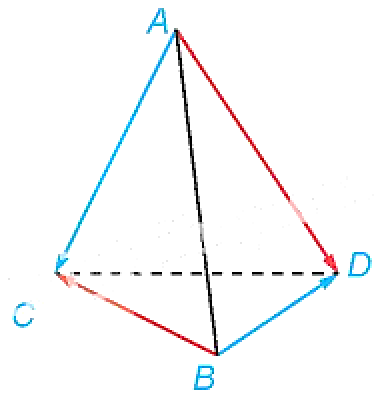
vì $\vec{a} = \vec{b}$ nên hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có cùng hướng và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ (1)

vì $\vec{b} = \vec{c}$ nên hai vectơ $\vec{c}, \vec{b}$ có cùng hướng và $|\vec{c}| = |\vec{b}|$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hai vectơ $\vec{a}, \vec{c}$ có cùng hướng và $|\vec{a}| = |\vec{c}|$. Do đó, $\vec{a} = \vec{c}$

Do đó, hai vectơ cùng bằng một vectơ thứ ba thì hai vectơ đó bằng nhau.

Câu 4: Cho tứ diện ABCD (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.



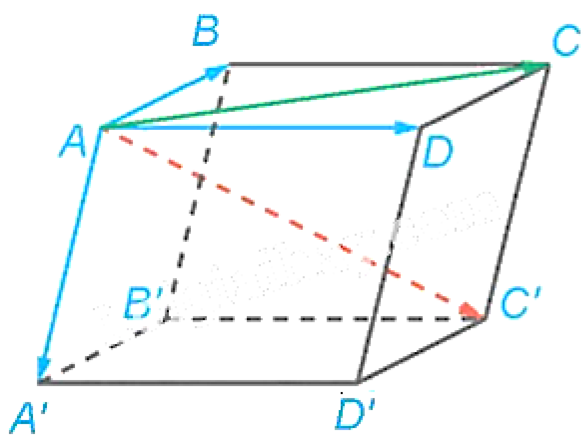
Hình 2.13

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD})$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ (đpcm)

Câu 5: Cho hình hộp ABCD.A’B’C’D’ (H.2.14).



Hình 2.14

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AC}$ có bằng nhau hay không?

b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{AC'}$ có bằng nhau hay không?

Lời giải

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'}$ (1)

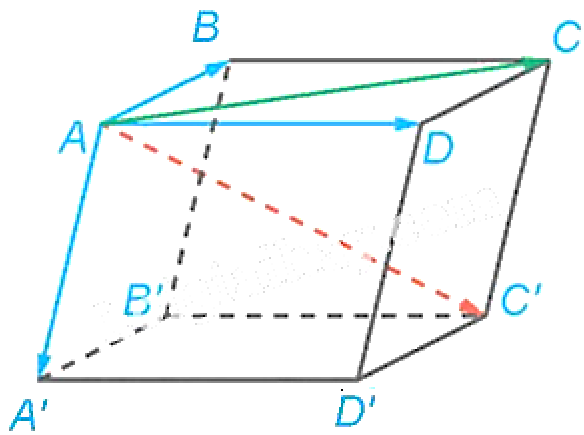
Câu 6: Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $A'A'D'$D và $D'C'C$ là hình bình hành. Do đó,

$A'//DD', AA' = DD'$ và $DD' = CC'$, DD'$//CC'$. Suy ra, $A'//CC'$ và $AA' = CC'$. Suy ra, tứ giác

$AA'C'C$ là hình bình hành. Suy ra: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}(2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

Trong Hình 2.14, hãy phát biểu quy tắc hình hộp với các vectơ có điểm đầu là B.



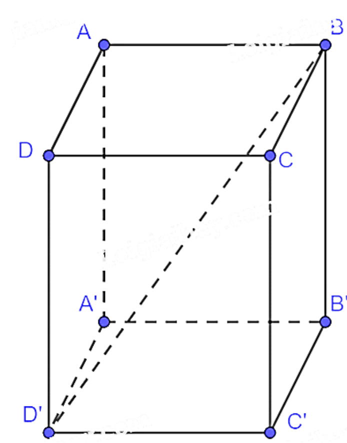
Hình 2.14

Lời giải

Quy tắc hình hộp với các vectơ có điểm đầu là B là: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BD'}$

Câu 7: Cho hình hộp hình chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD'}$

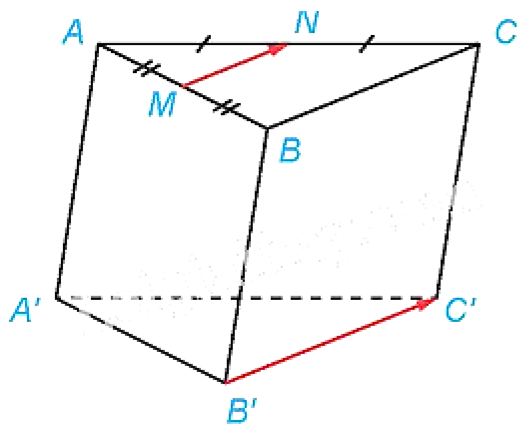
Lời giải



Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên

$\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD'}$ Ta có: $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD'}$

Câu 8: Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC (H.2.17)



Hình 2.17

a) Hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ có cùng phương không? Có cùng hướng không?

b) Giải thích vì sao $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{B'C'}|$.

Lời giải

a) Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN//BC$.

Vì $BCC'B'$ là hình bình hành nên $BC//B'C'$. Suy ra: $MN//B'C'$.

Do đó hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ có cùng phương và cùng hướng.

b) Vì $BCC'B'$ là hình bình hành nên $BC = B'C'$

Câu 9: Vì MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN = \frac{1}{2}BC$

Suy ra: $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{B'C'}|$.

Hai vectơ $1\vec{a}$ và $\vec{a}$ có bằng nhau không? Hai vectơ $(-1)\vec{a}$ và $-\vec{a}$ có bằng nhau không?

