MỤC LỤC

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

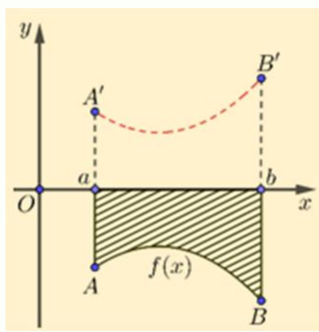
1. Diện tích hình thang cong

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, trục hoành, x=a và x=b

- Hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$.

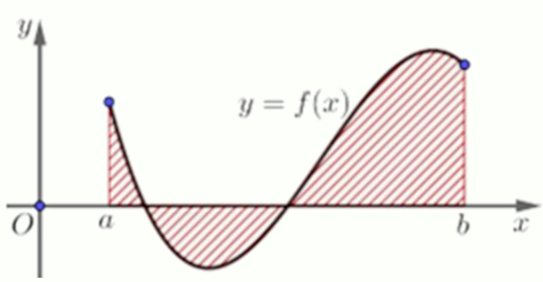
Trường hợp $f(x)>0$ *trên* $[a;b]$,

- Khi đó diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị $f(x)$, Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$: $\boxed{S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$.
- *Trường hợp* $f(x)\le 0$ *trên* $[a;b]$, ta có $-f(x)\ge 0$
- S hình thang cong $aABb$ = S hình thang cong $aA'B'b$.
- *($aA'B'b$ là hình đối xứng của hình thang đã cho qua trục hoành).*
- Do đó: $S=S_{aABb}=S_{aA'B'b}=\boxed{\int_a^b\left(-f(x)\right)\mathrm{d}x}$



Tổng quát:

- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ liên tục, Ox và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được tính: $\boxed{S=\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x}$



Chú ý

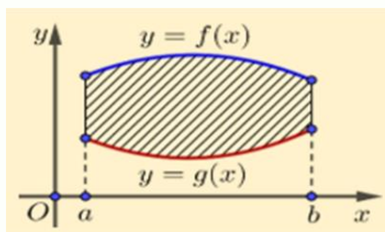
- Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Nếu $f(x)$ không đổi dấu trên $[a;b]$ thì: $\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$

Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số, x=a và x=b

- Cho hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số đó và đường thẳng $f(x)>0$, $[a;b]$.

Xét trường hợp $f(x)\ge g(x)\forall x\in[a;b]$

- Gọi S là diện tích hình thang cong giới hạn bởi $\begin{cases} Ox \\ x=a \\ x=b \end{cases}$ và $y=f(x);y=g(x)$.
- Khi đó diện tích: $\boxed{S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x}$.



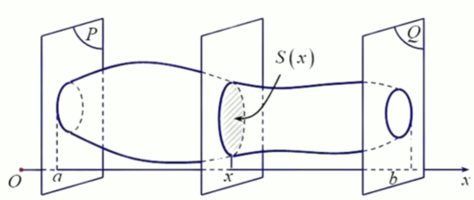
Tổng quát:

- Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ và hai đường thẳng $f(x)>0$, $[a;b]$ được tính: $\boxed{S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x}$

2. Thể tích hình khối:

Định nghĩa

- Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$

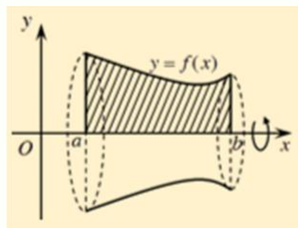


- Giả sử b , là hàm số liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$
- Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V=\int_a^b S\left(x\right)\mathrm{d}x}$.

3. Thể tích khối tròn xoay:

Định nghĩa

- Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y=f\left(x\right)$, Ox, và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ quanh trục Ox: $\boxed{V=\pi\int_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x}$



Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

♦Dạng ❶: Xây dựng công thức tính diện tích theo hình vẽ

Phương pháp

Xác định công thức diện tích hình phẳng:

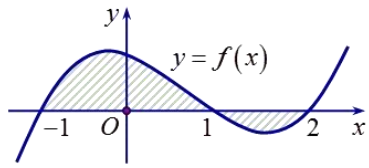
- **Bước 1:** Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.
- **Bước 2:** Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.
- **Bước 3:** Áp dụng công thức tính diện tích $S=\int_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.
- **Bước 4:** Phá trị tuyệt đối: Lấy công thức hàm số của đồ thị nằm trên trừ công thức hàm số của đồ thị nằm dưới

Xác định công thức thể tích khối tròn xoay:

- **Bước 1:** Xác định đồ thị của các hàm số được cho trên hình vẽ.
- **Bước 2:** Xác định các vị trí tương giao giữa các đồ thị.
- **Bước 3:** Áp dụng công thức tính diện tích $V=\pi\int_a^b f^2\left(x\right)\mathrm{d}x$.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ bên. Xây dựng công thức tính S?

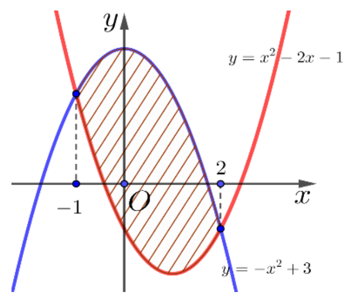


Lời giải

Thấy rằng đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục Ox tại ba điểm $x=-1;x=1;x=2$.

Do đó $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}\left[f\left(x\right)-0\right]\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}\left[0-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 2: Cho đồ thị $y=f\left(x\right)$ như hình vẽ bên. Xác định công thức diện tích miền được gạch sọc ở hình bên.

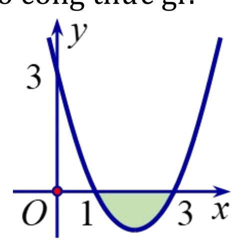


Lời giải

Ta có: $\left(H\right):\begin{cases}y=-x^2+3\\ y=x^2-2x-1.\\ x=-1;x=2\end{cases}$

Ta có: $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$ (do trên đoạn $\left[-1;2\right]$ phần đồ thị $y=-x^2+3$ nằm trên đồ thị $y=x^2-2x-1$).

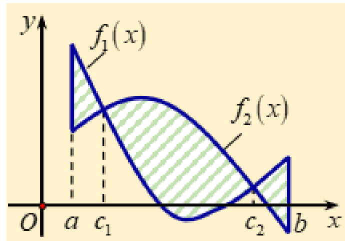
Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có đồ thị như hình bên. Gọi D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số đã cho và trục Ox. Quay hình phẳng D quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích V được xác định theo công thức gì?



Lời giải

Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox: $V=\pi\int\limits_{1}^{3}\left[f\left(x\right)\right]^2\mathrm{d}x$

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f_1(x)$ và $f_2(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và đường thẳng $x=a$, $x=b$. Công thức tính diện tích của hình (H) là?



Lời giải

Thấy rằng đồ thị hàm số $y=f_1(x)$ cắt $y=f_2(x)$ tại hai điểm $x=c_1; x=c_2$.

Xét trong $[a;c_1]$: $f_1(x)\ge f_2(x)$;

Xét trong $[c_1;c_2]$: $f_1(x)\le f_2(x)$ và

Xét trong $[c_2;b]$: $f_1(x)\ge f_2(x)$

Vậy $S=\int_a^b|f_1(x)-f_2(x)|\mathrm{d}x=\int_a^{c_1}(f_1(x)-f_2(x))\mathrm{d}x+\int_{c_1}^{c_2}(f_2(x)-f_1(x))\mathrm{d}x+\int_{c_2}^{b}(f_1(x)-f_2(x))\mathrm{d}x$

◆Dạng ❷: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi y=f(x), Ox và x=a, x=b

Phương pháp

- *Diện tích hình phẳng giới hạn:* $\begin{cases} y=f(x) \\ Ox \\ x=a; x=b \end{cases} \to S=\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x$.
- Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:
- **Bước 1:** Giải $f(x)=0$ tìm nghiệm $x_1,x_2,\dots,x_n\in(a;b)$ $(a<x_1<x_2<\dots<x_n<b)$.
- **Bước 2:** Tính $S=\int_a^{x_1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|\mathrm{d}x+\dots+\int_{x_n}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+\dots+\left|\int_{x_n}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|$$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Diện tích hình phẳng là $S=\int\limits_1^2 \left|x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^2 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$.

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$ bằng

Lời giải

Xét phương trình $(x-2)^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có: $S=\int\limits_1^2\left|(x-2)^2-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_1^2\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{2}{3}$.

Câu 3: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=-4$, $x=1$

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Diện tích: $S=\int\limits_{-4}^1\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-4}^0\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\left(x^2-2x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right|_{-4}^0-\left.\left(\frac{x^3}{3}-x^2\right)\right|_0^1$

$=38$.

Câu 4: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-1$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x=2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

x	0		1		2
x^3-1		$-$	0	$+$	

$$S=\int\limits_0^2\left|x^3-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left|x^3-1\right|\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left|x^3-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\left(1-x^3\right)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2\left(x^3-1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left.\left(x-\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1+\left.\left(\frac{x^4}{4}-x\right)\right|_1^2=\frac{7}{2}.$$

Câu 5: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1$; $x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, trục Ox, $x=1$ và $x=4$ được tính bởi công thức $V=\pi\int_1^4\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^4 x\mathrm{d}x$.

