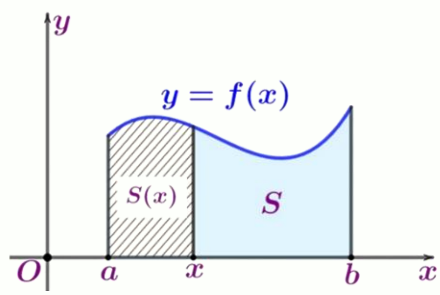
MỤC LỤC

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

1. Hình thang cong

Định nghĩa:

- Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và *không âm* trên đoạn $\left[a;b\right]$.
- Hình phẳng giới hạn bởi:
- đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$,
- trục hoành,
- hai đường thẳng $x=a,x=b$
- được gọi là hình thang cong.



2. Diện tích hình thang cong

Định nghĩa:

- Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và không âm trên đoạn $\left[a;b\right]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi:
- đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$,
- trục hoành, hai đường thẳng $x=a,x=b$ được tính bởi:
- $S=F\left(b\right)-F\left(a\right)$
- Trong đó $F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $f\left(x\right)$.

3. Định nghĩa tích phân

Định nghĩa:

- Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.
- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
- Viết $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\big|_a^b = F(b)-F(a)$
- Gọi $\int\limits_a^b$ là dấu tích phân; a là cận dưới; b là cận trên,
- $f(x)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân,
- $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân

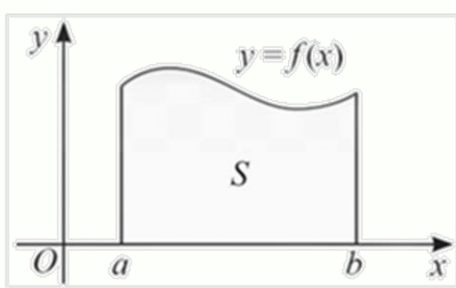
Chú ý

- Trường hợp $a=b$: $\int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- Trường hợp $a>b$: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x$
- Tích phân không phụ thuộc vào biến số x hay t, nghĩa là $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

4. Ý nghĩa hình học của tích phân

Định nghĩa:

- Nếu hàm số $x=a, x=b$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi:
- đồ thị hàm số $y=f(x)$,
- trục hoành,
- hai đường thẳng $[\ a\ ;\ b\ ]$
- Vậy $S = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$.



Chú ý

- Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

- Tốc độ $v(t) \ge 0$ tại mọi thời điểm $t \in [a;b]$ thì quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b được tính theo công thức:
- $s = s(b) - s(a) = \int_a^b v(t)\mathrm{d}t$.

5. Tính chất tích phân

Tính chất:

- (1) Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó:
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- (2) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, k là số thực. Khi đó:
- $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
- (3) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, $c \in (a;b)$. Khi đó
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$

Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

Dạng ❶: Áp dụng định nghĩa – tính chất

Phương pháp

- Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.

1	$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0).
2	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ (Tích phân đảo cận $\to$ thêm dấu trừ).
3	$\int_a^b k.f(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ với $k \in \mathbb{R}$.

4	$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
5	Trong đoạn $[a;b]$, tồn tại $c \in [a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

- Ý nghĩa hình học của tích phân:
- Nếu hàm số $x=a, x=b$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích $y=f(x)$ của hình thang cong giới hạn bởi: đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $[a;b]$
- Vậy $S = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 5$ và $\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 2$. Tính:

(1) $\int_0^3 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

(2) $\int_0^3 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

(3) $\int_0^3 3f(x)\mathrm{d}x$.

(4) $\int_0^3 [2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x$

Lời giải

(1) $\int_0^3 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x$.

$$\int_0^3 [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 5+2 = 7.$$

(2) $\int_0^3 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

$$\int_0^3 [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 5-2 = 3.$$

(3) $\int_0^3 3f(x)\mathrm{d}x$.

$$\int_0^3 3f(x)\mathrm{d}x = 3\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = 3.5 = 15.$$

(4) $\int_0^3 [2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x$

$$\int_0^3 [2f(x)-3g(x)]\mathrm{d}x = 2\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x - 3\int_0^3 g(x)\mathrm{d}x = 2.5-3.2 = 4.$$

Câu 2: Cho $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int\limits_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = -4$. Tính $\int\limits_{2}^{4} f(y)\,\mathrm{d}y$

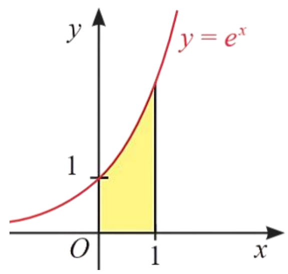
Lời giải

Ta có: $\int\limits_{-2}^{4} f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int\limits_{2}^{4} f(y)\,\mathrm{d}y = \int\limits_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int\limits_{2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = -4 - 1 = -5$. Vậy $\int\limits_{2}^{4} f(y)\,\mathrm{d}y = -5$.

Câu 3: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$.



Lời giải

$y = f(x) = e^x$ có một nguyên hàm $F(x) = e^x$.

Diện tích hình thang cong là $S = F(1) - F(0) = e^1 - e^0 = e - 1$ (đvdt).

Câu 4: Cho f, g là hai hàm liên tục trên đoạn $[1;3]$ thoả $\int\limits_{1}^{3}\left[f(x) + 3g(x)\right]\mathrm{d}x = 10$,

$\int\limits_{1}^{3}\left[2f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x = 6$. Tính $\int\limits_{1}^{3}\left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x$.

Lời giải

$\int\limits_{1}^{3}\left[f(x) + 3g(x)\right]\mathrm{d}x = 10 \Leftrightarrow \int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x + 3\int\limits_{1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x = 10 \ (1)$.

$\int\limits_{1}^{3}\left[2f(x) - g(x)\right]\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow 2\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x = 6 \ (2)$.

Đặt $X = \int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$, $Y = \int\limits_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x$.

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} X + 3Y = 10 \\ 2X - Y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 \\ Y = 2 \end{cases}$.

Do đó ta được: $\int\limits_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = 4$ và $\int\limits_{1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x = 2$. Vậy $\int\limits_{1}^{3}\left[f(x) + g(x)\right]\mathrm{d}x = 4 + 2 = 6$.

Câu 5: Cho số thực $a>1$, tính tích phân $\int\limits_0^a |x-1|\,\mathrm{d}x$ theo a.

Lời giải

Ta có hàm số $f(x)=x-1$ có một nguyên hàm $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-x$

Ta lại có $\int\limits_0^a |x-1|\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 |x-1|\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^a |x-1|\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 -(x-1)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^a (x-1)\,\mathrm{d}x$

$=F(0)-F(1)+F(a)-F(1)=\dfrac{a^2}{2}-a+1.$

⬩Dạng ❷: Tích phân hàm số chứa dấu trị tuyệt đối

Phương pháp

- **Cách 1:**
- Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in[a;b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1;x_2;\ldots x_n\in[a;b]$
- Khi đó $I=\int\limits_a^{x_1}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{x_1}^{x_2}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\int\limits_{x_2}^{x_3}|f(x)|\,\mathrm{d}x+\ldots+\int\limits_{x_n}^{b}|f(x)|\,\mathrm{d}x$

  $\Leftrightarrow I=\left|\int\limits_a^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_2}^{x_3} f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\ldots+\left|\int\limits_{x_n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$
-
- Tính mỗi tích phân thành phần
- **Cách 2:**
- Cho $f(x)=0$ tìm nghiệm $\in[a;b]$.
- Xét dấu $f(x)$ trên $[a;b]$.
- Áp dụng $|A|=\begin{cases} A & khi\ A>0\\ -A & khi\ A<0\end{cases}$ để phá trị tuyệt đối trong $\int\limits_a^b \ldots$.
- Tính mỗi tích phân thành phần

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính các tích phân sau:

(1) $A=\int\limits_{-2}^{2}|x^2-1|\,\mathrm{d}x$. (2) $B=\int\limits_{-2}^{1}|x^3+x^2-2x|\,\mathrm{d}x$.

(3) $C=\int\limits_{-1}^{2}|x^3-3x+2|\,\mathrm{d}x$. (4) $D=\int\limits_{-2}^{2}|x^4-3x^2-4|\,\mathrm{d}x$

Lời giải

(1) $A=\int\limits_{-2}^{2}|x^2-1|\,\mathrm{d}x$.

Xét $f(x)=x^2-1$ trên đoạn $[-2;2]$.

Cho $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\in\left[-2;2\right] \\ x=1\in\left[-2;2\right] \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-2		-1		1		2
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Do đó: $A=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^2-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{-1}\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{-2}^{-1}+\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Bigg|_{1}^{2}=\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\left[\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right]=4.$$

(2) $B=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x$.

Xét $f\left(x\right)=x^3+x^2-2x$ trên $\left[-2;1\right]$.