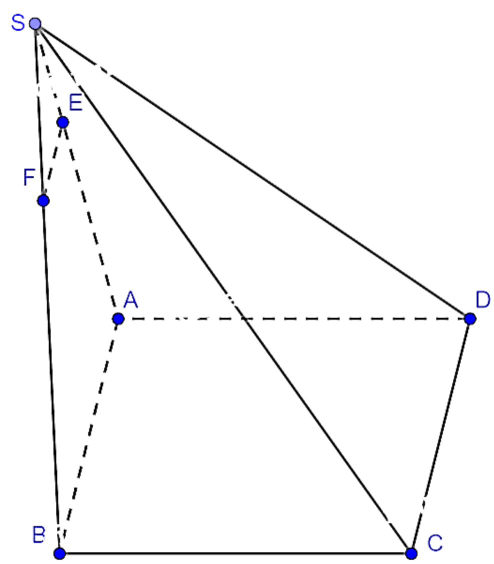
Lời giải

Hai vectơ $1\vec{a}$ và $\vec{a}$ bằng nhau vì chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Hai vectơ $(-1)\vec{a}$ và $-\vec{a}$ bằng nhau chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi E, F lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SA, SB sao cho $SE = \frac{1}{3}SA, SF = \frac{1}{3}SB$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

Lời giải



vì $SE = \frac{1}{3}SA, SF = \frac{1}{3}SB \Rightarrow \frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB}\left(= \frac{1}{3}\right)$

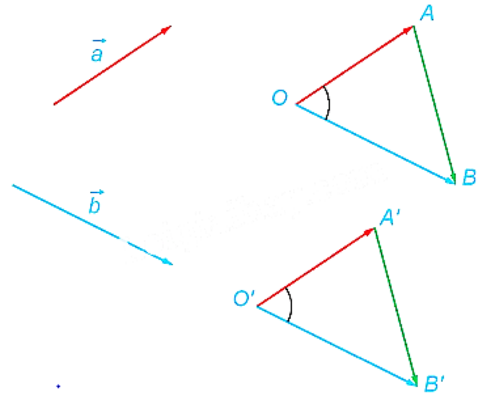
Tam giác SAB có: $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SB}$ nên FE//AB và $EF = \frac{1}{3}AB$.

Vì hai vectơ $\overrightarrow{EF}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (1)

Vì ABCD là hình bình hành nên $AB = CD$ và AB$//$CD. Do đó, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$

Câu 11: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy điểm O và vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Lấy điểm O' khác O và vẽ các vectơ $\overrightarrow{O'A'} = \vec{a}, \overrightarrow{O'B'} = \vec{b}$ (H.2.21).



Hình 2.21

a) Hãy giải thích vì sao $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

b) Áp dụng định lí côsin cho hai tam giác OAB và $O'A'B'$ để giải thích vì sao $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'O'} + \overrightarrow{O'B'}$

Mà $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{O'A'} = \vec{a}, \overrightarrow{O'B'} = \vec{b} \Rightarrow \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A'O'}; \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$

Do đó, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

b) Áp dụng định lí côsin vào tam giác AOB ta có: cos $\widehat{AOB} = \frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2.OA \cdot OB}$

Câu 12: Áp dụng định lí côsin vào tam giác A' $A'B'$ ta có: cos $\widehat{A'O'B'} = \frac{O'A'^2+O'B^2-A'B^2}{2.O'A' \cdot O'B'}$

vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow AB = A'B', \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{A'O'} \Rightarrow OA = O'A'; \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'} \Rightarrow OB = O'B'$

Do đó, cos $\widehat{AOB}$ = cos $\widehat{A'O'B'} \Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$

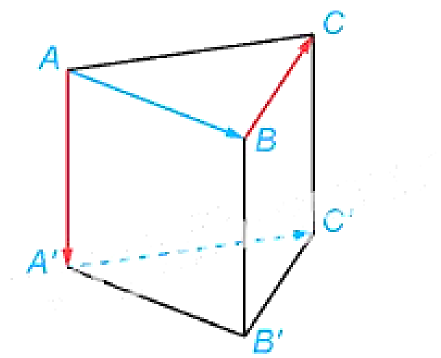
Xác định góc giữa hai vectơ cùng hướng (và khác $\vec{0}$), góc giữa hai vectơ ngược hướng trong không gian

Lời giải

Góc giữa hai vectơ cùng hướng bằng 0^0.

Góc giữa hai vectơ ngược hướng bằng $180°$.

Câu 13: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'(H.2.25)$. Tính các góc $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}\right)$ và $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right)$.



Hình 2.25

Lời giải

Vì $ABC \cdot A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều nên $AA'B'B$ là hình chữ nhật. Suy ra, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Do đó:

$\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BC}\right) = \widehat{B'BC} = 90°$ (do BB$'C'$C là hình chữ nhật)

Vì AA'B'B là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

Do đó, $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \widehat{C'A'B'}$.

Vì tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều nên $\widehat{C'A'B'} = 60°$. Do đó, $\left(\overrightarrow{AB}, \widehat{A'C'}\right) = 60°$.

Câu 14: Hãy nhắc lại công thức xác định tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng.

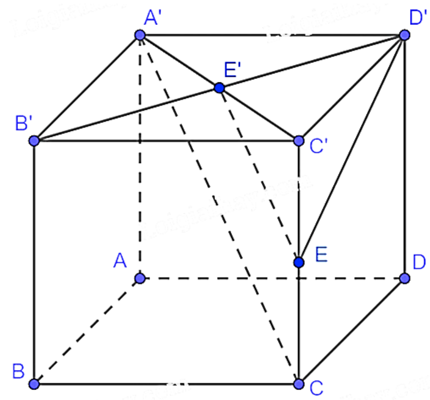
Lời giải

Công thức xác định tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng: Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức sau:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Câu 15: Cho hình lập phương ABCD · A′B′C′D′. Chứng minh rằng $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 0$.

