MỤC LỤC

▶BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng:

- Cho mặt phẳng (α).
- Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là *vectơ pháp tuyến* của mặt phẳng (α).

Nhận xét:

- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k \cdot \vec{n}\ (k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α).
- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó.

Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng:

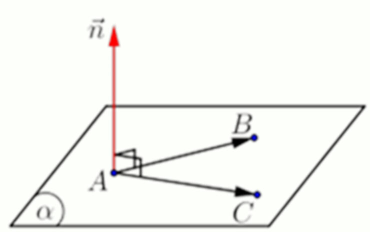
- Cho mặt phẳng (α).
- Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ *không cùng phương* và *giá* của chúng *song song* hoặc *nằm trên* mặt phẳng(α) thì $\vec{a}, \vec{b}$ là cặp véctơ chỉ phương của mặt phẳng (α).

Nhận xét:

- Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và cặp vectơ chỉ phương của nó

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng khi biết một cặp vectơ chỉ phương :

- Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.



Chú ý:

- Vectơ $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$ được gọi là ***tích có hướng*** của hai vectơ $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$ và $\vec{b}=\left(b_1;b_2;b_3\right)$.
- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$.
- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.
- Nếu $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

2. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Phương trình tổng quát của mặt phẳng:

- Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có dạng phương trình:

  $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2\neq 0$, được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

Nhận xét:

- Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (với $A^2+B^2+C^2\neq 0$) thì vectơ $\vec{n}=\left(A;B;C\right)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)
- Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.
- Khi đó: $N_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng khi biết một số điều kiện:

- *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết vectơ pháp tuyến:*
- Trong không gian $Oxyz$, phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(A;B;C\right)$ là:

  $A\left(x-x_0\right)+B\left(y-y_0\right)+C\left(z-z_0\right)=0$

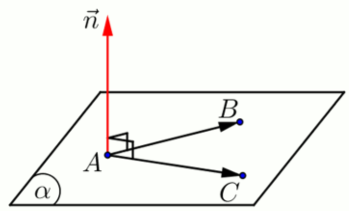
  hay $Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$
- *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua điểm và biết cặp vectơ chỉ phương:*
- Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a};\vec{b}$, ta thực hiện như sau:
- **Bước 1:** Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{a};\vec{b}\right]$.
- **Bước 2:** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_0\left(x_0;y_0;z_0\right)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

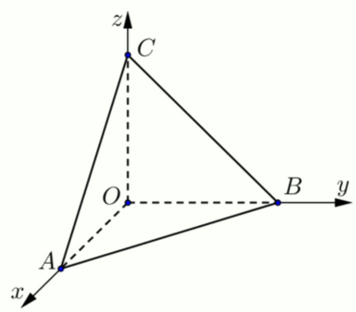
Phương trình mặt phẳng qua 3 điểm không thẳng hàng:

- *Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng:*
- Để lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, ta thực hiện như sau:
- **Bước 1:** Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.
- **Bước 2:** Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]$.
- **Bước 3:** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Nhận xét:

- Mặt phẳng (α) không đi qua gốc tọa độ O và lần lượt cắt trục Ox tại $A(a;0;0)$, cắt trục Oy tại $B(0;b;0)$, cắt trục Oz tại $C(0;0;c)$ có phương trình là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. với $a.b.c \neq 0$.
- Phương trình trên được gọi là phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.





3. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Điều kiện để hai mặt phẳng song song:

- Trong không gian $Oxyz$,
- cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_1): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.
- Khi đó: $(\alpha_1) // (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 \neq k.D_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$

Chú ý

- $(\alpha_1) \equiv (\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \\ D_1 = kD_2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$
- $(\alpha_1) \cap (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương..

Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc:

- Trong không gian $Oxyz$,
- cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ và $(\alpha_1): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ có vectơ pháp tuyến lần lượt là $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.
- Khi đó: $(\alpha_1) \perp (\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

4. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Định nghĩa

- Trong không gian $Oxyz$,
- $Oxyz$, cho điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$.
- Khi đó khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng (α) được tính:

$$d(M_0,(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5. Các mặt phẳng đặc biệt

- Các mặt phẳng đặc biệt:

TÍNH CHẤT MẶT PHẲNG	PHƯƠNG TRÌNH	HỆ SỐ ĐẶC BIỆT
(α) đi qua/chứa gốc O.	$(\alpha): Ax + By + Cz = 0$	$D = 0$
(α) song song/chứa Ox.	$(\alpha): By + Cz + D = 0$	$A = 0$
(α) song song/chứa Oy.	$(\alpha): Ax + Cz + D = 0$	$B = 0$
(α) song song/chứa Oz.	$(\alpha): Ax + By + D = 0$	$C = 0$
(α) song song/trùng (Oxy).	$(\alpha): Cz + D = 0$	$A = B = 0$
(α) song song/trùng (Oxz).	$(\alpha): By + D = 0$	$A = C = 0$
(α) song song/trùng (Oyz).	$(\alpha): Ax + D = 0$	$B = C = 0$

Nhận xét:

- Mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song/chứa trục đó hoặc mặt phẳng không chứa ẩn nào thì mặt phẳng sẽ song song/chứa mặt phẳng đó.

Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

◆Dạng ❶: Xác định vecto pháp tuyến của mặt phẳng

Phương pháp

- Một mặt phẳng có vô số véctơ pháp tuyến và chúng cùng phương với nhau.
- Chẳng hạn $\vec{n}$ là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) thì $k\cdot\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).
- Nếu mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{u}_1;\vec{u}_2$ thì (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1;\vec{u}_2]$

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) song song với giá của hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(3;0;5)$. Tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Lời giải

Gọi $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α). Ta có : $\vec{n}\perp\vec{a}$ và $\vec{n}\perp\vec{b}$.

Nên chọn $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-10;4;6)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2y+x+3z-1=0$. Xác định một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P)?

Lời giải

Từ $(P):2y+x+3z-1=0$ nếu lấy nhanh hệ số và $\Rightarrow\vec{n}=(2;1;3)$ là sai do chưa lấy đúng hệ số trước x – y – z.

Sắp xếp đúng như sau: $(P):2y+x+3z-1=0\Leftrightarrow(P):x+2y+3z-1=0\Rightarrow\vec{n}=(1;2;3)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;1;-3);B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{n}$ có phương vuông góc với hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

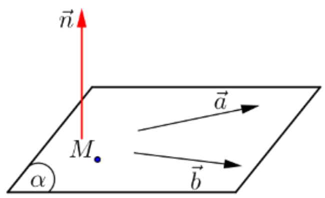
Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;8);\overrightarrow{AC}=(-1;0;6)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-18;4;-3)$.

Vậy: $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-18;4;-3)$.

◆Dạng ❷: PTMP khi biết điểm đi qua và cặp vecto chỉ phương

Phương pháp

- Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$ có dạng:
- $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \Rightarrow Ax+By+Cz+D=0$ (với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$).
- Nếu mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{u}_1;\vec{u}_2$ thì (P) có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{u}_1;\vec{u}_2]$



☛Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$.

Lời giải

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;1;-3)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;6)$ có dạng: $3(x-2)-2(y-1)+6(z+3)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+6z+14=0$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;0)$ và có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3),\vec{b}=(1;1;2)$

Lời giải

Mặt phẳng (P) có cặp véctơ chỉ phương là $\vec{a}=(2;1;3),\vec{b}=(1;1;2)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=[\vec{a};\vec{b}]=(-1;-1;1)$.