Cho $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\in\left[-2;1\right] \\ x=0\in\left[-2;1\right] \\ x=1\in\left[-2;1\right] \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-2		0		1
f(x)	0	$+$	0	$-$	0

Do đó: $B=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0}-\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right)\Bigg|_{0}^{1}=-\left(-\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{37}{12}.$$

(3) $C=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^3-3x+2\right|\mathrm{d}x$.

Xét $f\left(x\right)=x^3-3x-2$ trên $\left[-1;2\right]$.

Cho $f\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\in\left[-1;2\right] \\ x=-1\in\left[-1;2\right] \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x		-1		2	
x^3-3x-2			$-$		

Do đó: $C=-\int\limits_{-1}^{2}\left(x^3-3x-2\right)\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2-2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}=6-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{27}{4}$.

(4) $D=\int\limits_{-2}^{2}\left|x^4-3x^2-4\right|\mathrm{d}x$

Xét $f\left(x\right)=x^4-3x^2-4$ trên $\left[-2;2\right]$.

Cho $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\in\left[-2;2\right]\\x=-2\in\left[-2;2\right]\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	-2		2
x^4-3x^2-4		$-$	

Do đó: $D=-\int\limits_{-2}^{2}\left(x^4-3x^2-4\right)\mathrm{d}x=-\left(\frac{1}{5}x^5-x^3-4x\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{48}{5}-\left(-\frac{48}{5}\right)=\frac{96}{5}$.

Câu 2: Tính các tích phân sau:

(1) $A=\int\limits_{-3}^{5}\left(\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right)\mathrm{d}x$.

(2) $B=\int\limits_{-1}^{2}\left(x+\left|1-x\right|-\left|x+2\right|\right)\mathrm{d}x$.

(3) $C=\int\limits_{1}^{5}\frac{2\left|x-2\right|+1}{x}\mathrm{d}x$.

(4) $D=\int\limits_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x$

Lời giải

(1) $A=\int\limits_{-3}^{5}\left(\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right)\mathrm{d}x$.

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-3		-2		2		5
$\left\|x+2\right\|$		$-x-2$	0	$x+2$		$x+2$	
$\left\|x-2\right\|$		$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$	
$\left\|x+2\right\|-\left\|x-2\right\|$		-4		$2x$		4	

Khi đó: $A=\int\limits_{-3}^{5}\left(\left|x+2\right|-\left|x-2\right|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{-2}-4dx+\int\limits_{-2}^{2}2x\mathrm{d}x+\int\limits_{2}^{5}4\mathrm{d}x=-4x\Big|_{-3}^{-2}+x^2\Big|_{-2}^{2}+4x\Big|_{2}^{5}=8$.

(2) $B=\int\limits_{-1}^{2}\left(x+\left|1-x\right|-\left|x+2\right|\right)\mathrm{d}x$.

Ta có bảng xét dấu để phá trị tuyệt đối:

x	-1		1		2
$\left\|1-x\right\|$		$1-x$	0	$x-1$	
$\left\|x+2\right\|$		$x+2$		$x+2$	
$x+\left\|1-x\right\|-\left\|x+2\right\|$		$-x-1$		$x-3$	

Khi đó:

$$B=\int_{-1}^{2}\left(x+|1-x|-|x+2|\right)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}(-x-1)\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(x-3)\mathrm{d}x$$

$$=\left(-\frac{x^2}{2}-x\right)\Bigg|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Bigg|_{1}^{2}=\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left[-4-\left(-\frac{5}{2}\right)\right]=-\frac{7}{2}.$$

(3) $C=\int_{1}^{5}\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x$.

Ta có: $|x-2|=\begin{cases}x-2 & khi\ x\ge 2\\ -x+2 & khi\ x<2\end{cases}$.

Khi đó: $I=\int_{1}^{5}\frac{2|x-2|+1}{x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\frac{2(2-x)+1}{x}\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}\frac{2(x-2)+1}{x}\mathrm{d}x=\int_{1}^{2}\frac{5-2x}{x}\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}\frac{2x-3}{x}\mathrm{d}x$

$$=\int_{1}^{2}\left(\frac{5}{x}-x\right)\mathrm{d}x+\int_{2}^{5}\left(2-\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x=\left(5\ln|x|-x\right)\Big|_{1}^{2}+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_{2}^{5}=8\ln 2-3\ln 5+4.$$

(4) $D=\int_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x$

$$D=\int_{0}^{3}\sqrt{x^3-2x^2+x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{3}\sqrt{x\left(x^2-2x+1\right)}\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{3}|x-1|\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$$

Ta có: $|x-1|=\begin{cases}x-1 & khi\ x\ge 1\\ -x+1 & khi\ x<1\end{cases}$.

Khi đó: $D=\int_{0}^{3}(1-x)\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}(x-1)\sqrt{x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{3}\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{3}{2}}\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{3}\left(x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{2}{3}x\sqrt{x}-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}\right)\Bigg|_{0}^{1}+\left(\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right)\Bigg|_{1}^{3}=\frac{4}{15}+\left[\frac{8\sqrt{3}}{5}-\left(-\frac{4}{15}\right)\right]=\frac{24\sqrt{3}+8}{15}.$$

Dạng 3: Tích phân hàm số cho bởi nhiều công thức

Phương pháp

Bài toán 1:

- Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}g(x) & \text{khi } x\le b\\ h(x) & \text{khi } x>b\end{cases}$ liên tục trên D. Tính $J=\int_{a}^{c}f(x)\mathrm{d}x$
- *Xét* $b\in[a;c]$.
- **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?
- Tức là kiểm tra $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\lim\limits_{x\to b^+}f(x)=f(b)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to b^-}g(x)=\lim\limits_{x\to b^+}h(x)=f(b)$
- **Bước 2.** Tách cận: $J=\int_{a}^{c}f(x)\mathrm{d}x=\underbrace{\int_{a}^{b}g(x)\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int_{b}^{c}h(x)\mathrm{d}x}_{I_2}$.

- **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1; I_2$ bằng các phương pháp đã học.

Bài toán 2:

- Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} g(x;m) & \text{khi } x\le b \\ h(x;m) & \text{khi } x>b \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $J=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$
- *Xét* $b\in[a;c]$.
- **Bước 1.** Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x=b$?
- Tức là kiểm tra:
- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\lim\limits_{x\to b^+} f(x)=f(b)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to b^-} g(x;m)=\lim\limits_{x\to b^+} h(x;m)=f(b)$
- **Bước 2.** Tách cận: $J=\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x=\underbrace{\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}_{I_1}+\underbrace{\int\limits_b^c h(x)\,\mathrm{d}x}_{I_2}$.
- **Bước 3.** Tính các tích phân $I_1; I_2$ bằng các phương pháp đã học.

☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & \text{khi } x\ge 2 \\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2 \end{cases}$. Tính tích phân $I=\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$?

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-1)=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-2x+3)=3 \end{cases}$ và $f(2)=3$.

Do đó hàm số đã cho liên tục tại $x=2$.

Ta có: $I=\int\limits_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2(x^2-2x+3)\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^3(x^2-1)\,\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\right|_1^2+\left.\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\right|_2^3=\frac{23}{3}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 3x^2 & \text{khi } 0\le x\le 1 \\ 4-x & \text{khi } 1\le x\le 2 \end{cases}$. Tính tích phân $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$?

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(4-x)=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3x^2)=3 \end{cases}$, và $f(1)=3$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=1$.

Suy ra $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1)$.

Khi đó $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2(4-x)\,\mathrm{d}x=\left.x^3\right|_0^1+\left.\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_1^2=1+\left(8-2-4+\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$

Câu 3: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 0,5x & \text{khi } 0\le x<2 \\ 1 & \text{khi } 2\le x<15 \\ 4-0,2x & \text{khi } 15\le x\le 20 \end{cases}$. Tính $\int\limits_0^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(0,5x)=1=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$ và

Do $\lim\limits_{x\to 15^-} f(x)=1=\lim\limits_{x\to 15^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 15^+}(4-0,2x)=f(15)$ nên hàm số liên tục trên đoạn $[0;20]$

Do đó $\int\limits_0^{20} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^{2} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_2^{15} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{15}^{20} f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int\limits_0^2 0,5x\,\mathrm{d}x+\int\limits_2^{15}1\mathrm{d}x+\int\limits_{15}^{20}(4-0,2x)\mathrm{d}x=\left.\frac{x^2}{4}\right|_0^2+\left.x\right|_2^{15}+\left.\left(4x-\frac{x^2}{10}\right)\right|_{15}^{20}=1+13+\frac{5}{2}=\frac{33}{2}.$$

Câu 4: Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & \text{khi } x\le 0\\ a(x-x^2) & \text{khi } x>0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a\left(x-x^2\right)\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x)=0\end{cases}$, và $f(0)=0$.

Vì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ nên liên tục tại $x=0$.