⬩Dạng ❸: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi y=f(x), y=g(x) và x=a, x=b

Phương pháp

- *Diện tích hình phẳng giới hạn:* $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a;x=b \end{cases} \to S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$.
- Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:
- **Bước 1:** Giải $f(x)=g(x)$ tìm nghiệm $x_1,x_2,...,x_n\in(a;b)$ $(a<x_1<x_2<...<x_n<b)$.
- **Bước 2:** Tính $S=\int_a^{x_1}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x+...+\int_{x_n}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int_a^{x_1}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}\left(f(x)-g(x)\right)\mathrm{d}x\right|$$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x^4-4x^2+4$, $y=x^2$, đường thẳng $x=0$, $x=1$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng cần tìm là: $S=\int_0^1\left|x^4-4x^2+4-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|x^4-5x^2+4\right|\mathrm{d}x$

Vì $x^4-5x^2+4=\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)\ge 0\ \forall x\in[0;1]$

Nên $S=\int_0^1\left(x^4-5x^2+4\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{5x^3}{3}+4x\right)\right|_0^1=\dfrac{1}{5}-\dfrac{5}{3}+4=\dfrac{38}{15}$.

Câu 2: Hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x(1-x)$ và $y=x^3-x$ có diện tích bằng?

Lời giải

$$x(1-x)=x^3-x\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x(1-x)$ và $y=x^3-x$.

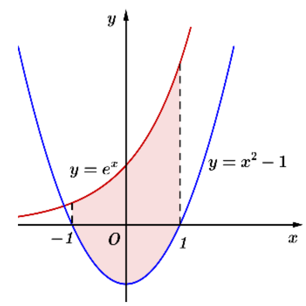
Khi đó $S=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{0}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x$

$$=\left|\int\limits_{-2}^{0}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{0}^{1}\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{8}{3}+\frac{5}{12}=\frac{37}{12}\text{ (đvdt).}$$

Câu 3: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

(1) $y=e^x,\ y=x^2-1,\ x=-1,\ x=1$; (2) $y=\sin x,\ y=x,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$.

Lời giải



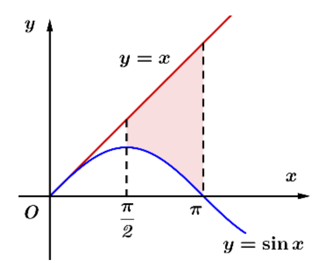
(1) $y=e^x,\ y=x^2-1,\ x=-1,\ x=1$;

Xét $x\in[-1;1]:\begin{cases}e^x>0\\-\left(x^2-1\right)\geq 0\end{cases}\Rightarrow e^x-\left(x^2-1\right)>0$

$\Rightarrow\left|e^x-\left(x^2-1\right)\right|=e^x-x^2+1.$

Diện tích $S=\int\limits_{-1}^{1}\left|e^x-\left(x^2-1\right)\right|\mathrm{d}x$

$$=\int\limits_{-1}^{1}\left(e^x-x^2+1\right)\mathrm{d}x=\left.\left(e^x-\frac{x^3}{3}+x\right)\right|_{-1}^{1}=\frac{3e^2+4e-3}{3e}$$



(2) $y=\sin x,\ y=x,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$.

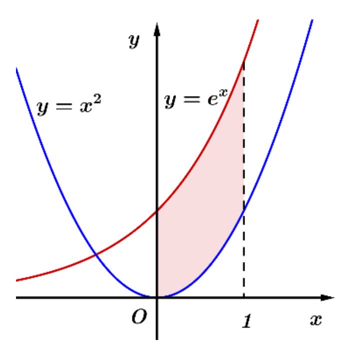
Xét $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$: $\sin x\leq 1<x\Rightarrow \sin x-x<0\Rightarrow\left|\sin x-x\right|=x-\sin x$.

Diện tích $S=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\sin x-x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(x-\sin x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{x^2}{2}+\cos x\right)\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{3\pi^2}{8}-1$.

Câu 4: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường:

(1) $y=e^x,\ y=x^2,\ x=0,\ x=1$; (2) $y=\cos x,\ y=x+1,\ x=\frac{\pi}{2},\ x=\pi$.

Lời giải

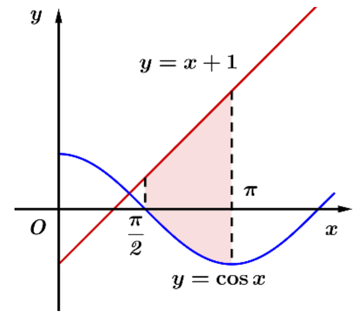


(1) $y=e^x,\ y=x^2,\ x=0,\ x=1$;

Xét $x\in[0;1]\ \begin{cases}e^x\geq 1\\x^2\leq 1\end{cases}$ hay $\begin{cases}e^x\geq 1\\-x^2\geq -1\end{cases}\Rightarrow e^x-x^2\geq 0\Rightarrow\left|e^x-x^2\right|=e^x-x^2$

Diện tích $S=\int\limits_{0}^{1}\left|e^x-x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{1}\left(e^x-x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(e^x-\frac{x^3}{3}\right)\right|_{0}^{1}=e-\frac{4}{3}$.

(2) $y=\cos x,\ y=x+1,\ x=\dfrac{\pi}{2},\ x=\pi$.



Xét $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]:\cos x\le 1<x+1\Rightarrow \cos x-(x+1)<0$

$\Rightarrow \left|\cos x-(x+1)\right|=x+1-\cos x$.

Diện tích $S=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left|\cos x-(x+1)\right|\mathrm{d}x$

$=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x+1-\cos x)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{x^2}{2}+x-\sin x\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\dfrac{3\pi^2+4\pi+8}{8}$.

Câu 5: Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P):y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d:y=x-1$ và $x=a,\ x=2a\ \ (a>1)$ bằng $\ln 3$?

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P):y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d:y=x-1$ và $x=a,\ x=2a\ \ (a>1)$ là

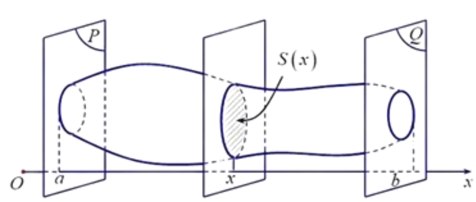
$$S=\int\limits_a^{2a}\left|\frac{x^2-2x}{x-1}-(x-1)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_a^{2a}\left|-\frac{1}{x-1}\right|dx=\left|\ln|x-1|\Big|_a^{2a}\right|=\left|\ln\frac{2a-1}{a-1}\right|=\ln 3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\ a=\frac{4}{5}\end{array}\right..$$

Do $a>1$ nên $a=2$.

♦Dạng ❹: Thể tích vật thể tính theo mặt cắt vuông góc trục hoành

Phương pháp

- Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, b, là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục $S(x)$ tại điểm Ox x,



- Giả sử b, là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$
- Khi đó, thể tích của vật thể $[a;b]$ được xác định: B .

☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=1$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x^2

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x)=3x.x^2=3x^3$.

Khi đó $V=\int\limits_1^3 3x^3\mathrm{d}x=\frac{3}{4}x^4\Big|_1^3=60$.

Câu 2: Tính thể tích V của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $\left(0\le x\le \pi\right)$ là một tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$.

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x)=\left(2\sqrt{\sin x}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\sin x$.

$$V=\int\limits_0^\pi S(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^\pi \sqrt{3}\sin x\,\mathrm{d}x=-\sqrt{3}\cos x\Big|_0^\pi=2\sqrt{3}.$$

Câu 3: Cho phần vật thể $(\Im)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể $(\Im)$ bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $\left(0\le x\le 2\right)$, ta được thiết diện là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể $(\Im)$.

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x)=\frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

$$V_{\Im}=\int\limits_0^2\frac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_0^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\int\limits_0^2 x^2(2-x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^2=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 4: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là:

$$\sqrt{m^2-x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm m$$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là:

$$V=\pi\int_{-|m|}^{|m|}\left(m^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(m^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-|m|}^{|m|}=\frac{4\pi m^2|m|}{3}$$

Ta có: $V<1000\pi\Leftrightarrow\frac{4\pi m^2|m|}{3}<1000\pi\Leftrightarrow|m|^3<750\Leftrightarrow-\sqrt[3]{750}<m<\sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750}\simeq 9,08$ và $m\neq 0$.

Suy ra, các giá trị m nguyên là $m\in\left\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;5;6;7;8;9\right\}$

Vậy có 18 giá trị nguyên của m.

◆Dạng 5: Thể tích khối tròn xoay

Phương pháp

- ***Xoay miền hình phẳng giới hạn:*** $\begin{cases}y=f(x)\\Ox;x=a;x=b\end{cases}$ ***quanh trục*** Ox.
- **Bước 1:** Giải $f(x)=0\Leftrightarrow x=c;c\in[a;b]$.
- **Bước 2:** Tính $V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x$

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox: $y=2x-x^2, y=0, x=0, x=2$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay $V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}$.

Câu 2: Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{\tan x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ quanh trục hoành là

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x=-\pi\ln|\cos x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi\ln 2}{2}$

Câu 3: Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường cong quay quanh trục hoành

(1) $y=\sqrt{2+\sin x}$, Ox và $x=0$, $x=\pi$.; (2) $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$.

Lời giải

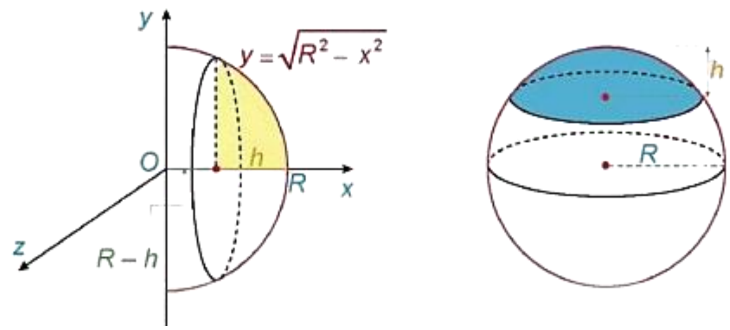
(1) $y=\sqrt{2+\sin x}$, Ox và $x=0$, $x=\pi$.;

Ta có: $V=\pi\int_0^{\pi}\left(\sqrt{2+\sin x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\left(2+\sin x\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x-\cos x\right)\Big|_0^{\pi}=2\pi\left(\pi+1\right)$.

