MỤC LỤC

▶BÀI 1. NGUYÊN HÀM

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

1. ĐỊNH NGHĨA

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K.
- Hàm số $F(x)$ được gọi là ***nguyên hàm*** của hàm số $f(x)$ trên K nếu
- $F'(x) = f(x)$ với mọi x thuộc K.

Tổng quát, ta có:

- Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:
- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x)+C$ với mọi x thuộc K.
- Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x)+C$, $C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K,
- Kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$
- Viết $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$

2. NGUYÊN HÀM MỘT SỐ HÀM SỐ SƠ CẤP CƠ BẢN

Nguyên hàm hàm sơ cấp

- Với $\alpha \neq -1$, ta có: $\int x^{\alpha}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$;
- $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$;
- $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$;
- Với $a>0$, $a \neq 1$, ta có: $\int a^{x}\mathrm{d}x = \dfrac{a^{x}}{\ln a}+C$
- $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$;
- $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$
- $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$

❸. TÍNH CHẤT

- Cho $f(x)$, $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên K.
- (1) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$ với k là hằng số khác 0
- (2) $\int[f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$
- (3) $\int[f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$

Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

Dạng ❶: Áp dụng định nghĩa

Phương pháp

- Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:
- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C\ \forall x\in K$.
- Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x)+C$, $C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K,
- Kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$
- Viết $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Chứng minh $F(x)=2x^3-5x+4$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=6x-5$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có: $F'(x)=\left(2x^3-5x+4\right)'=6x^2-5=f(x)$ với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Vậy $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Tìm $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Vì $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ với mọi x thuộc $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

Nên $F(x)=\tan x$ là một nguyên hàm của $\frac{1}{\cos^2 x}$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Vậy $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$ trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 3: Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

(1) $F(x)=x\ln x$ và $f(x)=1+\ln x$ trên khoảng $(0;+\infty)$;

(2) $F(x)=e^{\sin x}$ và $f(x)=e^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

(1) $F(x)=x\ln x$ và $f(x)=1+\ln x$ trên khoảng $(0;+\infty)$;

$\forall x\in(0;+\infty)$, ta có $F'(x)=\ln x+x.\frac{1}{x}=\ln x+1=f(x)$ nên hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

(2) $F(x)=e^{\sin x}$ và $f(x)=e^{\cos x}$ trên $\mathbb{R}$.

Vì $F'(x)=e^{\sin x}\cos x\neq f(x)=e^{\cos x}$ nên hàm số $F(x)$ không là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

◆Dạng ❷: Nguyên hàm hàm số lũy thừa

Phương pháp

- (1) $\int 0\,dx = C$
- (2) $\int dx = x + C$
- (3) $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1)$
- (4) $\int \frac{1}{x^2}dx=-\frac{1}{x}+C$
- (5) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}+C$
- (6) $\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C\ (x\neq 0)$
- Ta có thể áp dụng ***lũy thừa với số mũ thực*** để biến đổi.
- *Cho a,b là những số thực dương, α,β là những số thực bất kì. Khi đó:*
- $a^{\alpha}a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$ $\quad \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}$ $\quad \left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha.\beta}$ $\quad (ab)^{\alpha}=a^{\alpha}b^{\alpha}$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha}=\frac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^3+x$ là

Lời giải

$\int\left(x^3+x^2\right)dx=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$.

Câu 2: Nguyên hàm của các hàm số

(1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-2024$ (2) $f(x)=(x+1)(x+2)(x+3)$

Lời giải

(1) $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-2024$

$$\int\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+x-2024\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.\frac{x^4}{4}-2.\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2024x+C=\frac{1}{12}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2024x+C.$$

(2) $f\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)$

$f\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)=x^3+6x^2+11x+6$

$$\Rightarrow\int\left(x^3+6x^2+11x+6\right)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}+2x^3+\frac{11}{2}x^2+6x+C.$$

Câu 3: Nguyên hàm của các hàm số

(1) $\int\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$ (2) $\int\sqrt{x}\left(7x^2-3\right)\mathrm{d}x\left(x>0\right)$

Lời giải

(1) $\int\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x$

$$\int\left(3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{-1}{3}}\right)\mathrm{d}x=3\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x+\int x^{\frac{-1}{3}}\mathrm{d}x=2x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+C=2x\sqrt{x}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C$$

(2) $\int\sqrt{x}\left(7x^2-3\right)\mathrm{d}x\left(x>0\right)$

$$\int\sqrt{x}\left(7x^2-3\right)\mathrm{d}x=\int\left(7x^{\frac{5}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x=7\int x^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x-3\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=2x^3\sqrt{x}-2x\sqrt{x}+C\left(x>0\right).$$

⬩Dạng ❸: Nguyên hàm hàm số lượng giác

Phương pháp

- (1) $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$
- (2) $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$
- (3) $\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\cot x + C$
- (4) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \tan x + C$
- Ta có thể áp dụng ***các công thức liên quan*** để biến đổi.

01	***Công thức cơ bản***	① $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ② $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ③ $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq k\pi$ ④ $\tan\alpha.\cot\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{k\pi}{2}$
02	***Công thức cộng***	① $\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \sin b\cos a$ ② $\cos(a \pm b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$ ③ $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a\tan b}$
03	***Công thức nhân đôi***	① $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ ② $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$ ③ $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha},\ \begin{cases} \alpha \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$
04	***Công thức hạ bậc***	① $\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ② $\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ ③ $\tan^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
05	***Công thức tích thành tổng***	① $\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) + \cos(a + b)\right]$ ② $\sin a\sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a - b) - \cos(a + b)\right]$ ③ $\sin a\cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a + b) + \sin(a - b)\right]$ ④ $\cos a\sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a + b) - \sin(a - b)\right]$

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Nguyên hàm của các hàm số

(1) $f(x)=1+\sin x$ (2) $f(x)=2\sin x+3x$

(3) $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}$ (4) $f(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}$

Lời giải

(1) $f(x)=1+\sin x$

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(1+\sin x)\mathrm{d}x=\int 1\mathrm{d}x+\int\sin x\mathrm{d}x=x-\cos x+C$.

(2) $f(x)=2\sin x+3x$

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int(2\sin x+3x)\mathrm{d}x=-2\cos x+\frac{3}{2}x^2+C$

(3) $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}$

Ta có: $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}\Rightarrow\int\cos^2\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(1+\cos x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1+\sin x)+C$

(4) $f(x)=1-\frac{1}{\cos^2 x}$

$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(1-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=x-\tan x+C$.

Câu 2: Tìm nguyên hàm $\int\sin 3x\cos 5x\mathrm{d}x$

Lời giải

$\int\sin 3x\cos 5x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 2x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{16}\cos 8x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$.

Câu 3: Nguyên hàm của các hàm số

(1) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$ (2) $\int(x+\tan^2 x)\mathrm{d}x$

Lời giải

(1) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x$

$\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\int(1-\sin x)\mathrm{d}x=x+\cos x+C$

(2) $\int(x+\tan^2 x)\mathrm{d}x$

$\int(x+\tan^2 x)\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+\tan x-x+C$.