Khi đó $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{0} f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{0}2x\mathrm{d}x+\int\limits_0^1 a\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x$

$$=\left.\left(x^2\right)\right|_{-1}^{0}+a\left.\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=-1+a\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{a}{6}-1$$

◆Dạng 4: Bài toán thực tế

- ***Phương pháp***
- **Bài toán chuyển động của một vật**
- Một vật chuyển động theo phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian $t=a$ đến $t=b$ $(a<b)$ sẽ di chuyển được quãng đường là: $s=\int\limits_a^b v(t)dt$.
- Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $\Delta t=t_2-t_1$ là: $v=\int\limits_{t_1}^{t_2} a(t)dx$.
- **Bài toán ứng dụng tích phân vào tìm các đại lượng vật lý như công, điện lượng,...**
- Theo định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x)=kx$, với k (N/m) là độ cứng của lò xo. Công cần để kéo dãn lò xo từ độ dài ℓ_1 đến độ dài ℓ_2 là: $A=\int\limits_{\ell_1}^{\ell_2} f(x)dx$.

- Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là: $Q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Một vật chuyển động với vận tốc $10m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

Hàm vận tốc $v(t)=\int a(t)\mathrm{d}t=\int(3t+t^2)\mathrm{d}t=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+C$.

Lấy mốc thời gian $(t=0)$ lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0)=10\Rightarrow C=10$.

Ta được: $v(t)=\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10$.

Sau 10 giây kể từ lúc tăng tốc, quãng đường vật đi được là:

$$s=\int_0^{10}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}+10\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{t^4}{12}+\frac{t^3}{2}+10t\right)\right|_0^{10}=\frac{4300}{3}m.$$

Câu 2: Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-3t+2$ (m/s). Trong khoảng thời gian $1\le t\le 3$

(1) Tìm độ dịch chuyển của vật.

(2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Lời giải

(1) Tìm độ dịch chuyển của vật.

Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 3$ là

$$\int_1^3 v(t)\mathrm{d}t=\int_1^3(t^2-3t+2)\mathrm{d}t=\left.\left(\frac{t^3}{3}-\frac{3t^2}{2}+2t\right)\right|_1^3=\left(\frac{3^3}{3}-\frac{3\cdot 3^2}{2}+2\cdot 3\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+2\right)=\frac{2}{3}.$$

(2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 3$ là

$$\int_1^3|v(t)|\mathrm{d}t=\int_1^3|t^2-3t+2|\mathrm{d}t=\int_1^2(-t^2+3t-2)\mathrm{d}t+\int_2^3(t^2-3t+2)\mathrm{d}t=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}=1.$$

Câu 3: Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (m/s). Trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$

(1) Tìm độ dịch chuyển của vật.

(2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Lời giải

(1) Tìm độ dịch chuyển của vật.

Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1 \le t \le 4$ là

$$\int_1^4 v(t)\mathrm{d}t = \int_1^4 (t^2 - t - 6)\mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 6t\right)\Bigg|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2} - 6\cdot 4\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 6\right) = -\frac{9}{2}.$$

(2) Tìm tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian này.

Tổng quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1 \le t \le 4$ là

$$\int_1^4 |v(t)|\mathrm{d}t = \int_1^4 |t^2 - t - 6|\mathrm{d}t = \int_1^3 (-t^2 + t + 6)\mathrm{d}t + \int_3^4 (t^2 - t - 6)\mathrm{d}t = \frac{22}{3} + \frac{17}{6} = \frac{61}{6}.$$

Câu 4: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0002x + 7,5$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

(1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 60 đơn vị sản phẩm.

(2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 150 đơn vị sản phẩm

Lời giải

(1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 60 đơn vị sản phẩm.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 60 đơn vị sản phẩm là

$$P(60) - P(50) = \int_{50}^{60} P'(x)\mathrm{d}x = \int_{50}^{60} (-0,0002x + 7,5)\mathrm{d}x = -\int_{50}^{60} 0,0002x\mathrm{d}x + \int_{50}^{60} 7,5\mathrm{d}x$$

$$= -0,0001x^2\Big|_{50}^{60} + 7,5x\Big|_{50}^{60} = -0,0001(60^2 - 50^2) + 7,5(60 - 50) = 74,89 \text{ (triệu đồng).}$$

(2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 150 đơn vị sản phẩm.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 150 đơn vị sản phẩm là

$$P(150) - P(100) = \int_{100}^{150} P'(x)\mathrm{d}x = \int_{100}^{150} (-0,0002x + 7,5)\mathrm{d}x = -\int_{100}^{150} 0,0002x\mathrm{d}x + \int_{100}^{150} 7,5\mathrm{d}x$$

$$= -0,0001x^2\Big|_{100}^{150} + 7,5x\Big|_{100}^{150} = -0,0001(150^2 - 100^2) + 7,5(150 - 100) = 373,75 \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 5: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0005x + 12,2$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

(1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

(2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Lời giải

(1) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị sản phẩm là

$$P(101) - P(100) = \int_{100}^{101} P'(x)\mathrm{d}x = \int_{100}^{101} (-0,0005x + 12,2)\mathrm{d}x = -\int_{100}^{101} 0,0005x\mathrm{d}x + \int_{100}^{101} 12,2\mathrm{d}x$$

$= -0,00025x^2\Big|_{100}^{101} + 12,2x\Big|_{100}^{101} = -0,00025\left(101^2 - 100^2\right) + 12,2\left(101-100\right) \approx 12,15$ (triệu đồng).

(2) Tìm sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị sản phẩm là

$$P(110) - P(100) = \int_{100}^{110} P'(x)\mathrm{d}x = \int_{100}^{110} \left(-0,0005x + 12,2\right)\mathrm{d}x = -\int_{100}^{110} 0,0005x\mathrm{d}x + \int_{100}^{110} 12,2\mathrm{d}x$$

$= -0,00025x^2\Big|_{100}^{110} + 12,2x\Big|_{100}^{110} = -0,00025\left(110^2 - 100^2\right) + 12,2\left(110-100\right) \approx 121,48$ (triệu đồng).

Câu 6: Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính R không đổi, có thể được mô hình hóa bởi công thức bên dưới. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0 \le r \le R$. So sánh vận tốc trung bình với vận tốc lớn nhất.

(1) $v = \frac{k}{2}\left(\frac{4}{3}R^2 - r^2\right)$, trong đó k là một hằng số.

(2) $v = k\left(R^2 - r^2\right)$, trong đó k là một hằng số.

Lời giải

(1) $v = \frac{k}{2}\left(\frac{4}{3}R^2 - r^2\right)$, trong đó k là một hằng số.

Vận tốc trung bình của động mạch là:

$$v_{tb} = \frac{1}{R-0}\int_0^R v(r)\mathrm{d}r = \frac{1}{R}\int_0^R \frac{k}{2}\left(\frac{4}{3}R^2 - r^2\right)\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{6R}\int_0^R \left(4kR^2 - 3kr^2\right)\mathrm{d}r = \frac{1}{6R}\left(4kR^2r - kr^3\right)\Big|_0^R = \frac{1}{6R}\left(4kR^3 - kR^3\right) = \frac{kR^2}{2}.$$

Vì $0 \le r \le R$ nên vận tốc của động mạch đạt giá trị lớn nhất là $v_{\max} = \frac{2}{3}kR^2$ khi $r = 0$.

Do đó $v_{\max} = \frac{4}{3}v_{tb}$.

(2) $v = k\left(R^2 - r^2\right)$, trong đó k là một hằng số.

Vận tốc trung bình của động mạch là:

$$v_{tb} = \frac{1}{R-0}\int_0^R v(r)dr = \frac{1}{R}\int_0^R k\left(R^2 - r^2\right)dr$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^R \left(kR^2 - kr^2\right)dr = \frac{1}{R}\left(kR^2r - \frac{1}{3}kr^3\right)\Big|_0^R = \frac{1}{R}\left(kR^3 - \frac{1}{3}kR^3\right) = \frac{2kR^2}{3}.$$

Vì $0 \le r \le R$ nên vận tốc của động mạch đạt giá trị lớn nhất là $v_{\max} = kR^2$ khi $r = 0$.

Do đó $v_{\max} = \frac{3}{2} v_{tb}$.

©. Dạng toán rèn luyện

⬩Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

B. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(a) - F(b)$.

C. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) + F(a)$.

D. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F^2(b) - F^2(a)$.

Lời giải

Chọn A

Do định nghĩa tích phân.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề **sai**.

A. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

B. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 1$.

C. $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$.

D. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$ nên $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 1$ sai.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

B. $F(b) - F(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

C. $f(b) - f(a) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$.

D. $f'(b) - f'(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x$.

Câu 4: Tính tích phân $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt$.

A. 2. **B.** 0. **C.** -2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = -(\sin t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -2$.

Câu 5: Tính tích phân $\int_e^a \frac{1}{t} dt$ với $a > e$.

A. $\ln a + 1$. **B.** $1 - \ln a$. **C.** $\ln a - 1$. **D.** $\ln a$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int_e^a \frac{1}{t} dt = \ln t\Big|_e^a = \ln a - \ln e = \ln a - 1$.

