

## MỤC LỤC

▶ BÀI 3. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO	2
Ⓐ. Tóm tắt kiến thức	2
Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản	3
♦ Dạng 1: Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ, tích của một số với một vectơ	3
♦ Dạng 2: Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng, tọa độ trọng tâm của tam giác	4
♦ Dạng 3: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng	5
♦ Dạng 4: Ứng dụng thực tế	6
Ⓒ. Dạng toán rèn luyện	8
♦ Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn	8
♦ Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai	21
♦ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn	44

**A. Tóm tắt kiến thức**

**1. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTO, PHÉP TRỪ HAI VECTO, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTO**

- ✍ Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (x; y; z)$  và  $\vec{b} = (x'; y'; z')$ . Ta có:
  - ✓  $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y'; z + z')$ ;
  - ✓  $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y'; z - z')$ ;
  - ✓  $k\vec{a} = (kx; ky; kz)$  với  $k$  là một số thực.
- ✍ Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm không thẳng hàng  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$  và  $C(x_C; y_C; z_C)$ . Khi đó:
  - ✓ Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  là  $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$ ;
  - ✓ Tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$  là  $\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}; \frac{y_A+y_B+y_C}{3}; \frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$ .

**2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG**

- ✍ Trong không gian  $Oxyz$ , tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{a} = (x; y; z)$  và  $\vec{b} = (x'; y'; z')$  được xác định bởi công thức:
  - ✓  $\vec{a} \cdot \vec{b} = xx' + yy' + zz'$
- ✍ **Chú ý:** Nếu  $A(x_A; y_A; z_A)$  và  $B(x_B; y_B; z_B)$ 

thì  $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ .

Đặc biệt, khi  $B$  trùng  $O$  ta nhận được công thức  $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$ .



a)  $3\vec{a} = (3 \cdot (-2); 3 \cdot 3; 3 \cdot 2)$ . Vậy  $3\vec{a} = (-6; 9; 6)$ .

b) Ta có  $2\vec{a} = (-4; 6; 4)$  và  $\vec{b} = (2; 1; -1)$ . Do đó,  $2\vec{a} - \vec{b} = (-4 - 2; 6 - 1; 4 - (-1))$ .

Vậy  $2\vec{a} - \vec{b} = (-6; 5; 5)$ .

c) Do  $\vec{a} = (-2; 3; 2)$  và  $2\vec{b} = (4; 2; -2)$  nên  $\vec{a} + 2\vec{b} = (2; 5; 0)$ . Ngoài ra, vì  $-\frac{3}{2}\vec{c} = \left(-\frac{3}{2}; -3; -\frac{9}{2}\right)$  nên  $\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{c} = \left(\frac{1}{2}; 2; -\frac{9}{2}\right)$ .

## ♦ Dạng 2: Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng, tọa độ trọng tâm của tam giác

### 👉 Các ví dụ minh họa

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(3; 2; 1)$  và  $C(2; -1; 5)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  và tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

#### Lời giải

♦ Vì  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  nên tọa độ của điểm  $M$  là  $\left(\frac{1+3}{2}; \frac{2+2}{2}; \frac{3+1}{2}\right)$ ,

♦ suy ra  $M(2; 2; 2)$ .

♦ Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên tọa độ của điểm  $G$  là  $\left(\frac{1+3+2}{3}; \frac{2+2+(-1)}{3}; \frac{3+1+5}{3}\right)$ ,

♦ suy ra  $G(2; 1; 3)$ .

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-2; 1; 0)$ ,  $B(0; 2; 5)$ ,  $C(5; 0; 2)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  và trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

#### Lời giải

♦ Do  $M(x_M; y_M; z_M)$  là trung điểm đoạn thẳng  $AB$  nên

♦  $x_M = \frac{-2+0}{2} = -1; y_M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}; z_M = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}$ .

♦ Vậy  $M\left(-1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ .

♦ Do  $G(x_G; y_G; z_G)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên

♦  $x_G = \frac{-2+0+5}{3} = 1;$

♦  $y_G = \frac{1+2+0}{3} = 1;$

♦  $z_G = \frac{0+5+2}{3} = \frac{7}{3}.$

♦ Vậy  $G\left(1; 1; \frac{7}{3}\right)$ .

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; -1; 1), B(0; 1; 2), C(1; 0; 1)$ . Tìm tọa độ:

a) Trung điểm  $M$  của  $AB$ ; b) Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

### Lời giải

a) Tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  là

♦  $M\left(\frac{1+0}{2}; \frac{-1+1}{2}; \frac{1+2}{2}\right)$  hay  $M\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{3}{2}\right)$ .

b) Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

♦  $G\left(\frac{1+0+1}{3}; \frac{-1+1+0}{3}; \frac{1+2+1}{3}\right)$  hay  $G\left(\frac{2}{3}; 0; \frac{4}{3}\right)$

### ♦ Dạng 3: Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

#### ☞ Các ví dụ minh họa

**Câu 1:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; 4; 2)$  và  $\vec{b} = (-4; 1; 0)$ .

a) Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  và cho biết hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  có vuông góc với nhau hay không.

b) Tính độ dài của vectơ  $\vec{a}$ .

### Lời giải

a) Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0$ . Do đó, hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau.

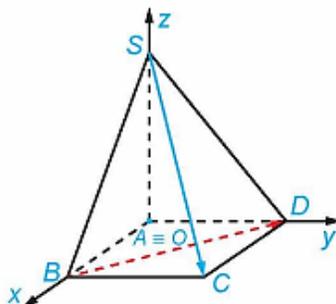
b) Độ dài của vectơ  $\vec{a}$  là  $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21}$ .

**Câu 2:** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABCD)$ . Giả sử  $SA = 2, AB = 3, AD = 4$ . Xét hệ tọa độ  $Oxyz$  với  $O$  trùng  $A$  và các tia  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt trùng với các tia  $AB, AD, AS$  (H. 2.48).

a) Xác định tọa độ của các điểm  $S, A, B, C, D$ .

b) Tính  $BD$  và  $SC$ .

c) Tính  $(\vec{BD}, \vec{SC})$ .



Hình 2.48

### Lời giải

a) Vì  $A$  trùng gốc tọa độ nên  $A(0; 0; 0)$ . Vì  $B$  thuộc tia  $Ox$  và  $AB = 3$  nên  $B(3; 0; 0)$ . Vì  $D$  thuộc tia  $Oy$  và  $AD = 4$  nên  $D(0; 4; 0)$ . Vì  $S$  thuộc tia  $Oz$  và  $AS = 2$  nên  $S(0; 0; 2)$ . Vì hình chiếu của  $C$  lên các trục  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt là  $B, D, A$  nên  $C(3; 4; 0)$ .

b) Ta có  $\overrightarrow{BD} = (0 - 3; 4 - 0; 0 - 0) = (-3; 4; 0)$ , suy ra  $BD = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 0^2} = 5$ .

♦ Ta có  $\overrightarrow{SC} = (3 - 0; 4 - 0; 0 - 2) = (3; 4; -2)$ , suy ra  $SC = |\overrightarrow{SC}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$ .

c) Ta có  $\cos(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}) = \frac{\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{SC}|} = \frac{(-3) \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 0 \cdot (-2)}{5\sqrt{29}} = \frac{7}{5\sqrt{29}}$ , suy ra  $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC}) \approx 74,9^\circ$ .

**Câu 3:** Cho ba vectơ  $\vec{a} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; -2)$ ,  $\vec{c} = (2; 1; -1)$ .

a) Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{c}$ .

b) Tính  $|\vec{a}|, |\vec{b}|, \cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

c) Cho  $\vec{d} = (1; 7; -3)$ . Chứng minh  $\vec{d} \perp \vec{a}$ .

### Lời giải

a) Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) = 1$ ;

♦  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 3$ .

b) Ta có:  $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ ;  $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$ .

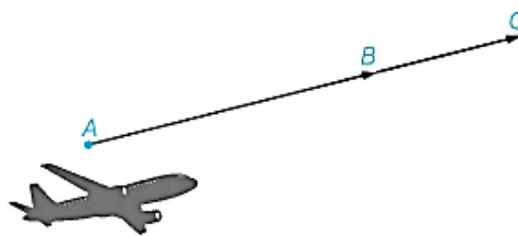
♦  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{30}$

c) Ta có  $\vec{d} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 3 + 7 \cdot 0 + (-3) \cdot 1 = 0$ , suy ra  $\vec{d} \perp \vec{a}$ .

### ♦ Dạng 4: Ứng dụng thực tế

#### 📖 Các ví dụ minh họa

**Câu 1:** Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đã phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm  $A(800; 500; 7)$  đến điểm  $B(940; 550; 8)$  trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?



Hình 2.49

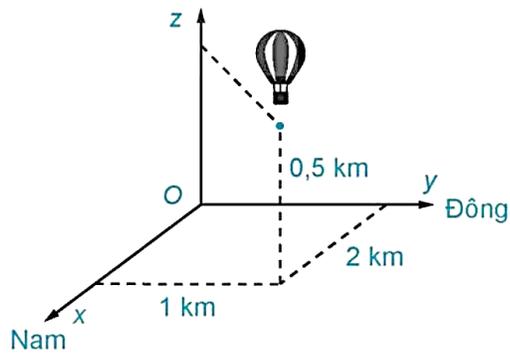
### Lời giải

- ♦ Gọi  $C(x; y; z)$  là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng hướng.
- ♦ Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên  $AB = 2BC$ .
- ♦ Do đó  $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{940-800}{2}; \frac{550-500}{2}; \frac{8-7}{2}\right) = (70; 25; 0,5)$ .
- ♦ Mặt khác,  $\overrightarrow{BC} = (x - 940; y - 550; z - 8)$  nên 
$$\begin{cases} x - 940 = 70 \\ y - 550 = 25 \\ z - 8 = 0,5 \end{cases}$$
- ♦ Từ đó 
$$\begin{cases} x = 1010 \\ y = 575 \\ z = 8,5 \end{cases}$$
 và vì vậy  $C(1010; 575; 8,5)$ .
- ♦ Vậy tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là  $(1010; 575; 8,5)$ .

**Câu 2:** Hai chiếc kHinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km.

Chọn hệ trục tọa độ  $Oxyz$  với gốc  $O$  đặt tại điểm xuất phát của hai kHinh khí cầu, mặt phẳng  $(Oxy)$  trùng với mặt đất với trục  $Ox$  hướng về phía nam, trục  $Oy$  hướng về phía đông và trục  $Oz$  hướng thẳng đứng lên trời (H.2.50), đơn vị đo lấy theo kilômét.

- a) Tìm tọa độ của mỗi chiếc kHinh khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn.
- b) Xác định khoảng cách giữa hai kHinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



(H.2.50)

**Lời giải**

- a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai có tọa độ lần lượt là  $(2; 1; 0,5)$  và  $(-1; -1,5; 0,8)$ .
- b) Khoảng cách giữa hai chiếc khinh khí cầu là

$$\sqrt{(-1 - 2)^2 + (-1,5 - 1)^2 + (0,8 - 0,5)^2} = \sqrt{15,34} \approx 3,92 \text{ (km)}.$$

**Câu 3:** Trong Ví dụ 2, khinh khí cầu thứ nhất hay thứ hai ở xa điểm xuất phát hơn? Giải thích vì sao.

**Lời giải**

- ♦ Theo Ví dụ 2 ta có, khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là  $A(2; 1; 0,5)$ ,
- ♦ khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là  $B(-1; -1,5; 0,8)$ .
- ♦ Ta có:  $OA = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0,5^2} = \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ km}$ ,  $OB = \sqrt{(-1)^2 + (-1,5)^2 + 0,8^2} = \frac{\sqrt{389}}{10} \text{ km}$ .
- ♦ Vì góc  $O$  đặt tại điểm xuất phát và  $OA > OB$  nên khinh khí cầu thứ hai gần điểm xuất phát hơn.

### ©. Dạng toán rèn luyện

♦ **Dạng 1:** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

**Câu 1:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(3; -2; 3)$  và  $B(-1; 2; 5)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$ .

- A.**  $I(-2; 2; 1)$ .      **B.**  $I(1; 0; 4)$ .      **C.**  $I(2; 0; 8)$ .      **D.**  $I(2; -2; -1)$ .

### Lời giải

#### Chọn B

Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn  $AB$  với  $A(3;-2;3)$  và  $B(-1;2;5)$  được tính bởi

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 0 \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow I(1;0;4).$$

**Câu 2:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;1;-1)$  và  $B(2;3;2)$ . Vectơ  $\overline{AB}$  có tọa độ là

- A.**  $(1;2;3)$ .      **B.**  $(-1;-2;3)$ .      **C.**  $(3;5;1)$ .      **D.**  $(3;4;1)$ .

### Lời giải

#### Chọn A

Ta có  $\overline{AB} = (1;2;3)$ .

**Câu 3:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho véc-tơ  $\overline{AO} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j}$ . Tọa độ của điểm  $A$  là

- A.**  $(3;17;-2)$ .      **B.**  $(-3;-17;2)$ .      **C.**  $(3;-2;5)$ .      **D.**  $(3;5;-2)$ .

### Lời giải

#### Chọn B

Ta có:  $\overline{AO} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j} = 3\vec{i} + 12\vec{j} - 2\vec{k} + 5\vec{j} = 3\vec{i} + 17\vec{j} - 2\vec{k}$ .