Lời giải



Giả sử cạnh của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng 1. Khi đó, $A'C' = B'D' = \sqrt{2}$

Gọi E' là giao điểm của hai đường chéo $A'C'$ và $B'D'$ của hình vuông $A'B'C'D'$. Khi đó, E' là trung điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Suy ra $\overrightarrow{B'D'} = 2\overrightarrow{E'D'}$ và $E'D' = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Gọi E là trung điểm của CC′. Mà E′ là trung điểm của A′C′ nên EE là đường trung bình của tam giác A′C′C. Do đó, $\overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{E'E}$ và $E'E = \frac{1}{2}A'C$

Áp dụng định lí Pythagore vào $\Delta A'C'C$ vuông tại C' có: $A'C = \sqrt{A'C^2 + C'C^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \Rightarrow$

$E'E = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Áp dụng định lí Pythagore vào ΔD′C′E vuông tại C′ có:

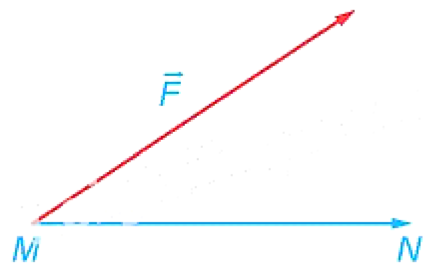
$$ED'^2 = C'D'^2 + C'E^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Câu 16: Vì $E'D'^2 + E'E^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4} = ED'^2$ nên $\Delta E'D'$ E vuông tại E'. Do đó, $\overrightarrow{E'E} \perp \overrightarrow{E'D'}$

Ta có: $\overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{B'D'} = 2 \cdot \overrightarrow{E'E} \cdot 2 \cdot \overrightarrow{E'D'} = 0$ (đpcm)

Như đã biết, nếu có một lực $\vec{F}$ tác động vào một vật tại điểm M và làm cho vật đó di chuyển một quãng đường MN thì công A sinh ra được tính theo công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$, trong đó lực F có độ lớn tính bằng Newton, quãng đường MN tính bằng mét và công A tính bằng Jun (H.2.28). Do đó, nếu dùng một lực $\vec{F}$

có độ lớn không đổi để lâm một vật di chuyển một quãng đường không đối thì công sinh ra sê lớn nhất khi lực tác đônng cưng hướng với chuyển động của vật. Hây giải thích vì sao. Kết quả trên có thể được áp dụng như thể nảo khi kêo (hoặc đầy) các vật nặng?



Hình 2.28

Lời giải

Ta có: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN} = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{MN})$

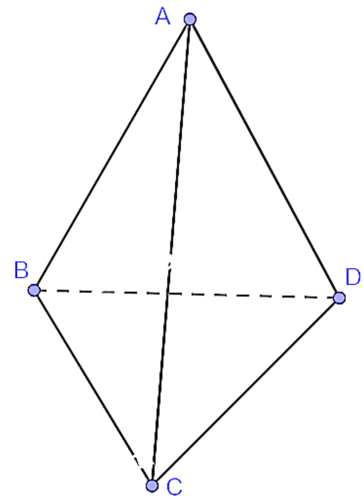
vì lực $\vec{F}$ có độ lớn không đổi và vật di chuyển một quãng đường không đổi nên A lớn nhất khi $\cos(\vec{F}, \overrightarrow{MN})$ lớn nhất. Do đó, $\cos(\vec{F}, \overrightarrow{MN}) = 1 \Leftrightarrow (\vec{F}, \overrightarrow{MN}) = 0^0$. Khi đó, lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật. Vậy công sinh ra sẽ lớn nhất khi lực tác động cùng hướng với chuyển động của vật.

Khi kéo (hoặc đẩy) các vật nặng, ta nên kéo (hoặc đẩy) cùng cùng hướng với chuyển động của vật.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DC}$; b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}$ (đpcm)

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{DB}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BD})=0$

Câu 18: Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là 45°, hãy tính:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$ c) $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

Lời giải

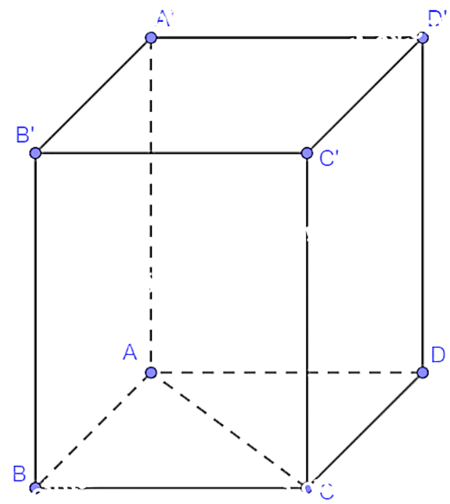
a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=1\cdot1\cdot\cos\,45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}^2=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-6\cdot1=-5+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1+2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1=2+\sqrt{2}$

Câu 19: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2 . Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ đó:

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$.



Lời giải

a) Vì $AA'//CC'$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ ngược hướng nhau.

Suy ra, $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{C'C}\right) = 180^\circ$.

Do đó, $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{C'C} = \left|\overrightarrow{AA'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{C'C}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{C'C}\right) = 2.2 \cdot \cos\ 180^\circ = -4$

b) Vì A'ADD' là hình chữ nhật nên $\widehat{A'AD} = 90^\circ$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$. Do đó, $\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}\right) = \left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AD}\right) = \widehat{A'AD} = 90^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} = \left|\overrightarrow{AA'}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AD}\right) = 2 \cdot 1 \cdot \cos\ 90^\circ = 0$

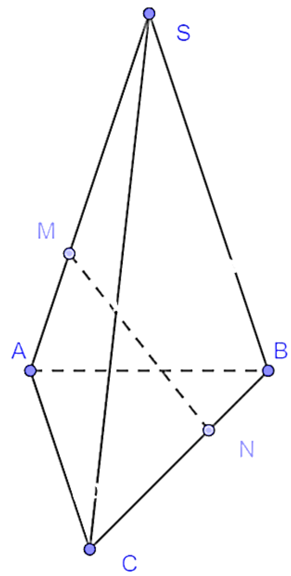
c) Vì A'ABB' là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{BA}$.

vì $ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{CAB} = 45^\circ$ và $AC = \sqrt{2}$

Ta có: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'A'} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) = -\sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos\ 45^\circ = -1$

Câu 20: Cho hình chóp S. ABC. Trên cạnh SA, lấy điểm M sao cho $SM = 2AM$. Trên cạnh BC, lấy điểm N sao cho $CN = 2BN$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AB}$.