Câu 6: Nếu $\int_1^3 f(x) dx = 2$ thì $\int_1^3 \left[f(x) + 2x\right] dx$ bằng

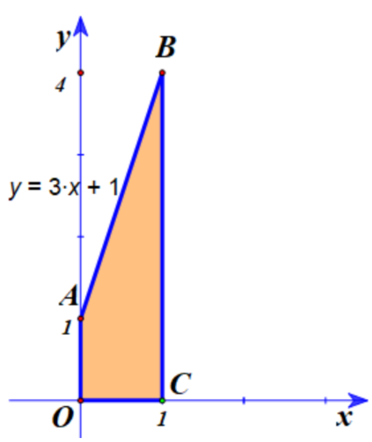
A. 20. **B.** 18. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\int_1^3 \left[f(x) + 2x\right] dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_1^3 2x dx = 2 + x^2\Big|_1^3 = 2 + (9 - 1) = 10$.

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hình thang $OABC$ giới hạn bởi $y = 3x + 1$, trục Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 1$ (như hình vẽ).



Khi đó $\int_0^1 (3x + 1) dx$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2}{5}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_0^1 (3x+1)\,dx$ bằng diện tích hình thang $OABC$ giới hạn bởi $y=3x+1$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=1$ (như hình vẽ).

$\int_0^1 (3x+1)\,dx = S_{OABC} = \dfrac{1}{2}.1.(1+4) = \dfrac{5}{2}$.

Câu 8: Cho $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = -1$ và $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = 3$. Mệnh đề nào say đây là **đúng**?

A. $\int_{-2}^{2} [f(x)+g(x)]\,dx = 8$. **B.** $\int_{-2}^{2} [f(x)-g(x)]\,dx = 4$.

C. $\int_{-2}^{2} 5f(x)\,dx = 5$. **D.** $\int_{-2}^{2} [3f(x)-4g(x)]\,dx = -15$.

Lời giải

Chọn D

➢ Xét phương án A. Ta có: $\int_{-2}^{2} [f(x)+g(x)]\,dx = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx + \int_{-2}^{2} g(x)\,dx = (-1)+3 = 2$.

Suy ra phương án A sai.

➢ Xét phương án B. Ta có: $\int_{-2}^{2} [f(x)-g(x)]\,dx = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx - \int_{-2}^{2} g(x)\,dx = (-1)-3 = -4$.

Suy ra phương án B sai.

➢ Xét phương án C. Ta có: $\int_{-2}^{2} 5f(x)\,dx = 5\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 5.(-1) = -5$.

Suy ra phương án C sai.

➢ Xét phương án D. Ta có: $\int_{-2}^{2} [3f(x)-4g(x)]\,dx = 3\int_{-2}^{2} f(x)\,dx - 4\int_{-2}^{2} g(x)\,dx$

$= 3.(-1) - 4.3 = -15$. Suy ra phương án D đúng.

Câu 9: Tính $I = \int_{-1}^{0} (2x+3)^2\,dx$.

A. $I = \dfrac{13}{3}$. **B.** $I = \dfrac{14}{3}$. **C.** $I = -\dfrac{13}{3}$. **D.** $I = \dfrac{26}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$I=\int_{-1}^{0}(2x+3)^2\,dx=\left[\frac{1}{2}\frac{(2x+3)^3}{3}\right]\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{1}{6}\left[(0+3)^3-(-2+3)^3\right]=\frac{13}{3}.$$

Câu 10: Tích phân $\int_{0}^{1}\left(e^{3x}+5x^4\right)dx$ bằng

A. $e^3+\frac{3}{2}$. **B.** e. **C.** $\frac{e^3+2}{3}$. **D.** e^3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int_{0}^{1}\left(e^{3x}+5x^4\right)dx=\left(\frac{1}{3}e^{3x}+x^5\right)\Bigg|_{0}^{1}=\left(\frac{1}{3}e^3+1\right)-\frac{1}{3}=\frac{e^3+2}{3}$.

Câu 11: Biết $F(x)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int_{1}^{2}\left[2+f(x)\right]dx$ bằng

A. 3. **B.** 5. **C.** $\frac{13}{3}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\int_{1}^{2}\left[2+f(x)\right]dx=\left(2x+x^2\right)\Big|_{1}^{2}=8-3=5$

Câu 12: Cho $\int_{0}^{1}f(x)dx=-1$; $\int_{0}^{3}f(x)dx=5$. Tính $\int_{1}^{3}f(x)dx$

A. 3. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_{0}^{3}f(x)dx=\int_{0}^{1}f(x)dx+\int_{1}^{3}f(x)dx$

$\Rightarrow\int_{1}^{3}f(x)dx=\int_{0}^{3}f(x)dx-\int_{0}^{1}f(x)dx=5-(-1)=6$

Vậy $\int_{1}^{3}f(x)dx=6$

Câu 13: Cho $\int_{0}^{m}\left(3x^2-2x+1\right)dx=6$. Giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int\limits_0^m \left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x = \left.\left(x^3-x^2+x\right)\right|_0^m = m^3-m^2+m$

$\int\limits_0^m \left(3x^2-2x+1\right)\mathrm{d}x = 6 \Leftrightarrow m^3-m^2+m-6=0 \Leftrightarrow m=2\in(0;4)$

Vậy $m=2\in(0;4)$.

Câu 14: Cho $I=\int\limits_0^1 \left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $I+6>0$?

A. 1. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Do $I=\int\limits_0^1 \left(4x-2m^2\right)\mathrm{d}x = \left.\left(2x^2-2m^2x\right)\right|_0^1 = -2m^2+2$

Khi đó $I+6>0 \Leftrightarrow -2m^2+2+6>0 \Leftrightarrow -m^2+4>0 \Leftrightarrow -2<m<2$

Mà m là số nguyên nên $m\in\{-1;0;1\}$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 15: Cho a là số thực dương, tính tích phân $I=\int\limits_{-1}^{a} |x|\mathrm{d}x$ theo a.

A. $I=\dfrac{a^2+1}{2}$. **B.** $I=\dfrac{a^2+2}{2}$. **C.** $I=\dfrac{-2a^2+1}{2}$. **D.** $I=\dfrac{\left|3a^2-1\right|}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $a>0$ nên $I=-\int\limits_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^a x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{1+a^2}{2}$.

Câu 16: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$; $\int\limits_0^3 f(x)\mathrm{d}x=6$. Tính $I=\int\limits_{-1}^{3} f(|u|)\mathrm{d}u$

A. 2. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

$I=\int\limits_{-1}^{3} f(|u|)\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^{0} f(|u|)\mathrm{d}u+\int\limits_0^3 f(|u|)\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^{0} f(-u)\mathrm{d}u+\int\limits_0^3 f(u)\mathrm{d}u$.

Tính $I_1=\int\limits_{-1}^{0} f(-u)\mathrm{d}u$

Xét $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=4$. Đặt $x=-u\Rightarrow \mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$.

Khi $x=0$ thì $u=0$. Khi $x=1$ thì $u=-1$.

Nên $4=\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^{-1} f(-u)\,\mathrm{d}u=\int\limits_{-1}^0 f(-u)\,\mathrm{d}u$.

Tính $I_2=\int\limits_0^3 f(u)\,\mathrm{d}u$

Ta có $\int\limits_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=6\Rightarrow\int\limits_0^3 f(u)\,\mathrm{d}u=6$.

Nên $I=\int\limits_{-1}^0 f(-u)\,\mathrm{d}u+\int\limits_0^3 f(u)\,\mathrm{d}u=4+6=10$.

Câu 17: Cho $f(x)=\begin{cases}1 & khi\ x\ge 1\\ 2x-1 & khi\ x<1\end{cases}$. Tính $J=\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

A. -1 **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** 4 **D.** 5

Lời giải

Chọn A

$J=\int\limits_{-1}^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$

Tính $J_1=\int\limits_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^1(2x-1)\,\mathrm{d}x=\left(x^2-x\right)\Big|_{-1}^1=0-2=-2$

Tính $J_2=\int\limits_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 1\,\mathrm{d}x=2-1=1$

Vậy $J=1-2=-1$.

Câu 18: Vận tốc của một vật chuyển động là $v(t)=3t^2+5\ (\mathrm{m/s})$. Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là

A. 669 m. **B.** 696 m. **C.** 699 m. **D.** 966 m.

Lời giải

Chọn D

Quãng đường vật đó đi được từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là $S=\int\limits_4^{10}\left(3t^2+5\right)\mathrm{dt}=966$ m.