Suy ra  $\overline{OA} = -3\vec{i} - 17\vec{j} + 2\vec{k}$  nên  $A(-3;-17;2)$ .

**Câu 4:** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(-1;2;-2)$  trên trục  $Oz$  là điểm

- A.**  $H(0;0;-1)$ .      **B.**  $E(-1;2;0)$ .      **C.**  $F(0;0;-2)$ .      **D.**  $G(0;0;2)$ .

### Lời giải

#### Chọn C

Hình chiếu vuông góc của điểm  $M(-1;2;-2)$  trên trục  $Oz$  là điểm  $F(0;0;-2)$

**Câu 5:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $A(1;2;4)$ ,  $B(3;4;2)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$ , biết  $B$  là trung điểm của  $AM$ .

- A.**  $M(-1;0;6)$ .      **B.**  $M(2;2;-2)$ .      **C.**  $M(2;3;3)$ .      **D.**  $M(5;6;0)$ .

### Lời giải

#### Chọn D

$B$  là trung điểm của  $AM$  nên ta có:

$$\begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_M}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_M}{2} \\ z_B = \frac{z_A + z_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2x_B - x_A \\ y_M = 2y_B - y_A \\ z_M = 2z_B - z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 2 \cdot 3 - 1 \\ y_M = 2 \cdot 4 - 2 \\ z_M = 2 \cdot 2 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 5 \\ y_M = 6 \\ z_M = 0 \end{cases}$$

Vậy  $M(5;6;0)$

**Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm nào sau đây thuộc trục  $Oz$ ?

- A.  $M(0;0;-2)$ .      B.  $M(1;2;0)$ .      C.  $M(1;0;2)$ .      D.  $M(1;0;0)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Điểm  $M(0;0;-2) \in Oz$ .

**Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $A(-1;0;1)$  và  $B(1;-1;2)$  tọa độ véc tơ  $\overline{AB}$  là

- A.  $(2;-1;1)$ .      B.  $(0;-1;-1)$ .      C.  $(-2;1;-1)$ .      D.  $(0;-1;3)$

**Lời giải**

**Chọn A**

Tọa độ véc tơ  $\overline{AB}(2;-1;1)$ .

**Câu 8:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;2;0)$ ,  $B(-1;0;-2)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$ .

- A.  $M(-1;-1;-1)$ .      B.  $M(0;1;-1)$ .      C.  $M(0;2;-2)$ .      D.  $M(-2;-2;-2)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo công thức tọa độ trung điểm của đoạn thẳng, ta có  $M(0;1;-1)$ .

**Câu 9:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1;2;0)$ ,  $B(-1;0;1)$ ,  $C(0;2;-1)$ . Tính độ dài của vectơ  $\overline{AB} - 2\overline{AC}$ .

- A.  $\sqrt{21}$ .      B. 21.      C.  $\sqrt{13}$ .      D. 13.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có  $\overline{AB} = (-2; -2; 1)$ ,  $\overline{AC} = (-1; 0; -1)$ ,  $\overline{AB} - 2\overline{AC} = (0; -2; 3)$ .

Khi đó độ dài của vectơ  $\overline{AB} - 2\overline{AC}$  là:  $|\overline{AB} - 2\overline{AC}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ .

**Câu 10:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;-1;1)$ ,  $B(3;2;-2)$ ,  $C(-3;1;5)$ . Tìm

tọa độ điểm  $M(x; y; z)$  thỏa mãn  $\overline{MA} - 2\overline{AB} = 4\overline{CM}$ . Khi đó tổng  $S = \frac{9}{x} + \frac{3}{y} - \frac{27}{z}$  bằng

- A. 6.      B. -15.      C. 16.      D. -13.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có } \overline{MA} - 2\overline{AB} = 4\overline{CM} \Rightarrow \begin{cases} 1-x-2.2=4(x+3) \\ -1-y-2.3=4(y-1) \\ 1-z-2.(-3)=4(z-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-\frac{3}{5} \\ z=\frac{27}{5} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } S = \frac{9}{-3} + \frac{3.5}{-3} - \frac{27.5}{27} = -13.$$

- Câu 11:** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm đối xứng của  $A(1;2;3)$  qua mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm nào dưới đây  
**A.**  $Q(-1;2;3)$ .      **B.**  $N(1;-2;3)$ .      **C.**  $P(1;2;-3)$ .      **D.**  $M(1;-2;-3)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Nếu  $H$  là hình chiếu của  $A(1;2;3)$  lên  $(Oyz)$  thì  $H(0;2;3)$ . Gọi  $A'$  là điểm đối xứng của  $A(1;2;3)$  qua mặt phẳng  $(Oyz)$  thì  $H(0;2;3)$  là trung điểm của  $AA'$ . Do đó, ta có

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2.0 - 1 \\ y_{A'} = 2.2 - 2 \\ z_{A'} = 2.3 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -1 \\ y_{A'} = 2 \\ z_{A'} = 3 \end{cases} \Rightarrow A'(-1;2;3) \equiv Q(-1;2;3).$$

- Câu 12:** Trong không gian  $Oxyz$ , điểm đối xứng với điểm  $M(4;-5;3)$  qua trục  $Oz$  có tọa độ là  
**A.**  $(4;-5;-3)$ .      **B.**  $(-4;5;3)$ .      **C.**  $(-4;5;-3)$ .      **D.**  $(0;0;3)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Hình chiếu vuông góc của điểm  $M$  lên trục  $Oz$  là  $H(0;0;3)$

Gọi  $M'$  là điểm đối xứng của điểm  $M$  qua trục  $Oz$ , khi đó  $H$  là trung điểm của  $MM'$

Suy ra  $M'(-4;5;3)$ .

- Câu 13:** Trong không gian cho  $Oxyz$  vector  $\overline{OM} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ . Gọi  $M'$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên mặt phẳng  $(Oxy)$ . Khi đó tọa độ của điểm  $M'$  trong hệ tọa độ  $Oxyz$  là  
**A.**  $(1;-3;4)$ .      **B.**  $(1;4;-3)$ .      **C.**  $(0;0;4)$ .      **D.**  $(1;-3;0)$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $\overline{OM} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k} \Rightarrow M(1;-3;4)$ .

$M'$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên mặt phẳng  $(Oxy) \Rightarrow M'(1;-3;0)$

- Câu 14:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-1;2;5)$ ,  $B(3;-6;3)$ . Hình chiếu vuông góc của trung điểm  $I$  của đoạn  $AB$  trên mặt phẳng  $(Oyz)$  là điểm nào dưới đây?  
**A.**  $P(3;0;0)$ .      **B.**  $N(3;-1;5)$ .      **C.**  $M(0;-2;4)$ .      **D.**  $Q(0;0;5)$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn  $AB$ :  $I(1;-2;4)$

Tọa độ hình chiếu của  $I$  mặt phẳng  $(Oyz)$ :  $M(0; -2; 4)$ .

**Câu 15:** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(1; 2; -3)$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$  có tọa độ là

- A.  $(-1; 2; -3)$ .      B.  $(0; 2; -3)$ .      C.  $(1; 0; 0)$ .      D.  $(1; -2; 3)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Hình chiếu vuông góc của điểm  $M(1; 2; -3)$  lên mặt phẳng  $(Oyz)$  có tọa độ là  $(0; 2; -3)$ .

**Câu 16:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G(-3; 1; 4)$  và  $A(1; 0; -1)$ ,  $B(2; 3; 5)$ . Tọa độ điểm  $C$  là

- A.  $C(-6; 2; 0)$ .      B.  $C(4; 2; -1)$       C.  $C(-12; 0; 8)$       D.  $C(3; -1; -5)$

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $C(x; y; z)$ .

$$\text{Do } G(-3; 1; 4) \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} -3 = \frac{1+2+x}{3} \\ 1 = \frac{0+3+y}{3} \\ 4 = \frac{-1+5+z}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = 0 \\ z = 8 \end{cases} \text{ hay } C(-12; 0; 8)$$

**Câu 17:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 2; 3)$ ,  $B(-2; -4; 9)$ . Điểm  $M$  thuộc đoạn thẳng  $AB$  sao cho  $MA = 2MB$ . Độ dài đoạn thẳng  $OM$  là:

- A. 5.      B. 3.      C.  $\sqrt{17}$ .      D.  $\sqrt{54}$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Điểm  $M$  thuộc đoạn thẳng  $AB$  và  $MA = 2MB$

Nên  $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = -2(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = -2(y_B - y_M) \\ z_A - z_M = -2(z_B - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_M = -2(-2 - x_M) \\ 2 - y_M = -2(-4 - y_M) \\ 3 - z_M = -2(9 - z_M) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M = -3 \\ 3y_M = -6 \\ 3z_M = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -1 \\ y_M = -2 \\ z_M = 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow M(-1; -2; 7)$ .

Độ dài đoạn thẳng  $OM = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 7^2} = 3\sqrt{6}$ .

**Câu 18:** Trong không gian  $Oxyz$ , hình chiếu vuông góc của điểm  $M(5; -6; 2)$  lên mặt phẳng  $(Oxz)$  có tọa độ là

- A.  $(0; -6; 0)$ .      B.  $(5; 0; 2)$ .      C.  $(5; -6; 0)$ .      D.  $(0; -6; 2)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

Mặt phẳng  $(Oxz)$  có phương trình  $y=0$

Vậy hình chiếu vuông góc của điểm  $M(5;-6;2)$  lên mặt phẳng  $(Oxz)$  có tọa độ là  $(5;0;2)$ .

**Câu 19:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;-2;3); B(2;-3;4)$ . Tìm điểm  $M \in (Oxy)$  sao cho ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng

- A.**  $M(1;1;0)$ .      **B.**  $M(3;-5;7)$ .      **C.**  $M(-3;5;0)$ .      **D.**  $M(-2;1;0)$ .

**Lời giải****Chọn D**

Ta có:  $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$

$$\overline{AB} = (1; -1; 1); \overline{AM} = (x-1; y+2; -3)$$

$A, B, M$  thẳng hàng  $\Rightarrow \overline{AB}, \overline{AM}$  cùng phương

$$\Rightarrow \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{-3}{1} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(-2; 1; 0).$$

**Câu 20:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(3;1;4)$  và  $N(0;2;-1)$ . Tọa độ trọng tâm của tam giác  $OMN$  là

- A.**  $(-3;1;-5)$ .      **B.**  $(-1;-1;-1)$ .      **C.**  $(3;3;3)$ .      **D.**  $(1;1;1)$ .

**Lời giải****Chọn D**

Ta có tọa độ  $M(3;1;4)$ ,  $N(0;2;-1)$  và  $O(0;0;0)$

$$\text{Trọng tâm } G \text{ của tam giác } OMN \text{ có tọa độ thỏa } \begin{cases} x_G = \frac{x_M + x_N + x_O}{3} = 1 \\ y_G = \frac{y_M + y_N + y_O}{3} = 1 \\ z_G = \frac{z_M + z_N + z_O}{3} = 1 \end{cases}$$

Suy ra  $G(1;1;1)$

**Câu 21:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho điểm  $A(1;2;4)$ ,  $B(2;4;-1)$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $OAB$ .

- A.**  $G(6;3;3)$ .      **B.**  $G(2;1;1)$ .      **C.**  $G(2;1;1)$ .      **D.**  $G(1;2;1)$ .

**Lời giải****Chọn D**

$$\text{Gọi } G \text{ là trọng tâm của tam giác theo công thức ta có } \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_O}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_O}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_O}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = 1 \\ y_G = 2 \\ z_G = 1 \end{cases}$$

Vậy  $G(1;2;1)$ .

**Câu 22:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(1;0;2)$ ,  $B(-2;1;3)$ ,  $C(3;2;4)$ ,  $D(6;9;-5)$ . Hãy tìm tọa độ trọng tâm của tứ diện  $ABCD$ ?

- A.**  $(2;3;-1)$ .      **B.**  $(2;-3;1)$ .      **C.**  $(2;3;1)$ .      **D.**  $(-2;3;1)$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi  $G(x;y;z)$  là tọa độ trọng tâm của tứ diện  $ABCD$  ta có:

$$\begin{cases} x = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4} \\ y = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4} \\ z = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1-2+3+6}{4} \\ y = \frac{0+1+2+9}{4} \\ z = \frac{2+3+4-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

**Câu 23:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;0;-2)$ ,  $B(2;1;-1)$ ,  $C(1;-2;2)$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

- A.**  $G(4;-1;-1)$ .      **B.**  $G\left(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .      **C.**  $G\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ .      **D.**  $G\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ .

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } G\left(\frac{1+2+1}{3}; \frac{0+1-2}{3}; \frac{-2-1+2}{3}\right) = G\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

**Câu 24:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(1;0;3)$ ,  $B(2;3;-4)$ ,  $C(-3;1;2)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

- A.**  $D(-2;4;-5)$ .      **B.**  $D(4;2;9)$ .      **C.**  $D(6;2;-3)$ .      **D.**  $D(-4;-2;9)$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có  $\overline{BA} = (-1;-3;7)$ , gọi  $D(x;y;z)$ ,  $\overline{CD} = (x+3;y-1;z-2)$ .

$$ABCD \text{ là hình bình hành khi } \overline{BA} = \overline{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = -1 \\ y-1 = -3 \\ z-2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases} \Rightarrow D(-4;-2;9)$$

**Câu 25:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  biết  $A(2;1;-4)$ ,  $B(5;-3;3)$ ,  $C(-1;-1;10)$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

- A.**  $G(2;1-3)$ .      **B.**  $G(2;-1;3)$ .      **C.**  $G(2;-1-3)$ .      **D.**  $G(-2;-1;3)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$G \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = -1 \Leftrightarrow G(2;-1;3) \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = 3 \end{cases}$$

**Câu 26:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(1;3;4)$ ;  $B(1;0;-2)$  và  $C(4;0;1)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

- A.**  $G(3;0;2)$ .      **B.**  $G(2;1;1)$ .      **C.**  $G(1;1;3)$ .      **D.**  $G(3;0;-1)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Ta có } G(x_G; y_G; z_G) \text{ với } \begin{cases} x_G = \frac{1+1+4}{3} = 2 \\ y_G = \frac{3+0+0}{3} = 1 \\ z_G = \frac{4-2+1}{3} = 1 \end{cases}$$

**Câu 27:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $A(1;-2;4)$ ,  $B(0;2;5)$ ,  $C(5;6;3)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

- A.**  $G(6;3;3)$ .      **B.**  $G(4;2;2)$ .      **C.**  $G(3;3;6)$ .      **D.**  $G(2;2;4)$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$G \text{ là trọng tâm của tam giác } ABC \text{ nên ta có: } \begin{cases} x_G = \frac{1+0+5}{3} = 2 \\ y_G = \frac{-2+2+6}{3} = 2 \text{ . Vậy } G(2;2;4) \\ z_G = \frac{4+5+3}{3} = 4 \end{cases}$$

**Câu 28:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-4;1;-5)$ ;  $B(2;-4;7)$ ;  $C(3;-2;9)$ . Tọa độ điểm  $D$  để  $ABCD$  là hình bình hành là

- A.**  $(2;3;-3)$ .      **B.**  $(-3;-3;3)$ .      **C.**  $(-6;5;-12)$ .      **D.**  $(-3;3;-3)$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

Để  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

Mà  $\overline{AB} = (6; -5; 12)$ ;  $\overline{DC} = (3 - x_D; -2 - y_D; 9 - z_D)$

Suy ra 
$$\begin{cases} 3 - x_D = 6 \\ -2 - y_D = -5 \\ 9 - z_D = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 3 \\ z_D = -3 \end{cases} \Rightarrow D(-3; 3; -3).$$

**Câu 29:** Cho hai điểm  $M(1; -2; 3)$  và  $N(3; 0; -1)$ . Tìm tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $MN$ .

- A.  $I(4; -2; 2)$ .      B.  $I(2; -1; 2)$ .      C.  $I(4; -2; 1)$       D.  $I(2; -1; 1)$

**Lời giải**

**Chọn D**

Trung điểm  $I$  có tọa độ là  $I\left(\frac{1+3}{2}; \frac{-2+0}{2}; \frac{3-1}{2}\right) \Leftrightarrow I(2; -1; 1)$ .

**Câu 30:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 2; 0)$ ,  $C(0; 0; 2)$  và  $D(2; 2; 2)$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tọa độ trung điểm  $I$  của  $MN$  là:

- A.  $I(1; -1; 2)$ .      B.  $I(1; 1; 0)$ .      C.  $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ .      D.  $I(1; 1; 1)$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1:** Ta có  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$  nên  $M(1; 1; 0)$ ,  $N(1; 1; 2)$ , từ đó suy ra trung điểm của  $MN$  là  $I(1; 1; 1)$ .

**Cách 2:** Từ giả thiết suy ra  $I$  là trọng tâm tứ diện. Vậy  $I(1; 1; 1)$ .

**Câu 31:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $M(2; 3; -1)$ ,  $N(-1; 1; 1)$  và  $P(1; m-1; 2)$ .

Tìm  $m$  để tam giác  $MNP$  vuông tại  $N$ .

- A.  $m = -6$ .      B.  $m = 0$ .      C.  $m = -4$ .      D.  $m = 2$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overline{MN}(-3; -2; 2)$ ;  $\overline{NP}(2; m-2; 1)$

Tam giác  $MNP$  vuông tại  $N \Leftrightarrow \overline{MN} \cdot \overline{NP} = 0 \Leftrightarrow -6 - 2(m-2) + 2 = 0 \Leftrightarrow m-2 = -2 \Leftrightarrow m = 0$ .

**Câu 32:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 1; 1)$ ,  $B(-1; 2; 3)$  và  $C(3; 2; 1)$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc đường thẳng

$BC$  sao cho  $\overline{BM} = 2\overline{BC}$ . Để  $BMDA$  là hình bình hành thì tọa độ  $D$  là

- A.  $D(5; 1; 1)$ .      B.  $D(5; 1; -1)$ .      C.  $D(5; -1; -1)$ .      D.  $D(-5; 1; -1)$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$\overline{BC} = (4; 0; -2)$ . Gọi  $D(x; y; z)$  suy ra  $\overline{AD} = (x-1; y-1; z-1)$ .

$BMDA$  là hình bình hành khi và chỉ khi  $\overline{AD} = \overline{BM} \rightarrow D(5; 1; -1)$

**Câu 33:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1;2;4)$ ,  $B(3;0;-2)$  và  $C(1;3;7)$ . Gọi  $D$  chân đường phân giác trong hạ từ  $A$ . Tính  $OD$

- A.  $\frac{\sqrt{207}}{3}$ .                      B.  $\frac{\sqrt{205}}{3}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{201}}{3}$ .                      D.  $\frac{\sqrt{203}}{3}$ .

**Lời giải**

**Chọn B**

$AB = 2\sqrt{14}$  và  $AC = \sqrt{14}$  do đó  $AB = 2AC$ . Suy ra  $DB = 2DC$ .

Do  $D$  là chân đường phân giác trong và  $DB = 2DC$  nên  $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{DC}$ , suy ra  $D\left(\frac{5}{3}; 2; 4\right)$

Vậy  $OD = \frac{\sqrt{205}}{3}$ .

**Câu 34:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCE$  với  $A(3;1;2)$ ,  $B(1;0;1)$ ,  $C(2;3;0)$ . Tọa độ đỉnh  $E$  là

- A.  $E(4;4;1)$ .                      B.  $E(0;2;-1)$ .                      C.  $E(1;3;-1)$ .                      D.  $E(1;1;2)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Cần nhớ: Nếu  $ABCD$  là hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  hoặc  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

Áp dụng:

Gọi  $E(x; y; z)$ . Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-2; -1; -1)$  và  $\overrightarrow{EC} = (2-x; 3-y; -z)$ .

Vì  $ABCE$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = -2 \\ 3-y = -1 \\ -z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$ . Vậy  $E(4;4;1)$ .

**Câu 35:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;-2;3)$ ,  $B(-1;0;2)$  và  $G(1;-3;2)$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .

- A.  $C(3;-7;1)$ .                      B.  $C(2;-4;-1)$ .                      C.  $C(1;-1;-3)$ .                      D.  $C(3;2;1)$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

$G(1;-3;2)$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên ta có:

$$x_C = 3x_G - (x_A + x_B) = 3.1 - (1 - 1) = 3.$$

$$y_C = 3y_G - (y_A + y_B) = 3.(-3) - (-2 + 0) = -7.$$

$$z_C = 3z_G - (z_A + z_B) = 3.2 - (3 + 2) = 1.$$

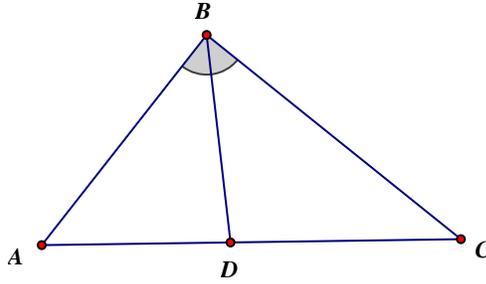
Nên  $C(3;-7;1)$ .

**Câu 36:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2;-1)$ ,  $B(2;-1;3)$ ,  $C(-4;7;5)$ . Tọa độ chân đường phân giác trong góc  $B$  của tam giác  $ABC$  là

- A.  $\left(\frac{11}{3}; -2; 1\right)$ .                      B.  $(-2; 11; 1)$ .                      C.  $\left(\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .                      D.  $\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$ .

### Lời giải

#### Chọn D



Ta có  $BA = \sqrt{26}, BC = 2\sqrt{26}$ .

Gọi  $D(x; y; z)$ , theo tính chất phân giác ta có  $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC} = \frac{1}{2}$ . Suy ra  $\overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$  \*

Ta có  $\overrightarrow{DA} = 1-x; 2-y; -1-z$  và  $\overrightarrow{DC} = -4-x; 7-y; 5-z$

$$* \Rightarrow \begin{cases} 1-x = -\frac{1}{2}(-4-x) \\ 2-y = -\frac{1}{2}(7-y) \\ -1-z = -\frac{1}{2}(5-z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{11}{3} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; 1\right)$$

**Câu 37:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho vector  $\vec{a} = (1; 2; -2)$ . Tính độ dài vector  $\vec{a}$ .

- A.  $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$ .      B.  $|\vec{a}| = 8$ .      C.  $|\vec{a}| = 3$ .      D.  $|\vec{a}| = 9$ .

### Lời giải

#### Chọn C

Ta có:  $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$ .

**Câu 38:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $A(-4; 3; 12)$ . Độ dài đoạn thẳng  $OA$  bằng

- A. 13.      B. 11.      C. 17.      D. 6.

### Lời giải

#### Chọn A

$OA = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 12^2} = 13$ .

**Câu 39:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; 0; 1)$  và  $B(4; 2; -2)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng

- A. 2.      B. 4.      C.  $\sqrt{22}$ .      D. 22.

### Lời giải

#### Chọn C

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (3; 2; -3)$

$\Rightarrow AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{22}$ .

Vậy độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng  $\sqrt{22}$ .

**Câu 40:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(0;6;0)$ ,  $B(0;0;8)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng

- A. 100.                      B. 10.                      C. 48.                      D. 6.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$AB = \sqrt{(0-0)^2 + (0-6)^2 + (8-0)^2} = \sqrt{100} = 10$$

**Câu 41:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(2;3;4)$  và  $B(3;0;1)$ . Độ dài vector  $\overline{AB}$  là

- A.  $\sqrt{19}$ .                      B. 19.                      C.  $\sqrt{13}$ .                      D. 13.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Độ dài vector } |\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{19}.$$

**Câu 42:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vecto  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  lần lượt là các vecto đơn vị trên các trục  $Oy$ ,  $Oz$ . Tích vô hướng  $\vec{j} \cdot \vec{k}$  bằng

- A. 0.                      B. 1.                      C. 3.                      D. 2.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\text{Ta có: } \vec{j} = (0;1;0); \vec{k} = (0;0;1).$$

$$\text{Suy ra } \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0.$$

**Câu 43:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = -3;1;2$  và  $\vec{b} = 0;-4;5$ . Giá trị của  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  bằng

- A. 10.                      B. -14.                      C. 6.                      D. 3.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$\text{Ta có: } \vec{a} \cdot \vec{b} = -3 \cdot 0 + 1 \cdot -4 + 2 \cdot 5 = 6.$$

**Câu 44:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vecto  $\vec{u} = (-\sqrt{3};0;1)$ ,  $\vec{v} = (0;1;1)$ , khi đó

- A.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 - \sqrt{3}$ .                      B.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 - \sqrt{3}$ .                      C.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .                      D.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$ .

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\text{Ta có: } \vec{u} \cdot \vec{v} = (-\sqrt{3}) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$$

**Câu 45:** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $\varphi$  là góc giữa hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ , khi đó  $\cos \varphi$  bằng

- A.  $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .                      B.  $\frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$ .                      C.  $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$ .                      D.  $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .

**Lời giải**

**Chọn A**

Công thức tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

**Câu 46:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ .

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A.  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ .                      B.  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .                      C.  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$ .                      D.  $\vec{b} \perp \vec{c}$ .

**Lời giải****Chọn D**

Ta có

+)  $\vec{a} = (-1; 1; 0) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{2} \Rightarrow$  A đúng.

+)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow$  B đúng.

+)  $\vec{c} = (1; 1; 1) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{3} \Rightarrow$  C đúng.

+)  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow$  D sai.

**Câu 47:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(3; -4; 0)$ ,  $B(-1; 1; 3)$ ,  $C(3; 1; 0)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  trên trục hoành sao cho  $AD = BC$ .

- A.  $D(-2; 1; 0)$ ,  $D(-4; 0; 0)$                       B.  $D(0; 0; 0)$ ,  $D(-6; 0; 0)$   
 C.  $D(6; 0; 0)$ ,  $D(12; 0; 0)$                       D.  $D(0; 0; 0)$ ,  $D(6; 0; 0)$

**Lời giải****Chọn D**

Gọi  $D(x; 0; 0) \in Ox$ ;  $AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + 16} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$ .

**Câu 48:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; 2; 1)$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $OA$ .

- A.  $OA = 3$                       B.  $OA = 9$                       C.  $OA = \sqrt{5}$                       D.  $OA = 5$

**Lời giải****Chọn A**

$OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$ .