⬩Dạng ④: Nguyên hàm hàm số mũ

Phương pháp

- (1) $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$ (2) $\int a^x \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (a>0,\ a\neq 1)$
- Ta có thể áp dụng ***các công thức liên quan*** để biến đổi:
- *Cho α,β là những số thực dương, α,β là những số thực bất kì. Khi đó:*
- $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ $\quad \dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$ $\quad \left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha.\beta}$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$ $f(x) = x^3 + x$

☛Các ví dụ minh họa

Câu 1: Nguyên hàm của các hàm số

(1) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$ (2) $f(x) = 3^{-x}$ (3) $f(x) = 7^x.2^{x+2}$

Lời giải

(1) $f(x) = \mathrm{e}^{2x-1}$

$$\int e^{2x-1}\mathrm{d}x = \int e^{-1}.\left(e^2\right)^x \mathrm{d}x = e^{-1}.\frac{\left(e^2\right)^x}{\ln e^2} + C = \frac{e^{2x-1}}{2} + C$$

(2) $f(x) = 3^{-x}$

$$\int 3^{-x}\mathrm{d}x = \int \left(3^{-1}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{3^{-x}}{\ln 3^{-1}} + C = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$$

(3) $f(x) = 7^x.2^{x+2}$

$$\int \left(7^x.2^{x+2}\right)\mathrm{d}x = \int \left(7^x.2^x.2^2\right)\mathrm{d}x = 4\int (7.2)^x \mathrm{d}x = 4\int (14)^x \mathrm{d}x = 4.\frac{14^x}{\ln 14} + C.$$

Câu 2: Nguyên hàm của các hàm số

(1) $\int \left(2^x + \dfrac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ (2) $\int \left(e^{x+1} - \dfrac{e}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

(1) $\int \left(2^x + \dfrac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

Ta có: $\int \left(2^x + \dfrac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int 2^x \mathrm{d}x + \int \dfrac{3}{x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{2^x}{\ln 2} - \dfrac{3}{x} + C$.

(2) $\int \left(e^{x+1} - \dfrac{e}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

Ta có: $\int \left(e^{x+1} - \dfrac{e}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \int e^{x+1}\mathrm{d}x - \int \dfrac{e}{x^2}\mathrm{d}x = e^{x+1} - \dfrac{e}{x} + C$.

⬩Dạng 5: Nguyên hàm có điều kiện

Phương pháp

- **Bài toán:** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(a) = b$
- ***Bước 1:*** Dựa vào bảng nguyên hàm, tính chất nguyên hàm, các phương pháp biến đổi.

- ***Bước 2:*** Dựa vào điều kiện của giả thiết: $F(a)=b$ để tìm C.
- ***Bước 3:*** Kết luận.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hàm số $f'(x)=3x^2$. Tìm nguyên hàm $f(x)$ của $f'(x)$ thỏa $f(0)=1$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int 3x^2\mathrm{d}x=x^3+C$

Mà $f(0)=1\Rightarrow 0^3+C=1\Leftrightarrow C=1$. Vậy $f(x)=x^3+C$.

Câu 2: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\sin x+\cos x$ thoả mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

Lời giải

Có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x=-\cos x+\sin x+C$

Do $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}+C=2\Leftrightarrow 1+C=2\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(x)=-\cos x+\sin x+1$.

Câu 3: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=e^x+2x$ thỏa mãn $F(0)=\frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$

Lời giải

Ta có $F(x)=\int\left(e^x+2x\right)\mathrm{d}x=e^x+x^2+C$

Theo bài ra ta có: $F(0)=1+C=\frac{3}{2}\Rightarrow C=\frac{1}{2}\Rightarrow F(x)=e^x+x^2+\frac{1}{2}$.

Câu 4: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)=\frac{1}{2x-1}, x\neq\frac{1}{2}$ và $F(1)=0$. Tính $F(5)$.

Lời giải

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{2x-1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$

Mà $F(1)=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln|2.1-1|+C=0\Leftrightarrow C=0$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x-1|$

Vậy $F(5)=\frac{1}{2}\ln|2.5-1|=\frac{1}{2}\ln 9=\ln 3$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$. Biết rằng $f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$ với mọi $x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=1$. Tính giá trị $f(4)$.

Lời giải

Với mọi $x \in (0;+\infty)$, ta có:

$$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int \left(2x + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = x^2 - \frac{1}{x} + C.$$

Vì $f(1) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow f(4) = 16 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{67}{4}$

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 12x + 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thoả mãn $F(0) = 2$. Tính giá trị $F(1)$.

Lời giải

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int (12x^2 + 2)\mathrm{d}x = 4x^3 + 2x + C_1$.

Vì $f(1) = 3 \Rightarrow C_1 = -3 \Rightarrow f(x) = 4x^3 + 2x - 3$.

Lại có: $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x = \int (4x^3 + 2x - 3)\mathrm{d}x = x^4 + x^2 - 3x + C_2$

$F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2 \Rightarrow F(1) = 1$.

⬩Dạng 6: Bài toán thực tế (liên quan đến vận tốc, gia tốc, quãng đường,...)

Phương pháp

- **Bài toán:** Tìm nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(a) = b$
- ***Bước 1:*** Xét mối liên hệ giữa các đại lượng
- Xét mối quan hệ giữa các đại lượng vận tốc $v(t)$, quãng đường $s(t)$ và thời gian t
- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$
- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường: $s(t) = \int v(t)dt$
- Xét mối quan hệ giữa các đại lượng vận tốc $v(t)$, gia tốc $a(t)$ và thời gian t
- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$
- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t)dt$
- ***Bước 2:*** Dựa vào điều kiện của giả thiết để tìm đại lượng yêu cầu.
- ***Bước 3:*** Kết luận.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Một ô tô đang chạy với vận tốc 19 m/s thì hãm phanh và chuyển động chậm dần với tốc độ $v(t) = 19 - 2t$ (m/s). Kể từ khi hãm phanh, quãng đường ô tô đi được sau 5 giây là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $s(t) = \int v(t)dt = \int (19 - 2t)dt = 19t - t^2 + C$

Ta có $s(0) = 0 \Leftrightarrow 19.0 - 0^2 + C = 0 \Leftrightarrow C = 0$

Nên $s(t) = 19t - t^2$

Vậy sau 5 giây thì $t=5$, quãng đường ô tô đi được là $s(5)=19.5-5^2=70\ m$.

Câu 2: Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t=0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t)=160-9{,}8t\ (m/s)$. Tìm độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất):

(1) Sau $t=5$ giây.

(2) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập

Lời giải

Gọi $h(t)$ là độ cao của viên đạn bắn lên từ mặt đất sau t giây kể từ thời điểm đạn được bắn lên.

Khi đó $h(t)=\int v(t)\mathrm{d}(t)=\int(160-9{,}8t)\mathrm{d}(t)=160t-4{,}9t^2+C$.

Do $h(0)=0$ nên $C=0 \Rightarrow h(t)=-4{,}9t^2+160t\ (m)$.

(1) Sau $t=5$ giây.

Độ cao của viên đạn sau 5 giây là $h(5)=-4{,}9.5^2+160.5=677{,}5\ (m)$.

(2) Khi nó đạt độ cao lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Viên đạn đạt độ cao lớn nhất là $h=-\dfrac{\Delta}{4a}=\dfrac{64000}{49}\approx 1306{,}1\ (m)$ khi $t=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{800}{49}$ giây.

Ⓒ. Dạng toán rèn luyện

◆Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu

A. $F'(x)=-f(x),\forall x\in K$.

B. $f'(x)=F(x),\forall x\in K$.

C. $F'(x)=f(x),\forall x\in K$.

D. $f'(x)=-F(x),\forall x\in K$.

Lời giải

Chọn C

Theo định nghĩa thì hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng K nếu $F'(x)=f(x),\forall x\in K$.

Câu 2: Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng K. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $F(x)=f'(x)$.

B. $F'(x)=f(x)$.

C. $\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=F'(x)$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$.

Lời giải

Chọn A

Theo định nghĩa suy ra A sai.

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x)$, $g(x)$ là hàm số liên tục, có $F(x)$, $G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$, $g(x)$. Xét các mệnh đề sau:

(I). $F(x)+G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)+g(x)$.