Câu 19: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x)=-0{,}0004x+9{,}3$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm. Khi đó sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

A. $232{,}325$ triệu đồng. **B.** $230{,}315$ triệu đồng.
C. $321{,}385$ triệu đồng **D.** $231{,}375$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn D

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 125 đơn vị sản phẩm là

$$P(125)-P(100)=\int_{100}^{125}P'(x)\mathrm{d}x=\int_{100}^{125}(-0,0004x+9,3)\mathrm{d}x=-\int_{100}^{125}0,0004x\mathrm{d}x+\int_{100}^{125}9,3\mathrm{d}x$$

$$=-0,0002x^2\Big|_{100}^{125}+9,3x\Big|_{100}^{125}=-0,0002\left(125^2-100^2\right)+9,3(125-100)=231,375 \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 20: Giả sử vận tốc v của dòng máu ở khoảng cách r từ tâm của động mạch bán kính $R=9$, có thể được mô hình hóa bởi công thức $v=k\left(R^2-r^2\right)$, trong đó k là một hằng số. Tìm vận tốc trung bình (đối với r) của động mạch trong khoảng $0\le r\le R$.

A. $54k$.   **B.** $45k$.   **C.** $9k$.   **D.** $27k$.

Lời giải

Chọn A

Vận tốc trung bình của động mạch là:

$$v_{tb}=\frac{1}{R-0}\int_0^R v(r)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\int_0^R k\left(R^2-r^2\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\int_0^R\left(kR^2-kr^2\right)\mathrm{d}r=\frac{1}{R}\left(kR^2r-\frac{1}{3}kr^3\right)\Bigg|_0^R$$

$$=\frac{1}{R}\left(kR^3-\frac{1}{3}kR^3\right)=\frac{2kR^2}{3}=\frac{2k.9^2}{3}=54k.$$

Câu 21: Cho số thực a và hàm số $f(x)=\begin{cases}2x & khi\ x\le 0\\ a\left(x-x^2\right) & khi\ \ x>0\end{cases}$. Tính tích phân $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.

A. $\frac{a}{6}-1$.   **B.** $\frac{2a}{3}+1$.   **C.** $\frac{a}{6}+1$.   **D.** $\frac{2a}{3}-1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(a\left(x-x^2\right)\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(2x)=0\end{cases}$, và $f(0)=0$. Nên hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^{0}2x\mathrm{d}x+\int_0^1 a\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(x^2\right)\Big|_{-1}^{0}+a\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=-1+a\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{a}{6}-1.$$

Câu 22: Một chiếc xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với vận tốc $72km/h$ thì tài xế bất ngờ đạp phanh làm cho chiếc ô tô chuyển động chậm với gia tốc $a(t)=-\frac{8}{5}t\ \left(m/s^2\right)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Hỏi kể từ khi đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn thì ô tô di chuyển bao nhiêu mét (m)? (Giả sử trên đường ô tô di chuyển không có gì bất thường).

A. $50\ (m)$. **B.** $\dfrac{250}{3}\ (m)$. **C.** $\dfrac{200}{3}\ (m)$. **D.** $\dfrac{100}{3}\ (m)$.

Lời giải

Chọn C

Vận tốc của ô tô là $v(t)=\int a(t)\mathrm{dt}=\int\left(-\dfrac{8}{5}t\right)\mathrm{dt}=-\dfrac{4}{5}t^2+C$.

Ta có $72km/h=20m/s$.

Vì $v(0)=20$ nên $C=20\Rightarrow v(t)=-\dfrac{4}{5}t^2+20$.

Khi xe dừng hẳn thì vận tốc bằng 0 nên $-\dfrac{4}{5}t^2+20=0\Rightarrow t=5$.

Quãng đường cần tìm là $s=\int\limits_0^5\left(-\dfrac{4}{5}t^2+20\right)\mathrm{dt}=\left.\left(-\dfrac{4}{15}t^3+20t\right)\right|_0^5=\dfrac{200}{3}\ (m)$.

⬩Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Cho $\int\limits_{-3}^{0}f(x)\mathrm{d}x=-4$ và $\int\limits_{-3}^{0}g(x)\mathrm{d}x=-3$.

(a) $\int\limits_{-3}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=-7$

(b) $\int\limits_{-3}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=1$

(c) $\int\limits_{-3}^{0}-3f(x)\mathrm{d}x=12$

(d) $\int\limits_{-3}^{0}\left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x=-51$

Lời giải

(a) $\int\limits_{-3}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=-7$.

Ta có: $\int\limits_{-3}^{0}\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{-3}^{0}g(x)\mathrm{d}x=(-4)+(-3)=-7$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\int\limits_{-3}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=1$.

Ta có: $\int\limits_{-3}^{0}\left[f(x)-g(x)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{0}f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_{-3}^{0}g(x)\mathrm{d}x=(-4)-(-3)=-1$.

» Chọn SAI.

(c) $\int_{-3}^{0} -3f(x)\mathrm{d}x = 12$.

Ta có: $\int_{-3}^{0} (-3)f(x)\mathrm{d}x = (-3).\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x = (-3).(-4) = 12$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) $\int_{-3}^{0} \left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x = -51$.

Sai.

Ta có: $\int_{-3}^{0} \left[2f(x)+3g(x)\right]\mathrm{d}x = 2\int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x + 3\int_{-3}^{0} g(x)\mathrm{d}x = 2.(-4)+3.(-3) = -17$.

» Chọn SAI.

Câu 2: Tính $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (3-\sin x)\mathrm{d}x = a\pi - \frac{b}{c}$ (trong đó $a,b,c \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản). Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(a) $a^3+b^3-c=0$

(b) $a^2+b^2>c^2$

(c) $3a=2b+c$

(d) $c=a+b$

Lời giải

(a) $a^3+b^3-c=0$.

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (3-\sin x)\mathrm{d}x = (3x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \left[\left(\pi+\cos\frac{\pi}{3}\right)-(0+\cos 0)\right] = \pi - \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$. Vậy $a^3+b^3-c=1+1-2=0$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $a^2+b^2>c^2$.

Với $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$, xét $a^2+b^2>c^2$ ta có $1+1>4$ là mệnh đề sai.

» Chọn SAI.

(c) $3a=2b+c$.

Với $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$, xét $3a=2b+c$ ta có $3=2+2$ là mệnh đề sai.

» Chọn SAI.

(d) $c=a+b$.

Với $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$, xét $c=a+b$ ta có $2=1+1$ là mệnh đề đúng.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[0;3]$. $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[0;3]$ thỏa $F(3)=2$ và $F(0)=1$.

(a) Hiệu số $F(3)-F(0)$ gọi là tích phân từ 3 đến 0 của hàm số $f(x)$.

(b) $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=-\int_3^0 f(x)\mathrm{d}x=F(3)-F(0)$

(c) $\int_0^3 f(t)\mathrm{dt}=1$

(d) Hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0, x=3$ có diện tích bằng 1.

Lời giải

(a) Hiệu số $F(3)-F(0)$ gọi là tích phân từ 3 đến 0 của hàm số $f(x)$.

Hiệu số $F(3)-F(0)$ gọi là tích phân từ 0 đến 3 của hàm số $f(x)$.

$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=F(3)-F(0)$

» Chọn SAI.

(b) $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=-\int_3^0 f(x)\mathrm{d}x=F(3)-F(0)$.

$\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=-\int_3^0 f(x)\mathrm{d}x=F(3)-F(0)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $\int_0^3 f(t)\mathrm{dt}=1$.

Ta có $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 f(t)\mathrm{dt}$. Mà $\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_0^3=F(3)-F(0)=2-1=1$.

Suy ra $\int_0^3 f(t)\mathrm{dt} = 1$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$ có diện tích bằng 1.

Ta có hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0, x = 3$ có diện tích $S = \int_0^3 f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_0^3 = F(3) - F(0) = 2 - 1 = 1$.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = 6x^5$. Gọi $I = \int_a^b 6x^5\mathrm{d}x$.

(a) Gọi $J = \int_a^b x^5\mathrm{d}x$ thì ta có $J = 6I$.

(b) Biết $\int_a^b \left(6x^5 + x\right)\mathrm{d}x = 8$ và $\int_a^b x\mathrm{d}x = 3$ thì $I = \int_a^b 6x^5\mathrm{d}x = 5$.

(c) Với $c \in [a;b]$, thì $\int_a^b 6x^5\mathrm{d}x = \int_a^c 6x^5\mathrm{d}x + \int_c^b 6x^5\mathrm{d}x$

(d) $\int_{-1}^1 \left|6x^5\right|\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 6x^5\mathrm{d}x + \int_0^1 6x^5\mathrm{d}x$

Lời giải

(a) Gọi $J = \int_a^b x^5\mathrm{d}x$ thì ta có $J = 6I$.

Ta có $I = \int_a^b 6x^5\mathrm{d}x = 6\int_a^b x^5\mathrm{d}x = 6J$.

» Chọn SAI.

(b) Biết $\int_a^b \left(6x^5 + x\right)\mathrm{d}x = 8$ và $\int_a^b x\mathrm{d}x = 3$ thì $I = \int_a^b 6x^5\mathrm{d}x = 5$.

Ta có $\int_a^b \left(6x^5 + x\right)\mathrm{d}x = \int_a^b 6x^5\mathrm{d}x + \int_a^b x\mathrm{d}x = 8$.