**Câu 49:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (2; -1; 1)$ ,  $\vec{v} = (-3; 4; -5)$ . Số đo của góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng:

- A.  $150^\circ$ .                      B.  $120^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Lời giải****Chọn A**

Ta có:  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot (-5)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-5)^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ .



**Câu 2:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$

b)  $\vec{a} \perp \vec{b}$

c)  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$

d)  $\vec{b} \perp \vec{c}$

**Lời giải**

**a) Đ**

**b) Đ**

**c) Đ**

**d) S**

a)  $\vec{a} = (-1; 1; 0) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{2} \Rightarrow$  a) đúng.

b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow$  b) đúng.

c)  $\vec{c} = (1; 1; 1) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{3} \Rightarrow$  c) đúng.

d)  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow$  d) sai.

**Câu 3:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; 4; -2)$  và  $\vec{b} = (1; -2; 3)$ . Tích vô hướng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $-22$

b) Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = (3; 0; 1)$ ,  $\vec{v} = (2; 1; 0)$ . Tích vô hướng  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  bằng 6

c) Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u}_1(1; 1; -4)$ ,  $\vec{u}_2(0; 1; 1)$ . Góc giữa hai vectơ đã cho bằng  $60^\circ$

d) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1; 3; 3)$ ,  $\vec{b} = (-2; 2; 1)$  và  $\vec{c} = (-1; 2; 3)$ . Tích vô hướng  $\vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$  bằng 5

**Lời giải**

**a) S**

**b) Đ**

**c) S**

**d) Đ**

a) Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 = -12$ .

b) Ta có:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 6$ .

c) Sử dụng công thức tích vô hướng của hai vector, ta có

$$\cos(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = \frac{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{-3}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{u}_1; \vec{u}_2) = 120^\circ.$$

d) Từ bài toán ta có  $\vec{a} - \vec{b} = (1 - (-2); 3 - 2; 3 - 1)$  hay  $\vec{a} - \vec{b} = (3; 1; 2)$ .

Do đó  $\vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 5$ . Vậy  $\vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 5$ .

**Câu 4:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$  cho  $\vec{a} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{b} = (2; -1; -1)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $[\vec{a}, \vec{b}] = (-5; -7; -3)$

b) Vector  $\vec{a}$  không cùng phương với vector  $\vec{b}$ .

c) Vector  $\vec{a}$  không vuông góc với vector  $\vec{b}$ .

d)  $|\vec{a}| = \sqrt{14}$

### Lời giải

**a) S**

**b) S**

**c) S**

**d) Đ**

a) Ta có  $[\vec{a}, \vec{b}] = (5; 7; 3)$  nên a) sai.

b) Do  $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1} \neq \frac{3}{-1}$  nên vector  $\vec{a}$  không cùng phương với vector  $\vec{b}$  nên b) sai.

c) Do  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + (-2)(-1) + 3(-1) = 1$  nên vector  $\vec{a}$  không vuông góc với vector  $\vec{b}$  nên c) sai.

d) Ta có  $|\vec{a}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$  nên d) đúng

**Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vector  $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ ,  $\vec{b} = (1; 1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; 1; 1)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$

b)  $\vec{a} \perp \vec{b}$

c)  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$

d)  $\vec{b} \perp \vec{c}$

**Lời giải**

**a) Đ**

**b) Đ**

**c) Đ**

**d) S**

a)  $\vec{a} = (-1; 1; 0) \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{2} \Rightarrow$  a) đúng.

b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1.1 + 1.1 + 0.0 = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow$  b) đúng.

c)  $\vec{c} = (1; 1; 1) \Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{3} \Rightarrow$  c) đúng.

d)  $\vec{b} \cdot \vec{c} = 1.1 + 1.1 + 0.1 = 2 \neq 0 \Rightarrow$  d) sai.

**Câu 6:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ ,  $A(1; 0; -2)$  và  $B(2; -1; 1)$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB}$  bằng 17

b) Cho hai vec tơ  $\vec{a} = (1; -2; 3)$ ,  $\vec{b} = (-2; 1; 2)$  Khi đó tích vô hướng  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b}$  bằng 10

c) Trong không gian  $Oxyz$ , góc giữa hai vectơ  $\vec{i}$  và  $\vec{u} = (-\sqrt{3}; 0; 1)$  là  $60^\circ$

d) Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -1; 2)$  và  $B(2; 1; 1)$ . Độ dài đoạn  $AB$  bằng  $\sqrt{6}$

**Lời giải**

**a) Đ**

**b) S**

**c) S**

**d) Đ**

a) Ta có  $\vec{a} = (2; -3; 4)$

$$\overrightarrow{AB} = (1; -1; 3)$$

Vậy  $\vec{a} \cdot \overrightarrow{AB} = 2.1 + (-3).(-1) + 4.3 = 17.$

b) Ta có  $\vec{a} + \vec{b} = (-1; -1; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{b} = -1.(-2) + (-1).1 + 2.5 = 11.$

c) Ta có  $\vec{i} = (1; 0; 0)$ .

$$\text{Vậy: } \cos(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\vec{i} \cdot \vec{u}}{|\vec{i}| \cdot |\vec{u}|} = \frac{1 \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{1 \cdot \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (\vec{i}, \vec{u}) = 150^\circ.$$

$$\text{d) Ta có: } AB = |\overline{AB}| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-(-1))^2 + (1-2)^2} = \sqrt{6}.$$

**Câu 7:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho vector  $\vec{u} = (x; 2; 1)$  và  $\vec{v} = (1; -1; 2x)$ . Tích vô hướng của  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng  $3x - 2$
- b) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(-2; 7; 3)$  và  $B(4; 1; 5)$ . độ dài của đoạn  $AB$  bằng  $2\sqrt{19}$
- c) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; 2; 1)$ . Độ dài đoạn thẳng  $OA$  bằng 3
- d) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vector  $\vec{a} = (-2; 1; 2)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; 0)$ . Tích vô hướng  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$  bằng 12

**Lời giải**

**a) Đ**

**b) Đ**

**c) Đ**

**d) S**

$$\text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v} = x \cdot 1 + 2(-1) + 1 \cdot 2x = 3x - 2.$$

$$\text{b) Ta có: } \overline{AB} = (6; -6; 2) \Rightarrow AB = \sqrt{36 + 36 + 4} = 2\sqrt{19}.$$

$$\text{c) } OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

$$\text{d) Ta có } \vec{a} - \vec{b} = (-3; 2; 2) \Rightarrow (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = -5.$$

**Câu 8:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$ . Biết  $A(2; 1; -3)$ ,  $B(0; -2; 5)$  và  $C(1; 1; 3)$ . Diện tích hình bình hành  $ABCD$  là  $\sqrt{349}$

b) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; 0; -2)$  và  $\vec{b} = (2; -1; 3)$ . Tích có hướng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một vectơ có tọa độ là  $(2; -7; 1)$

c) Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a}(2; 3; 1)$ ,  $\vec{b}(-2; 1; 2)$ . Khi đó  $[\vec{a}, \vec{b}]$  có tọa độ bằng  $(2; 0; 1)$

d) Trong không gian  $Oxyz$ , tọa độ một vectơ  $\vec{n}$  vuông góc với cả hai vectơ  $\vec{a} = 1; 1; -2$ ,  $\vec{b} = 1; 0; 3$  là  $2; -3; -1$

### Lời giải

**a) Đ**

**b) S**

**c) S**

**d) S**

a) Ta có:  $\vec{AB} = (-2; -3; 8)$ ,  $\vec{BC} = (1; 3; -2)$ . Suy ra  $[\vec{AB}, \vec{BC}] = (-18; 4; -3)$ .

Diện tích hình bình hành  $ABCD$  là:  $S_{ABCD} = \sqrt{[\vec{AB}, \vec{BC}]^2} = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{349}$ .

b) Ta có  $[\vec{a}, \vec{b}] = (-2; -7; -1)$ .

c) Ta có  $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = (5; -6; 8)$ .

d) Ta có:  $\begin{cases} \vec{n} \perp \vec{a} \\ \vec{n} \perp \vec{b} \end{cases} \Rightarrow$  Chọn  $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}] = 3; -5; -1$ .

**Câu 9:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$  cùng phương.

b) Nếu  $\vec{u}, \vec{v}$  không cùng phương thì giá của vectơ  $[\vec{u}, \vec{v}]$  vuông góc với mọi mặt phẳng song song với giá của các vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .

c)  $||[\vec{u}, \vec{v}]|| = |\vec{u}| |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$ .

d)  $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{u} = [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{v} = \vec{0}$ .

### Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) S

d) Đ

a) Chọn đúng

b) Chọn đúng

c) Ta chứng minh  $|\llbracket \vec{u}, \vec{v} \rrbracket| = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$ .

Giả sử  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$  và  $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ .

+) Nếu một trong hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là vectơ  $\vec{0}$  thì ta có  $|\llbracket \vec{u}, \vec{v} \rrbracket| = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$ .

+) Nếu cả hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} |\llbracket \vec{u}, \vec{v} \rrbracket| &= |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\vec{u}, \vec{v})} = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \sqrt{1 - \frac{(\vec{u} \cdot \vec{v})^2}{|\vec{u}|^2 \cdot |\vec{v}|^2}} = \sqrt{\vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2} \\ &= \sqrt{(u_2 v_3 - v_2 u_3)^2 + (u_3 v_1 - v_3 u_1)^2 + (u_1 v_2 - v_1 u_2)^2} = |\llbracket \vec{u}, \vec{v} \rrbracket|. \end{aligned}$$

Ta có  $|\llbracket \vec{u}, \vec{v} \rrbracket| = |\vec{u}||\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$  nên khẳng định c) sai.

d) Chọn đúng

**Câu 10:** Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (1; 2; -1)$ ,  $\vec{b} = (3; -1; 0)$ ,  $\vec{c} = (1; -5; 2)$

. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $\vec{a}$  cùng phương với  $\vec{b}$ .

b)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng.

c)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

d)  $\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{b}$ .

**Lời giải**

a) S

b) S

c) Đ

d) S

a) Chọn sai

b) Chọn sai

c) Ta có:  $\left[ \vec{a}; \vec{b} \right] = (-1; -3; -7) \neq \vec{0}$ . Hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương.

$\left[ \vec{a}; \vec{b} \right] \cdot \vec{c} = -1 + 15 - 14 = 0$ . Ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

d) Chọn sai

**Câu 11:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $M(2;1;-2)$ ,  $N(4;-5;1)$ . Độ dài đoạn thẳng  $MN$  bằng 7
- b) Trong không gian  $Oxyz$ , cho vectơ  $\vec{u} = (1;0;3)$  và  $\vec{v} = (x;-1;1)$ . Nếu  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$  thì độ dài của  $|\vec{v}|$  bằng  $\sqrt{2}$ .
- c) Cho  $\vec{u} = (-1;1;0)$ ,  $\vec{v} = (0;-1;0)$ , góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  là  $60^\circ$
- d) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1;3;2)$  và  $\vec{b} = (2;1;1)$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b})$  là 31

**Lời giải**

**a) Đ**

**b) Đ**

**c) S**

**d) S**

a) Ta có  $MN = \sqrt{(4-2)^2 + (-5-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{49} = 7$

b) Ta có:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = x + 3$ .

Mà  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$  suy ra  $x + 3 = 3 \Leftrightarrow x = 0$ .

Vậy  $\vec{v} = (0; -1; 1) \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ .

c) Ta có  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = 135^\circ$ .

d) Ta có:  $2\vec{a} = (2; 6; 4)$ ;  $2\vec{a} - \vec{b} = (0; 5; 3) \Rightarrow \vec{a} \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 = 21$ .

**Câu 12:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (-2; -3; 1)$  và  $\vec{b} = (1; 0; 1)$ . Cosin góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $\frac{1}{2\sqrt{7}}$
- b) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{u} = (2; -1; 5)$  và  $\vec{v} = (1; -3; -2)$ . Tích vô hướng  $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v})$  bằng 41

- c) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vector  $\vec{a} = 1;0;1$  và  $\vec{b} = 1;2;1$ . Tính vô hướng  $\vec{a} \cdot 2\vec{a} + \vec{b}$  bằng 6
- d) Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{u} = (1;-2;1)$  và  $\vec{v} = (-2;1;1)$ , góc giữa hai vector đã cho bằng  $120^\circ$

### Lời giải

**a) S**

**b) S**

**c) Đ**

**d) Đ**

a) Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , ta có:  $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2+0+1}{\sqrt{4+9+1} \cdot \sqrt{1+0+1}} = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$ .

b) Ta có  $\vec{u} - \vec{v} = (1;2;7)$ .

Suy ra  $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 1.2 + 2.(-1) + 7.5 = 35$ .

Vậy  $\vec{u} \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = 35$ .

Phương án nhiều B: Ta có  $\vec{u} - \vec{v} = (1;-4;7)$ . Suy ra  $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{v}) = 1.2 + (-4).(-1) + 7.5 = 41$ .

Phương án nhiều C: Ta có  $\vec{u} - \vec{v} = (1;-4;3)$ . Suy ra  $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{v}) = 1.2 + (-4).(-1) + 3.5 = 21$ .

Phương án nhiều D: Ta có  $\vec{u} - \vec{v} = (1;2;7)$ . Suy ra  $\vec{u} \cdot (\vec{v} - \vec{v}) = 2.(-1).5 + 1.2.7 = 4$ .

c) Ta có:  $2\vec{a} = 2;0;2$ ;  $2\vec{a} + \vec{b} = 3;2;3 \Rightarrow \vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 1.3 + 0.2 + 1.3 = 6$ .

d) Ta có  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = 120^\circ$ .