(II). $k.F(x)$ là một nguyên hàm của $k.f(x)$ với $k\in\mathbb{R}^*$.

(III). $F(x).G(x)$ là một nguyên hàm của $f(x).g(x)$.

Các mệnh đề đúng là

A. (I) và (II). **B.** Cả 3 mệnh đề. **C.** (I) và (III). **D.** (II) và (III).

Lời giải

Chọn A

Theo tính chất nguyên hàm thì (I) và (II) là đúng, (III) sai.

Câu 4: Cho $\int f(x)\mathrm{d}x=F_1(x)$, $\int g(x)\mathrm{d}x=F_2(x)$. Tính $I=\int\left[2g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x$.

A. $2F_1(x)-F_2(x)+C$. **B.** $F_2(x)-F_1(x)+C$.

C. $2F_2(x)-F_1(x)+C$. **D.** $\left|F_1(x)+F_2(x)\right|+C$.

Lời giải

Chọn C

Do $I=\int\left[2g(x)-f(x)\right]\mathrm{d}x=2\int g(x)\mathrm{d}x-\int f(x)\mathrm{d}x=2F_2(x)-F_1(x)+C$.

Câu 5: Cho $\int 5^x\mathrm{d}x=F(x)+C$. Khẳng định nào dưới đây **đúng**?

A. $F'(x)=5^x\ln 5$. **B.** $F'(x)=5^x+C$. **C.** $F'(x)=-5^x$. **D.** $F'(x)=5^x$.

Lời giải

Chọn D

Do $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số 5^x nên $F'(x)=5^x$.

Câu 6: $\int x^4\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{5}x^5+C$. **B.** $4x^3+C$. **C.** x^5+C. **D.** $5x^5+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int x^4\mathrm{d}x=\frac{1}{5}x^5+C$.

Câu 7: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{2x-1}$.

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C.$ **B.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}+C..$

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}\sqrt{2x-1}+C.$ **D.** $\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{2x-1}+C.$

Lời giải

Chọn B

$$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\sqrt{2x-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(2x-1\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\left(2x-1\right)=\frac{1}{3}\left(2x-1\right)\sqrt{2x-1}+C.$$

Câu 8: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\cos 3x$

A. $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=3\sin 3x+C$

B. $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{\sin 3x}{3}+C$.

C. $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=\sin 3x+C$

D. $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=-\frac{\sin 3x}{3}+C$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{\sin 3x}{3}+C$

Câu 9: Hàm số $F\left(x\right)=e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau:

A. $f\left(x\right)=2xe^{x^2}$ **B.** $f\left(x\right)=x^2e^{x^2}-1$. **C.** $f\left(x\right)=e^{2x}$ **D.** $f\left(x\right)=\frac{e^{x^2}}{2x}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $f\left(x\right)=F'\left(x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\left(e^{x^2}\right)'=2xe^{x^2}$.

Câu 10: Tìm nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^4+2}{x^2}$.

A. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+C$

B. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{2}{x}+C$.

C. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}+C$

D. $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{x^4+2}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(x^2+\frac{2}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}-\frac{2}{x}+C$.

Câu 11: Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\int\left[f\left(x\right)+g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

B. $\int\left[f\left(x\right)-g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int g\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int kf\left(x\right)\mathrm{d}x=k\int f\left(x\right)\mathrm{d}x,\forall k\in\mathbb{R}$.

D. $\int kf\left(x\right)\mathrm{d}x=k\int f\left(x\right)\mathrm{d}x,\forall k\in\mathbb{R},k\neq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x, \forall k \in \mathbb{R}, k \neq 0$ nên đáp án C sai.

Câu 12: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C.$

B. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 2x + \frac{1}{x} + C.$

C. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3 + C.$

D. $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{x}\right)^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + C.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \int\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 2x - \frac{1}{x} + C.$

Câu 13: Hàm số $F(x) = x\sin x + \cos x + 2024$ là một nguyên hàm của hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $f(x) = x\sin x$.
B. $f(x) = -x\cos x$.
C. $f(x) = -x\sin x$.
D. $f(x) = x\cos x$.

Lời giải

Chọn D

$F'(x) = (x\sin x + \cos x + 2024)' = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = x\cos x$ trên $\mathbb{R}$.

Câu 14: Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 2x + 5$ là

A. $x^3 + x^2 + 5$.
B. $x^3 + x + C$.
C. $x^3 + x^2 + 5x + C$.
D. $x^3 + x^2 + C$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int(3x^2 + 2x + 5)\mathrm{d}x = x^3 + x^2 + 5x + C$.

Câu 15: Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)$

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

C. $F(x) = 2x + 3 + C$.

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^2 + 2x + C$.

Lời giải

Chọn A

$\int(x+1)(x+2)\mathrm{d}x = \int(x^2 + 3x + 2)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$.

Câu 16: Tìm nguyên hàm $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x$

A. $F(x) = -\cos x - \sin x + C$.

B. $F(x) = \cos x + \sin x + C$

C. $F(x)=\cot x-\tan x+C$.   **D.** $F(x)=-\cot x-\tan x+C$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\cot x-\tan x+C$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=2x+e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thoả mãn $F(0)=2024$.

A. $F(x)=x^2+e^x+2023$.   **B.** $F(x)=x^2+e^x-2023$.

C. $F(x)=x^2+e^x+2022$.   **D.** $F(x)=x^2+e^x-2024$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2x+e^x\right)\mathrm{d}x=x^2+e^x+C$

$F(0)=2024\Rightarrow C=2023\Rightarrow F(x)=x^2+e^x+2023$.

Câu 18: Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos x$ thỏa mãn $F(0)=1$ là

A. $F(x)=\sin x+1$.   **B.** $F(x)=-\sin x+1$.

C. $F(x)=\cos x$.   **D.** $F(x)=-\cos x+2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$.

Vì $F(0)=1$ nên $\sin 0+C=1\Leftrightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=\sin x+1$.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)=2x+e^x$. Hàm số $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ sao cho $F(0)=2024$. Tính $F(1)$.

A. $e+2025$.   **B.** $e-2024$.   **C.** $e+2024$.   **D.** $e-2025$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(2x+e^x\right)\mathrm{d}x=x^2+e^x+C$.

Vì $F(0)=2024$ nên $0^2+e^0+C=2024\Leftrightarrow C=2023$.

Suy ra $F(x)=x^2+e^x+2023$.

Vậy $F(1)=1^2+e^1+2023=e+2024$.

Câu 20: Hàm số $F(x)=\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+x\sqrt{x}$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây?

A. $f_1(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

B. $f_3(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

C. $f_2(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

D. $f_2(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{2}\sqrt{x}+\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $F'(x)=\left(\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}+x\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{3}}+2\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}\right)'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

Câu 21: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x)=\dfrac{x(x-3)^2}{x^2}$, biết $F(1)=\dfrac{5}{2}$. Tính $F(2)$.

A. $F(2)=2+9\ln 2$.

B. $F(2)=-2+9\ln 2$.

C. $F(2)=1+9\ln 2$.

D. $F(2)=7$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $F(x)=\displaystyle\int\frac{x(x-3)^2}{x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x(x^2-6x+9)}{x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^3-6x^2+9x}{x^2}\mathrm{d}x$

$=\displaystyle\int\left(x-6+\frac{9}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-6x+9\ln|x|+C$.

Vì $F(1)=\dfrac{5}{2}\Rightarrow\dfrac{1}{2}-6+C=\dfrac{5}{2}\Rightarrow C=8$ suy ra $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-6x+9\ln|x|+8$.

Vậy $F(2)=-2+9\ln 2$.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)=3\cos x-\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{\sin^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\int f(x)\mathrm{d}x=3\sin x-2\ln|x|-4\cot x+C$.