Lời giải



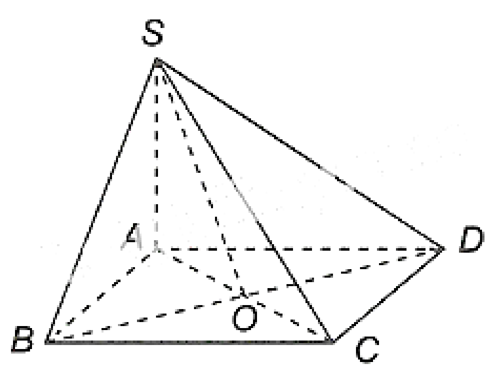
Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AB}$ (đpcm)

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AB}$ (đpcm)

Câu 21: Cho hình chóp tứ giác S · ABCD. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$



Lời giải

Chứng minh: Nếu tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ Gọi O là tâm hình bình hành ABCD. Khi đó, O là trung điểm của AC, BD.

Suy ra $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$

Ta có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{SO}+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA})=2\overrightarrow{SO}$

$\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{SO}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB})=2\overrightarrow{SO}$

Do đó, $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

Chứng minh: Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành:

Ta có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

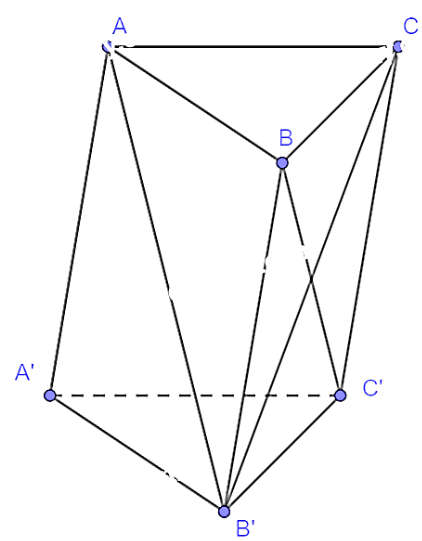
Suy ra, hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng và có độ lớn bằng nhau.

Suy ra, $AB=CD$, AB//CD. Khi đó, tứ giác ABCD là hình bình hành.

Vậy tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

Câu 22: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}$ và $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy biểu diễn các vectơ sau qua các vecto $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

a) $\overrightarrow{AB'}$; b) $\overrightarrow{B'C}$ c) $\overrightarrow{BC'}$.



Lời giải

a) Vì A'ABB' là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{b}$

b) Vì A'ABB' là hình bình hành nên $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{a}$

Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{b} + \vec{c}$

vì $C'CBB'$ là hình bình hành nên

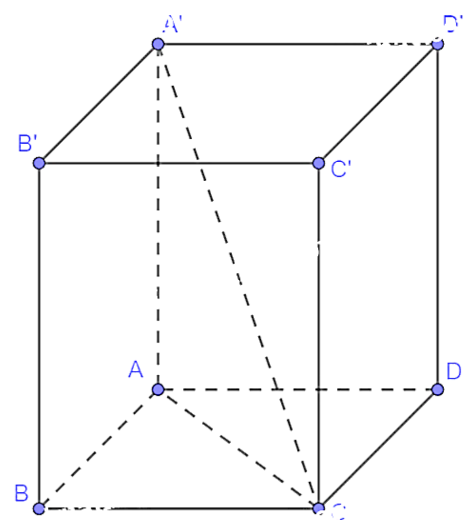
$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} = -\vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B} = -\vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$

c) Vì C'CBB' là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = -\vec{b} + \vec{c} + \vec{a}$

Câu 23: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CC'}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD'} - \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$ c) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'C}$



Lời giải

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Vì CDD'C' là hình bình hành nên $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{CC'}$

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CC'}$

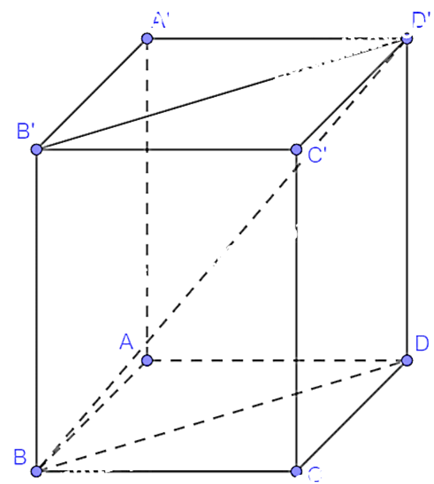
b) Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD'}-\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

c) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$

Vì A'ACC' là hình bình hành nên $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA'}$

$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DC}=-(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})-\overrightarrow{CC'}=-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CC'}=-\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CC'}\right)=-\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{A'C}$

Câu 25: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có $AB=2, AD=3$ và $AA'=4$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BD'}$.



Lời giải

Vì $B'BAA'$ là hình chữ nhật nên $BB'=AA'=DD'=4\Rightarrow\left|\overrightarrow{BB'}\right|=4$

Vì tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật nên tam giác BAD vuông tại A.

Do đó, $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ (định lí Pythagore), suy ra: $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{13}$

Vì BB'D'D là hình chữ nhật nên tam giác DD'B vuông tại D

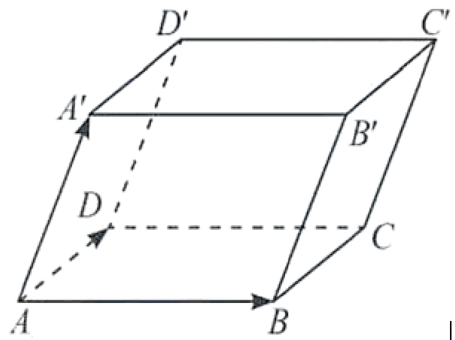
Theo định lí Pythagore ta có: $BD'=\sqrt{BD^2+DD'^2}=\sqrt{13+4^2}=\sqrt{29}\Rightarrow\left|\overrightarrow{BD'}\right|=\sqrt{29}$

Câu 26: Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ (Hình 3).

a) Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

b) Tìm các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$.

c) Tìm các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.