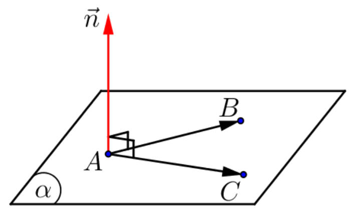
Phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;-1;0)$ có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-1;-1;1)$ có dạng: $-1(x-2)-1(y+1)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow -x-y+z+1=0$.

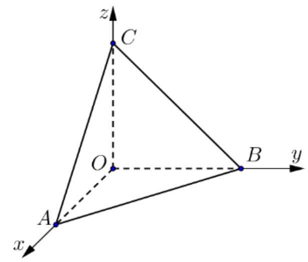
⬩Dạng ❸: PTMP qua ba điểm không thẳng hàng

Phương pháp

- Phương trình mặt phẳng (P) di qua $A;B;C$ không thẳng hàng.
- **Bước 1:** Tìm cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$.
- **Bước 2:** Tìm một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.
- **Bước 3:** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm A (hoặc điểm B hoặc điểm C) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

- Phương trình mặt phẳng (P) là phương trình mặt chắn, tức mặt phẳng (P) đi qua $A(a;0;0);B(0;b;0);C(0;0;c)$ có dạng: $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.





☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

(1) Với ba điểm $A(-1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(1;-1;0)$.

(2) Với ba điểm $A(1;0;2),B(-2;3;1),C(3;2;1)$.

Lời giải

(1) Với ba điểm $A(-1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(1;-1;0)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-1;-2);\overrightarrow{AC}=(2;-1;-3)$

Mặt phẳng (ABC) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right]=(-1;-5;1)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $-(x+1)-5y+z-3=0 \Leftrightarrow -x-5y+z-4=0$

(2) Với ba điểm $A(1;0;2),B(-2;3;1),C(3;2;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-1),\overrightarrow{AC}=(2;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;-5;-12)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $-x-5y-12z+25=0 \Leftrightarrow x+5y+12z-25=0$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC)

(1) Với ba điểm $M(2;0;0),N(0;-1;0),P(0;0;2)$.

(2) Với ba điểm $M(0;-2;0),N(3;0;0),P(0;0;-3)$.

Lời giải

(1) Với ba điểm $M(2;0;0),N(0;-1;0),P(0;0;2)$.

Ta có: $M(2;0;0),N(0;-1;0),P(0;0;2) \Rightarrow (MNP):\frac{x}{2}+\frac{y}{-1}+\frac{z}{2}=1 \Leftrightarrow x-2y+z-2=0$

(2) Với ba điểm $M(0;-2;0), N(3;0;0), P(0;0;-3)$.

Ta có: $M(0;-2;0), N(3;0;0), P(0;0;-3) \Rightarrow (MNP): \frac{x}{3}+\frac{y}{-2}+\frac{z}{-3}=1$

$\Leftrightarrow \frac{x}{3}-\frac{y}{2}-\frac{z}{3}=1 \Leftrightarrow 2x-3y-2z-6=0$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) chứa điểm $M(1;3;-2)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4}$.

Lời giải

Phương trình mặt chắn cắt tia Ox tại $A(a;0;0)$, cắt tia Oy tại $B(0;b;0)$, cắt tia Oz tại $C(0;0;c)$ có dạng là $(P): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (với $a>0$, $b>0, c>0$).

Theo đề: $\frac{OA}{1}=\frac{OB}{2}=\frac{OC}{4} \Leftrightarrow \frac{a}{1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{4} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{b}{2} \\ c=2b \end{cases}$.

Vì $M(1;3;-2)$ nằm trên mặt phẳng (P) nên ta có: $\frac{1}{\frac{b}{2}}+\frac{3}{b}+\frac{-2}{2b}=1 \Leftrightarrow \frac{4}{b}=1 \Leftrightarrow b=4$.

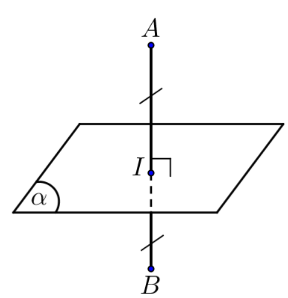
Khi đó $a=2$, $c=8$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là: $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1 \Leftrightarrow 4x+2y+z-8=0$.