Suy ra $\int_a^b 6x^5\mathrm{d}x = 8 - \int_a^b x\mathrm{d}x = 8 - 3 = 5$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Với $c \in [a;b]$, thì $\int_a^b 6x^5 \mathrm{d}x = \int_a^c 6x^5 \mathrm{d}x + \int_c^b 6x^5 \mathrm{d}x$.

Với $c \in [a;b]$, thì $\int_a^b 6x^5 \mathrm{d}x = \int_a^c 6x^5 \mathrm{d}x + \int_c^b 6x^5 \mathrm{d}x$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) $\int_{-1}^{1} |6x^5| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} 6x^5 \mathrm{d}x + \int_0^1 6x^5 \mathrm{d}x$.

Ta có $\int_{-1}^{1} |6x^5| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} |6x^5| \mathrm{d}x + \int_0^1 |6x^5| \mathrm{d}x = -\int_{-1}^{0} 6x^5 \mathrm{d}x + \int_0^1 6x^5 \mathrm{d}x$.

» Chọn SAI.

Câu 5: Cho $I = \int_0^3 |x^2 - 2x| \mathrm{d}x$.

(a) Ta có $|x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 2x, & 2 < x \le 3 \end{cases}$

(b) $I = \int_0^3 |x^2 - 2x| \mathrm{d}x = \int_0^2 |x^2 - 2x| \mathrm{d}x + \int_2^3 |x^2 - 2x| \mathrm{d}x$

(c) $I = \int_0^3 |x^2 - 2x| \mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2 - 2x) \mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2 - 2x) \mathrm{d}x$

(d) $I = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x^2\right)\Big|_2^3$

Lời giải

(a) Ta có $|x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x, & 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 2x, & 2 < x \le 3 \end{cases}$.

Ta có $|x^2 - 2x| = \begin{cases} -(x^2 - 2x), & 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 2x, & 2 < x \le 3 \end{cases}$.

» Chọn SAI.

(b) $I = \int_0^3 |x^2 - 2x| \mathrm{d}x = \int_0^2 |x^2 - 2x| \mathrm{d}x + \int_2^3 |x^2 - 2x| \mathrm{d}x$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $I = \int_0^3 |x^2 - 2x| \mathrm{d}x = \int_0^2 (x^2 - 2x) \mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2 - 2x) \mathrm{d}x$.

$I = \int_0^3 |x^2 - 2x| \mathrm{d}x = \int_0^2 |x^2 - 2x| \mathrm{d}x + \int_2^3 |x^2 - 2x| \mathrm{d}x = -\int_0^2 (x^2 - 2x) \mathrm{d}x + \int_2^3 (x^2 - 2x) \mathrm{d}x$.

» Chọn SAI.

(d) $I=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_2^3$.

$I=\int\limits_0^3\left|x^2-2x\right|dx=\int\limits_0^2\left|x^2-2x\right|dx+\int\limits_2^3\left|x^2-2x\right|dx=-\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)dx+\int\limits_2^3\left(x^2-2x\right)dx$.

$\Rightarrow I=-\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_0^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_2^3=\left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big|_0^2+\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_2^3$.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 6: Cho tích phân $I=\int\limits_{-2}^{1}\left|4x-1\right|dx$. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

(a) Tích phân $I=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}\left(4x-1\right)dx+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left(4x-1\right)dx$.

(b) Giá trị của tích phân $I=\frac{45}{4}$

(c) Tích phân $I=\left|\int\limits_{-2}^{1}\left(4x-1\right)dx\right|$

(d) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị: $y=4x-1; y=0; x=-2; x=1$. Khi đó $S=\left|I\right|$

Lời giải

(a) Tích phân $I=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}\left(4x-1\right)dx+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left(4x-1\right)dx$.

Ta có: $I=\int\limits_{-2}^{1}\left|4x-1\right|dx=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}\left|4x-1\right|dx+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left|4x-1\right|dx=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}\left(1-4x\right)dx+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left(4x-1\right)dx$.

» Chọn SAI.

(b) Giá trị của tích phân $I=\frac{45}{4}$.

Ta có: $I=\int\limits_{-2}^{1}\left|4x-1\right|dx=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}\left(1-4x\right)dx+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\left(4x-1\right)dx=\left(x-2x^2\right)\Big|_{-2}^{\frac{1}{4}}+\left(2x^2-x\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{45}{4}$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Tích phân $I=\left|\int\limits_{-2}^{1}(4x-1)\,\mathrm{d}x\right|$.

Ta có: $I=\int\limits_{-2}^{1}|4x-1|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}(1-4x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}(4x-1)\,\mathrm{d}x=\left(x-2x^2\right)\Big|_{-2}^{\frac{1}{4}}+\left(2x^2-x\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{45}{4}$.

Mà $\left|\int\limits_{-2}^{1}(4x-1)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\left(2x^2-x\right)\Big|_{-2}^{1}\right|=|-9|=9\neq I$

» Chọn SAI.

(d) Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị: $y=4x-1; y=0; x=-2; x=1$. Khi đó $S=|I|$.

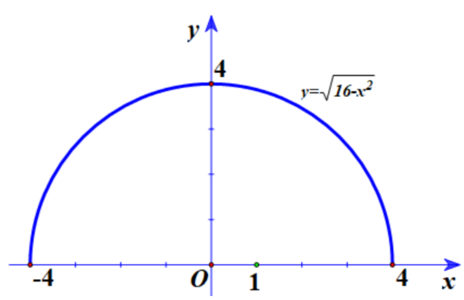
Ta có S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị: $y=4x-1; y=0; x=-2; x=1$ là $S=\int\limits_{-2}^{1}|4x-1|\,\mathrm{d}x=I$.

Mà $I=\int\limits_{-2}^{1}|4x-1|\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{\frac{1}{4}}(1-4x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}(4x-1)\,\mathrm{d}x=\left(x-2x^2\right)\Big|_{-2}^{\frac{1}{4}}+\left(2x^2-x\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{45}{4}\Rightarrow |I|=I$.

Do đó $S=I=|I|$.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



(a) $4\int\limits_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$ bằng diện tích hình tròn có bán kính bằng 4.

(b) $\int\limits_{-4}^{0}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=-\int\limits_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$

(c) $\int\limits_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=4\int\limits_{0}^{4}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\int\limits_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=8\pi$

Lời giải

(a) $4\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$ bằng diện tích hình tròn có bán kính bằng 4.

$\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$ bằng diện tích hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=4$.

Gọi S là diện tích hình tròn có bán kính bằng 4, khi đó ta có:

$\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{S}{4} \Leftrightarrow 4\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=S$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\int\limits_{-4}^0 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=-\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$

Ta có: diện tích hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=-4, x=0$ bằng với diện tích hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=4$. Do đó $\int\limits_{-4}^0 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.

» Chọn SAI.

(c) $\int\limits_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=4\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$

Ta có: diện tích hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=-4, x=0$ bằng với diện tích hình giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0, x=4$. Do đó $\int\limits_{-4}^0 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$

Vậy $\int\limits_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-4}^0 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x+\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int\limits_0^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$.

» Chọn SAI.

(d) $\int\limits_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=8\pi$.

$\int\limits_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$ bằng nữa diện tích hình tròn có bán kính $R=4$ giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{16-x^2}$ và trục Ox.

Vậy $\int\limits_{-4}^4 \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi.4^2=8\pi$.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 8: Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng nằm ngang (chiều dương hướng sang phải) với gia tốc phụ thuộc vào thời gian $t\left(\text{s}\right)$ là $a\left(t\right)=2t-7$ $\left(\text{m/s}^2\right)$. Biết vận tốc đầu bằng 6 $\left(\text{m/s}\right)$, xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

(a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t\left(\text{s}\right)$ xác định bởi $v\left(t\right)=t^2-7t+10$.

(b) Tại thời điểm $t=7$ (s), vận tốc của chất điểm là 6 (m/s).

(c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là 18 m.

(d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t=7$ (s).

Lời giải

(a) Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t\left(\text{s}\right)$ xác định bởi $v\left(t\right)=t^2-7t+10$.

Ta có $v\left(t\right)=\int a\left(t\right)\text{d}t=\int\left(2t-7\right)\text{d}t=t^2-7t+C$.

$v\left(0\right)=6\Rightarrow C=6$.

Vậy $v\left(t\right)=t^2-7t+6$ (m/s).

» Chọn SAI.

(b) Tại thời điểm $t=7$ (s), vận tốc của chất điểm là 6 (m/s).

$v\left(7\right)=7^2-7\cdot 7+6=6$ (m/s).

» Chọn ĐÚNG.

(c) Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là 18 m.

Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian $1\le t\le 7$ là

$$S=\int_1^7 v\left(t\right)\text{d}t=\int_1^7\left(t^2-7t+6\right)\text{d}t=\left.\left(\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+6t\right)\right|_1^7=-18.$$

» Chọn SAI.