(2) $y=x^2+3,\ y=0,\ x=0,\ x=2$.

Ta có: $V=\pi\int_0^{2}\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{2}\left(x^4+6x^2+9\right)\mathrm{d}x=\dfrac{202}{5}\pi$

Câu 4: Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h $\left(0<h\le R\right)$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{R^2-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=R-h$, $x=R$ xung quanh trục Ox . Tính thể tích của khối chỏm cầu này.



Lời giải

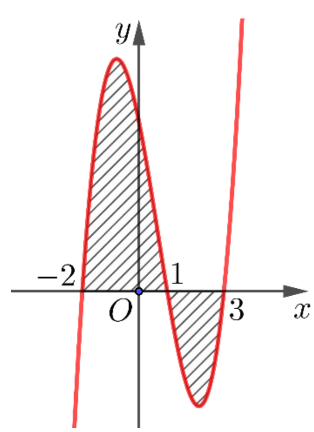
Ta có thể tích của khối chỏm cầu là

$$V=\pi\int_{R-h}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R}=\pi\left[R^2.h-Rh\left(R-h\right)-\frac{h^3}{3}\right]=\pi\left(Rh^2-\frac{h^3}{3}\right).$$

©. Dạng toán rèn luyện

⬩Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right),\ y=0,\ x=-2$ và $x=3$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?



A. $S=-\int_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x.$

B. $S=\int_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x.$

C. $S=-\int_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x.$

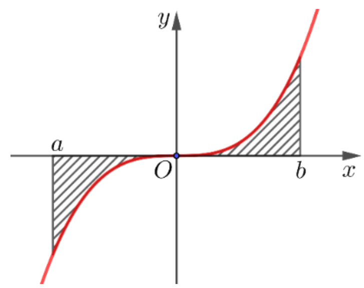
D. $S=\int_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $S=\int_{-2}^{3}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{1}^{3}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x.$

Câu 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$. Gọi D là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\left(C\right):y=f\left(x\right)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ (như hình vẽ dưới đây).



Giả sử S_D là diện tích hình phẳng D. Chọn công thức đúng trong các phương án A, B, C, D cho dưới đây?

A. $S_D=\int_{a}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

B. $S_D=-\int_{a}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $S_D=\int_{a}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{0}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

D. $S_D=-\int_{a}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int_{0}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

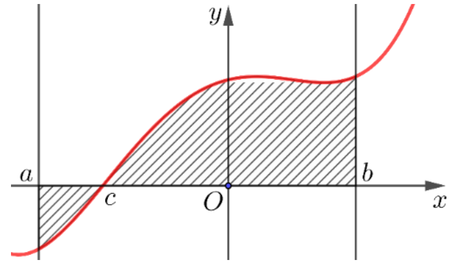
Chọn B

+ Nhìn đồ thị ta thấy:

- Đồ thị (C) cắt trục hoành tại $O\left(0;0\right)$
- Trên đoạn $\left[a;0\right]$, đồ thị (C) ở dưới trục hoành nên $\left|f\left(x\right)\right|=-f\left(x\right)$
- Trên đoạn $\left[0;b\right]$, đồ thị $\left(C\right)$ ở trên trục hoành nên $\left|f\left(x\right)\right|=f\left(x\right)$

+ Do đó: $S_D=\int_{a}^{b}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{a}^{0}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int_{0}^{b}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=-\int_{a}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int_{0}^{b}f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Câu 3: Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ $\left(a<b\right)$ tính theo công thức nào dưới đây ?



A. $S=\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x.$

<u>C</u>. $S=-\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|.$

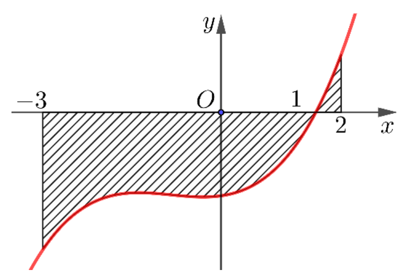
Lời giải

Chọn C

Diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ là:

$$S=\int\limits_a^b |f(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_a^c |f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_c^b |f(x)|\mathrm{d}x=-\int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Câu 4: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3$, $x=2$. Đặt $a=\int\limits_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x$, $b=\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.



Mệnh đề nào sau đây là **đúng**.

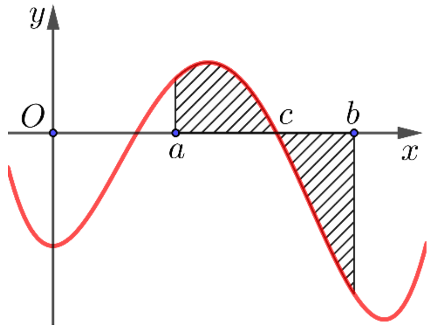
A. $S=a+b.$ **B.** $S=a-b.$ **C.** $S=-a-b.$ **<u>D</u>.** $S=b-a.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $S=\int\limits_{-3}^{2} |f(x)|\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{1} |f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 |f(x)|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-3}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_1^2 f(x)\mathrm{d}x=-a+b$.

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ có đồ thị như hình bên và $c\in[a;b]$. Gọi S là diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và các đường thẳng $y=0$, $x=a$, $x=b$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**



A. $S=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int\limits_a^b \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

D. $S=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f\left(x\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$S=\int\limits_a^b \left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_c^b \left[-f\left(x\right)\right]\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_c^b f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_a^c f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_b^c f\left(x\right)\mathrm{d}x.$$

Câu 6: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt[3]{x}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,\ x=8$ là

A. $\frac{45}{2}$. **B.** $\frac{45}{4}$. **C.** $\frac{45}{7}$. **D.** $\frac{45}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\sqrt[3]{x}\geq 0$ trên đoạn $[1;8]$ nên $S=\int\limits_1^8\left|\sqrt[3]{x}\right|dx=\int\limits_1^8\sqrt[3]{x}dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_1^8=\frac{45}{4}$.

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\left(x-2\right)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,x=2$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S=\int\limits_1^2\left|\left(x-2\right)^2-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_1^2\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_1^2\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{2}{3}$.

Câu 8: Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1,x=-1,x=2$ và trục hoành.

A. $S=16$. **B.** $S=6$. **C.** $S=\frac{13}{6}$. **D.** $S=13$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $S=\int\limits_{-1}^{2}\left|x^2+1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left(x^2+1\right)\mathrm{d}x=6$.

Câu 9: Gọi S là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2^x$, $y=1$, $x=0$, $x=2$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $S=\int\limits_0^2\left|2^x-1\right|\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int\limits_0^2\left|1-2^x\right|\mathrm{d}x$. **C.** $S=\int\limits_0^2\left(1-2^x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int\limits_0^2\left(2^x-1\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Xét $x\in\left[0;2\right]$, ta có $2^x>2^0\Leftrightarrow 2^x>1$ nên $\left|2^x-1\right|=2^x-1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int\limits_0^2\left|2^x-1\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left|1-2^x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(2^x-1\right)\mathrm{d}x$.

Câu 10: Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4+2x-x^2$, $y=x^2$, $x=-1$, $x=2$ có diện tích là

A. 9 đvdt. **B.** 12 đvdt. **C.** 15 đvdt. **D.** 6 đvdt.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4+2x-x^2=x^2\Leftrightarrow -2x^2+2x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4+2x-x^2$, $y=x^2$, $x=-1$, $x=2$ là

$$S=\int\limits_{-1}^{2}\left|4+2x-x^2-x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{2}\left(4+2x-2x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(4x+x^2-\frac{2x^3}{3}\right)\right|_{-1}^{2}=9\ \text{(đvdt)}.$$

Câu 11: Cho hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=x^2+1$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,x=3$. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích V bằng

A. $V=12\pi$. **B.** $V=\frac{348\pi}{5}$. **C.** $V=32\pi$. **D.** $V=9\pi$.

Lời giải

Chọn B

$$V=\pi\int\limits_0^3\left(x^2+1\right)^2\mathrm{d}x=\frac{348\pi}{5}.$$

Câu 12: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\cos x$, trục tung, trục hoành và đường thẳng $x=\pi$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\cos x$ và trục hoành là nghiệm phương trình

$\cos x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$. Xét trên $\left[0;\pi\right]$ suy ra $x=\frac{\pi}{2}$

Diện tích hình phẳng cần tính là $S=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x\mathrm{d}x=2$.

Câu 13: Diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành Ox, các đường thẳng $x=1$, $x=2$ là

A. $S=8$. **B.** $S=\frac{7}{3}$. **C.** $S=\frac{8}{3}$. **D.** $S=7$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích hình phẳng là $S=\int\limits_{1}^{2}\left|x^2\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{1}^{2}x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_{1}^{2}=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f\left(0\right)<0<f\left(-1\right)$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$, $y=0$, $x=-1$ và $x=1$. Xét các mệnh đề sau

(1) $S=\int\limits_{-1}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$. **(2)** $S=\int\limits_{-1}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

(3) $S=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$. **(4)** $S=\left|\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|$.

Số mệnh đề đúng là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f\left(x\right)$, $y=0$, $x=-1$ và $x=1$ là $S=\int\limits_{-1}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$ nên **(2)** đúng.