◆Dạng 4: PTMP trung trực của đoạn thẳng

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α) ***trung trực*** đoạn thẳng AB
- **Bước 1:** Véctơ pháp tuyến của mặt (α) là: $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$.
- **Bước 2:** Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn AB.
- **Bước 3:** Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm I và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$



☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(4;0;1)$ và $B(-2;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

Lời giải

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có véctơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=\left(-6;2;2\right)$ và đi qua trung điểm $I\left(1;1;2\right)$ của đoạn thẳng AB.

Do đó, ta có: $-6\left(x-1\right)+2\left(y-1\right)+2\left(z-2\right)=0\Leftrightarrow -6x+2y+2z=0\Leftrightarrow 3x-y-z=0.$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A\left(-3;2;1\right)$ và $B\left(5;-4;1\right)$. Gọi M là hình chiếu vuông góc của A trên $\left(Oxy\right)$, và N là điểm đối xứng với B qua $\left(Oyz\right)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực $\left(P\right)$ của đoạn thẳng MN.

Lời giải

M là hình chiếu của $A\left(-3;2;1\right)$ trên trục $\left(Oxy\right)$ nên ta có $M\left(-3;2;0\right)$.

N là đối xứng với $B\left(5;-4;1\right)$ qua $\left(Oyz\right)$ nên ta có $N\left(-5;-4;1\right)$.

Gọi I là trung điểm MN. Ta có $I\left(-4;-1;\frac{1}{2}\right)$.

Phương trình mặt phẳng $2\left(x+4\right)+2\left(y+1\right)-1\left(z-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow 4x+4y-2z+21=0.$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$ biết $A\left(1;2;1\right),B\left(3;0;0\right),$ $C\left(1;-1;-2\right),D\left(-1;1;-1\right)$. Giả sử $I\left(a;b;c\right)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ và G là trọng tâm ΔABC. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của GI.

Lời giải

Vì $ABCD$ là hình vuông nên tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Khi đó $I\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $G\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3};\frac{-1}{3}\right)$.

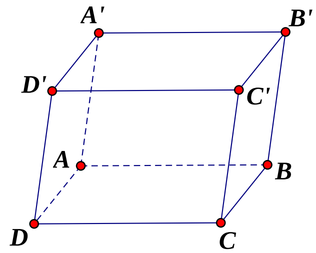
Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng GI nên $M\left(\frac{4}{3};\frac{5}{12};-\frac{5}{12}\right)$

Phương trình mặt phẳng trung trực đoạn thẳng GI:

$$-4\left(x-\frac{4}{3}\right)+\left(y-\frac{5}{12}\right)-\left(z+\frac{5}{12}\right)=0\Leftrightarrow 8x-2y+2z-9=0.$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A\left(-3;0;0\right)$, $B\left(0;2;0\right)$, $D\left(0;0;1\right)$, $A'\left(1;2;3\right)$. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của $C'D$.

Lời giải



Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;2;0)$; $\overrightarrow{AD}=(3;0;1)$; $\overrightarrow{AA'}=(4;2;3)$.

Mà $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\Rightarrow\overrightarrow{AC'}=(10;4;4)\Rightarrow\begin{cases}x=10+3\\y=4-0\\z=4-0\end{cases}\Rightarrow C'(13;4;4)$.