Hình 3

Lời giải

a) Giá của ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$ lần lượt là ba đường thẳng AB, AD, AA'. Chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng vì bốn điểm A, B, D, A' không đồng phẳng.

b) Do $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $AA'B'B$ là hình bình hành,

suy ra $AB // A'B'$ và $AB = A'B'$. Ta có hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng và có độ dài bằng nhau, suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$.

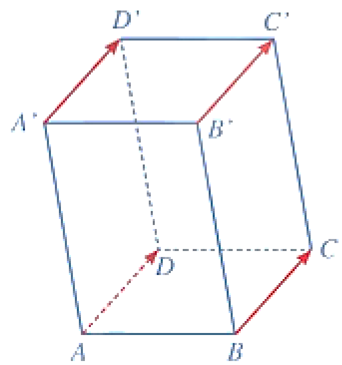
Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D'C'}$.

c) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA}$ có độ dài bằng nhau và ngược hướng, suy ra $\overrightarrow{DA}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{AD}$.

Ta có $ABCD$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AD}$ có cùng độ dài và ngược hướng với $\overrightarrow{CB}$, suy ra $\overrightarrow{CB}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{AD}$.

Tương tự, ta cũng có $\overrightarrow{D'A'}, \overrightarrow{C'B'}$ là vectơ đối của $\overrightarrow{AD}$.

Câu 27: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Hãy chỉ ra ba vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp sao cho ba vectơ đó:



Hình 2

a) Bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$;

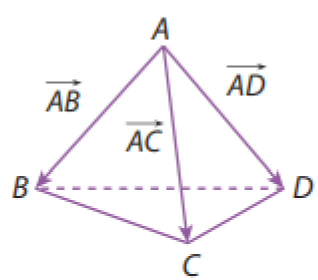
b) Là vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

a) Do các vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{A'D'}$ cùng hương với vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $AD = BC = B'C' = A'D'$ (tính chất hình hộp) nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'D'}$. Vậy ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{A'D'}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình hộp và bằng vectơ $\overrightarrow{AD}$.

b) Do các vectơ $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{D'A'}$ ngược hượng vởi vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $AD = CB = C'B' = D'A'$ (tính chất hình hộp) nên ba vectơ $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{D'A'}$ là ba vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AD}$.

Câu 28: Cho tứ diện $ABCD$. Hãy chỉ ra các vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện.

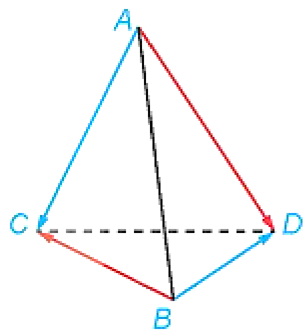


Hình 2.2

Lời giải

Ngoài đỉnh A, tứ diện còn có 3 đỉnh B, C, D nên ta có 3 vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ (Hình 2.2).

Câu 29: Cho tứ diên $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.



Hình 2.13

Lời giải

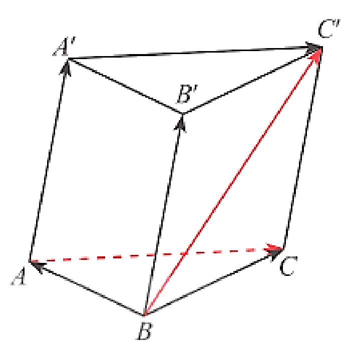
Theo quy tắc ba điểm trong không gian, ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

Từ đó lần lượt áp dụng tính chất của phép cộng vectơ trong không gian, ta được:

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD})$

$= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

Câu 30: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Tìm các vectơ tổng $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'}$.



Hình 8

Lời giải

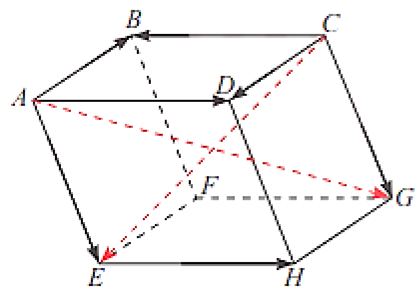
Ta có $ABC \cdot A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $AA'C'C$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$.

Do đó $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

Tương tự, ta cũng có $AA'B'B$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Do đó $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BC'}$.

Câu 31: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Thực hiện các phép toán sau đây:



Hình 11

a) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH}$.

Lời giải

a) Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{CE}$.

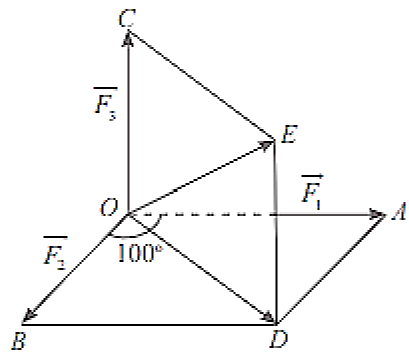
b) Ta có $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$.

Suy ra: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}$.

Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$.

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AG}$.

Câu 32: Có ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25 N và 12 N. Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4 N. Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên.



Hình 12

Lời giải

Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ là ba lực tác động vào vật đặt tại điểm O lần lượt có độ lớn là 25 N, 12 N, 4 N.

Vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{F}_1, \overrightarrow{OB} = \vec{F}_2, \overrightarrow{OC} = \vec{F}_3$.

Dựng hình bình hành $OADB$ và hình bình hành $ODEC$.

Hợp lực tác động vào vật là

$\vec{F} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE}$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác OBD, ta có

$OD^2 = BD^2 + OB^2 - 2 \cdot BD \cdot OB \cdot \cos\ \widehat{OBD} = OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\ 100°$.