**Câu 13:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vector  $\vec{a} = (2;0;-1)$  và  $\vec{b} = (1;-1;0)$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{b} + 2\vec{a})$  bằng 7

b) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{a} = (2;1;-2)$  và  $\vec{b} = (0;-\sqrt{2};\sqrt{2})$ . Tất

cả giá trị của  $m$  để hai vector  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b}$  và  $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc là  $\frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$

c) Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (2; -1; 1)$ ,  $\vec{v} = (-3; 4; -5)$ . Số đo của góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng  $120^\circ$

d) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1; 0; 0)$  và  $\vec{b} = (2; 0; 1)$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})$  bằng 5

### Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) Đ

a) Ta có  $\vec{b} + 2\vec{a} = (5; -1; -2) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + 2\vec{a}) = 2.5 + 0.(-1) + (-1)(-2) = 12$ .

b)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3\sqrt{2}$ ;  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 9$ ;  $\vec{b} \cdot \vec{b} = 4$ .

Hai vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3m\vec{b}$  và  $\vec{v} = m\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc

$$\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2m\vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3m^2\vec{a} \cdot \vec{b} - 3m\vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 18m + 6\sqrt{2} - 9\sqrt{2}m^2 - 12m = 0$$

$$\Leftrightarrow -3\sqrt{2}m^2 + 2m + 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{\pm\sqrt{26} + \sqrt{2}}{6}$$

c) Ta có:  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 4 + 1 \cdot (-5)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (-5)^2}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ . Số đo của góc giữa hai

vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  bằng:  $(\vec{u}; \vec{v}) = 150^\circ$ .

d) Ta có:  $2\vec{b} = (4; 0; 2)$ ,  $\vec{a} + 2\vec{b} = (5; 0; 2) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 1.5 + 0.0 + 0.2 = 5$

**Câu 14:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1; 3; 3)$  và  $\vec{b} = (-2; 2; 1)$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$  bằng 12

b) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (-2; 1; 2)$ ,  $\vec{b} = (1; -1; 0)$ . Tích vô hướng  $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b}$  bằng 12

c) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1; -2; -1)$  và  $\vec{b} = (2; 1; -1)$ . Giá trị của  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$  là  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) Trong không gian  $Oxyz$  cho hai điểm  $A(3;1;-1), B(2;2;-2)$ . Nếu  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $AB$  sao cho  $AB = 2MB$  thì độ dài  $OM$  bằng 3

**Lời giải**

**a) Đ**

**b) S**

**c) S**

**d) Đ**

a) Từ bài toán ta có  $\vec{a} - \vec{b} = (1 - (-2); 3 - 2; 3 - 1)$  hay  $\vec{a} - \vec{b} = (3; 1; 2)$ .

Do đó  $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 12$ .

Vậy  $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 12$ .

b) Ta có  $\vec{a} - \vec{b} = (-3; 2; 2) \Rightarrow (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} = -5$ .

c) Ta có  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{4+1+1}} = \frac{1}{6}$ .

d) Vì điểm  $M$  nằm trong đoạn  $AB$  nên đưa về véc tơ:

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow M \left( \frac{7}{3}; \frac{5}{3}; \frac{-5}{3} \right)$$

Từ đây ta suy ra  $OM = \sqrt{11}$ .

**Câu 15:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo với nhau một góc  $120^\circ$ , đồng thời  $|\vec{a}| = 2$  và  $|\vec{b}| = 5$ . Đặt  $\vec{u} = k\vec{a} - \vec{b}$  và  $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{b}$ . Để  $\vec{u} \perp \vec{v}$  thì giá trị của  $k$  là  $k = \frac{9}{2}$

b) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $\vec{AB} = (1; -2; 2)$ ;  $\vec{AC} = (3; -4; 6)$ . Độ dài đường trung tuyến  $AM$  của tam giác  $ABC$  là  $\frac{\sqrt{29}}{2}$

c) Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(-1; -2; 3), B(0; 3; 1), C(4; 2; 2)$ . Cosin của góc  $BAC$  bằng  $\frac{9}{\sqrt{35}}$

d) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1; 0; 1)$  và  $\vec{b} = (1; 2; 1)$ . Tính vô hướng  $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$  là 6

**Lời giải**

a) S

b) S

c) S

d) Đ

$$a) \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow (k\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow k|\vec{a}|^2 + (2k-1)\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 = 0 \Leftrightarrow -6k - 45 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{2}.$$

b) Ta có

$$AB^2 = 1^2 + (-2)^2 + 2^2 = 9, AC^2 = 3^2 + (-4)^2 + 6^2 = 61, \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 1 \cdot 3 + (-2)(-4) + 2 \cdot 6 = 23.$$

$$\vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 61 + 9 - 2 \cdot 23 = 24.$$

$$\text{Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có: } AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4} = \frac{9+61}{2} - \frac{24}{4} = 29.$$

$$\text{Vậy } AM = \sqrt{29}.$$

$$c) \text{ Ta có } \vec{AB} = (1; 5; -2); \vec{AC} = (5; 4; -1) \Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 27; |\vec{AB}| = \sqrt{30}; |\vec{AC}| = \sqrt{42}.$$

$$\cos BAC = \cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{27}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{42}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}.$$

$$d) \text{ Ta có: } 2\vec{a} = (2; 0; 2); 2\vec{a} + \vec{b} = (3; 2; 3) \Rightarrow \vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 6.$$

**Câu 16:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian  $Oxyz$ , cho hình hộp  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A(1; 0; 1), B(2; 1; 2), D(1; -1; 1)$

và  $A'(1; 1; -1)$ . Giá trị của  $\cos(\vec{AC'}, \vec{B'D'})$  bằng  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

b) Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a}(-2; 2; 0), \vec{b}(2; 2; 0), \vec{c}(2; 2; 2)$ . Giá trị của  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$  bằng

11

c) Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (2; 1; 0), \vec{b} = (-1; 0; -2)$ . Khi đó  $\cos(\vec{a}; \vec{b})$  bằng

$\frac{2}{5}$

d) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1; 1; 3), \vec{b} = (-2; 1; 5)$  và  $\vec{c} = (1; -3; 2)$ . Tính tích

vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{b} - 2\vec{c})$  bằng 6

**Lời giải**

a) Đ

b) S

c) S

d) Đ

$$a) \overline{AB} = (1; 1; 1), \overline{AD} = (0; -1; 0), \overline{AA'} = (0; 1; -2), \overline{BD} = (-1; -2; -1).$$

$$\text{Áp dụng quy tắc hình hộp ta có: } \overline{AC'} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AA'} \Rightarrow \overline{AC'} = (1; 1; -1).$$

$$\text{Mặt khác, } \overline{B'D'} = \overline{BD} \text{ nên } \cos(\overline{AC'}, \overline{B'D'}) = \frac{\overline{AC'} \cdot \overline{B'D'}}{|\overline{AC'}| \cdot |\overline{B'D'}|} = \frac{-2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-\sqrt{2}}{3}.$$

$$b) \text{ Ta có } \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (2; 6; 2) \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}.$$

$$c) \text{ Ta có. } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-2)^2}} = -\frac{2}{5}.$$

$$d) \text{ Ta có: } \vec{b} - 2\vec{c} = (-2 - 2 \cdot 1; 1 - 2 \cdot (-3); 5 - 2 \cdot 2) = (-4; 7; 1) \text{ nên}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - 2\vec{c}) = 1 \cdot (-4) + 1 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 6.$$

**Câu 17:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2; 0; 0)$ ,  $B(0; 3; 1)$ ,  $C(-3; 6; 4)$ . Gọi  $M$  là điểm trên cạnh  $BC$  sao cho  $MC = 2MB$ . Độ dài đoạn  $AM$  bằng  $\sqrt{30}$

b) Cho hai vectơ  $\vec{a} = (1; 1; -2)$  và  $\vec{b} = (1; 0; m)$ . Góc giữa chúng bằng  $45^\circ$  khi  $m = 2 - \sqrt{6}$

c) Trong hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ ,  $|\vec{b}| = 3$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ . Độ dài của vectơ  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  bằng 22

d) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $B(-1; -1; 0)$  và  $C(3; 1; -1)$ . Tọa độ điểm  $M$  thuộc trục  $Oy$  và  $M$  cách đều  $B, C$  là  $M\left(0; \frac{9}{2}; 0\right)$

**Lời giải**

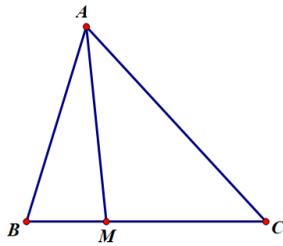
a) S

b) Đ

c) S

d) S

a)



Ta có  $\overline{BC} = (-3; 3; 3)$ . Vì điểm  $M$  thuộc cạnh  $BC$  và  $MC = 2MB$  nên  $\overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{BC}$ , do đó  $\overline{BM} = (-1; 1; 1)$ .

Lại có  $\overline{AB} = (-2; 3; 1)$  nên  $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM} = (-3; 4; 2)$ .

Vậy  $AM = |\overline{AM}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ .

$$\text{b) } \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1-2m}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}}$$

Góc giữa hai vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  có số đo  $45^\circ$  nên ta có:

$$\frac{1-2m}{\sqrt{6}\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1-2m = \sqrt{3}\sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m \geq 0 \\ (1-2m)^2 = 3(m^2+1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m^2 - 4m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ \left[ \begin{array}{l} m = 2 - \sqrt{6} \\ m = 2 + \sqrt{6} \end{array} \right] \Leftrightarrow m = 2 - \sqrt{6}.$$

c) Góc giữa  $(3\vec{a}, 2\vec{b}) = 30^\circ$

Ta có:  $|3\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |3\vec{a}|^2 + |2\vec{b}|^2 - 2 \cdot |3\vec{a}| \cdot |2\vec{b}| \cdot \cos 30^\circ = (6\sqrt{3})^2 + (6)^2 - 2 \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36$ .

Suy ra:  $|3\vec{a} - 2\vec{b}| = 6$

d) Gọi  $M(0; y; 0) \in Oy$  là điểm thỏa mãn.

Ta có  $BM = \sqrt{1+(y+1)^2}$ ,  $CM = \sqrt{9+(y-1)^2+1}$ .

Vì  $M$  cách đều  $B, C$  nên  $BM = CM \Leftrightarrow 1+(y+1)^2 = 10+(y-1)^2 \Leftrightarrow 4y = 9 \Leftrightarrow y = \frac{9}{4}$ .

Vậy  $M\left(0; \frac{9}{4}; 0\right)$ .

**Câu 18:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a} = (1; 2; 0)$  và  $\vec{b} = (2; 0; -1)$ , khi đó  $\cos \varphi$  bằng  $\frac{2}{5}$ .

b) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1; -2; 0)$  và  $B(-3; 0; 4)$ . Độ dài đoạn thẳng  $AB$  bằng 6

c) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(-1; 2; 4)$ ,  $B(-1; 1; 4)$ ,  $C(0; 0; 4)$ . Số đo của góc  $ABC$  là  $45^\circ$

d) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(2; 2; 1)$ . độ dài đoạn thẳng  $OA$  bằng 5

**Lời giải**

**a) Đ**

**b) Đ**

**c) S**

**d) S**

$$\text{a) } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{5}.$$

$$\text{b) Ta có: } AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (0-(-2))^2 + (4-0)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6.$$

$$\text{c) Ta có } \overrightarrow{BA}(0; 1; 0), \overrightarrow{BC}(1; -1; 0) \Rightarrow \cos ABC = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow ABC = 135^\circ.$$

$$\text{d) } OA = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3.$$

**Câu 19:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$  cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(0; 0; 1)$ ,  $B(0; 1; 0)$ ,  $C(1; 0; 0)$  và  $D(-2; 3; -1)$ . Thể tích khối tứ diện  $ABCD$  bằng  $\frac{1}{6}$

b) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho ba điểm có tọa độ

$A(1;0;1), B(2;2;1), C(1;3;-1)$  Gọi  $M$  là điểm nằm trên tia  $Oy$  sao cho thể tích tứ diện

$ABCM$  bằng  $\frac{1}{2}$ . Tung độ của điểm  $M$  là 1

c) Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1;1;-2); B(3;1;0), C(2;2;1)$ . Tam giác  $ABC$  có diện tích bằng  $2\sqrt{6}$

d) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho 4 điểm tạo thành tứ giác lồi  $A(2;0;-1),$

$B(-2;1;-3), C(1;2;2), D(0;-1;-5)$ . Diện tích của tứ giác này có giá trị bằng  $\frac{13\sqrt{6}}{2}$

### Lời giải

**a) Đ**

**b) Đ**

**c) S**

**d) Đ**

a) Ta có  $(ABC): \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$ .

$$AB = BC = CA = \sqrt{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{\sqrt{2}^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$d(D; (ABC)) = \frac{|-2+3-1-1|}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy } V_{ABCD} = \frac{1}{3} d(D; (ABC)) \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{6}.$$

b) Gọi tọa độ điểm  $M$  là  $M = (0; m; 0)$  với  $m > 0$

$$\overrightarrow{AB} = (1; 2; 0), \overrightarrow{AC} = (0; 3; -2) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-4; 2; 3)$$

$$\overrightarrow{AM} = (-1; m; -1)$$

$$\text{Suy ra } V_{ABCM} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AM}| = \frac{1}{6} |2m+1| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 (l) \\ m = 1 (tm) \end{cases}$$

Suy ra tung độ của điểm  $M$  bằng 1.