B. $\int f(x)\mathrm{d}x=3\sin x-2\ln x-4\cot x+C$.

C. $\int f(x)\mathrm{d}x=3\sin x-2\ln|x|+4\cot x+C$.

D. $\int f(x)\mathrm{d}x=-3\sin x-2\ln|x|-4\cot x+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\displaystyle\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(3\cos x-\frac{2}{x}+\frac{4}{\sin^2 x}\right)\mathrm{d}x$

$= 3\int \cos x\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + 4\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$

$= 3\sin x - 2\ln|x| - 4\cot x + C$.

Câu 23: Một vật chuyển động có gia tốc là $a(t) = 3t^2 + t \ (m/s^2)$. Biết rằng vận tốc ban đầu của vật là $2 \ m/s$. Vận tốc của vật đó sau 2 giây là

A. $8 \ m/s$. **B.** $12 \ m/s$. **C.** $10 \ m/s$. **D.** $16 \ m/s$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $v(t) = \int a(t)\mathrm{d}t = \int (3t^2 + t)\mathrm{d}t = t^3 + \frac{1}{2}t^2 + C.$

Vì vận tốc ban đầu của vật là $2 \ m/s$ nên $v(0) = 2 \Leftrightarrow C = 2.$

Suy ra $v(t) = t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2.$

Vậy $v(2) = 2^3 + \frac{1}{2}.2^2 + 2 = 12 \ m/s.$

Câu 24: Một viên đạn được bắn thẳng đứng lên trên từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi $t = 0$ là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 25 - 9,8t \ (m/s)$. Độ cao của viên đạn (tính từ mặt đất) đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{125}{49}$. **B.** $\frac{3125}{98}$. **C.** $\frac{2375}{392}$. **D.** $\frac{1125}{98}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $h(t)$ là độ cao của viên đạn bắn lên từ mặt đất sau t giây kể từ thời điểm đạn được bắn lên.

Khi đó $h(t) = \int v(t)\mathrm{d}(t) = \int (25 - 9,8t)\mathrm{d}(t) = 25t - 4,9t^2 + C \ (m)$.

Do $h(0) = 0$ nên $C = 0 \Rightarrow h(t) = -4,9t^2 + 25t \ (m)$.

Vậy viên đạn đạt độ cao lớn nhất là $h = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{3125}{98} \ (m)$ khi $t = -\frac{b}{2a} = \frac{125}{49}$ giây.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là (C). Xét điểm $M(x; f(x))$ thay đổi trên (C). Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M = (x+2)^2$ và điểm $A(0;1)$ thuộc đồ thị (C). Tìm biểu thức $f(x)$.

A. $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x$. **B.** $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$.

C. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$. **D.** $f(x) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x + 1$.

Lời giải

Chọn D

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M=(x+2)^2$

$\Rightarrow f(x)=\int (x+2)^2\,dx=\int (x^2+4x+4)\,dx=\dfrac{x^3}{3}+2x^2+4x+c$.

Ta có điểm $A(0;1)$ thuộc đồ thị (C)

$\Rightarrow f(0)=1$

$\Rightarrow \dfrac{0^3}{3}+2.0^2+4.0+c=1\Rightarrow c=1$.

Vậy $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+2x^2+4x+1$.

⬩Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Trong mỗi trường hợp sau, hàm số $F(x)$ có là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên khoảng tương ứng không? Vì sao?

(a) Hàm số $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$ trên $\mathbb{R}$

(b) Hàm số $F(x)=2\sin x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos x-3\sin x$ trên $\mathbb{R}$

(c) Hàm số $F(x)=e^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2xe^{x^2}$ trên $\mathbb{R}$

(d) Hàm số $F(x)=(4x^2-2x+1)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

Lời giải

(a) Hàm số $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=x^2$ trên $\mathbb{R}$.

$F'(x)=x^2=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Chọn ĐÚNG.

(b) Hàm số $F(x)=2\sin x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2\cos x-3\sin x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $F'(x)=2\cos x+3\sin x\neq f(x)$ nên $F(x)$ không là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Chọn SAI.

(c) Hàm số $F(x)=e^{x^2}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=2xe^{x^2}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $F'(x)=\left(e^{x^2}\right)'=2x.e^{x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Nên $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Chọn ĐÚNG.

(d) Hàm số $F(x)=\left(4x^2-2x+1\right)\sqrt{2x-3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}$ trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

$$F'(x)=(8x-2)\sqrt{2x-3}+\frac{4x^2-2x+1}{\sqrt{2x-3}}=\frac{(8x-2)(2x-3)+4x^2-2x+1}{\sqrt{2x-3}}=\frac{20x^2-30x+7}{\sqrt{2x-3}}=f(x)$$

, $\forall x\in\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$

Nên $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx$, với $a,b\in\mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

(a) Biết $a=b=1$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+C$.

(b) Biết $a=b=4$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là x^4+2x^2+C.

(c) Biết $f(1)=6; f(2)=36$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là x^4-x^2+C.

(d) Biết $f(1)=2; f(-2)=-52$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $2x^4-3x^2+C$.

Lời giải

(a) Biết $a=b=1$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+C$.

Với $a=b=1$, ta có $f(x)=x^3+x$

Khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(x^3+x\right)\mathrm{d}x=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}+C$.

Chọn ĐÚNG.

(b) Biết $a=b=4$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là x^4+2x^2+C.

Với $a=b=4$, ta có $f(x)=4x^3+4x$

Khi đó $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(4x^3+4x\right)\mathrm{d}x=x^4+2x^2+C$.

Chọn ĐÚNG.

(c) Biết $f(1)=6; f(2)=36$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là x^4-x^2+C.

Ta có $\begin{cases} f(1)=6 \\ f(2)=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ 8a+2b=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$, suy ra $f(x)=4x^3+2x$

Khi đó $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(4x^3+2x)\,\mathrm{d}x=x^4+x^2+C$.

Chọn SAI.

(d) Biết $f(1)=2; f(-2)=-52$, nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $2x^4-3x^2+C$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=2 \\ f(-2)=-52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ -8a-2b=-52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=-6 \end{cases}$, suy ra $f(x)=8x^3-6x$

Khi đó $\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int(8x^3-6x)\,\mathrm{d}x=2x^4-3x^2+C$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 3: Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

(a) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$

(b) $\int\frac{x^2-2x+1}{x}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|+C$

(c) $\int\left(\frac{2}{5-2x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln|5-2x|+2\ln|x|-\frac{3}{x}+C$

(d) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$ thỏa $F(4)=3$ thì $F(x)=x+4\ln|x-3|-1$

Lời giải

(a) $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$.

Ta có: $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$.

Chọn SAI.

(b) $\int\frac{x^2-2x+1}{x}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|+C$.

$\int\frac{x^2-2x+1}{x}\mathrm{d}x=\int\left(x-2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|+C$.

Chọn ĐÚNG.

(c) $\int\left(\frac{2}{5-2x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln|5-2x|+2\ln|x|-\frac{3}{x}+C$.

$\int\left(\frac{2}{5-2x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x=-\ln|5-2x|+2\ln|x|-\frac{3}{x}+C$.

Chọn SAI.

(d) Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$ thỏa $F(4)=3$ thì $F(x)=x+4\ln|x-3|-1$

Ta có: $F(x)=\int \frac{x+1}{x-3}\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{4}{x-3}\right)\mathrm{d}x=x+4\ln|x-3|+C$.

Vì $F(4)=3$ nên $4+4\ln|4-3|+C=3 \Leftrightarrow C=-1$. Vậy $F(x)=x+4\ln|x-3|-1$.