(d) Trong 8 giây đầu tiên, thời điểm chất điểm xa nhất về phía bên phải là $t=7$ (s).

Tọa độ của chất điểm tại thời điểm t là

$$x\left(t\right)=\int v\left(t\right)\text{d}t=\int\left(t^2-7t+6\right)\text{d}t=\frac{t^3}{3}-\frac{7t^2}{2}+6t+C$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $x\left(t\right)$ với $t\in\left[0;8\right]$.

Ta có $x'\left(t\right)=v\left(t\right)=0$ khi $t=1$ hoặc $t=6$.

Lại có $x\left(0\right)=C$, $x\left(1\right)=\frac{17}{6}+C$, $x\left(6\right)=-18+C$, $x\left(8\right)=-\frac{16}{3}+C$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x\left(t\right)$ với $t\in\left[0;8\right]$ đạt được khi $t=1$.

» Chọn SAI.

Câu 9: Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0008x + 10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

(a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức $P(x) = -0,0008x^2 + 10,4x$.

(b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

(c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là $49,79$ triệu đồng.

(d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.

Lời giải

(a) Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức $P(x) = -0,0008x^2 + 10,4x$.

Ta có: $P(x) = \int P'(x)\mathrm{d}x = \int(-0,0008x + 10,4)\mathrm{d}x = -0,0004x^2 + 10,4x$.

» Chọn SAI.

(b) Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.

Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là: $P(50) = -0,0004.50^2 + 10,4.50 = 519$ (triệu đồng).

» Chọn ĐÚNG.

(c) Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là $49,79$ triệu đồng.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là

$$P(55) - P(50) = \int_{50}^{55} P'(x)\mathrm{d}x = \int_{50}^{55}(-0,0008x + 10,4)\mathrm{d}x = -\int_{50}^{55} 0,0008x\mathrm{d}x + \int_{50}^{55} 10,4\mathrm{d}x$$

$$= -0,0004x^2\Big|_{50}^{55} + 10,4x\Big|_{50}^{55} = -0,0004(55^2 - 50^2) + 10,4(55 - 50) = 51,79 \text{ (triệu đồng).}$$

» Chọn SAI.

(d) Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 100.

Ta có sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm là

$$P(a) - P(50) = \int_{50}^{a} P'(x)\mathrm{d}x = \int_{50}^{a}(-0,0008x + 10,4)\mathrm{d}x = -\int_{50}^{a} 0,0008x\mathrm{d}x + \int_{50}^{a} 10,4\mathrm{d}x$$

$$= -0,0004x^2\Big|_{50}^{a} + 10,4x\Big|_{50}^{a} = -0,0004(a^2 - 50^2) + 10,4(a - 50) = -0,0004a^2 + 10,4a - 519.$$

Theo bài ra ta có:
$-0,0004a^2 + 10,4a - 519 > 517 \Leftrightarrow 0,0004a^2 - 10,4a + 1036 < 0 \Leftrightarrow 100 < a < 25900$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của a là 101.

» Chọn SAI.

Câu 10: Ở nhiệt độ $37°C$, một phản ứng hóa học từ chất đầu A, chuyển hóa thành chất sản phẩm B theo phương trình: $A \to B$. Giả sử $y(x)$ là nồng độ chất A (đơn vị mol L^{-1}) tại thời điểm x (giây), $y(x) > 0$ với $x \ge 0$, thỏa mãn hệ thức: $y'(x) = -7.10^{-4} y(x)$ với $x \ge 0$. Biết rằng tại $x = 0$, nồng độ (đầu) của A là $0,05$ mol L^{-1}. Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \ge 0$. Khi đó, ta có

(a) $f'(x) = -7.10^{-4}$

(b) $f(x) = -7.10^{-4}x + \ln(0,05)$

(c) $y(30) - y(15) = -6.10^{-4}$

(d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0,05$.

Lời giải

(a) $f'(x) = -7.10^{-4}$.

Ta có $f'(x) = (\ln y(x))' = \dfrac{y'(x)}{y(x)} = -7.10^{-4}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $f(x) = -7.10^{-4}x + \ln(0,05)$.

Ta có $f(x) = \int f'(x)\mathrm{d}x = \int(-7.10^{-4})\mathrm{d}x = -7.10^{-4}x + C$.

Theo giả thiết $y(0) = 0,05$ nên $f(0) = \ln y(0) = \ln(0,05)$. Khi đó $C = \ln(0,05)$.

Vậy $f(x) = -7.10^{-4}x + \ln(0,05)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $y(30) - y(15) = -6.10^{-4}$.

Từ $f(x) = \ln y(x) \Rightarrow y(x) = e^{f(x)} = e^{-7.10^{-4}x + \ln(0,05)} = \dfrac{1}{20}e^{-7.10^{-4}x}$.

Do đó $y(30) - y(15) = \dfrac{1}{20}\left(e^{-7.10^{-4}.30} - e^{-7.10^{-4}.15}\right) \approx -5,2.10^{-4}$.

» Chọn SAI.

(d) Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây gần bằng $0,05$.

Nồng độ trung bình của chất A từ thời điểm 15 giây đến thời điểm 30 giây là:

$$\frac{1}{30-15}\int_{15}^{30} y(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{15}\int_{15}^{30}\left(-\frac{1}{7.10^{-4}}\right)y'(x)\mathrm{d}x = -\frac{10^4}{105}y(x)\Big|_{15}^{30} = -\frac{10^4}{105}\left[y(30) - y(15)\right] \approx 0,05$$

» Chọn ĐÚNG.

Câu 11: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}3x^2+2x+m & \text{khi } x\ge 1\\ 5-2x & \text{khi } x<1\end{cases}$ (m là tham số thực) liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f\left(x\right)$ có nguyên hàm trên $\mathbb{R}$ là $F\left(x\right)$ thỏa mãn $F\left(-2\right)=-10$.

(a) $m=-2$

(b) $F\left(x\right)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$

(c) $F\left(3\right)=83$

(d) $\int\limits_1^{e^2} f\left(\ln x\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x=3$

Lời giải

(a) $m=-2$.

Ta có $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow m+5=3\Leftrightarrow m=-2$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $F\left(x\right)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Ta có $F\left(x\right)=\begin{cases}x^3+x^2+mx+C_1 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+C_2 & \text{khi } x<1\end{cases}$

$F\left(-2\right)=5\left(-2\right)-\left(-2\right)^2+C_2\Rightarrow C_2=-10+14=4$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} F\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^3+x^2+mx+C_1\right)=m+2+C_1$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} F\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(5x-x^2+C_2\right)=4+C_2$.

Ta lại có $F\left(x\right)$ liên tục tại $x=1$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^-} F\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^+} F\left(x\right)=F\left(1\right)\Leftrightarrow m+2+C_1=4+C_2\Leftrightarrow C_1=6-m$.

Mà $m=-2$ nên $C_1=8$.

Vậy $F\left(x\right)=\begin{cases}x^3+x^2-2x+8 & \text{khi } x\ge 1\\ 5x-x^2+4 & \text{khi } x<1\end{cases}$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $F\left(3\right)=83$.

Ta có $F\left(3\right)=3^3+3^2-2.3+8=38$.

» Chọn SAI.

(d) $\int\limits_1^{e^2} f(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x = 3$.

Đặt $t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$.

Khi $x=1\Rightarrow t=0$;

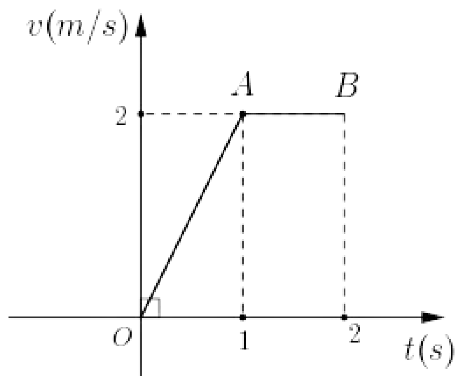
Khi $x=e^2 \Rightarrow t=2$.

Do đó

$$\int\limits_1^{e^2} f(\ln x)\frac{1}{x}dx=\int\limits_0^2 f(t)dt=\int\limits_0^1 f(x)dx+\int\limits_1^2 f(x)dx=\int\limits_0^1(5-2x)dx+\int\limits_1^2(3x^2+2x-2)dx=12.$$

» Chọn SAI.

Câu 12: Một vật chuyển động với vận tốc được cho bởi đồ thị trong hình sau:



(a) Vận tốc của vật tại thời điểm t được xác định bởi $v(t)=\begin{cases}2t & \text{khi } 0\le t\le 1\\ 2 & \text{khi } t>1\end{cases}$.

(b) Quãng đường vật đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức $s(t)=\int\limits_0^1 v(t)\mathrm{d}t$

(c) Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int\limits_0^2 v(t)\mathrm{d}t$

(d) Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là $3m$.