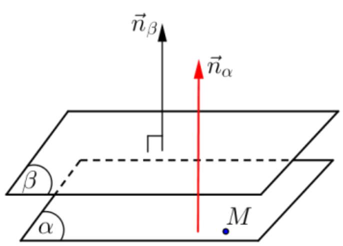
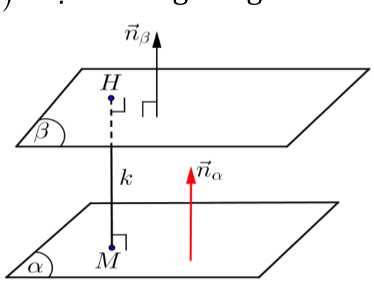
Khi đó mặt phẳng trung trực của $C'D$: $\begin{cases}\text{qua } I\left(\dfrac{13}{2};2;\dfrac{5}{2}\right)\\ \vec{n}=\overrightarrow{C'D}=(13;4;3)\end{cases}$

có phương trình là $13\left(x-\dfrac{13}{2}\right)+4(y-2)+3\left(z-\dfrac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow 13x+4y+3z-100=0$.

◆Dạng ❺: PTMP 1 điểm kèm điều kiện song song với mặt phẳng khác

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
(1) Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$. 	⌘ ***Cách 1:*** ≫ Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(\beta)}=(A;B;C)$. ≫ Mặt phẳng (α) qua điểm M. ⌘ ***Cách 2:*** ≫ Do $(\alpha)//(\beta)\Rightarrow(\alpha): Ax+By+Cz+D'=0\ (D\neq D')$ ≫ Thay điểm M vào $(\alpha)\Rightarrow D'=?\Rightarrow(\alpha)$.
(2) Song song $(P): Ax+By+Cz+D=0$ và cách (P) một khoảng bằng k. 	≫ Vì $(\alpha)//(P)\Rightarrow(\alpha): Ax+By+Cz+D'=0\ (D\neq D')$. ≫ Vì (α) cách (P) một khoảng bằng k $\Rightarrow d((\alpha);(P))=k\xLeftrightarrow{M\in(\alpha)}d(M;(P))=k$ $\Leftrightarrow\dfrac{\lvert D-D'\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=k\Rightarrow D'=?$ ≫ Có $D'\Rightarrow$ phương trình mặt (P) hoàn chỉnh.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng qua điểm $A(-1;1;2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z-1=0$ có phương trình là?

Lời giải

Có (P) song song $(\alpha): 2x-2y+z-1=0$ nên $(P): 2x-2y+z+m=0$, với $m \neq -1$.

Do (P) đi qua điểm $A(-1;1;2)$ nên $-2-2+2+m=0 \Leftrightarrow m=2$ (nhận)

Vậy mặt phẳng cần tìm là $(P): 2x-2y+z+2=0$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q): x+2y+2z-3=0$ và mặt phẳng (P) không qua O, song song mặt phẳng (Q) và $d((P);(Q))=1$. Phương trình mặt phẳng (P) là?

Lời giải

Gọi phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x+2y+2z+d=0$ Với $d \neq 0; d \neq -3$.

Có $d((P);(Q))=1 \Leftrightarrow \dfrac{|d+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d=0 \\ d=-6 \end{array}\right.$.

Kết hợp điều kiện $\Rightarrow (P)$ có dạng: $x+2y+2z-6=0$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha_1): 3x-y+z-2=0$, $(\alpha_2): x+4y-5=0$ đồng thời song song với mặt phẳng $(\alpha_3): 2x+21y-z+7=0$. Viết phương trình của mặt phẳng P .

Lời giải

$(P)//(\alpha_3) \Rightarrow (P): 2x+21y-z+m=0 \ (m \neq -7)$

Gọi d là giao tuyến của $(\alpha_1);(\alpha_2)$ $d: \begin{cases} (\alpha_1): 3x-y+z-2=0 \\ (\alpha_2): x+4y-5=0 \end{cases}$

Cho $\xrightarrow{y=0} \begin{cases} 3x+z-2=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Rightarrow M(5;0;-13)$ và $\xrightarrow{z=0} \begin{cases} 3x-y-2=0 \\ x+4y-5=0 \end{cases} \rightarrow N(1;1;0)$