Chọn ĐÚNG.

Câu 4: Cho hàm số $F(x)=\int\sqrt{x}\left(x^2-5x+1\right)dx=\frac{ax^3\sqrt{x}}{b}-ax^2\sqrt{x}+\frac{a}{c}x\sqrt{x}+C\,(x>0)$. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:

(a) $F(x)=\frac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

(b) Tổng $a+b+c=12$

(c) Tích $a.b.c=42$

(d) $F(1)=\frac{2002}{21}$ thì $F(x)=\frac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2024$

Lời giải

Ta có $F(x)=\int\sqrt{x}\left(x^2-5x+1\right)dx=\int\left(x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\right)dx=\frac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C\,(1)$

(a) $F(x)=\frac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Theo (1) ta có $F(x)=\frac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

Chọn ĐÚNG.

(b) Tổng $a+b+c=12$.

Theo (1) ta có $a=2;b=7;c=3\Rightarrow\ a+b+c=2+7+3=12$.

Chọn ĐÚNG.

(c) Tích $a.b.c=42$.

Theo (1) ta có $a=2;b=7;c=3\Rightarrow\ a.b.c=2.7.3=42$.

Chọn ĐÚNG.

(d) $F(1)=\frac{2002}{21}$ thì $F(x)=\frac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2024$.

Theo (1) ta có

$$F(1)=\frac{2.1^3.\sqrt{1}}{7}-2.1^2.\sqrt{1}+\frac{2}{3}.1.\sqrt{1}+C=\frac{2002}{21}\Leftrightarrow\frac{-22}{21}+C=\frac{2002}{21}\Rightarrow C=\frac{2024}{21}$$

$$\Rightarrow F(x)=\frac{2x^3\sqrt{x}}{7}-2x^2\sqrt{x}+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{2024}{21}.$$

Chọn SAI.

Câu 5: Cho $I_1=\int\left(e^x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ và $I_2=\int\left(e^{2x-1}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$. Mỗi khẳng định dưới đây đúng hay sai?

(a) $I_1=e^x-\frac{1}{x}+C$

(b) $I_2=\frac{e^{2x-1}}{2}+\ln|x|+C$

(c) $I_1+I_2=e^x+\frac{e^{2x-1}}{2}+C$

(d) Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x)=e^x+\frac{1}{x^2}$. Nếu $F(1)=e$ thì $F(\ln 2)=1-\frac{1}{\ln 2}$.

Lời giải

(a) $I_1=e^x-\frac{1}{x}+C$.

Vì $I_1=\int\left(e^x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=e^x-\frac{1}{x}+C$.

Chọn ĐÚNG.

(b) $I_2=\frac{e^{2x-1}}{2}+\ln|x|+C$.

Ta có: $I_2=\int\left(e^{2x-1}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{e^{2x-1}}{2}+\frac{1}{x}+C$

Chọn SAI.

(c) $I_1+I_2=e^x+\frac{e^{2x-1}}{2}+C$.

Ta có: $I_1+I_2=\int\left(e^x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\int\left(e^{2x-1}-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int\left(e^x+e^{2x-1}\right)\mathrm{d}x=e^x+\frac{e^{2x-1}}{2}+C$

Chọn ĐÚNG.

(d) Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$, với $f(x)=e^x+\dfrac{1}{x^2}$. Nếu $F(1)=e$ thì $F(\ln 2)=1-\dfrac{1}{\ln 2}$.

Ta có: $I_1=\int\left(e^x+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=e^x-\dfrac{1}{x}+C$. Vì $F(1)=e\Rightarrow e-1+C=e\Rightarrow C=1$.

$F(x)=e^x-\dfrac{1}{x}+1\Rightarrow F(\ln 2)=e^{\ln 2}-\dfrac{1}{\ln 2}+1=2-\dfrac{1}{\ln 2}+1=3-\dfrac{1}{\ln 2}$.

Chọn SAI.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=4\cos^2\dfrac{x}{2}$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

(a) $\int f(x)\mathrm{d}x=-2\sin x+C$

(b) Biết rằng $\int f(x)\mathrm{d}x=ax+b\sin x+C,\, a,b\in\mathbb{Z}$, khi đó $a+b=4$.

(c) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$ là $F(x)=2(x+\sin x)+1$.

(d) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ là $F(x)=2(x+\sin x)-\pi$.

Lời giải

(a) $\int f(x)\mathrm{d}x=-2\sin x+C$.

Ta có: $(-2\sin x+C)'=-4\cos x\neq 4\cos^2\dfrac{x}{2}$ nên hàm số $F(x)=-2\sin x$ không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ đã cho.

Chọn SAI.

(b) Biết rằng $\int f(x)\mathrm{d}x=ax+b\sin x+C,\, a,b\in\mathbb{Z}$, khi đó $a+b=4$.

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x=\int 4\cos^2\dfrac{x}{2}\mathrm{d}x=\int 4.\dfrac{1+\cos x}{2}\mathrm{d}x=2\int(1+\cos x)\mathrm{d}x=2(x+\sin x)+C$.

Suy ra: $\begin{cases}a=2\\ b=2\end{cases}\Rightarrow a+b=4$.

Chọn ĐÚNG.

(c) Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0)=1$ là $F(x)=2(x+\sin x)+1$.

Theo câu **(b)** ta có: $F(x)=2(x+\sin x)+C$.

Vì $F(0)=1$ nên $C=1$.

Vậy ta có: $F(x)=2(x+\sin x)+1$.

Chọn ĐÚNG.

(d) Nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ là $F\left(x\right)=2\left(x+\sin x\right)-\pi$.

Theo câu **(b)** ta có: $F\left(x\right)=2\left(x+\sin x\right)+C$.

Vì $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ nên $2\left(\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}\right)+C=0\Leftrightarrow C=-\pi-2$.

Vậy ta có: $F\left(x\right)=2\left(x+\sin x\right)-\pi-2$.

Chọn SAI.

Câu 7: Cho hàm số $f\left(x\right)=2x-3\cos x$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

(a) $f\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $g\left(x\right)=2+3\sin x$

(b) Một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=2x-3\cos x$ là $h\left(x\right)=x^2+3\sin x+2024$

(c) Nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)$ thoả mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ là $F\left(x\right)=x^2-3\sin x+6-\frac{\pi^2}{4}$

(d) $f\left(x\right)=2x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $k\left(x\right).\mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $k'\left(x\right).\mathrm{e}^x$ là $3\sin x+3\cos x+2x+C$

Lời giải

(a) $f\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $g\left(x\right)=2+3\sin x$.

Có $f'\left(x\right)=2+3\sin x=g\left(x\right)\Rightarrow$ $f\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $g\left(x\right)=2+3\sin x$.

Chọn ĐÚNG.

(b) Một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=2x-3\cos x$ là $h\left(x\right)=x^2+3\sin x+2024$.

$h\left(x\right)$ không phải là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=2x-3\cos x$,

Vì $h'\left(x\right)=2x+3\cos x\neq f\left(x\right)$.

Chọn SAI.

(c) Nguyên hàm $F\left(x\right)$ của hàm số $f\left(x\right)$ thoả mãn điều kiện $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$ là $F\left(x\right)=x^2-3\sin x+6-\frac{\pi^2}{4}$.

Ta có $\int\left(2x-3\cos x\right)\mathrm{d}x=x^2-3\sin x+C\Rightarrow F\left(x\right)=x^2-3\sin x+C$.

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=3\Leftrightarrow\frac{\pi^2}{4}-3+C=3\Leftrightarrow C=6-\frac{\pi^2}{4}$

Vậy $F\left(x\right)=x^2-3\sin x+6-\dfrac{\pi^2}{4}$.