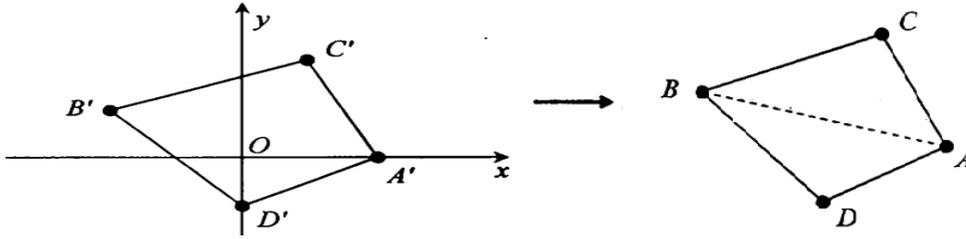
c) Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (2; 0; 2), \overrightarrow{AC} = (1; 1; 3).$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-2; -4; 2)$$

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{6}.$$

- d) Chiếu lần lượt các điểm  $A(2;0;-1)$ ,  $B(-2;1;-3)$ ,  $C(1;2;2)$ ,  $D(0;-1;-5)$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$  ta được các điểm  $A'(2;0;0)$ ,  $B'(-2;1;0)$ ,  $C'(1;2;0)$ ,  $D'(0;-1;0)$



$$\text{Diện tích của tứ giác } ABCD: S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ABD} = \frac{1}{2} \left[ [\overline{AB}, \overline{AC}] \right] + \frac{1}{2} \left[ [\overline{AB}, \overline{AD}] \right] = \frac{13\sqrt{6}}{2}.$$

**Câu 20:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian tọa độ  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(-1;-2;4)$ ,  $B(-4;-2;0)$ ,  $C(3;-2;1)$  và  $D(1;1;1)$ . Độ cao của tứ diện kẻ từ  $D$  bằng 3
- b) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho năm điểm tạo thành một hình chóp có đáy là tứ giác với  $A(0;0;3)$ ,  $B(2;-1;0)$ ,  $C(3;2;4)$ ,  $D(1;3;5)$ ,  $E(4;2;1)$ . Đỉnh của hình chóp tương ứng là Điểm  $C$
- c) Trong không gian  $Oxyz$  cho hai vectơ  $\vec{a} = (4, -2, -4)$ ,  $\vec{b} = (6, -3, 2)$ . Giá trị của biểu thức  $\left| (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) \right|$  bằng 200
- d) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (1; 0; 3)$  và  $\vec{b} = (-2; 2; 5)$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$  bằng 23

**Lời giải**

**a) Đ**

**b) Đ**

**c) Đ**

**d) S**

a) Ta có:  $\overline{AB}(-3;0;-4)$ ,  $\overline{AC}(4;0;-3)$ ,  $[\overline{AB}, \overline{AC}] = (0; -25; 0)$ .

Chọn vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(ABC)$  là  $\vec{n}(0;1;0)$ .

Phương trình mặt phẳng  $(ABC)$  là:  $y + 2 = 0$ .

Độ cao  $h$  của tứ diện kẻ từ  $D$  bằng khoảng cách từ  $D$  đến  $(ABC)$ . Vậy  $h = \frac{|1+2|}{\sqrt{0^2+1^2+0^2}} = 3$

b) Xét đáp án A chọn điểm  $C$  là đỉnh, ta có:

$$\overline{AB} = (2; -1; -3), \overline{AD} = (1; 3; 2), \overline{AE} = (4; 2; -2), \overline{AC} = (3; 2; 1).$$

$$\text{Với } [\overline{AB}, \overline{AD}] = (7; -7; 7) \Rightarrow \begin{cases} [\overline{AB}, \overline{AD}] \cdot \overline{AE} = 4 \cdot 7 - 2 \cdot 7 - 2 \cdot 7 = 0 \\ [\overline{AB}, \overline{AD}] \cdot \overline{AC} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 7 + 1 \cdot 7 = 14 \end{cases}$$

Suy ra  $A, B, D, E$  đồng phẳng. Vậy điểm  $C$  là đỉnh của hình chóp.

c) Ta có:  $2\vec{a} - 3\vec{b} = (-10; 5; -14); \vec{a} + 2\vec{b} = (16; -8; 0).$

Vậy:  $\left| (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) \right| = 200.$

d) Từ bài toán ta có  $\vec{a} + \vec{b} = (1 + (-2); 0 + 2; 3 + 5)$  hay  $\vec{a} + \vec{b} = (-1; 2; 8).$

Do đó  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 8 = 23.$

Vậy  $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 23.$

**Câu 21:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vecto  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}, |\vec{b}| = 3$  và  $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$ . Độ dài của vecto  $3\vec{a} - 2\vec{b}$  bằng 6

b) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$ , biết

$A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D(-5; -4; -8)$ . Độ dài đường cao  $DH$  của tứ diện  $ABCD$  bằng  $\frac{45}{7}$

c) Trong không gian  $Oxyz$ , Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có  $A$  trùng với gốc tọa độ  $O$ . Biết rằng  $B(m; 0; 0), D(0; m; 0), A'(0; 0; n)$  với  $m, n$  là các số dương và  $m + n = 4$ .

Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $CC'$ . Thể tích lớn nhất của khối tứ diện  $BDA'M$  bằng  $\frac{64}{27}$

d) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có tọa độ các đỉnh

$A(0; 0; 0), B(0; a; 0), C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$  và  $A'(0; 0; 2a)$ . Gọi  $D$  là trung điểm cạnh  $BB'$  và  $M$

di động trên cạnh  $AA'$ . Diện tích nhỏ nhất của tam giác  $MDC'$  là  $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$

**Lời giải**

a) Đ

b) Đ

c) Đ

d) Đ

a) Ta thấy  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \cos 30^\circ \Leftrightarrow \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 9$ .

$$|3\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (3\vec{a} - 2\vec{b})^2 = 3|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 36$$

Vậy  $|3\vec{a} - 2\vec{b}| = 6$ .

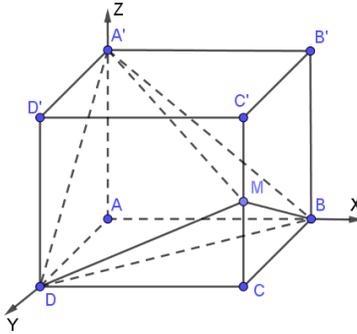
b) Ta có:  $\vec{AB} = (2; -2; -3)$ ,  $\vec{AC} = (4; 0; 6)$ ,  $\vec{AD} = (-7; -7; -9)$ .

$$[\vec{AB}, \vec{AC}] = (-12; -24; 8); [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = 180; \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 28.$$

Suy ra:  $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}| = 30$ ;  $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]| = 14$ .

Suy ra độ dài đường cao  $DH$  của tứ diện  $ABCD$  bằng  $\frac{3V_{ABCD}}{S_{ABC}} = \frac{45}{7}$ .

c)



Ta có:  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(m; 0; 0)$ ,  $D(0; m; 0)$ ,  $A'(0; 0; n)$  suy ra  $C(m; m; 0)$ ,  $B'(m; 0; n)$ ,  $C'(m; m; n)$ ,  $D'(0; m; n)$ ,  $M\left(m; m; \frac{n}{2}\right)$ .

$$\vec{BD} = (-m; m; 0), \vec{BA'} = (-m; 0; n), \vec{BM} = \left(0; m; \frac{n}{2}\right).$$

$$V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\vec{BD}, \vec{BA'}] \cdot \vec{BM}| = \frac{1}{4} |m^2 \cdot n| = \frac{1}{4} |m^2 \cdot (4 - m)| = \frac{1}{8} |m \cdot m \cdot (8 - 2m)|$$

$$\leq \frac{1}{8} \left( \frac{m + m + 8 - 2m}{3} \right)^3 = \frac{64}{27}.$$

d) Theo giả thiết, ta có  $\vec{CC'} = \vec{AA'}$   $\Rightarrow C'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 2a\right)$ ,  $D(0; a; a)$  và  $M(0; 0; t)$  ( $0 < t < 2a$ )

Ta có  $\overrightarrow{DC'} = \left( \frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; a \right)$ ,  $\overrightarrow{DM} = (0; -a; t-a)$ .

Vì vậy  $S_{MDC'} = \frac{1}{2} \left| \left[ \overrightarrow{DC'}, \overrightarrow{DM} \right] \right| = \frac{a\sqrt{4t^2 - 12at + 15a^2}}{4} = \frac{a\sqrt{(2t-3a)^2 + 6a^2}}{4} \geq \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$ .

Suy ra  $Min S_{\Delta MDC'} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$  khi  $t = \frac{3}{2}a$ .

**Câu 22:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Trong không gian  $Oxyz$  cho tứ diện  $ABCD$  có  $A(2;1;-1)$ ,  $B(3;0;1)$ ,  $C(2;-1;3)$ ,  $D(0;m;0)$ . Tổng tất các giá trị của tham số  $m$  để thể tích khối tứ diện  $ABCD$  bằng 5 là 3
- b) Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(2;1;1)$ ,  $B(5;3;6)$ ,  $C(-1;2;3)$ . Diện tích tam giác  $ABC$  là  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{523}$ .
- c) Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai điểm  $A(1;-1;2)$  và  $B(2;1;1)$ . Độ dài đoạn  $AB$  bằng  $\sqrt{6}$
- d) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $\vec{u} = (1;1;2)$ ,  $\vec{v} = (-1;m;m-2)$ . Khi  $\left| \left[ \vec{u}, \vec{v} \right] \right| = \sqrt{14}$  thì  $m = 2$  hoặc  $m = -3$

**Lời giải**

**a) S**

**b) Đ**

**c) Đ**

**d) S**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1;-1;2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (0;-2;4)$ ,  $\overrightarrow{AD} = (-2;m-1;1) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (0;-4;-2)$

$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \cdot \overrightarrow{AD} \right| = 5 \Leftrightarrow |-4m+2| = 30 \Leftrightarrow m = -7, m = 8$ .

b) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (3;2;5)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-3;1;2)$  và  $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1;-21;9)$

Khi đó,  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + (-21)^2 + 9^2} = \frac{1}{2} \sqrt{523}$ .

c) Ta có:  $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (1+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{6}$ .

d)  $[\vec{u}, \vec{v}] = (-m-2; -m; m+1) \Rightarrow \left| [\vec{u}, \vec{v}] \right| = \sqrt{(m+2)^2 + m^2 + (m+1)^2} = \sqrt{3m^2 + 6m + 5}$

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \sqrt{14} \Leftrightarrow 3m^2 + 6m + 5 = 14 \Leftrightarrow 3m^2 + 6m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -3 \end{cases}.$$

**Câu 23:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ trục  $Oxyz$ , cho  $\vec{a}(3;2;1)$ ,  $\vec{b}(3;2;5)$ . Tọa độ vectơ tích có hướng  $[\vec{a}, \vec{b}]$  là  $(8; -12; 0)$

b) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho hình bình hành  $ABCD$ . Biết  $A(2;1;-3)$ ,  $B(0;-2;5)$  và  $C(1;1;3)$ . Diện tích hình bình hành  $ABCD$  là  $\sqrt{359}$

c) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(2;1;0)$ ,  $B(0;4;0)$ ,  $C(0;2;-1)$ . Biết đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  và cắt đường thẳng  $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{3}$  tại điểm  $D(a;b;c)$  thỏa mãn  $a > 0$  và tứ diện  $ABCD$  có thể tích bằng  $\frac{17}{6}$ . Tổng  $a+b+c$  bằng 5

d) Trong không gian  $Oxyz$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (-5; 3; -1)$ ,  $\vec{b} = (1; 2; 1)$ ,  $\vec{c} = (m; 3; -1)$ . Tìm tất cả giá trị của  $m$  sao cho  $\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}]$  là  $m = 6$

### Lời giải

**a) Đ**

**b) S**

**c) Đ**

**d) S**

a) Có vectơ tích có hướng  $[\vec{a}, \vec{b}] = \left( \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (8; -12; 0)$ .

b) Ta có:  $\vec{AB} = (-2; -3; 8)$ ,  $\vec{BC} = (1; 3; -2)$ . Suy ra  $[\vec{AB}, \vec{BC}] = (-18; 4; -3)$ .