$M \in (P) \Rightarrow 2.5+21.0-(-13)+m=0 \Rightarrow m=-23$

$N \in (P) \Rightarrow 2.1+21.1-0+m=0 \Rightarrow m=-23$

Vậy $2x+21y-z-23=0$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-5=0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P), cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

Lời giải

$(Q)//(P)$ nên mặt phẳng $(Q): 2x-2y+z+C=0$; $C \neq -5$, chọn $M(0;0;5) \in (P)$

Ta có $d((P);(Q)) = d(M;(Q)) = \dfrac{|5+C|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C=4 \\ C=-14 \end{array}\right.$

» Với $C=4 \Rightarrow (Q): 2x-2y+z+4=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_1(-2;0;0)$ có hoành độ âm nên trường hợp này (Q) không thỏa đề bài.

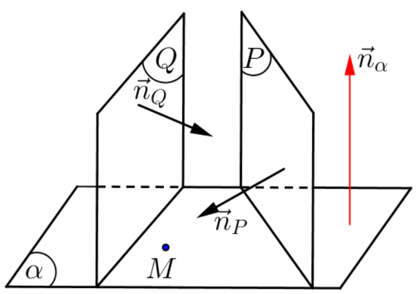
» Với $C=-14 \Rightarrow (Q): 2x-2y+z-14=0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_2(7;0;0)$ có hoành độ dương do đó $(Q): 2x-2y+z-14=0$ thỏa đề bài.

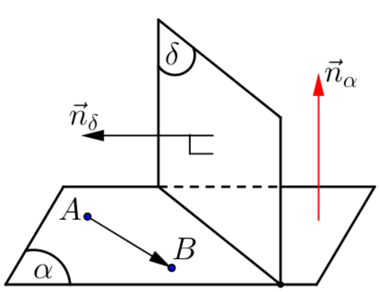
Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 2x-2y+z-14=0$.

◆Dạng ❻: PTMP 1 điểm kèm điều kiện vuông góc với mặt phẳng khác

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (α)

Loại	Phương pháp
Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và $\perp$ 2 mặt $(P): Ax+By+Cz+D=0$, $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$. 	≫ Tìm cặp véctơ $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. ≫ Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = \left[\vec{n}_{(Q)};\vec{n}_{(P)}\right]$. ≫ Mặt phẳng (α) qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$. ***Hoặc bài toán sẽ gặp:*** "Qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với giao tuyến của $(P): Ax+By+Cz+D=0$; $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$"

Loại	Phương pháp
Qua điểm $A;B$ và vuông góc $(\delta): Ax+By+Cz+D=0$. 	≫ Tìm cặp véctơ $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(\delta)}\right]$. ≫ Véctơ pháp tuyến (α) là: $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(\delta)}\right]$. ≫ Mặt phẳng (α) qua điểm A.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$, $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là?

Lời giải

Véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\vec{n}_\alpha=(3;-2;2), \vec{n}_\beta=(5;-4;3)$.

Khi đó vecto pháp tuyến mặt phẳng cần tìm là $\vec{n}=\left[\vec{n}_\alpha;\vec{n}_\beta\right]=(2;1;-2)$

Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O,VTPT $\vec{n}=(2;1;-2)$: $2x+y-2z=0$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$.

Từ giả thiết suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;8;12)$ là vectơ pháp tuyến của mp(Q).

Phương trình (Q) đi qua $A(2;4;1)$ là: $0(x-2)+8(y-4)+12(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(0;1;0)$, $B(2;3;1)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): x+2y-z=0$ có phương trình là?

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$, vectơ pháp tuyến mặt phẳng (Q): $\overrightarrow{n_Q}=(1;2;-1)$.

Theo đề bài ta có vectơ pháp tuyến mặt phẳng (P): $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{n_Q}\wedge\overrightarrow{AB}=(4;-3;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $4x-3y-2z+C=0$.