Chọn ĐÚNG.

(d) $f\left(x\right)=2x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $k\left(x\right).\mathrm{e}^x$, họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $k'\left(x\right).\mathrm{e}^x$ là $3\sin x+3\cos x+2x+C$.

$2x-3\cos x$ là một nguyên hàm của hàm số $k\left(x\right).\mathrm{e}^x$

$$\Rightarrow \left(2x-3\cos x\right)'=k\left(x\right).\mathrm{e}^x \Leftrightarrow 2+3\sin x=k\left(x\right).\mathrm{e}^x \Leftrightarrow k\left(x\right)=\frac{2+3\sin x}{\mathrm{e}^x}$$

$$\Rightarrow k'\left(x\right)=\frac{\left(3\cos x-3\sin x-2\right).\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2}=\frac{3\cos x-3\sin x-2}{\mathrm{e}^x}$$

$$\Rightarrow k'\left(x\right).\mathrm{e}^x=3\cos x-3\sin x-2$$

$$\Rightarrow \int k'\left(x\right).\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\int\left(3\cos x-3\sin x-2\right)\mathrm{d}x=3\sin x+3\cos x-2x+C.$$

Chọn SAI.

Câu 8: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=8x^3+\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$. Xét tính đúng, sai của các phát biểu sau:

(a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)$.

(b) Biết $f\left(0\right)=3$. Khi đó, $f\left(x\right)=2x^4-\cos x+3$.

(c) $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^4-\cos x+3\right)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{5}x^5-\sin x+3x+C$, với C là hằng số.

(d) Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thoả mãn $F\left(0\right)=2$. Khi đó, $F\left(1\right)=\dfrac{32}{5}-\sin 1$.

Lời giải

(a) Hàm số $y=f\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)$.

Chọn ĐÚNG.

(b) Biết $f\left(0\right)=3$. Khi đó, $f\left(x\right)=2x^4-\cos x+3$.

Ta có: $\int f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(8x^3+\sin x\right)\mathrm{d}x=2x^4-\cos x+C_1$

Hàm số $y=f\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)$ và $f\left(0\right)=3$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\left(x\right)=2x^4-\cos x+C_1 \\ f\left(0\right)=3 \end{cases}$$

Vì $f\left(0\right)=3\Rightarrow C_1=4\Rightarrow f\left(x\right)=2x^4-\cos x+4$.

Chọn SAI.

(c) $\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^4-\cos x+3\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}x^5-\sin x+3x+C$, với C là hằng số.

$\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(2x^4-\cos x+4\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{5}x^5-\sin x+4x+C$

Chọn SAI.

(d) Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thoả mãn $F\left(0\right)=2$. Khi đó, $F\left(1\right)=\frac{32}{5}-\sin 1$.

Biết $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của $f\left(x\right)$ thoả mãn $F\left(0\right)=2$.

$\Rightarrow\begin{cases}F\left(x\right)=\frac{2}{5}x^5-\sin x+4x+C\\F\left(0\right)=2\end{cases}$

Vì $F\left(0\right)=2\Rightarrow C=2\Rightarrow F\left(x\right)=\frac{2}{5}x^5-\sin x+4x+2\Rightarrow F\left(1\right)=\frac{32}{5}-\sin 1$

Chọn ĐÚNG.

Câu 9: Biết $F\left(x\right)=3x^2+2x-\ln x+C, x\in\left(0;+\infty\right)$ là hàm của hàm số $f\left(x\right)$.

(a) $f\left(x\right)=6x+2-\frac{1}{x}, x\in\left(0;+\infty\right)$.

(b) $F\left(1\right)=3$.Khi đó $F\left(2\right)=14-\ln 2$

(c) $f\left(1\right)=1$

(d) Bất phương trình $f\left(x\right)+\frac{1}{x}-8<0$ có tập nghiệm là $\left(-\infty;1\right)$

Lời giải

(a) $f\left(x\right)=6x+2-\frac{1}{x}, x\in\left(0;+\infty\right)$.

$f\left(x\right)=F'\left(x\right)=6x+2-\frac{1}{x}, x\in\left(0;+\infty\right)$

Chọn ĐÚNG.

(b) $F\left(1\right)=3$.Khi đó $F\left(2\right)=14-\ln 2$

$F\left(1\right)=3\Leftrightarrow 3+2+C=3\Leftrightarrow C=-2$

Suy ra $F\left(x\right)=3x^2+2x-\ln x-2, x\in\left(0;+\infty\right)$

Vậy $F\left(2\right)=14-\ln 2$

Chọn ĐÚNG.

(c) $f\left(1\right)=1$.

$f\left(x\right)=6x+2-\frac{1}{x},x\in\left(0;+\infty\right)$. Suy ra $f\left(1\right)=7$

Chọn SAI.

(d) Bất phương trình $f\left(x\right)+\frac{1}{x}-8<0$ có tập nghiệm là $\left(-\infty;1\right)$.

$f\left(x\right)=6x+2-\frac{1}{x},x\in\left(0;+\infty\right)$.

$$\begin{cases} f\left(x\right)+\frac{1}{x}-8<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}-8<0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $\left(0;1\right)$

Chọn SAI.

Câu 10: Biết $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\frac{x^2+1}{x}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

(a) $F\left(x\right)=\frac{x^2}{2}+\ln x+2025$

(b) Biết $F\left(1\right)=\frac{3}{2}$, khi đó $F\left(e\right)=\frac{e^2}{2}+1$

(c) $F\left(x\right)=f'\left(x\right),\forall x\in\left(0;+\infty\right)$

(d) Biết rằng đồ thị của hàm số $F\left(x\right)$ đi qua $M\left(e;\frac{e^2}{2}\right)$. Khi đó $F\left(1\right)=\frac{1}{2}$

Lời giải

(a) $F\left(x\right)=\frac{x^2}{2}+\ln x+2025$.

$$F\left(x\right)=\int f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+1}{x}\mathrm{d}x=\int\left(x+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\ln x+C$$

$$F\left(x\right)=\frac{x^2}{2}+\ln x+C$$

Một nguyên hàm $F\left(x\right)=\frac{x^2}{2}+\ln x+2025$

Chọn ĐÚNG.

(b) Biết $F\left(1\right)=\frac{3}{2}$, khi đó $F\left(e\right)=\frac{e^2}{2}+1$

$$F\left(x\right)=\frac{x^2}{2}+\ln x+C$$

$F(1)=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}+C=\frac{3}{2} \Leftrightarrow C=1$. Suy ra $F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+1$

Vậy $F(e)=\frac{e^2}{2}+2$

Chọn SAI.

(c) $F(x)=f'(x), \forall x \in (0;+\infty)$

Theo định nghĩa nguyên hàm $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ khi và chỉ khi $F'(x)=f(x)$

Chọn SAI.

(d) Biết rằng đồ thị của hàm số $F(x)$ đi qua $M\left(e;\frac{e^2}{2}\right)$. Khi đó $F(1)=\frac{1}{2}$

$F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x+C$, đồ thị của hàm số $F(x)$ đi qua $M\left(e;\frac{e^2}{2}\right)$ nên ta có phương trình $\frac{e^2}{2}=\frac{e^2}{2}+\ln e+C \Leftrightarrow C=-1$

$F(x)=\frac{x^2}{2}+\ln x-1$. Suy ra $F(1)=\frac{1}{2}+\ln 1-1=-\frac{1}{2}$

Chọn SAI.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(-\infty;0)$. Biết rằng $f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$.

(a) $f(1)=2$. Khi đó $f(x)=x^2-\frac{1}{x}+2$.