Diện tích hình bình hành  $ABCD$  là:  $S_{ABCD} = \left| [\vec{AB}, \vec{BC}] \right| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{349}$ .

c) Do  $D \in d$  nên  $D(2t+1; t-1; 3t+2)$  suy ra  $\vec{AD} = (2t-1; t-2; 3t+2)$

Ta có:  $[\vec{AB}, \vec{AC}] = (-3; -2; 4)$

Ta có  $V_{ABCD} = \frac{17}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \left| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right| = \frac{17}{6} \Leftrightarrow |4t+15| = 17 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -8 \end{cases}$

Loại  $t = -8$  vì không thỏa  $a > 0$ . Do đó  $D\left(2; -\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$  vậy  $a + b + c = 5$ .

d) Ta có  $[\vec{b}, \vec{c}] = (-5; m+1; 3-2m)$ .

$$\vec{a} = [\vec{b}, \vec{c}] \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -5 \\ 3 = m+1 \\ -1 = 3-2m \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

**Câu 24:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho 3 điểm có tọa độ là  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(2; 1; -1)$ ,

$C(0; 1; -1)$ . Giá trị  $\sin ABC$  bằng  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{m} = (4; 3; 1)$  và  $\vec{n} = (0; 0; 1)$ . Gọi  $\vec{p}$  là vectơ cùng hướng với với  $[\vec{m}, \vec{n}]$  và  $|\vec{p}| = 15$ . Tọa độ của vectơ  $\vec{p}$  là  $(9; -12; 0)$

c) Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(1; 1; -2)$ ,  $B(3; 1; 0)$ ,  $C(2; 2; 1)$ . Tam giác  $ABC$  có diện tích bằng  $\sqrt{7}$

d) Trong không gian  $Oxyz$  cho hai vectơ  $\vec{a} = (4, -2, -4)$ ,  $\vec{b} = (6; -3; 2)$ . Giá trị của biểu thức  $\left| (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) \right|$  bằng 204

**Lời giải**

**a) S**

**b) Đ**

**c) S**

**d) S**

a) Ta có  $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{|\llbracket \vec{u}, \vec{v} \rrbracket|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

$$\vec{BA} = (-1; 1; 1), \vec{BC} = (-2; 0; 0) \Rightarrow [\vec{BA}, \vec{BC}] = (0; -2; 2).$$

$$\text{Vậy } \sin ABC = \sin(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{|\llbracket \vec{BA}, \vec{BC} \rrbracket|}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

b) Ta có  $[\vec{m}, \vec{n}] = (3; -4; 0)$

$\vec{p}$  cùng hướng với  $[\vec{m}, \vec{n}]$  khi có  $k > 0$  sao cho  $\vec{p} = (3k; -4k; 0)$ .

$$|\vec{p}| = \sqrt{9k^2 + 16k^2} = 15 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ k = -3 \end{cases} (L). \text{ Vậy } k = 3 \Rightarrow \vec{p} = (9; -12; 0).$$

c) Ta có:  $\vec{AB} = (2; 0; 2)$ ,  $\vec{AC} = (1; 1; 3)$ ,  $\vec{BC} = (-1; 1; 1)$ .

Suy ra  $AB = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ ,  $AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{11}$ ,  $BC = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ .

Vì  $AC^2 = AB^2 + BC^2$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .

Diện tích tam giác  $ABC$ :  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{6}$ .

d) Ta có:  $2\vec{a} - 3\vec{b} = (-10; 5; -14)$ ;  $\vec{a} + 2\vec{b} = (16; -8; 0)$ .

Vậy:  $\left| (2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b}) \right| = 200$ .

**Câu 25:** Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Trong không gian với hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , cho 2 vectơ  $\vec{u} = m\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ ,  $\vec{v} = m\vec{j} + 2\vec{i} + 4\vec{k}$ . Biết rằng  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ , khi đó giá trị của  $m$  bằng 5

b) Trong không gian  $Oxyz$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (1; -2; 1)$  và  $\vec{v} = (-2; 1; 1)$ , góc giữa hai vectơ đã cho bằng  $60^\circ$

c) Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có  $A(0; 0; 0)$ ,  $B(2; 0; 0)$ ,  $C(0; 2; 0)$  và  $A'(0; 0; 2)$ . Góc giữa  $BC'$  và  $A'C$  là  $90^\circ$

d) Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $\varphi$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ , khi đó  $\cos \varphi$  bằng  $\frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$

**Lời giải**

**a) Đ**

**b) S**

**c) Đ**

**d) S**

a) Ta có  $\vec{u} = m\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (m; 2; -3)$ ,  $\vec{v} = m\vec{j} + 2\vec{i} + 4\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = (2; m; 4)$ .

Theo đề bài  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8 \Rightarrow 2m + 2m - 3 \cdot 4 = 8 \Leftrightarrow m = 5$ .

b) Ta có  $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{u}; \vec{v}) = 120^\circ$ .

c) Ta có:  $B(2;0;0)$ ,  $C'(0;2;2)$  nên  $\overline{BC'} = (-2;2;2)$ .

$A'(0;0;2)$ ,  $C(0;2;0)$  nên  $\overline{A'C} = (0;2;-2)$ .

$\Rightarrow \overline{BC'} \cdot \overline{A'C} = 0$ .

d) Công thức tính góc giữa hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ :  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

### ♦ Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Trong không gian Oxyz, cho ba vector  $\vec{u} = (1; 8; 6)$ ,  $\vec{v} = (-1; 3; -2)$  và  $\vec{w} = (0; 5; 4)$ . Tìm tọa độ của vecto  $\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$

#### Lời giải

$$\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w} = (1; 8; 6) - 2(-1; 3; -2) + (0; 5; 4) = (1 + 2; 8 - 6 + 5; 6 + 4 + 4) = (3; 7; 14)$$

**Câu 2:** Cho  $\vec{a} = (2; -1; 5)$ ,  $\vec{b} = (0; 3; -3)$ ,  $\vec{c} = (1; 4; -2)$ . Tìm tọa độ của vector  $\vec{d} = 2\vec{a} - \frac{1}{5}\vec{b} + 3\vec{c}$ .

#### Lời giải

$$\text{Ta có } 2\vec{a} = (4; -2; 10); \frac{1}{5}\vec{b} = \left(0; \frac{3}{5}; -\frac{3}{5}\right); 3\vec{c} = (3; 12; -6).$$

$$\text{Do đó } \vec{d} = \left(4 - 0 + 3; -2 - \frac{3}{5} + 12; 10 - \left(-\frac{3}{5}\right) + (-6)\right), \text{ hay } \vec{d} = \left(7; \frac{47}{5}; \frac{23}{5}\right).$$

**Câu 3:** Nếu tọa độ của vector  $\vec{a}$  là  $(x; y; z)$  thì tọa độ của vector đối của  $\vec{a}$  là gì?

#### Lời giải

Vector đối của  $\vec{a}$  là  $-\vec{a}$ .

Tọa độ của vector đối của  $\vec{a}$  là:  $(-x; -y; -z)$ .

**Câu 4:** Trong không gian Oxyz, cho  $\vec{a} = (2; 1; -2)$  và  $\vec{b} = (-2; 3; -2)$ .

a) Tìm  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .                      b) Tìm  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

### Lời giải

a) Ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2)$ , hay  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ .

$$\text{b) } \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2} \cdot \sqrt{(-2)^2+3^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

Suy ra  $(\vec{a}, \vec{b}) \approx 75,96^\circ$ .

**Câu 5:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho hai vector  $\vec{u} = (1; -2; 3)$  và  $\vec{v} = (2; 0; -3)$ . Hãy chỉ ra tọa độ của một vector  $\vec{w}$  khác  $\vec{0}$  vuông góc với cả hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .

### Lời giải

Ta có:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \left( \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (6; 9; 4)$$

Chọn  $\vec{w} = (6; 9; 4)$ . Theo định lí trên, vector  $\vec{w}$  vuông góc với cả hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ .

**Câu 6:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba điểm  $A(2; 9; -1)$ ,  $B(9; 4; 5)$  và  $G(3; 0; 4)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  sao cho tam giác  $ABC$  nhận  $G$  là trọng tâm.

### Lời giải

Để  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  thì

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B = 3 \cdot 3 - 2 - 9 = -2 \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B = 3 \cdot 0 - 9 - 4 = -13 \\ z_C = 3z_G - z_A - z_B = 3 \cdot 4 + 1 - 5 = 8 \end{cases}$$

Vậy  $C(-2; -13; 8)$

**Câu 7:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $MNP$  có  $M(3; 7; 2)$ ,  $N(5; 1; -1)$  và  $P(4; -4; -2)$ .

Tìm tọa độ:

a) Trung điểm / của đoạn thẳng  $MN$ ;

b) Trọng tâm  $G$  của tam giác  $MNP$ .

### Lời giải

a) Áp dụng công thức tính tọa độ trung điểm cho hai điểm  $M(3; 7; 2)$  và  $N(5; 1; -1)$ ,

ta có  $I\left(\frac{3+5}{2}; \frac{7+1}{2}; \frac{2-1}{2}\right)$ , hay  $I\left(4; 4; \frac{1}{2}\right)$ .

b) Áp dụng công thức tính tọa độ trọng tâm theo tọa độ các đỉnh của tam giác  $MNP$ ,

ta có  $G\left(\frac{3+5+4}{3}; \frac{7+1-4}{3}; \frac{2-1-2}{3}\right)$ , hay  $G\left(4; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ .

**Câu 8:** Trong không gian Oxyz, cho hai vector  $\vec{a} = (1; 0; 5)$  và  $\vec{b} = (1; 3; 9)$ .

a) Biểu diễn hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  qua các vector đơn vị  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

b) Biểu diễn hai vector  $\vec{a} + \vec{b}$  và  $2\vec{a}$  qua các vector đơn vị  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ , từ đó xác định tọa độ của hai vector đó.

### Lời giải

a) Ta có:  $\vec{a} = (1; 0; 5) = \vec{i} + 5\vec{k}$ ;  $\vec{b} = (1; 3; 9) = \vec{i} + 3\vec{j} + 9\vec{k}$ .

b) Ta có:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{i} + 5\vec{k} + \vec{i} + 3\vec{j} + 9\vec{k} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 14\vec{k}$ . Do đó,  $\vec{a} + \vec{b} = (2; 3; 14)$

$2\vec{a} = 2(\vec{i} + 5\vec{k}) = 2\vec{i} + 10\vec{k}$ . Do đó,  $2\vec{a} = (2; 0; 10)$

**Câu 9:** Với các giả thiết như trong Ví dụ 5, hãy xác định tọa độ của các chiếc máy bay sau 10 phút tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B).

### Lời giải

Gọi  $D(x; y; z)$  là vị trí của máy bay sau 10 phút bay tiếp theo (tính từ thời điểm máy bay ở điểm B). Vì hướng của máy bay không đổi nên  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BD}$  cùng hướng. Do vận tốc máy bay không đổi và thời gian

bay từ A đến B bằng thời gian bay từ B đến D nên  $AB = BD$ . Do đó,  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} = (140; 50; 1)$ .

$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{BD} = (x - 940; y - 550; z - 8) \text{ nên } \begin{cases} x - 940 = 140 \\ y - 550 = 50 \\ z - 8 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1080 \\ y = 600 \\ z = 9 \end{cases}$$

Vậy D(1 080; 600; 9). Vậy tọa độ của máy bay trong 10 phút tiếp theo là (1080; 600; 9).

**Câu 10:** Cho ba điểm  $A(2; 0; 2), B(1; 2; 3), C(2; 1; 2)$ .

a) Tìm tọa độ của các vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ .

b) Tính các độ dài  $AB, BC, CA$ .

### Lời giải

a) Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (1 - 2; 2 - 0; 3 - 2) = (-1; 2; 1)$ ;

$$\overrightarrow{BC} = (2 - 1; 1 - 2; 2 - 3) = (1; -1; -1)$$

$$\overrightarrow{CA} = (2 - 2; 0 - 1; 2 - 2) = (0; -1; 0).$$

b) Ta có:  $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ ;

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3};$$

$$CA = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = 1.$$

**Câu 11:** Trong Vật lí, ta biết rằng nếu lực  $\vec{F}$  tác động vào một vật và làm vật dịch chuyển theo

đoạn thẳng từ  $M$  đến  $N$ , thì công  $A$  sinh bởi lực  $\vec{F}$  được tính bằng công thức  $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$ . Hãy giải quyết bài toán được đặt ra ở phần Khởi động.

### Lời giải

Theo bài toán nêu ở phần Khởi động thì trong không gian Oxyz, một người đã tác động một lực

không đổi  $\vec{F} = (2; 3; -1)$  vào một vật đang ở gốc tọa độ  $O$  và làm cho vật dịch chuyển thẳng từ  $O$  đến điểm  $M(1; 2; 1)$ .

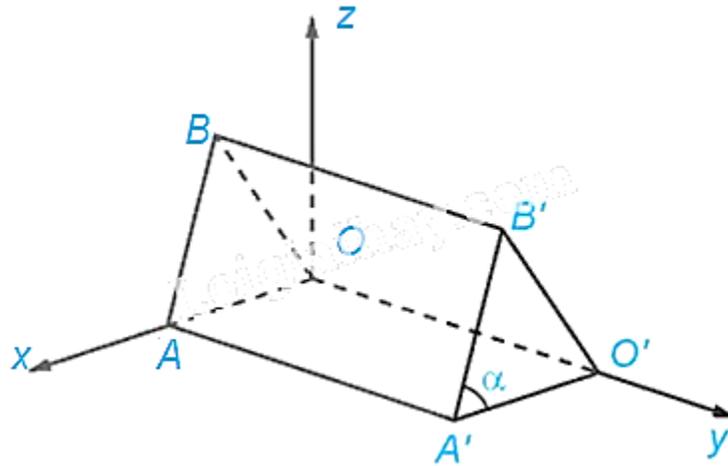
Ta có  $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 1)$ . Từ đó ta tính được công sinh ra bởi lực  $\vec{F}$  là:

$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{OM} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 = 7$$

Như vậy công sinh ra bởi lực  $\vec{F}$  trong tình huống này là  $A = 7$  (J).