Mặt phẳng (P) đi qua $A(0;1;0)$ nên: $-3+C=0 \Leftrightarrow C=3$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $4x-3y-2z+3=0$.

◆Dạng 7: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Phương pháp

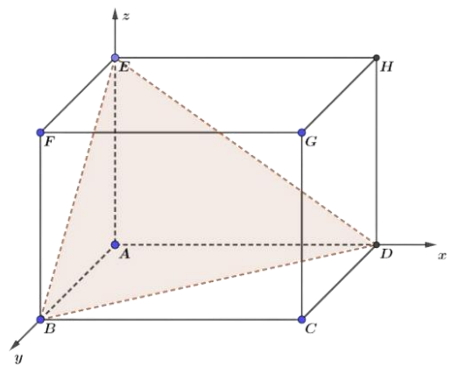
- Tính khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ như sau
- **Bước 1:** Tìm $M_0(x_0;y_0;z_0)$; viết phương trình mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$.
- **Bước 2:** Tính khoảng cách từ điểm M_0 đến mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ theo công thức $d(M_0,(P))=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Lưu ý: $d\left(M_0,(Oxy)\right)=\sqrt{\left(z_0\right)^2}$ $d\left(M_0,Ox\right)=\sqrt{\left(y_0\right)^2+\left(z_0\right)^2}$

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ cạnh 1. Điểm M được cho thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CD}$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD).

Lời giải



Ta có $A(0;0;0)$, $\overrightarrow{AE}=(0;0;1)$, $\overrightarrow{CD}=(-1;0;0)$.

Đặt $M(a;b;c)$, suy ra $\overrightarrow{AM}=(a;b;c)$.

Đề cho $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CD}$, ta được $\begin{cases}a+0=-3\\b+0=0\\c+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=0\\c=-1\end{cases}$. Suy ra $M(-3;0;-1)$.

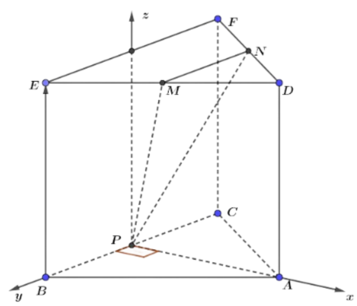
Mặt phẳng (EBD), phương trình theo đoạn chắn là $x+y+z-1=0$.

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (EBD) bằng

$$d\left(M;(EBD)\right)=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-3+0-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy khoảng cách bằng $\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.DEF$, $AB=6$, $AD=2$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm DE, DF, BC. Lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình bên. Gọi điểm S thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP).



Lời giải

Ta có $P(0;0;0)$, $A\left(3\sqrt{3};0;0\right)$, $B(0;3;0)$, $C(0;-3;0)$, $E(0;3;2)$, $F(0;-3;2)$, $D\left(3\sqrt{3};0;2\right)$

Suy ra $M\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3}{2};2\right)$, $N\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{-3}{2};2\right)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PN}\right]=\left(6;0;\frac{-9\sqrt{3}}{2}\right)\Rightarrow\vec{n}=\left(4;0;-3\sqrt{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là $4x-3\sqrt{3}z=0$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm cạnh AC, $IB\Rightarrow I\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{-3}{2};0\right)$, $J\left(\frac{3\sqrt{3}}{4};\frac{3}{4};0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SA}+2\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{SI}+2\overrightarrow{SB}=\vec{0}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{SJ}=\vec{0}\Leftrightarrow S\equiv J$.

Do đó $S\left(\frac{3\sqrt{3}}{4};\frac{3}{4};0\right)$.

Vậy khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (MNP) bằng $d=3\sqrt{3}$.