(b) $f(1)=0$. Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm

(c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M(-1;2)$. Khi đó $f(2)=\frac{13}{2}$

(d) $f(-2)=\frac{1}{4}$. Hàm số $g(x)=xf(x)$ có 3 điểm cực trị.

Lời giải

(a) $f(1)=2$. Khi đó $f(x)=x^2-\frac{1}{x}+2$.

$f(x)=\int f'(x)=\int\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)dx=x^2-\frac{1}{x}+C$

$f(1)=2 \Rightarrow C=2$

Suy ra $f(x)=x^2-\frac{1}{x}+2$

Chọn ĐÚNG.

(b) $f(1)=0$. Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm.

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=x^2-\frac{1}{x}+C$

$f(1)=0\Rightarrow C=0$

Suy ra $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-\frac{1}{x}=0\Leftrightarrow x^3-1=0\Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình $f(x)=0$ có duy nhất một nghiệm.

Chọn SAI.

(c) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M(-1;2)$. Khi đó $f(2)=\frac{13}{2}$

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=x^2-\frac{1}{x}+C$.

Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M(-1;5)$ ta được $2+C=5\Rightarrow C=3$

Suy ra $f(x)=x^2-\frac{1}{x}+3$

$f(2)=2^2-\frac{1}{2}+3=\frac{13}{2}$

Chọn ĐÚNG.

(d) $f(-2)=\frac{1}{4}$. Hàm số $g(x)=xf(x)$ có 3 điểm cực trị.

$f(-2)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 4+\frac{1}{4}+C=\frac{1}{4}\Leftrightarrow C=-4$.

$f(x)=x^2-\frac{1}{x}-4$

$g(x)=xf(x)=x\left(x^2-\frac{1}{x}-4\right)=x^3-4x$

$g'(x)=3x^2-4$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$, nên hàm số $y=g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Chọn SAI.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$, biết $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, biết $f(-2)=\frac{3}{2}$ và $f(2)=2\ln 2-\frac{3}{2}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai?

(a) Hàm số $f(x)=\ln|x|-\frac{1}{x}+C$, với C là hằng số.

(b) Hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{x}+C_1, & \text{khi } x>0\\ \ln\left(-x\right)-\dfrac{1}{x}+C_2, & \text{khi } x<0\end{cases}$, với C_1, C_2 là hằng số.

(c) Giá trị $f\left(-1\right)=2-\ln 2$

(d) Giá trị $f\left(4\right)=3\ln 2$

Lời giải

(a) Hàm số $f\left(x\right)=\ln\left|x\right|-\dfrac{1}{x}+C$, với C là hằng số.

Ta có: $f\left(x\right)=\int\dfrac{x+1}{x^2}\mathrm{d}x=\int\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|x\right|-\dfrac{1}{x}+C$

Chọn ĐÚNG.

(b) Hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{x}+C_1, & \text{khi } x>0\\ \ln\left(-x\right)-\dfrac{1}{x}+C_2, & \text{khi } x<0\end{cases}$, với C_1, C_2 là hằng số.

Ta có: $f\left(x\right)=\ln\left|x\right|-\dfrac{1}{x}+C$, nên ta có hai trường hợp $\left|x\right|=\begin{cases}x, & khi\ x>0\\ -x, & khi\ x<0\end{cases}$

$$\Rightarrow f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{x}+C_1, & khi\ x>0\\ \ln\left(-x\right)-\dfrac{1}{x}+C_2, & khi\ x<0\end{cases}$$

Chọn ĐÚNG

(c) Giá trị $f\left(-1\right)=2-\ln 2$.

Từ dữ kiện đề bài ta có: $\begin{cases}f\left(-2\right)=\dfrac{3}{2}\\ f\left(2\right)=2\ln 2-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln 2+\dfrac{1}{2}+C_2=\dfrac{3}{2}\\ \ln 2-\dfrac{1}{2}+C_1=2\ln 2-\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=1-\ln 2\\ C_1=\ln 2-1\end{cases}$

$\Rightarrow f\left(x\right)=\begin{cases}\ln x-\dfrac{1}{x}+\ln 2-1, & khi\ x>0\\ \ln\left(-x\right)-\dfrac{1}{x}+1-\ln 2, & khi\ x<0\end{cases}$. Giá trị $f\left(-1\right)=\ln 1+1+1-\ln 2=2-\ln 2$

Chọn ĐÚNG.

(d) Giá trị $f\left(4\right)=3\ln 2$

Ta có: $f\left(4\right)=\ln 4-\dfrac{1}{4}+\ln 2-1=3\ln 2-\dfrac{5}{4}$

Chọn SAI

Câu 13: Một vật chuyển động đều với vận tốc có phương trình $v(t)=t^2-2t+1$, trong đó t được tính bằng giây, quãng đường $s(t)$ được tính bằng mét. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng? Khẳng định nào sai?

(a) Quãng đường đi được của vật sau 2 giây là: $\frac{2}{3}(m)$

(b) Quãng đường vật đi được khi gia tốc bị triệt tiêu là $\frac{1}{3}(m)$

(c) Quãng đường vật đi được trong khoảng từ 2 giây đến thời gian mà vận tốc đạt $9\,(m/s)$ là: $\frac{26}{3}\ (m)$

(d) Quãng đường vật đi được từ 0 giây đến thời gian mà gia tốc bằng $10\left(m/s^2\right)$ là $44\,(m)$

Lời giải

(a) Quãng đường đi được của vật sau 2 giây là: $\frac{2}{3}(m)$

Ta có quãng đường vật đi được sau 2 giây là: $s(t)=\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2\left(t^2-2t+1\right)dt=\frac{2}{3}(m)$

Chọn ĐÚNG.

(b) Quãng đường vật đi được khi gia tốc bị triệt tiêu là $\frac{1}{3}(m)$

Ta có: gia tốc $a(t)=v'(t)=2t-2$, do gia tốc bị triệt tiêu

$\Leftrightarrow a(t)=0\Leftrightarrow 2t-2=0\Leftrightarrow t=1(s)$

Quãng đường vật đi được sau 1 giây là: $s(t)=\int_0^1 v(t)dt=\int_0^1\left(t^2-2t+1\right)dt=\frac{1}{3}(m)$

Chọn ĐÚNG

(c) Quãng đường vật đi được trong khoảng từ 2 giây đến thời gian mà vận tốc đạt $9\,(m/s)$ là: $\frac{26}{3}\ (m)$

Ta có: vận tốc đạt $9\,(m/s)$ $\Leftrightarrow v(t)=9\Leftrightarrow t^2-2t+1=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=4\\t=-2\end{array}\right.\Rightarrow t=4$ (nhận)

Quãng đường vật đi được trong khoảng từ 2 giây đến 4 giây là

$s(t)=\int_2^4 v(t)dt=\int_2^4\left(t^2-2t+1\right)dt=\frac{26}{3}\ (m)$

Chọn ĐÚNG

(d) Quãng đường vật đi được từ 0 giây đến thời gian mà gia tốc bằng $10\left(m/s^2\right)$ là $44\,(m)$

Ta có: gia tốc $a(t)=10 \Leftrightarrow 2t-2=10 \Leftrightarrow t=6\,(s)$

Quãng đường vật đi được từ 0 giây đến 6 giây là

$s(t)=\int_0^6 v(t)dt=\int_0^6 (t^2-2t+1)dt=42\,(m)$

Chọn SAI

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là (C). Xét điểm $M(x;f(x))$ thay đổi trên (C). Biết rằng, hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M=3x^2+2x-2$ và điểm M trùng với gốc tọa độ khi nó nằm trên trục tung.

(a) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=-1$ là $k=-1$.

(b) $f(1)=0$

(c) Điểm $B(2;7)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.