Vì $OC \perp (OADB)$ nên $OC \perp OD$, suy ra $ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó tam giác ODE vuông tại D.

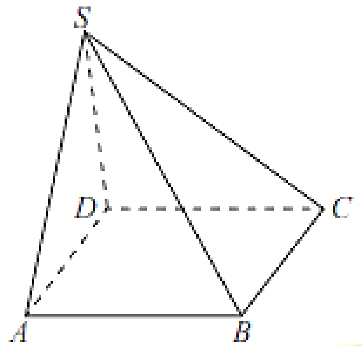
Ta có $OE^2 = OC^2 + OD^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\ 100°$.

Suy ra $OE = \sqrt{OC^2 + OA^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\ 100°}$

$= \sqrt{4^2 + 25^2 + 12^2 + 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos\ 100°} \approx 26{,}092$.

Vậy độ lớn của hợp lực là $F = OE \approx 26$ N.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Tìm các vectơ hiệu $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BS}-\overrightarrow{AD}$.



Hình 15

Lời giải

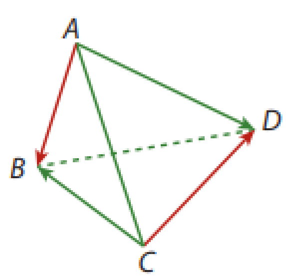
a) Theo quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{AD}$.

b) Do $ABCD$ là hình bình hành nên ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, suy ra $\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{BC}$.

Theo quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CS}$.

Vậy $\overrightarrow{BS}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CS}$.

Câu 34: Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.



Hình 2.9

Lời giải

Sử dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$

Áp dụng tính chất kết hợp và giao hoán của phép cộng vectơ, ta suy ra:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD})$

$= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

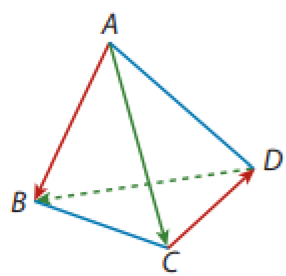
Câu 35: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình 2.10). Tìm vectơ $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'}$.

Lời giải

Vì $ABCD \cdot A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CB}$.

Suy ra $\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA'}$.

Câu 36: Cho hình tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.



Hình 2.11

Lời giải

Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hiệu, ta có:

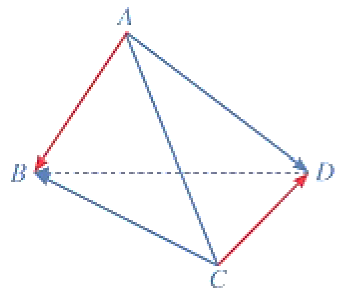
$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD})$

$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}$

$= \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Câu 37: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.



Hình 5

Lời giải

Theo quy tắc ba điểm, ta có:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$.

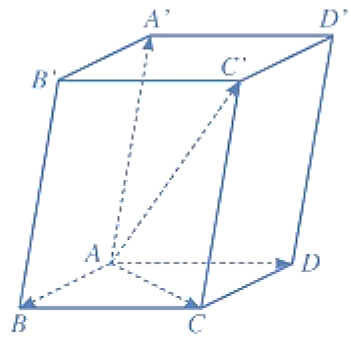
Do đó:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 38: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình 6). Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AC'}$



Hình 6

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'}$.

Do đó: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

Câu 39: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình 8).

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'D}$.

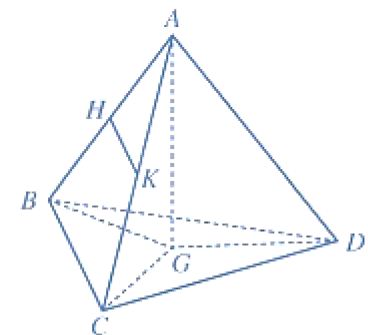
Lời giải

$\overrightarrow{B'B} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{B'B} + (-\overrightarrow{DB})$

$= \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D}$.

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC (Hìn 9). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HK}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.



Hình 9

Lời giải

a) Do HK là đường trung bình của tam giác ABC nên $BC//HK$ và $BC = 2HK$. Suy ra $\overrightarrow{BC}$ cùng hương với $\overrightarrow{HK}$ và $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{HK}|$. Vậy $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HK}$.

b) Ta có:

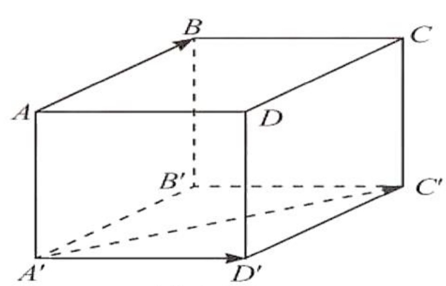
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$.

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Do đó, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Câu 41: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Xác định góc $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}\right), \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right)$.



Hình 23

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{A'D'}$, suy ra

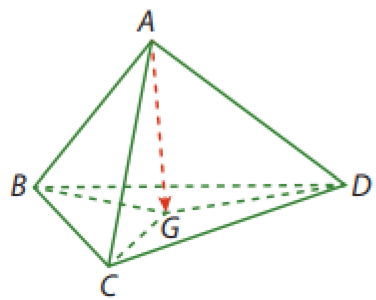
$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \widehat{DAB} = 90°.$

Ta có $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$, suy ra

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{CAB} = 45°$

Câu 42: Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm của tam giác BCD (Hình 2.15). Chứng minh rằng:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$



Hình 2.15

Lời giải

Áp dụng quy tắc ba điểm, ta có:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$

$= 3\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

Vì G là trọng tâm tam giác BCD nên:

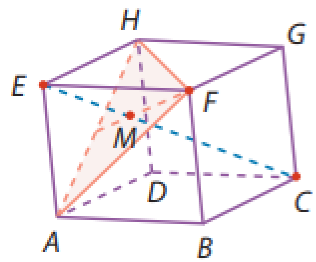
$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

Suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Câu 43: Cho hình hộp ABCD.EFGH. Điểm M là trọng tâm tam giác AFH (Hình 2.16).

a) Chứng minh rằng ba điểm E, M, C thẳng hàng.

b) Tính độ dài của $\overrightarrow{EM}$ trong trường hợp $ABCD$.EFGH là hình hộp đứng có các cạnh $AB = 5, AD = 6, AE = 10$ và $\widehat{ABC} = 120°$.