Lời giải

(a) Vận tốc của vật tại thời điểm t được xác định bởi $v(t)=\begin{cases}2t & \text{khi } 0\le t\le 1\\ 2 & \text{khi } t>1\end{cases}$.

Ta có phương trình đường thẳng đi qua hai điểm OA là $y=2x$, đường thẳng đi qua hai điểm A,B là $y=2$.

Do đó ta có công thức hàm vận tốc là: $v(t)=\begin{cases}2t & \text{khi } 0\le t\le 1\\ 2 & \text{khi } t>1\end{cases}$.

» Chọn ĐÚNG.

Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ a giây đến b giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_a^b v(t)\mathrm{d}t$.

(b) Quãng đường vật đi được trong 1 giây đầu tiên được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t$.

Do đó quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 0 giây đến 1 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^1 v(t)\mathrm{d}t$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t$.

Do đó quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ 1 giây đến 2 giây được xác định bởi công thức $s(t)=\int_1^2 v(t)\mathrm{d}t$.

» Chọn SAI.

(d) Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là $3m$.

Quãng đường mà vật đi được trong 2 giây đầu tiên là:

$$s(t)=\int_0^2 v(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 2t\mathrm{d}t+\int_1^2 2\,\mathrm{d}t=t^2\Big|_0^1+2t\Big|_1^2=1+2=3\mathrm{m}.$$

» Chọn ĐÚNG.

◆Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Nếu $F'(x)=\dfrac{1}{2x}$ và $F(1)=1$ thì giá trị của $F(4)$ bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.

Lời giải

Trả lời: 1,69

Ta có: $\int_1^4 F'(x)\mathrm{d}x=\int_1^4 \dfrac{1}{2x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\ln|x|\Big|_1^4=\ln 2$.

Lại có: $\int_1^4 F'(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_1^4=F(4)-F(1)$.

Suy ra $F(4)-F(1)=\ln 2$.

Do đó $F(4)=F(1)+\ln 2=1+\ln 2$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[0;2\right]$. Giả sử $y=F\left(x\right)$ là một nguyên hàm của $y=f\left(x\right)$ và $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$ và $F\left(0\right)=2$. Giá trị $F\left(2\right)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có $\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx=F\left(2\right)-F\left(0\right)\Rightarrow F\left(2\right)=\int\limits_0^2 f\left(x\right)dx+F\left(0\right)=3+2=5$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\int\limits_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=6$ và $\int\limits_2^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=8$. Giá trị $\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có $\int\limits_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_2^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_0^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_2^5 f\left(x\right)\mathrm{d}x=6-8=-2$.

Câu 4: Cho các hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử $\int\limits_2^7\left[2f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=1$ và $\int\limits_2^7\left[f\left(x\right)-2g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=4$. Khi đó, $\int\limits_2^7 f\left(x\right)\mathrm{d}x-3\int\limits_7^2 g\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -1

Ta có: $\begin{cases}\int\limits_2^7\left[2f\left(x\right)+3g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=1\\ \int\limits_2^7\left[f\left(x\right)-2g\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=4\end{cases}.\Leftrightarrow\begin{cases}2\int\limits_2^7 f\left(x\right)\mathrm{d}x+3\int\limits_2^7 g\left(x\right)\mathrm{d}x=1\\ \int\limits_2^7 f\left(x\right)\mathrm{d}x-2\int\limits_2^7 g\left(x\right)\mathrm{d}x=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int\limits_2^7 f\left(x\right)\mathrm{d}x=2\\ \int\limits_2^7 g\left(x\right)\mathrm{d}x=-1\end{cases}$

Mà $\int\limits_2^7 f\left(x\right)\mathrm{d}x-3\int\limits_7^2 g\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_2^7 f\left(x\right)\mathrm{d}x+3\int\limits_2^7 g\left(x\right)\mathrm{d}x=2+3.\left(-1\right)=-1$.

Câu 5: Biết $F\left(x\right)=x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$. Giá trị của $\int\limits_1^2\left[2+f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có $\int\limits_1^2\left[2+f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\left(2x+x^2\right)\Big|_1^2=8-3=5$.

Câu 6: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2-1 & \text{khi } x\ge 2\\ x^2-2x+3 & \text{khi } x<2\end{cases}$. Tích phân $I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2

Lời giải

Trả lời: 3,83

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_1^3 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int\limits_1^2\left(x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_2^3\left(x^2-1\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{23}{6}.$$

Câu 7: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{x} & khi\ x\ge 1\\ x+1 & khi\ x<1\end{cases}$. Tích phân $I=\int\limits_2^0 -3t^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2

Lời giải

Trả lời: 2,08

$$I=-3\int\limits_2^0 t^2 f\left(t\right)\mathrm{d}t=3\int\limits_0^2 x^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x=3\left[\int\limits_0^1 x^2\left(x+1\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 x\mathrm{d}x\right]=\frac{25}{12}\approx 2,08$$

.

Câu 8: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}2x^2-1 & \text{khi } x<0\\ x-1 & \text{khi } 0\le x\le 2\\ 5-2x & \text{khi } x>2\end{cases}$. Tính tích phân $I=\int\limits_{-5}^9 \frac{1}{7}f\left(t\right)\mathrm{d}t$ bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2

Lời giải

Trả lời: 5,19

$$\Rightarrow I=\frac{1}{7}\int\limits_{-5}^9 f\left(t\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{7}\int\limits_{-5}^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int\limits_{-5}^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int\limits_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int\limits_2^9 f\left(x\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{7}\int\limits_{-5}^0\left(2x^2-1\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int\limits_0^2\left(x-1\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{7}\int\limits_2^9\left(5-2x\right)\mathrm{d}x=\frac{109}{21}\approx 5,19$$

Câu 9: Biết $I=\int\limits_1^3\left|\frac{x^2-6x+8}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+c\ln\frac{d}{e}$ biết a là số nguyên âm và $b,c,d,e\in\mathbb{Z}^*$; $\left(a,b\right)=1$, $\left(d,e\right)=1$. Giá trị của $a+b+c+d+e$ bằng:

Lời giải

Trả lời: 25

Ta có $x+1>0$, $\forall x\in\left[1;3\right]$, suy ra $\int\limits_1^3\left|\frac{x^2-6x+8}{x+1}\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^3\frac{\left|x^2-6x+8\right|}{x+1}\mathrm{d}x$.

Lại có $x^2-6x+8\le 0\Leftrightarrow 2\le x\le 4$. Do đó

$$I=\int\limits_1^3\frac{\left|x^2-6x+8\right|}{x+1}\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\frac{x^2-6x+8}{x+1}\mathrm{d}x-\int\limits_2^3\frac{x^2-6x+8}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^2\left(x-7+\frac{15}{x+1}\right)\mathrm{d}x-\int_2^3\left(x-7+\frac{15}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{11}{2}+15\ln\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{9}{2}+15\ln\frac{4}{3}\right)=-\frac{9}{2}+15\ln\frac{9}{8}.$$

Vậy $\begin{cases}a=-9\\b=2\\c=15\\d=9\\e=8\end{cases}\Rightarrow a+b+c+d+e=25$

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}e^x+1 & \text{khi } x\ge 0\\ x^2-2x+2 & \text{khi } x<0\end{cases}$. Biết giá trị của $I=\int_{1/e}^{e^2}\frac{f(\ln x-1)}{x}\mathrm{d}x=\frac{a}{b}+ce$ với $a,b,c\in\mathbb{Z},b\ne 0$ và $(a,b)=1$ bằng. Giá trị của $a+b+c$

Lời giải

Trả lời: 36

Xét $I=\int_{1/e}^{e^2}\frac{f(\ln x-1)}{x}\mathrm{d}x$.

Đặt $u=\ln x-1\Rightarrow \mathrm{d}u=\frac{1}{x}\mathrm{d}x$. Đổi cận $\begin{cases}x=\frac{1}{e}\Rightarrow u=-2\\ x=e^2\Rightarrow u=1\end{cases}$.

Khi đó $I=\int_{-2}^{1}f(u)\mathrm{d}u=\int_{-2}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$$=\int_{-2}^{0}\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(e^x+1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\right)\right|_{-2}^{0}+\left.\left(e^x+x\right)\right|_0^1=\frac{32}{3}+e.$$

Vậy $\begin{cases}a=32\\b=3\\c=1\end{cases}\Rightarrow a+b+c=36$

Câu 11: Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t (giây) là $v(t)=t^2-t-6$ (mét/giây). Quãng đường (mét) vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$ bằng (làm tròn tới hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 10,17

Gọi S là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian $1\le t\le 4$.

Ta có $S=\int_1^4\left|v(t)\right|\mathrm{d}t=\int_1^4\left|t^2-t-6\right|\mathrm{d}t=\int_1^3\left|t^2-t-6\right|\mathrm{d}t+\int_3^4\left|t^2-t-6\right|\mathrm{d}t$

$$=\left|-\frac{22}{3}\right|+\left|\frac{17}{6}\right|=\frac{61}{6}\approx 10{,}17\,(m)$$