(d) Hàm số $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Lời giải

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M là $k_M=3x^2+2x-2$

$\Rightarrow f(x)=\int(3x^2+2x-2)dx=x^3+x^2-2x+c$.

Ta có điểm M trùng với gốc tọa độ khi nó nằm trên trục tung

$\Rightarrow f(0)=0$

$\Rightarrow 0^3+0^2-2.0+c=0 \Rightarrow c=0$.

Vậy $f(x)=x^3+x^2-2x$.

(a) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=-1$ là $k=-1$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x=-1$ là

$k=3.(-1)^2+2.(-1)-2=-1$.

Chọn ĐÚNG

(b) $f(1)=0$.

$f(1)=1^3+1^2-2.1=0$.

Chọn ĐÚNG

(c) Điểm $B(2;7)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Ta có $f(2)=2^3+2^2-2.2=8$.

Vậy điểm $B(2;7)$ không thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Chọn SAI

(d) Hàm số $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Ta có $F'(x)=x^3+x^2-2x=f(x)$.

Vậy hàm số $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2+1$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$.

Chọn ĐÚNG

Câu 15: Một ô tô đang chạy với tốc độ $72\ km/h$ thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường. Người lái xe phản ứng một giây sau đó bằng cách đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t)=-10t+30\ (m/s)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong $t\ (s)$ kể từ lúc đạp phanh.

(a) Công thức biểu diễn hàm số $s(t)=-5t^2+30t+72\ (m)$

(b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 3 giây

(c) Sau 3 giây kể từ lúc đạp phanh, quãng đường xe ô tô di chuyển được là $45\ (m)$

(d) Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là $120\ (m)$

Lời giải

(a) Công thức biểu diễn hàm số $s(t)=-5t^2+30t+72\ (m)$.

Ta có $s(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int(-10t+30)\mathrm{d}t=-5t^2+30t+C$.

Do $s(0)=0$ nên $C=0$.

Vậy $s(t)=-5t^2+30t\ (m)$.

Chọn SAI

(b) Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 3 giây.

Xe ô tô dừng hẳn khi $v(t)=0\Leftrightarrow -10t+30=0\Leftrightarrow t=3$.

Chọn ĐÚNG

(c) Sau 3 giây kể từ lúc đạp phanh, quãng đường xe ô tô di chuyển được là $45\ (m)$.

Sau 3 giây kể từ lúc đạp phanh, quãng đường xe ô tô di chuyển được là

$s(3)=-5.3^2+30.3=45\ (m)$.

Chọn ĐÚNG

(d) Quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là $120\,(m)$.

Ta có $72\ km/h = 20\ m/s$.

Vậy quãng đường xe ô tô đã di chuyển kể từ lúc người lái xe phát hiện chướng ngại vật trên đường đến khi xe ô tô dừng hẳn là $20+45=65\,(m)$.

Chọn SAI

◆Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin x-\cos x+\dfrac{2}{\cos^2 x}$, $F(0)=1$. Giá trị $F(\pi)$ bằng

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(\sin x-\cos x+\dfrac{2}{\cos^2 x}\right)\mathrm{d}x=-\cos x-\sin x+2\tan x+C$

Mà $F(0)=1\Rightarrow -\cos 0-\sin 0+2\tan 0+C=1\Leftrightarrow C=2\Rightarrow F(x)=-\cos x-\sin x+2\tan x+2$

$\Rightarrow F(\pi)=-\cos\pi-\sin\pi+2\tan\pi+2=3$.

Câu 2: Cho $F(x)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(x)=e^x-2x+1$, $F(0)=2$. Tính giá trị $F(1)$ (làm tròn kết quả đến số thập phân thứ hai)

Lời giải

Trả lời: 3,72

Ta có $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\left(e^x-2x+1\right)\mathrm{d}x=e^x-x^2+x+C$

Mà $F(0)=2\Rightarrow 1-0+0+C=2\Leftrightarrow C=1\Rightarrow F(x)=e^x-x^2+x+1$

$\Rightarrow F(1)=e-1+1+1=e+1\approx 3.71828$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$, và thỏa mãn $\int f(3+x)dx=e^x+\ln\left(x^2+1\right)$. Tính $f(-2)$(kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy)

Lời giải

Trả lời: -0,4

Gọi $F(x+3)$ là họ nguyên hàm của hàm số $f(3+x)$

$\Rightarrow \int f(3+x)dx=F(3+x)=e^x+\ln\left(x^2+1\right)$

$\Rightarrow F'(3+x)=f(3+x)\Rightarrow f(3+x)=e^x+\dfrac{2x}{x^2+1}$

Đặt $t=3+x\Rightarrow x=t-3$

$$\Rightarrow f(t)=e^{t-3}+\frac{2(t-3)}{(t-3)^2+1}=e^{t-3}+\frac{2t-6}{t^2-6t+10}\Rightarrow f(x)=e^{x-3}+\frac{2x-6}{x^2-6x+10}$$

$$f(-2)=e^{-2-3}+\frac{-10}{26}=e^{-5}-\frac{5}{13}\approx -0,4.$$

Câu 4: Cho $F(x)=(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x^2-3x+2)\mathrm{e}^{-x}$. Tính tổng $S=a+2b-c$?

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: $F'(x)=(2ax+b)\mathrm{e}^{-x}-(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{-x}=\left[-ax^2+(2a-b)x+(b-c)\right]\mathrm{e}^{-x}$

Yêu cầu bài toán thỏa mãn khi và chỉ khi $\begin{cases}-a=1\\2a-b=-3\\b-c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=-1\end{cases}$.

Vậy $S=-1+2.1-(-1)=2$.

Câu 5: Cây cà chua khi trồng có chiều cao $5\ cm$. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được cho bởi hàm số: $v(t)=-0,1t^3+t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng centimét/tuần. Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t. Chiều cao cây cà chua sau 2 tuần là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến số thập phân thứ 2

Lời giải

Trả lời: 7,27

Ta có $h(t)=\int v(t)\mathrm{d}t=\int(-0,1t^3+t^2)\mathrm{d}t=-\frac{1}{40}t^4+\frac{1}{3}t^3+C$.

Theo giả thiết, $h(0)=5\Leftrightarrow C=5\ \Rightarrow\ h(t)=-\frac{1}{40}t^4+\frac{1}{3}t^3+5\ (cm)$.

Vậy $h(2)=-\frac{1}{40}.2^4+\frac{1}{3}.2^3+5=\frac{109}{15}\ (cm)\approx 7,27$.

Câu 6: Khi được thả từ độ cao 20 m, một vật rơi với gia tốc không đổi $a=10\,m/s^2$. Sau khi rơi được t giây thì vật có tốc độ bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 20

Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của vật, $s(t)$ là quãng đường vật đi được cho đến thời điểm t giây kể từ khi vật bắt đầu rơi.

Vì $a(t)=v'(t)$ với mọi $t\ge 0$ nên $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int 10\mathrm{d}t=10t+C.$

Ta có $v(0)=0$ nên $10.0+C=0$ hay $C=0$. Vật $v(t)=10t\,(m/s)$

Vì $v(t)=s'(t)$ với mọi $t\ge 0$ nên $s(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t=\int 10t\,\mathrm{d}t=5t^2+C.$

Ta có $s(0)=0$ nên $5.0^2+C=0$ hay $C=0$. Vậy $s(t)=5t^2\,(m)$.

Vật rơi từ độ cao 20 m nên $s(t)\le 20 \Leftrightarrow 5t^2\le 20 \Leftrightarrow 0\le t\le 2$ (giây).

Vậy tốc độ vật rơi theo yêu cầu đề bài là $v(2)=20\,m/s$.