Hình 2.16

Lời giải

a) Để chứng minh E, M, C thẳng hàng, ta sẽ chứng minh $\overrightarrow{EC} = k\overrightarrow{EM}$ với k là một số thực nào đó.

Do M là trọng tâm của tam giác AFH nên ta có:

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = 3\overrightarrow{EM}$

Mặt khác, theo quy tắc hình hộp thì:

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EC}$

Suy ra $\overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EM}$. Vậy ba điểm E, M, C thẳng hàng.

b) Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC, ta có:

$AC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos\ 120° = 91$

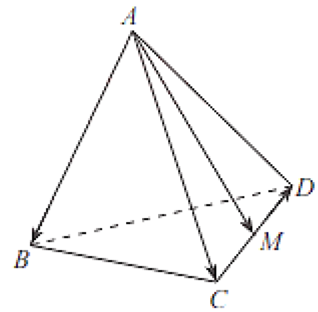
Khi $ABCD$.EFGH là hình hộp đứng thì EAC là tam giác vuông tại A, do đó:

$EC^2 = EA^2 + AC^2 = 100 + 91 = 191$

Suy ra $EM = \frac{1}{3}\sqrt{191}$.

Câu 44: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$. b) Tính góc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.



Hình 25

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$= AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC} = a\cdot a\cdot\cos 60^\circ = \dfrac{a^2}{2}$.

Tương tự ta cũng có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{a^2}{2}$.

Ta lại có $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$, suy ra:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\right) = \frac{a^2}{2}$$

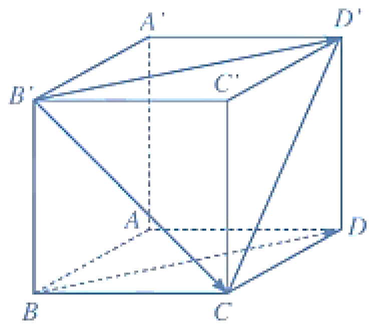
b) Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

Mà AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{CD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$.

Từ các kết quả trên ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 90^\circ$.

Câu 45: Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Tính góc giưa Hình 10 hai vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}$.



Hình 11

Lời giải

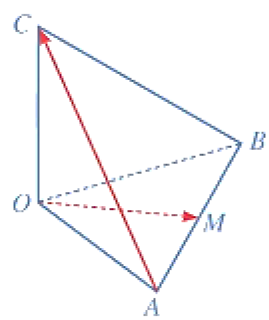
Ta có: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{B'D'}$. Do đó,

$\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}\right) = \left(\overrightarrow{B'D'},, \overrightarrow{B'C}\right) = \widehat{D'B'C}$.

Vì $B'C = CD' = D'B'$ nên tam giác $B'CD'$ là tam giác đều. Suy ra $D'B'C = 60^{\circ}$.

Vậy $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{B'C}\right) = 60^{\circ}$.

Câu 46: Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = OC = 1$. Gọi M là trung điểm của cạnh AB. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{AC}$.



Hình 13

Lời giải

Đặt $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$.

Khi đó, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Ta có: $\cos\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}$.

Mặt khác, do $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$

và $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\vec{c}-\vec{a}$

nên $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{a}\right)$

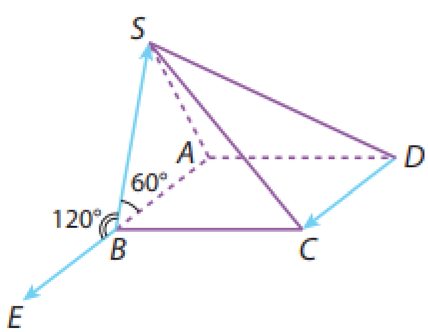
$=\frac{1}{2}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}^2+\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{a}\right)=-\frac{1}{2}$.

Ta lại có: $|\overrightarrow{OM}|=OM=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $|\overrightarrow{AC}|=AC=\sqrt{2}$.

Do đó, $\cos\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\frac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{AC}}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}}=\frac{-1}{2}$.

Vậy $\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AC}\right)=120^\circ$.

Câu 47: Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và mặt bên SAB là tam giác đều. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BS}$.



Hình 2.20

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//DC$.

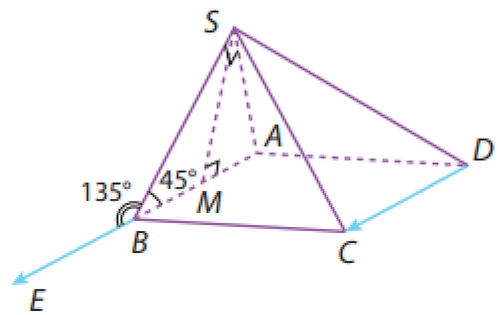
Trên tia AB lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{DC}$ (Hình 2.20). Ta có:

$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}) = \overrightarrow{EBS} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Vậy $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 120^\circ$.

Câu 48: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt bên ASB là tam giác vuông cân tại S và có cạnh $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AB. Hãy tính:

a) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS}$; b) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS}$; c) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS}$.



Hình 2.22

Lời giải

a) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD$. Gọi E là điểm thuộc tia AB sao cho $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$. Ta có:

$(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BS}) = \widehat{EBS}$

$\triangle ASB$ vuông cân (tại S) nên $\widehat{SBA} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{EBS} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, hay $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS}) = 135^\circ$.

Mặt khác, do $AB = a$ nên $AS = BS = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Từ đó ta có:

Vậy $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS} = -\frac{a^2}{2}$.