Do $f\left(0\right)<0<f\left(-1\right)$ nên $S=\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ sai.

Tương tự $S=\left|\int\limits_{-1}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x\right|$ sai và $S=\int\limits_{-1}^{0}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{1}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$ sai.

Câu 15: Khối chỏm cầu có bán kính $R=3$ và chiều cao $h=1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{9-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2$, $x=3$ xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối chỏm cầu này.

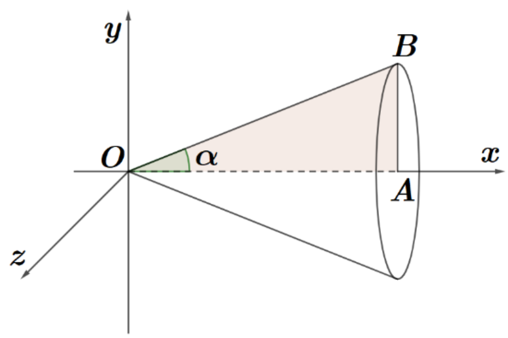
A. $\dfrac{8\pi}{3}$. **B.** 2π. **C.** $\dfrac{10\pi}{3}$. **D.** π.

Lời giải

Chọn A

Ta có thể tích khối chỏm cầu là $V=\pi\int\limits_2^3\left(9-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(9x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^3=\dfrac{8\pi}{3}$.

Câu 16: Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA=a$ nằm trên tục Ox và $AOB=\dfrac{\pi}{3}$.



Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.

A. $3\pi a^3$. **B.** πa^3. **C.** $\dfrac{\pi a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{\pi a^3}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\dfrac{\pi}{3}$ nên $OB: y=\tan\dfrac{\pi}{3}.x=\sqrt{3}x$.

Khi đó, thể tích của khối β là: $V=\pi\int\limits_0^a\left(\sqrt{3}x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^a 3x^2\mathrm{d}x=\pi x^3\Big|_0^a=\pi a^3$ (đvtt).

Câu 17: Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích hình vuông cạnh bằng 1 và diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1$, $y=0$, $x=-1$, $x=2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S_1=S_2$. **B.** $S_1>S_2$. **C.** $2S_1=S_2$. **D.** $6S_1=S_2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} S_1 = 1 \\ S_2 = \int\limits_{-1}^{2} \left| x^2 + 1 - 0 \right| \mathrm{d}x = 6 \end{cases} \Rightarrow 6S_1 = S_2$.

Câu 18: Gọi $\left(H\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 2$, $y = 2x + 4$, $x = 1$ và $x = 4$. Cho diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ bằng $\dfrac{a}{b}$ (đvdt), với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $T = a + b$ bằng:

A. $T = 67$. **B.** $T = 25$. **C.** $T = 76$. **D.** $T = 23$.

Lời giải

Chọn A

Ta có diện tích hình phẳng (H) bằng $S = \int\limits_{1}^{4} \left| \left(x^2 + x - 2\right) - \left(2x + 4\right) \right| \mathrm{d}x = \int\limits_{1}^{4} \left| x^2 - x - 6 \right| \mathrm{d}x$.

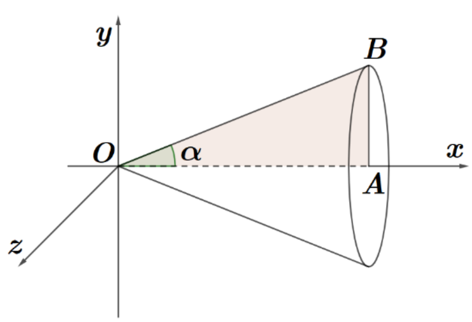
Phương trình $x^2 - x - 6 = 0$ có nghiệm $x = -2$ (loại), $x = 3$ (nhận).

Suy ra $S = \left| \int\limits_{1}^{3} \left(x^2 - x - 6\right) \mathrm{d}x \right| + \left| \int\limits_{3}^{4} \left(x^2 - x - 6\right) \mathrm{d}x \right| = \dfrac{22}{3} + \dfrac{17}{6} = \dfrac{61}{6}$.

Do đó $a = 61$ và $b = 6$.

Vậy $T = a + b = 67$.

Câu 19: Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA = a$ nằm trên tục Ox và $AOB = \alpha \left(0 < \alpha \le \dfrac{\pi}{4}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox. Tính thể tích V của β theo a và α.



A. $\dfrac{\pi \tan^2 \alpha . a^3}{3}$. **B.** $\dfrac{3\pi \tan^2 \alpha . a^3}{2}$. **C.** $\dfrac{\pi \sin^2 \alpha . a^3}{3}$. **D.** $\dfrac{2\pi \cos^2 \alpha . a^3}{3}$.

Lời giải

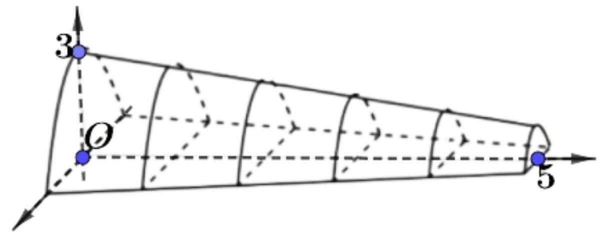
Chọn A

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB : y = x.\tan\alpha$.

Khi đó, thể tích của khối β là:

$$V=\pi\int_0^a (x.\tan\alpha)^2\,\mathrm{d}x=\pi\tan^2\alpha\int_0^a x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{\pi\tan^2\alpha.x^3}{3}\right|_0^a=\frac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}\text{ (đvtt).}$$

Câu 20: Cho một mô hình $3D$ mô phỏng một đường hầm như hình vẽ bên.



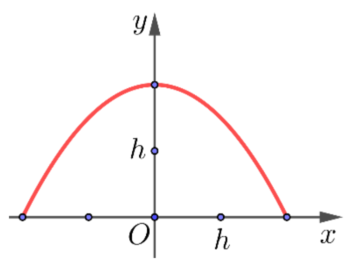
Chiều dài của đường hầm mô hình là 5cm, mặt phẳng vuông góc với mặt đáy của đường hầm tạo được thiết diện là một hình parabol, thiết diện có độ dài cạnh đáy gấp đôi chiều cao. Tính thể tích không gian bên trong đường hầm mô hình, biết chiều cao của mỗi thiết diện parabol cho bởi công thức $y=3-\frac{2}{5}x$ (đơn vị là cm), với x là khoảng cách tính từ lối vào lớn hơn của đường hầm mô hình. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

A. 29. **B.** 30. **C.** 28. **D.** 31.

Lời giải

Chọn A

Xét một thiết diện parabol có chiều cao là h và độ dài đáy $2h$ và chọn hệ trục Oxy như hình vẽ bên



Parabol (P) có phương trình $(P): y=ax^2+h, (a<0)$

Có $B(h;0)\in(P)\Leftrightarrow 0=ah^2+h\Leftrightarrow a=-\frac{1}{h}\ (do\, h>0)$

Diện tích S của thiết diện: $S=\int_{-h}^{h}\left(-\frac{1}{h}x^2+h\right)\mathrm{d}x=\frac{4h^2}{3}$, kết hợp chiều cao $h=3-\frac{2}{5}x$

Ta được diện tích thiết diện là $S(x)=\frac{4}{3}\left(3-\frac{2}{5}x\right)^2$.

Thể tích không gian bên trong của đường hầm mô hình:

$$V=\int_0^5 S(x)\mathrm{d}x=\int_0^5\frac{4}{3}\left(3-\frac{2}{5}x\right)^2\mathrm{d}x\approx 28,888$$

Vậy $V \approx 29\left(\text{cm}^3\right)$.

Câu 21: Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \le x \le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số $y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2, 0 \le x \le 100$,

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

A. $7922,9$. **B.** $2922,9$. **C.** $2085,5$. **D.** $2077,1$.

Lời giải

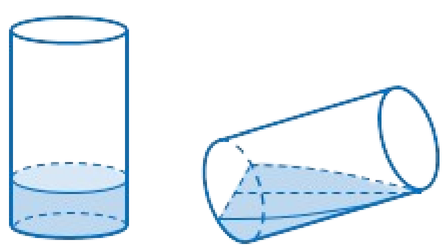
Chọn C

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2 \\ x = 0; x = 100 \end{cases} \Rightarrow S = \int_0^{100} \left|\left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2 - x\right| \mathrm{d}x.$$

Sử dụng máy tính cầm tay, ta được $S \approx 2085,5$.

Câu 22: Cho một cái cốc thủy tinh hình trụ bán kính đáy là 6 cm, chiều cao là 10 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc, biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy?



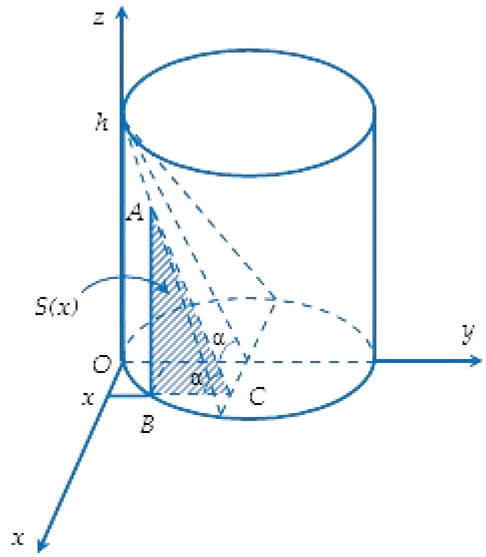
A. 240 cm^3. **B.** 250 cm^3. **C.** 245 cm^3. **D.** 249 cm^3.