**Câu 12:** Trong tình huống mở đầu, hãy tính độ lớn của góc  $\alpha$ .

**Lời giải**



Theo Ví dụ 6 ta có:  $\overrightarrow{A'B'} = (-120; 0; 300)$ ;  $|\overrightarrow{A'B'}| = 60\sqrt{29} \text{ cm}$ ,  $O'(0; 450; 0)$ ,  $A'(240; 450; 0)$

Do đó,  $\overrightarrow{A'O'} = (-240; 0; 0) \Rightarrow |\overrightarrow{A'O'}| = 240 \text{ cm}$

$$\text{Ta có: } \cos(\overrightarrow{A'B'}; \overrightarrow{A'O'}) = \frac{\overrightarrow{A'B'} \cdot \overrightarrow{A'O'}}{|\overrightarrow{A'B'}| \cdot |\overrightarrow{A'O'}|} = \frac{(-120)(-240) + 0 \cdot 0 + 300 \cdot 0}{60\sqrt{29} \cdot 240} = \frac{2\sqrt{29}}{29}$$

$\Rightarrow \widehat{B'A'O'} \approx 68^\circ$ . Vậy  $\alpha \approx 68^\circ$

**Câu 13:** Trong không gian Oxyz, cho tam giác ABC có  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$  và  $C(x_C; y_C; z_C)$ .

a) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tìm tọa độ của M theo tọa độ của A và B.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ của G theo tọa độ của A và B và C.

**Lời giải**

Ta có:  $\vec{OA} = (x_A; y_A; z_A), \vec{OB} = (x_B; y_B; z_B), \vec{OC} = (x_C; y_C; z_C)$

$$\text{a) Vì } M \text{ là trung điểm của } AB \text{ nên } \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A+x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A+y_B}{2} \\ z_M = \frac{z_A+z_B}{2} \end{cases}.$$

Do đó,  $M \left( \frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2} \right)$ .

b) Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}. \text{ Do đó, } G \left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right).$$

**Câu 14:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho bốn điểm  $A(0; 1; -2), B(2; -1; 3), C(1; 3; -2), D(5; -1; 8)$ .

a) Ba điểm  $A, B, C$  có thẳng hàng không?

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$  song song với nhau.

### Lời giải

a) Từ tọa độ của ba điểm đã cho, ta tính được  $\vec{AB} = (2; -2; 5), \vec{AC} = (1; 2; 0)$ . Vì  $\frac{1}{2} \neq \frac{2}{-2}$  nên hai vectơ  $\vec{AB}, \vec{AC}$  không cùng phương.

Suy ra ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Ta có  $\vec{CD} = (4; -4; 10)$ . Xét tọa độ của hai vectơ  $\vec{AB}, \vec{CD}$ , ta thấy:

$$\frac{4}{2} = \frac{-4}{-2} = \frac{10}{5}$$

Các đẳng thức trên chứng tỏ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  là hai vectơ cùng phương. Suy ra  $AB$  và  $CD$  song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này không thể trùng nhau (do  $A, B, C$  không thẳng hàng). Vậy  $AB // CD$ .

**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(7; 3; 3), B(1; 2; 4), C(2; 3; 5)$ .

a) Tìm tọa độ điểm  $H$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ .

b) Tìm độ dài cạnh  $AB$  và  $AC$ .

c) Tính góc  $A$ .

### Lời giải

a) Ta có  $\overrightarrow{BC} = (1; 1; 1)$ .

Gọi  $H(x; y; z)$  là chân đường cao của tam giác  $ABC$  kẻ từ  $A$ .

Suy ra  $\overrightarrow{BH} = (x - 1; y - 2; z - 4)$ .

$\overrightarrow{BH}$  cùng phương với  $\overrightarrow{BC}$ , do đó  $x - 1 = t; y - 2 = t; z - 4 = t$ , suy ra  $H(1 + t; 2 + t; 4 + t)$ .

Ta có  $\overrightarrow{AH} = (x_H - x_A; y_H - y_A; z_H - z_A) = (t - 6; t - 1; t + 1)$ .

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow t - 6 + t - 1 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 6 \Leftrightarrow t = 2$ .

Suy ra  $H(3; 4; 6)$ .

b) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-6; -1; 1); \overrightarrow{AC} = (-5; 0; 2)$ , suy ra

$AB = \sqrt{(-6)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{38}; AC = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{29}$ .

c)  $\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{30 + 0 + 2}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{29}} = \frac{32}{\sqrt{38 \cdot 29}}$ , suy ra  $\hat{A} \approx 15,43^\circ$ .

**Câu 16:** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho  $A(1; 0; 0)$ ,  $B(0; 0; 1)$  và  $C(2; 1; 1)$ .

a) Chứng minh rằng  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Tính chu vi của tam giác  $ABC$ .

c) Tính  $\cos \widehat{ABC}$ .

### Lời giải

a) Ta có:  $\overrightarrow{BA} = (1; 0; -1)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (2; 1; 0)$ . Suy ra  $\overrightarrow{BA} = (1; 0; -1) \neq k\overrightarrow{BC} = (2k; k; 0)$  với mọi  $k \in \mathbb{R}$ . Vậy ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Ta thấy:

$$BA = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$BC = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5},$$

$$AC = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Vậy chu vi của tam giác  $ABC$  bằng  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ .

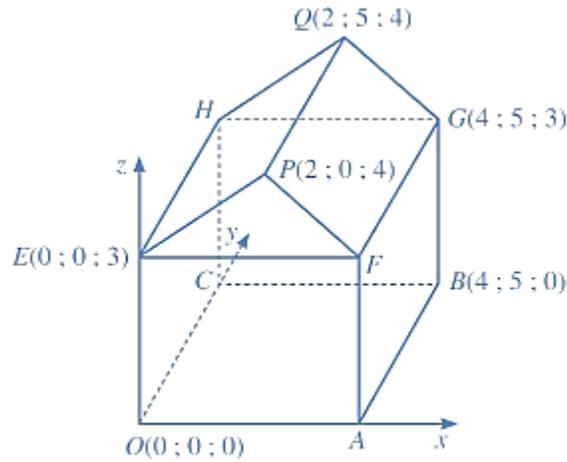
c) Ta có:

$$\cos \widehat{ABC} = \cos (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

**Câu 17:** Hình 37 minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ  $Oxyz$ , trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

a) Tìm tọa độ của các điểm  $A, H$  và  $F$ .

b) Tính góc dốc của mái nhà, tức là tìm số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).



Hình 37

### Lời giải

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác  $OABC$  là hình chữ nhật, suy ra  $x_A = x_B = 4, y_C = y_B = 5$ . Do  $A$  nằm trên trục  $Ox$  nên tọa độ điểm  $A$  là  $(4; 0; 0)$ . Tường nhà là hình chữ nhật nên tứ giác  $OCHE$  là hình chữ nhật, suy ra  $y_H = y_C = 5, z_H = z_E = 3$ . Do  $H$  nằm trên mặt phẳng  $(Oyz)$  nên tọa độ điểm  $H$  là  $(0; 5; 3)$ .

Tứ giác  $OAFE$  là hình chữ nhật nên  $x_F = x_A = 4; z_F = z_E = 3$ . Do  $F$  nằm trên mặt phẳng  $(Ozx)$  nên tọa độ điểm  $F$  là  $(4; 0; 3)$ .

b) Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng  $FG$ , hai mặt lần lượt là  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$ . Do mặt phẳng  $(Ozx)$  vuông góc với hai mặt phẳng  $(FGQP)$  và  $(FGHE)$  nên góc  $PFE$  là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó. Ta có:  $\vec{FP} = (-2; 0; 1), \vec{FE} = (-4; 0; 0)$ .

$$\text{Suy ra } \cos \widehat{PFE} = \cos (\vec{FP}, \vec{FE}) = \frac{\vec{FP} \cdot \vec{FE}}{|\vec{FP}| \cdot |\vec{FE}|}$$

$$= \frac{(-2) \cdot (-4) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Do đó,  $\widehat{PFE} \approx 26,6^\circ$ . Vậy góc dốc của mái nhà khoảng  $26,6^\circ$ .

**Câu 18:** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tứ diện  $ABCD$  với  $A(1; 3; -2)$ ,  $B(3; 2; -4)$ ,  $C(2; 1; 0)$ ,  $D(3; 5; -1)$ .

- Chứng minh rằng  $AB \perp CD$ .
- Chứng minh rằng  $BCD$  là tam giác đều.
- Tính số đo của  $\widehat{AMD}$  với  $M$  là trung điểm của  $BC$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

### Lời giải

a) Từ giả thiết, ta tìm được  $\overrightarrow{AB} = (2; -1; -2)$ ,  $\overrightarrow{CD} = (1; 4; -1)$ . Suy ra:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot (-1) = 0. \text{ Đẳng thức này chứng tỏ } AB \perp CD.$$

b) Tính ba cạnh của tam giác  $BCD$  :

$$\text{Vì } \overrightarrow{CD} = (1; 4; -1) \text{ nên } CD = |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Để tính hai cạnh  $BC$  và  $BD$ , ta áp dụng công thức tính khoảng cách giữa hai điểm và có:

$$BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2-3)^2 + (1-2)^2 + (0-(-4))^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$

$$BD = |\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(3-3)^2 + (5-2)^2 + (-1-(-4))^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Từ ba đẳng thức trên suy ra  $BCD$  là tam giác đều.

c) Ta có  $\widehat{AMD} = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD})$ .

Vì  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên  $M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -2\right)$ . Suy ra:

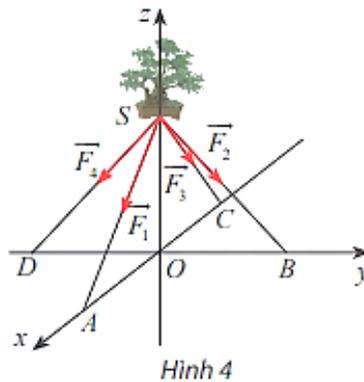
$$\overrightarrow{MA} = \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right) \text{ và } \overrightarrow{MD} = \left(\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; 1\right)$$

Từ đó ta tính được:

$$\cos(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}) = \frac{-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2} + 0 \cdot 1}{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy  $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}) = 54,74^\circ$ , hay  $\widehat{AMD} \approx 55^\circ$ .

**Câu 19:** Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt  $S(0; 0; 20)$  và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là  $A(20; 0; 0)$ ,  $B(0; 20; 0)$ ,  $C(-20; 0; 0)$ ,  $D(0; -20; 0)$  (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40 N và được phân bố thành bốn lực  $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$  có độ lớn bằng nhau như Hình 4. Tìm tọa độ của các lực nói trên (mỗi centimét biểu diễn 1 N).



### Lời giải

Tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo bằng nhau và vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình vuông.

Ta có  $\overrightarrow{SA} = (20; 0; -20)$ ,  $\overrightarrow{SB} = (0; 20; -20)$ ,  $\overrightarrow{SC} = (-20; 0; -20)$ ,  $\overrightarrow{SD} = (0; -20; -20)$ ,

suy ra  $SA = SB = SC = SD = 20\sqrt{2}$ . Do đó  $S \cdot ABCD$  là hình chóp tứ giác đều.

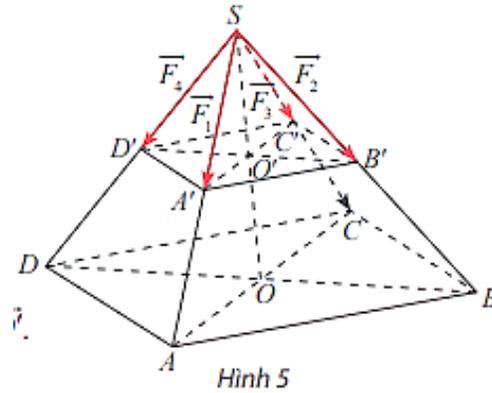
Các vectơ  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$  có điểm đầu tại  $S$  và điểm cuối lần lượt là  $A', B', C', D'$ .

Ta có  $SA' = SB' = SC' = SD'$  nên  $S \cdot A'B'C'D'$  cũng là hình chóp tứ giác đều.

Gọi  $\vec{F}$  là trọng lực tác dụng lên chậu cây và  $O'$  là tâm của hình vuông  $A'B'C'D'$ . Ta có:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{SA'} + \vec{SB'} + \vec{SC'} + \vec{SD'} = 4\vec{SO'}.$$

Ta có  $|\vec{F}| = 40$ , suy ra  $|\vec{SO'}| = SO' = 10$ .



Do tam giác  $SO'A'$  vuông cân nên  $SA' = SO'\sqrt{2} = 10\sqrt{2} = \frac{1}{2}SA$ ,

suy ra  $\vec{F}_1 = \vec{SA'} = \frac{1}{2}\vec{SA} = (10; 0; -10)$ .

Chứng minh tương tự, ta cũng có:

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{2}\vec{SB} = (0; 10; -10), \vec{F}_3 = \frac{1}{2}\vec{SC} = (-10; 0; -10), \vec{F}_4 = \frac{1}{2}\vec{SD} = (0; -10; -10).$$