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{BS} = |\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{BS}| \cdot \cos(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BS})$

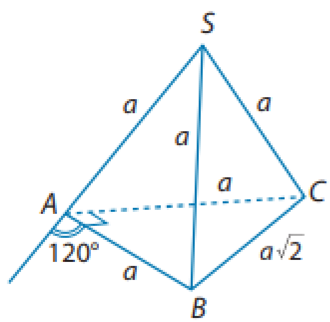
$= a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\ 135^\circ = a^2 \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AS}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}) = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\ 45^\circ = \frac{a^2}{2}$.

c) Tam giác ASB cân tại S và M là trung điểm của cạnh AB nên $SM \perp AB$, hay $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{AB}$. Suy ra

$\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{MS} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MS} = 0$.

Câu 49: Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa các vectơ $\overrightarrow{SC}$ và $\overrightarrow{AB}$



Hình 2.23

Lời giải

Ta có:

$$\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{SC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2}$$

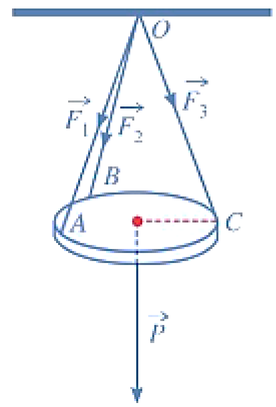
$$= \frac{\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{a^2}$$

Từ giả thiết suy ra SAB là tam giác đều và ABC là tam giác vuông cân tại A. Từ đó ta tính được:

$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{AB} = a \cdot a \cdot \cos\ 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$ và $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Suy ra $\cos(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2} \cdot$ Vậy $(\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$.

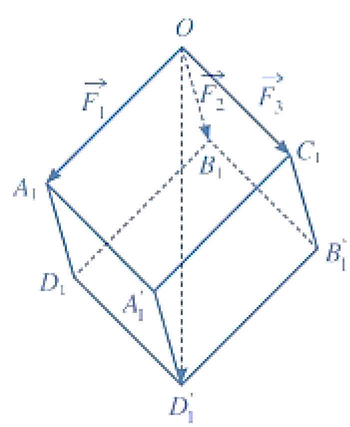
Câu 50: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F_3}| = 15(\mathrm{~N})$ (Hìn 14).



Hình 14

Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.

Lời giải



Hình 15

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \vec{F}_1, \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{OC_1} = \vec{F}_3$. Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1', sao cho $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp (Hình 15). Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp, ta có:

$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1'}$

Mặt khác, do các lực căng $\vec{F}_1, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15(\mathrm{~N})$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1, C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15 . Suy ra độ dài đường chéo OD_1' của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{P}$, ở đó $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên chiếc đèn.

Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là: $|\vec{P}| = |\overrightarrow{OD_1}| = 15\sqrt{3}(\mathrm{~N})$.

Câu 51: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm các cạnh $AC, A'C'$ (Hình 2.4).

a) Trong tất cả những vectơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh của lăng trụ, hãy chỉ ra các vectơ:

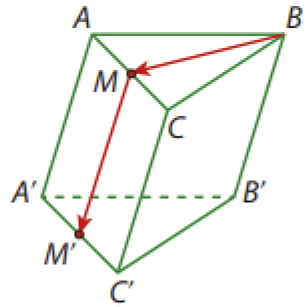
Khác $\vec{O}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AM}$;

Khác $\vec{O}$ và cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$;

Là vectơ đối của $\overrightarrow{AC}$;

Bằng $\overrightarrow{MM'}$.

b) Tìm độ dài của $\overrightarrow{BM}$ trong trường hợp ABC là tam giác cân tại B, có cạnh bên bằng 5 cm và góc ở đỉnh bằng 30° (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 2.4

Lời giải

a) Do $AC // A'C'$ và $M \in AC$ nên:

Vectơ khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AM}$ là vectơ có giá AC hoặc $A'C'$. Đó là các vectơ

$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'A'}$;

Trong những vectơ khác $\vec{0}$ và cùng phương với $\overrightarrow{AM}$, có hai vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AM}$;

Các vectơ đối của $\overrightarrow{AC}$ là $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C'A'}$;

Các vectơ bằng $\overrightarrow{MM'}$ là $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ (các vectơ này cùng hướng và cùng độ dài với $\overrightarrow{MM'}$)..

b) Từ giả thiết, ta suy ra tam giác AMB vuông tại M. Từ đó ta có:

$BM = BA \cdot \cos \widehat{ABM} = 5 \cdot \cos 15^\circ \approx 4{,}83(\text{ cm})$.

Vậy độ dài của $\overrightarrow{BM}$ là $|\overrightarrow{BM}| \approx 4{,}83(\text{ cm})$.

Câu 52: Theo định luật II Newton (Vật lí 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:

Hình 20

$\vec{F} = m\vec{a}$

trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc $\left(m/s^2\right)$, $\vec{F}$ là vectơ lực (N)

Hình 20 tác dụng lên vật, m(kg) là khối lượng của vật.

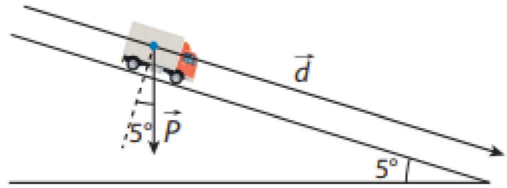
Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng 0,5 kg một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\vec{F} = m\vec{a}$, suy ra $|\vec{F}| = m|\vec{a}| = 0{,}5.50 = 25(\text{ N})$.

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng 0,5 kg một gia tốc 50 m/s^2 thì cần một lực đá có độ lớn là 25 N.

Câu 53: Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F}.\vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$. Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$.



Hình 2.24

Lời giải

Ta có 1,5 tấn = 1500 kg.

Độ lớn của trọng lực tác dụng lên chiếc xe là: $|\vec{P}| = m|\vec{g}| = 1500.9,8 = 14700$ (N).

Vectơ $\vec{d}$ biểu thị độ dịch chuyển của xe có độ dài là $|\vec{d}| = 30(\text{ m})$ và $(\vec{P}, \vec{d}) = 90^\circ - 5^\circ = 85^\circ$.

Công sinh ra bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m là:

$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{P}, \vec{d}) = 14700.30 \cdot \cos 85^\circ \approx 38436(J)$