Lời giải

Chọn A

Cốc hình trụ có bán kính $R = 6$ cm, chiều cao $h = 10$ cm.

Gán hệ trục tọa độ như hình vẽ bên



Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm x $(-6 \le x \le 6)$ cắt vật thể theo thiết diện có diện tích là $S(x)$.

Ta thấy thiết diện đó là một tam giác ABC vuông tại B như trong hình vẽ.

Ta có $S(x) = S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}BC^2 \tan\alpha = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\frac{h}{R} = \frac{5\left(36 - x^2\right)}{6}$.

Vậy thể tích lượng nước trong cốc là $V = \int_{-6}^{6} S(x)\mathrm{d}x = \int_{-6}^{6} \frac{5\left(36 - x^2\right)}{6}\mathrm{d}x = 240 \text{ cm}^3$.

b) Tìm α sao cho thể tích V lớn nhất.

Xét hàm số $y = \tan\alpha$ với $0 < \alpha \le \frac{\pi}{4}$.

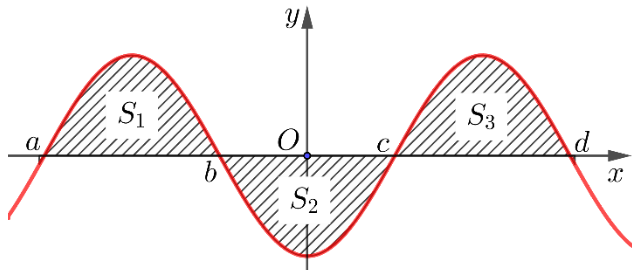
Ta có: $y' = \frac{1}{\cos^2\alpha} > 0, \forall\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$ nên hàm số $y = \tan\alpha$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Khi đó, $y = \tan\alpha \le \tan\frac{\pi}{4} = 1, \forall\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow V = \frac{\pi\tan^2\alpha a^3}{3} \le \frac{\pi a^3}{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\tan\alpha = 1$ hay $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

⬩Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;d]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm a,b,c,d, đồng thời tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x = a, x = d$ thành một hình phẳng (H) gồm 3 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2, S_3 như hình vẽ.



Xét tính đúng, sai của 4 mệnh đề sau:

(a) $S_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

(b) $S_2 = -\int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x$

(c) $S_3 = -\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$

(d) $S_{(H)} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

(a) $S_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $S_2 = -\int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x$.

Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_2 = \int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x = -\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ (do $f(x) \le 0, x \in [b;c]$).

» Chọn SAI.

(c) $S_3 = -\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.

Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_3 = \int_c^d |f(x)|\mathrm{d}x = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ (do $f(x) \ge 0, x \in [c;d]$).

» Chọn SAI.

(d) $S_{(H)} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.

Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_{(H)}=\int\limits_a^d\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int\limits_b^c f(x)\mathrm{d}x+\int\limits_c^d f(x)\mathrm{d}x$.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 2: Cho hai hàm số $f(x)=-x^2+4$ và $g(x)=x-1$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

(a) Diện tích hình phẳng (H_1) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_1)}=\int\limits_{-3}^{3}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\frac{46}{3}$

(b) Diện tích hình phẳng (H_2) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-2, x=2$ là $S_{(H_2)}=\int\limits_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}$

(c) Diện tích hình phẳng (H_3) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_3)}=\left|\int\limits_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x\right|=6$

(d) Diện tích hình phẳng (H_4) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_4)}=-\int\limits_{-3}^{1} g(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3} g(x)\mathrm{d}x=10$.

Lời giải

(a) Diện tích hình phẳng (H_1) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_1)}=\int\limits_{-3}^{3}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\frac{46}{3}$

Ta có: $S_{(H_1)}=\int\limits_{-3}^{3}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\frac{46}{3}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Diện tích hình phẳng (H_2) tạo bởi $f(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-2, x=2$ là $S_{(H_2)}=\int\limits_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}$

Ta có: $S_{(H_2)}=\int\limits_{-2}^{2}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}$ (do $f(x)\geq 0, x\in[-2;2]$)

» Chọn ĐÚNG.

(c) Diện tích hình phẳng (H_3) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_3)}=\left|\int_{-3}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x\right|=6$.

Ta có: $S_{(H_3)}=\int_{-3}^{3}|g(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_{-3}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x=10$ (do $g(x)\le 0, x\in[-3;1]$ và $g(x)\ge 0, x\in[1;3]$).

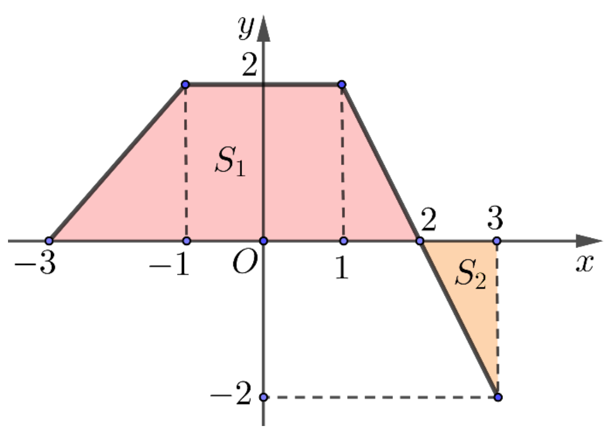
» Chọn SAI.

(d) Diện tích hình phẳng (H_4) tạo bởi $g(x), Ox$ và hai đường thẳng $x=-3, x=3$ là $S_{(H_4)}=-\int_{-3}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x=10$.

Ta có: $S_{(H_4)}=\int_{-3}^{3}|g(x)|\,\mathrm{d}x=-\int_{-3}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{3} g(x)\,\mathrm{d}x=10$ (do $g(x)\le 0, x\in[-3;1]$ và $g(x)\ge 0, x\in[1;3]$).

» Chọn ĐÚNG.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ có đồ thị như hình vẽ, Biết rằng $f(x)$ tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=-3, x=3$ một hình phẳng (H) gồm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2.



Xét tính đúng, sai của 4 mệnh đề sau:

(a) $S_{(H)}=\int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$

(b) $S_2=\left|\int_{2}^{3}(-2x+4)\,\mathrm{d}x\right|=1$

(c) $S_1=\int_{-3}^{-1}(x+3)\,\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1} 2\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(-2x+4)\,\mathrm{d}x$

(d) $S_{(H)} = S_1 - \int_2^3 (-2x+4)\,\mathrm{d}x$

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x)$, ta có: $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \in [-3;-1] \\ 2, & x \in [-1;1] \\ -2x+4, & x \in [1;3] \end{cases}$

(a) $S_{(H)} = \int_{-3}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ta có: $S_{(H)} = \int_{-3}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

» Chọn SAI.

(b) $S_2 = \left| \int_2^3 (-2x+4)\,\mathrm{d}x \right| = 1$.

Do $f(x) = -2x+4 \le 0, x \in [2;3]$ nên $S_2 = \int_2^3 |-2x+4|\,\mathrm{d}x = \left| \int_2^3 (-2x+4)\,\mathrm{d}x \right| = 1$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) $S_1 = \int_{-3}^{-1} (x+3)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} 2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (-2x+4)\,\mathrm{d}x$.

Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_1 = \int_{-3}^{2} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^{-1} (x+3)\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} 2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (-2x+4)\,\mathrm{d}x$.

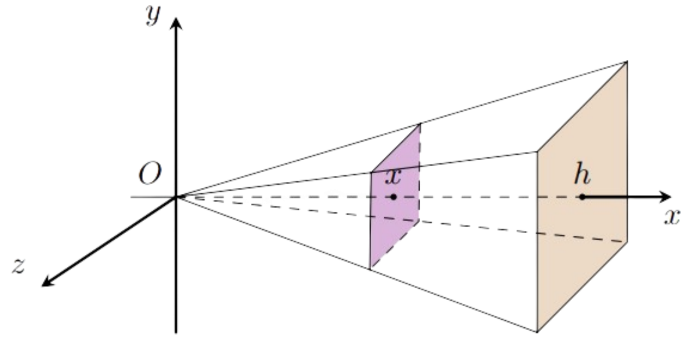
» Chọn ĐÚNG.

(d) $S_{(H)} = S_1 - \int_2^3 (-2x+4)\,\mathrm{d}x$.

Ta có: $S_{(H)} = \int_{-3}^{3} |f(x)|\,\mathrm{d}x = S_1 + S_2 = S_1 - \int_2^3 (-2x+4)\,\mathrm{d}x$.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 4: Cho khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h. Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy. (như hình dưới).



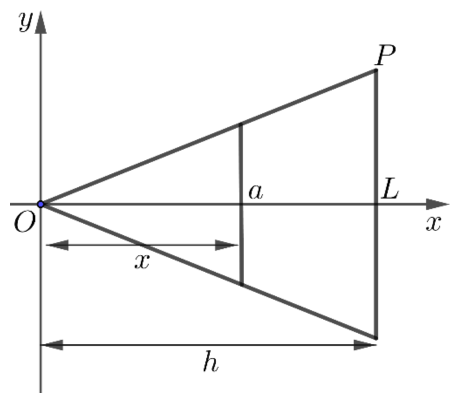
(a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.

(b) Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0\le x\le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.

(c) Diện tích mặt cắt là $S\left(x\right)=\dfrac{L}{h}x^2$.

(d) Thể tích của khối chóp là $V=\dfrac{1}{3}L^2h$.

Lời giải



(a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.

Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x=h$.

» Chọn SAI.

(b) Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0\le x\le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.

Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\left(0\le x\le h\right)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông có cạnh là a.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Diện tích mặt cắt là $S\left(x\right)=\dfrac{L}{h}x^2$.

Theo định lí Tha-les, ta có $\frac{x}{h}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{L}{2}}$, suy ra $a=\frac{L}{h}x$.

Do đó, diện tích của mặt cắt này là $S(x)=\frac{L^2}{h^2}x^2$.

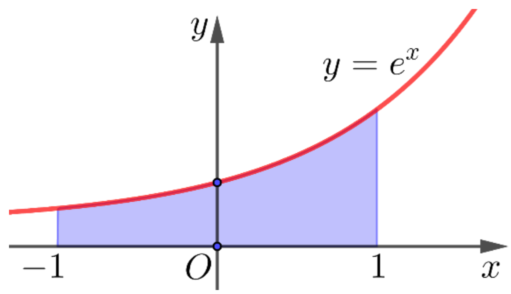
» Chọn SAI.

(d) Thể tích của khối chóp là $V=\frac{1}{3}L^2h$.

Thể tích của khối chóp này là $V=\int_0^h S(x)\mathrm{d}x=\int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h=\frac{1}{3}L^2h$.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x$ và hình được tô màu như dưới.



(a) Hình phẳng được tô màu giới hạn bởi 3 đường

(b) Diện tích hình phẳng được tính bởi công thức $S=\int\limits_{-1}^{1}(e^x)^2\,\mathrm{d}x$

(c) Diện tích hình phẳng $S=e-\frac{1}{e}$

(d) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox là $V=\frac{1}{2}\pi\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$

Lời giải

(a) Hình phẳng được tô màu giới hạn bởi 3 đường.

Hình phẳng đó giới hạn bởi bốn đường $y=e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=1$.

» Chọn SAI.

(b) Diện tích hình phẳng được tính bởi công thức $S=\int\limits_{-1}^{1}(e^x)^2\,\mathrm{d}x$.

Ta có diện tích hình phẳng $S=\int_{-1}^{1}\left|e^x\right|dx=\int_{-1}^{1}e^x\,dx$.

» Chọn SAI.

(c) Diện tích hình phẳng $S=e-\frac{1}{e}$.

Ta có diện tích hình phẳng $S=\int_{-1}^{1}e^x\,dx=e^x\Big|_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$.

» Chọn ĐÚNG.

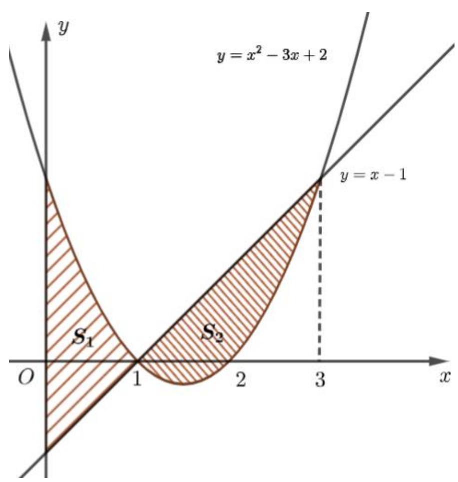
(d) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox là $V=\frac{1}{2}\pi\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)$

Ta có thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(e^x\right)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}e^{2x}dx=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_{-1}^{1}\right)=\frac{1}{2}\pi\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right).$$

» Chọn ĐÚNG.

Câu 6: Cho đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ và $S_1;S_2$ là phần diện tích phần được tô như trong hình dưới.



(a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ là $\int_0^3\left(-x^2+4x-3\right)dx$

(b) $S_1=\frac{4}{3}$

(c) $S_1=S_2$

(d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ là $\int_0^3\left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x=1$.

Lời giải

(a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ là $\int_0^3\left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ là $\int_1^3\left(x-1-\left(x^2-3x+2\right)\right)dx=\int_1^3\left(-x^2+4x-3\right)dx$.

» Chọn SAI.

(b) $S_1=\frac{4}{3}$.

$$S_1=\int_0^1\left(x^2-3x+2-\left(x-1\right)\right)dx=\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}.$$

» Chọn ĐÚNG.

(c) $S_1=S_2$.

$$S_2=\int_1^3\left(x-1-\left(x^2-3x+2\right)\right)dx=\int_1^3\left(-x^2+4x-3\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Bigg|_1^3$$

$$=-9+18-9-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=\frac{4}{3}$$

Vậy $S_1=S_2$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ là $\int_0^3\left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x=1$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ là $\int_0^3\left|-x^2+4x-3\right|dx=S_1+S_2=\frac{8}{3}$.

» Chọn SAI.

Câu 7: Gọi $\left(H\right)$ là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=-\sin x$, $y=1$, $x=a\left(0\le a\le\pi\right)$, $x=\pi$.

(a) Nếu $a=\pi$ thì diện tích của $\left(H\right)$ bằng 0.

(b) Nếu $a=0$ thì diện tích của (H) bằng $\pi+2$.

(c) Nếu diện tích của hình (H) là $S=\pi-a+\frac{3}{2}$ thì $\frac{\pi}{a}$ là số nguyên chia hết cho 9.

(d) Nếu diện tích của hình (H) là S' thì $\int_a^\pi \sin x\,dx=S'-\pi-a$.

Lời giải

(a) Nếu $a=\pi$ thì diện tích của (H) bằng 0.

Nếu $a=\pi$ thì diện tích của (H) bằng $\int_\pi^\pi |1+\sin x|\,dx=0$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Nếu $a=0$ thì diện tích của (H) bằng $\pi+2$.

b) Đúng.

Nếu $a=0$ thì diện tích của (H) bằng $\int_0^\pi |1+\sin x|\,dx=\int_0^\pi (1+\sin x)\,dx=(x-\cos x)\Big|_0^\pi=\pi+2$

» Chọn ĐÚNG.

(c) Nếu diện tích của hình (H) là $S=\pi-a+\frac{3}{2}$ thì $\frac{\pi}{a}$ là số nguyên chia hết cho 9.

Diện tích của hình (H) là

$$S=\int_a^\pi |1+\sin x|\,dx=\int_a^\pi (1+\sin x)\,dx=(x-\cos x)\Big|_a^\pi=\pi+1-a+\cos a.$$

Theo đề, ta có: $S=\pi-a+\frac{3}{2}$

Nên $\pi+1-a+\cos a=\pi-a+\frac{3}{2}\Leftrightarrow \cos a=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=\frac{\pi}{3}$ (vì $0\le a\le\pi$).

Do đó, $\frac{\pi}{a}=\frac{\pi}{\frac{\pi}{3}}=3$ và không chia hết cho 9.

» Chọn SAI.

(d) Nếu diện tích của hình (H) là S' thì $\int_a^\pi \sin x\,dx=S'-\pi-a$.

Diện tích của hình (H) là:

$$S'=\int_a^{\pi}|1+\sin x|\mathrm{d}x=\int_a^{\pi}(1+\sin x)\mathrm{d}x=x\Big|_a^{\pi}+\int_a^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=\pi-a+\int_a^{\pi}\sin x\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\int_a^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=S'-\pi+a.$$

» Chọn SAI.

Câu 8: Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y=x+\sqrt{x}$ và $y=x+x^2$.

(a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x=0$ hoặc $x=-1$

(b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$

(c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

(d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ bằng $\frac{1}{3}$ đvdt

Lời giải

(a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x=0$ hoặc $x=-1$.

Phương trình hoành giao độ giao điểm của hai đồ thị hàm số trên là

$$x+\sqrt{x}=x+x^2\Leftrightarrow x=x^4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right..$$

» Chọn SAI.

(b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$.

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là:

$$S=\int_0^1\left|\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left|\sqrt{x}-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x.$$

» Chọn ĐÚNG.

(c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$.

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là:

$$S=\int_0^1\left|\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right|\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1\left[\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right]\mathrm{d}x \text{ (vì } x+\sqrt{x}\geq x+x^2\ \forall x\in\left[0;1\right]\text{).}$$

$$=\int_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x.$$

» Chọn SAI.

(d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ bằng $\frac{1}{3}$ đvdt.

Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là

$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3} \text{ đvdt.}$$

» Chọn SAI.

Câu 9: Cho hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi các đường $y=x^2+3$, $y=0$, $x=0$, $x=2$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

(a) Công thức tính diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ là: $S_{(H)}=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

(b) Diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ bằng $\frac{26}{3}$.

(c) Công thức tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng $\left(H\right)$ xung quanh trục Ox là: $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$.

(d) Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng $\left(H\right)$ xung quanh trục Ox bằng $\frac{202}{5}$.

Lời giải

(a) Công thức tính diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ là: $S_{(H)}=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

Công thức tính diện tích hình phẳng (H) là: $S_{(H)}=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Diện tích hình phẳng (H) bằng $\frac{26}{3}$.

Diện tích hình phẳng (H) là $S_{(H)}=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x=\frac{26}{3}$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Công thức tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox là: $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$.

Công thức tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox là: $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x$.

» Chọn SAI.

(d) Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox bằng $\frac{202}{5}$.

Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) xung quanh trục Ox là:

$$V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x=\frac{202\pi}{5}.$$

» Chọn ĐÚNG.

Câu 10: Khối chỏm cầu có bán kính $R=5$ và chiều cao $h=1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{25-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=4$, $x=5$ xung quanh trục Ox.

(a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.

(b) Thể tích của khối chỏm cầu V_1 được tính theo công thức $V_1=\pi\int_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$.

(c) Thể tích của khối chỏm cầu $V_1=\frac{14\pi}{3}$.

(d) Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{125}$.

Lời giải

(a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.

Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng $5-1=4$.

» Chọn SAI.

(b) Thể tích của khối chỏm cầu V_1 được tính theo công thức $V_1=\pi\int_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$.

Thể tích của khối chỏm cầu được tính theo công thức

$$V_1=\pi\int_4^5\sqrt{25-x^2}^{\,2}\mathrm{d}x=\pi\int_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$$

» Chọn ĐÚNG.

(c) Thể tích của khối chỏm cầu $V_1=\dfrac{14\pi}{3}$.

Ta có thể tích khối chỏm cầu là $V=\pi\int_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(25x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_4^5=\dfrac{14\pi}{3}$.

» Chọn ĐÚNG.

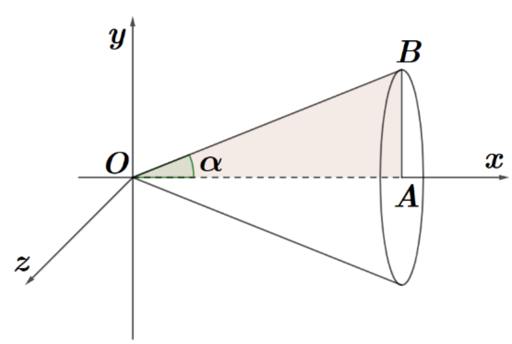
(d) Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{7}{125}$.

Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Ta có $V_2=\dfrac{1}{2}.\dfrac{4}{3}\pi.5^3=\dfrac{250}{3}\pi$.

Suy ra $\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\dfrac{14}{3}\pi}{\dfrac{250}{3}\pi}=\dfrac{7}{125}$.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 11: Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA=a$ nằm trên tục Ox và $AOB=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.



(a) Khi $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ thì thể tích V của khối β là $\dfrac{\pi a^3}{3}$ (đvtt).

(b) Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

(c) Khi thể tích V của khối β là $\frac{4\pi a^3}{3}$ thì giá trị $\cos\alpha < \frac{1}{2}$.

(d) Khi $\tan\alpha = \cot\alpha$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải

(a) Khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{3}$ (đvtt).

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\frac{\pi}{4}$ nên $OB: y = \tan\frac{\pi}{4}x = x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V = \pi\int_0^a x^2 \mathrm{d}x = \left.\frac{\pi x^3}{3}\right|_0^a = \frac{\pi a^3}{3}$ (đvtt).

» Chọn ĐÚNG.

(b) Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\frac{\pi}{6}$ nên $OB: y = \tan\frac{\pi}{6}x = \frac{x}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V = \pi\int_0^a \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^a \frac{x^2}{3}\mathrm{d}x = \left.\frac{\pi x^3}{9}\right|_0^a = \frac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

» Chọn ĐÚNG.

(c) Khi thể tích V của khối β là $\frac{4\pi a^3}{3}$ thì giá trị $\cos\alpha < \frac{1}{2}$.

Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB: y = \tan\alpha.x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V = \pi\int_0^a (\tan\alpha.x)^2 \mathrm{d}x = \left.\frac{\pi\tan^2\alpha.x^3}{3}\right|_0^a = \frac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}$ (đvtt).

Do $V = \frac{4\pi a^3}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3} = \frac{4\pi a^3}{3} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 4 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha + 1 = 5 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}$.

Mặt khác $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Khi $\tan\alpha = \cot\alpha$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{3}$.

Ta có: Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB: y=\tan\alpha.x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V=\pi\int_0^a(\tan\alpha.x)^2\,dx=\left.\frac{\pi\tan^2\alpha.x^3}{3}\right|_0^a=\frac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}$ (đvtt).

Do $\tan\alpha=\cot\alpha\Rightarrow\tan^2\alpha=\cot\alpha.\tan\alpha=1\Leftrightarrow\tan\alpha=\pm1$.

Mặt khác $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ nên $\tan\alpha=1\Rightarrow V=\frac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}=\frac{\pi.a^3}{3}$ (đvtt).

» Chọn ĐÚNG.

Câu 12: Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y=x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y=f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0\le x\le100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y=\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2, 0\le x\le100,$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất (Theo R.Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009)

Xét tính đúng/sai của các khẳng định sau:

(a) Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

(b) Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng $8,56\%$ tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

(c) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức:

$$\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]dx$$

(d) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

Lời giải

(a) Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập của 60% các gia đình của đầu tiên chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập là: $f(60)=27,321529(\%)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng $8,56\%$ tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo đến giàu, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau, mỗi nhóm chiếm 10% số gia đình của Hoa Kỳ.

Tổng thu nhập của 30% số gia đình (là các gia đình thuộc nhóm $1,2,3$) chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập của tất cả các gia đình là:

$f\left(30\right)=8,561476\;\left(\%\right)$.

Tổng thu nhập của 20% số gia đình (là các gia đình thuộc nhóm $1,2$) chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập của tất cả các gia đình là:

$f\left(20\right)=5,774409\;\left(\%\right)$.

$\Rightarrow$ Tỷ lệ của tổng thu nhập các gia đình nhóm thứ 3 so với toàn bộ các gia đình là:

$f\left(30\right)-f\left(20\right)=2,787067(\%)$.

» Chọn SAI.

(c) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức:
$\int\limits_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]\mathrm{d}x$.

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2005 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y=x \\ y=\left(0,00061x^2+0,0218+1,723\right)^2 \\ x=0;x=100 \end{cases} \Rightarrow S=\int\limits_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|\mathrm{d}x.$$

Cách 1:

Sử dụng máy tính cầm tay, ta thấy phương trình $\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x=0$ có hai ngiệm $x=a;x=b\;\left(a<b\right)$ thuộc $\left[0;100\right]$.

Xét dấu biểu thức $g\left(x\right)=\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x$ ta được:

x	0		a		b		100
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra: $S=\int\limits_0^{100}\left|g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^{a}\left|g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_a^{b}\left|g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_b^{100}\left|g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$.

$$=\left|\int_0^a g(x)\,dx\right|+\left|\int_a^b g(x)\,dx\right|+\left|\int_b^{100} g(x)\,dx\right|.$$

$$=\int_0^a g(x)\,dx-\int_a^b g(x)\,dx+\int_b^{100} g(x)\,dx.$$

Cách 2:

Sử dụng máy tính cầm tay ta được: $S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|dx\approx 2068,9$

Kiểm tra phép tính của đề bài, ta có:

$$\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]dx=2059,3131.$$

» Chọn SAI.

(d) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

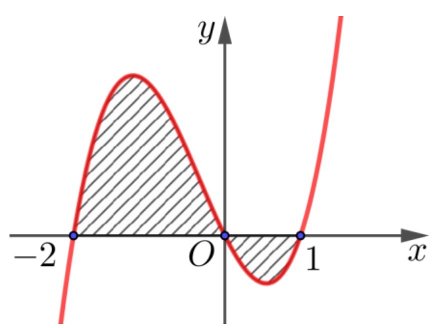
Sự bất bình đẳng thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 là:

$$S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|dx\approx 2068,9.$$

» Chọn ĐÚNG.

⬩Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Đồ thị trong hình dưới đây là của hàm số $y=f(x)$.



Biết $\int_{-2}^0 f(x)dx=3;\int_0^1 f(x)dx=-1$. Tính diện tích phần hình phẳng tô đậm trong hình.

Lời giải

Trả lời: 4

Từ đồ thị ta có $f(x)\ge 0,\forall x\in[-2;0]$ và $f(x)\le 0,\forall x\in[0\,;1]$.

Do đó $S=\int_{-2}^1|f(x)|dx=\int_{-2}^1|f(x)|dx+\int_0^1|f(x)|dx=\int_{-2}^0 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$

$S=3-(-1)=4$.

Câu 2: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3 + 2x + 1$, trục hoành, $x = 1$ và $x = 2$.

Lời giải

Trả lời: 7,75

Diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_1^2 \left|x^3 + 2x + 1\right| \mathrm{d}x = \frac{31}{4} = 7,75$.

Câu 3: Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 3x + x^2$, $y = 0; x = 0; x = 3$ quanh trục Ox bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 789

$$V = \pi\int_0^3 \left(3x + x^2\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{2511\pi}{10} \approx 789.$$

Câu 4: Khối chỏm cầu có bán kính $R = 3$ và chiều cao $h = \frac{3}{2}$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{3}{2}$, $x = 3$ xung quanh trục Ox. Tính thể tích khối chỏm cầu này (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 17,7

Ta có thể tích khối chỏm cầu là $V = \pi\int_{\frac{3}{2}}^{3} \left(9 - x^2\right)\mathrm{d}x = \pi\left.\left(9x - \frac{x^3}{3}\right)\right|_{\frac{3}{2}}^{3} = \frac{45\pi}{8} \approx 17,7$.

Câu 5: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 8 - x^2$, $y = 3x^2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)

Lời giải

Trả lời: 15,08

Ta có: $8 - x^2 = 3x^2 \Leftrightarrow 8 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2}$ hoặc $x = \sqrt{2}$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 8 - x^2$, $y = 3x^2$, $x = -\sqrt{2}$, $x = \sqrt{2}$ là:

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left|8 - x^2 - 3x^2\right| \mathrm{d}x = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(8 - 4x^2\right)\mathrm{d}x = \left.\left(8x - \frac{4x^3}{3}\right)\right|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{32\sqrt{2}}{3} \approx 15,08 \text{ (đvdt)}.$$

Câu 6: Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=\sqrt{2x}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$, $x=0$, $x=2$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2)

Lời giải

Trả lời: 1,33

Ta có: $\dfrac{x^2}{2}=\sqrt{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \dfrac{x^4}{4}=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^4-8x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

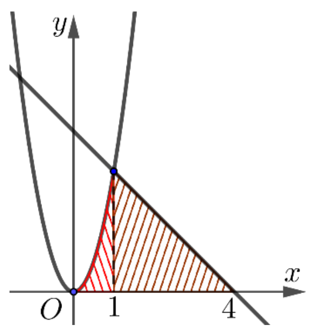
Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{2x}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$, $x=0$, $x=2$ là:

$$S=\int_0^2\left|\frac{x^2}{2}-\sqrt{2x}\right|\mathrm{d}x=\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}(2x)^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{6}\right]\Bigg|_0^2=\frac{1}{3}.4^{\frac{3}{2}}-\frac{2^3}{6}=\frac{4}{3}\text{ (đvdt).}$$

Câu 7: Gọi (H) là phần hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=3x^2$, $y=4-x$ và trục hoành. Diện tích của (H) là bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 5,5



$$(H):\begin{cases} y=3x^2 \\ y=4-x \\ y=0 \end{cases}$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$*$ $4-x=0 \Leftrightarrow x=4$

$*$ $3x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

$*$ $3x^2=4-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\text{ (t/m)} \\ x=\dfrac{-4}{3}\text{ (Loai)} \end{array}\right.$

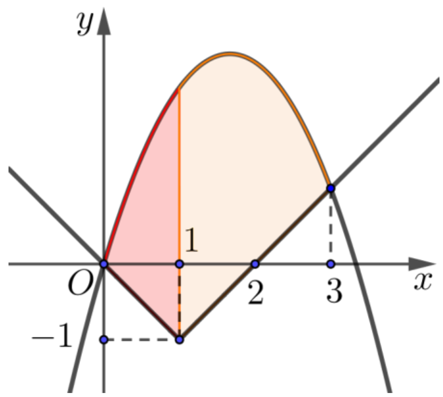
Diện tích hình phẳng $S_{(H)}=\int_0^1 3x^2dx+\int_1^4(4-x)dx=x^3\Big|_0^1+\left(4x-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4=\dfrac{11}{2}=5,5$.

Câu 8: Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\dfrac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu.

Lời giải

Trả lời: 6,5

Ta có



Xét: $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^+}y=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-2)=-1$ và $y(1)=-1$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}y=y(1)$. Do đó hàm số liên tục tại $x=1$.

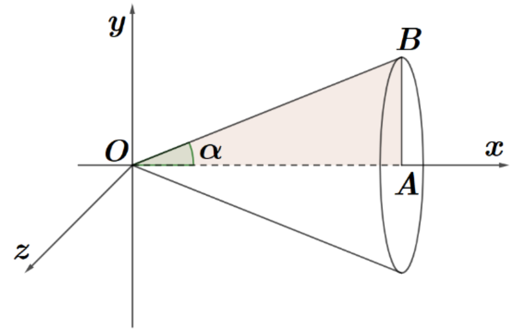
Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)dx+\int_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)dx.$$

$$\Leftrightarrow S=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)dx+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)dx$$

$$\Leftrightarrow S=\left(\frac{13}{6}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{7}{6}x^2-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Bigg|_1^3=\frac{13}{2}=6,5.$$

Câu 9: Cho tam giác vuông OAB có cạnh OA nằm trên trục Ox và $AOB=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ và $B(a;b)$ với a, b là các số thực thỏa $a^2+b^2=1$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox.



Tính giá trị $\tan\alpha$ khi thể tích của khối β đạt giá trị lớn nhất. Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ 2.

Lời giải

Trả lời: 1,41

Đáp số: $\sqrt{2}$.

Do OB đi qua gốc tọa độ nên ta đặt $OB: y = kx$ với k là số thực dương.

Do OB đi qua $B(a;b) \Rightarrow OB: y = \dfrac{b}{a}x$ và $\tan\alpha = \dfrac{b}{a}$.

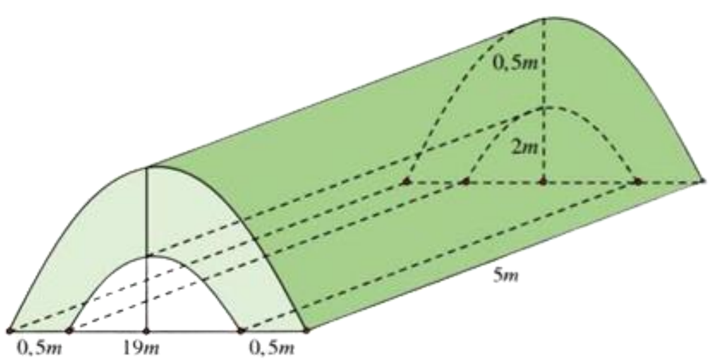
Khi đó, $V = \pi\displaystyle\int_0^a \left(\frac{b}{a}x\right)^2 dx = \pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}x^2 dx = \left.\frac{\pi b^2 x^3}{3a^2}\right|_0^a = \frac{\pi}{3}b^2 a$.

Áp dụng bất đẳng thức Am – Gm:

$$V^2 = \frac{\pi^2}{9}b^4a^2 = \frac{\pi^2}{18}b^2b^2 2a^2 \le \frac{\pi^2}{18}\frac{\left(b^2+b^2+2a^2\right)^3}{27} = \frac{4\pi^2}{243} \Rightarrow V \le \frac{2\pi\sqrt{3}}{27}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b^2 = 2a^2 \Rightarrow \dfrac{b}{a} = \tan\alpha = \sqrt{2}$.

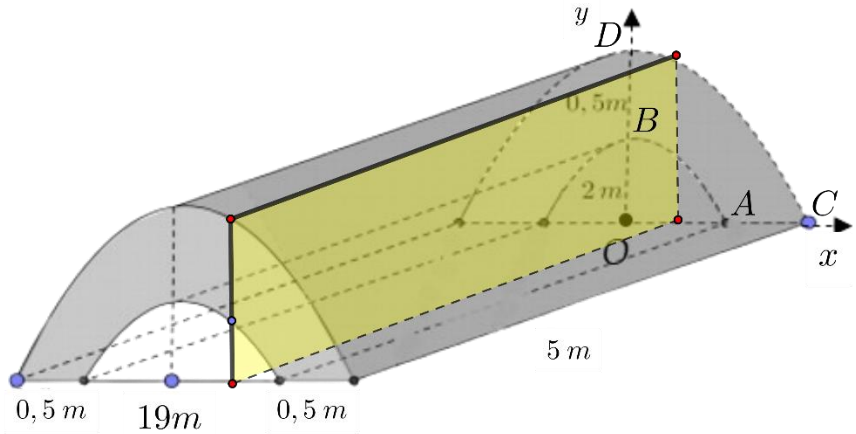
Câu 10: Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã Y có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu. (Đường cong trong hình vẽ là các đường Parabol)



Lời giải

Trả lời: 40

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Gọi $(P_1): y = a_1x^2 + b_1$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{8}{361} \\ b_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$.

Gọi $(P_2): y = a_2x^2 + b_2$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a_2.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = -\frac{1}{40} \\ b_2 = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$.

Gọi mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox, thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) với khối bêtông là hình chữ nhật có chiều dài bằng 5, chiều rộng bằng

$$h(x) = \begin{cases} \left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right) = \frac{-41}{14440}x^2 + \frac{1}{2} & , \quad -9,5 \le x \le 9,5 \\ -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2} & , \quad x \in [-10;-9,5] \cup [9,5;10] \end{cases}.$$

Suy ra diện tích thiết diện là $S(x) = \begin{cases} 5\left(\frac{-41}{14440}x^2 + \frac{1}{2}\right) & , \quad -9,5 \le x \le 9,5 \\ 5\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right) & , \quad x \in [-10;-9,5] \cup [9,5;10] \end{cases}$.

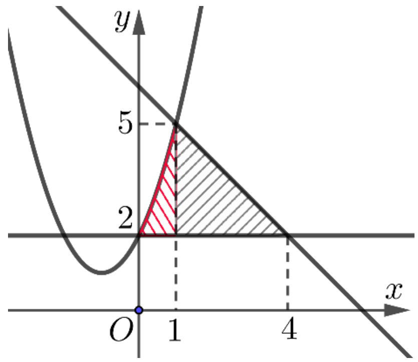
Do đó $V = \int_{-10}^{10} S(x)\,\mathrm{d}x$.

Vậy $V = \int_{-10}^{-9,5} 5 \cdot \left(\frac{-1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{-9,5}^{9,5} 5 \cdot \left(\frac{-41}{14440}x^2 + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x + \int_{9,5}^{10} 5 \cdot \left(\frac{-1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)\mathrm{d}x = 40$.

Câu 11: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $y=x^2+2x+2;\ y=6-x;\ y=2$ và (D) nằm ngoài Parabol $y=x^2+2x+2$. Khi cho (D) quay quanh trục Ox, ta nhận được vật thể tròn xoay có thể tích $V=\dfrac{a\pi}{b}$, trong đó a,b là các số nguyên dương. Giá trị biểu thức $P=a-2b^2$ bằng bao nhiêu.

Lời giải

Trả lời: 73



Vẽ các đường $y=x^2+2x+2;\ y=6-x;\ y=2$.

Dựa vào hình vẽ ta có:

$$V=\pi\int_0^1\left|\left(x^2+2x+2\right)^2-2^2\right|\mathrm{d}x+\pi\int_1^4\left|\left(6-x\right)^2-2^2\right|\mathrm{d}x=\frac{523\pi}{15}\Rightarrow a=523,b=15$$

Vậy $P=523-2.15^2=73$.