◆Dạng ❽: Vị trí tương đối hai mặt phẳng

Phương pháp

- Xét điểm mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P$, với:
- Mặt phẳng $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q$,
- Ta có các vị trí tương đối sau:

	Mặt phẳng (P)	
Mặt phẳng (Q)	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$	Mặt (P) ***cắt*** mặt (Q)
	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$	Mặt (P) ***song song*** mặt (Q)
	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$	Mặt (P) ***trùng*** mặt (Q)
	$A.A'+B.B'+C.C'=0$	Mặt (P) ***vuông góc*** mặt (Q)

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho ba mặt phẳng $(P_1): 2x-y-2z+1=0$, $(P_2): 4x-2y-4z+4=0$, $(P_3): x+4y-z+1=0$. Chứng minh $(P_1)//(P_2)$ và $(P_1)\perp(P_3)$.

Lời giải

VTPT của ba mặt phẳng là $\vec{n}_1=(2;-1;-2)$, $\vec{n}_2=(4;-2;-4)$, $\vec{n}_3=(1;4;-1)$.

Vì $\begin{cases}\vec{n}_1=\dfrac{1}{2}\cdot\vec{n}_2\\ 1\neq\dfrac{1}{2}\cdot 4\end{cases}$ nên $(P_1)//(P_2)$.

Vì $\vec{n}_1\perp\vec{n}_2$ (do $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_3=2\cdot1+(-1)\cdot4+(-2)\cdot(-1)=0$) nên $(P_1)\perp(P_3)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): m^2x-y+(m^2-2)z+2=0$ và $(\beta): 2x+m^2y-2z+1=0$. Hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau khi nào?

Lời giải

Ta có $\vec{n}_{(\alpha)}=(m^2;-1;m^2-2)$; $\vec{n}_{(\beta)}=(2;m^2;-2)$.

$(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow\vec{n}_{(\alpha)}\perp\vec{n}_{(\beta)}\Leftrightarrow\vec{n}_{(\alpha)}.\vec{n}_{(\beta)}=0\Leftrightarrow 2m^2-m^2-2(m^2-2)=0\Leftrightarrow m^2=4\Leftrightarrow|m|=2$.

Vậy $|m|=2$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x-3y+5z-1=0$ và $(Q): 4x+(m-3)y+(m^2+1)z-7=0$ (m là tham số). Tìm m để hai mặt phẳng song song.

Lời giải

$$(P)//(Q)\Leftrightarrow\frac{4}{2}=\frac{m-3}{-3}=\frac{m^2+1}{5}\neq\frac{-7}{-1}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{m-3}{-3}=2\\ \dfrac{m^2+1}{5}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-3\\ m=\pm3\end{cases}\Leftrightarrow m=-3.$$

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ cho $A(2;0;0), B(0;4;0), C(0;0;6), D(2;4;6)$. Gọi (P) là mặt phẳng song song với $mp(ABC)$,.(P). cách đều D và mặt phẳng (ABC). Phương trình của (P) là?

Lời giải

$(ABC): \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{6}=1\Leftrightarrow 6x+3y+2z-12=0$.

$(P)//(ABC)\Rightarrow(P): 6x+3y+2z+m=0\ (m\neq-12)$.

(P) cách đều D và mặt phẳng $(ABC)\Rightarrow d(D,(P))=d(A,(P))$

$\Leftrightarrow \dfrac{|6.2+3.4+2.6+m|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \dfrac{|6.2+3.0+2.0+m|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} \Leftrightarrow |36+m| = |12+m| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 36+m=12+m \\ 36+m=-12-m \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow m=-24$ (nhận).

Vậy phương trình của (P) là $6x+3y+2z-24=0$.

◆Dạng ❾: Ứng dụng tích có hướng

Phương pháp

- (1) Bốn điểm A,B,C,D tạo thành tứ diện: .... $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD} \neq 0$.
- $\Leftrightarrow$ A,B,C,D không đồng phẳng
- (2) Diện tích ΔABC: .... $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- $\Rightarrow$ Đường cao ΔABC: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC \Rightarrow AH = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$
- (3) Diện tích hình bình hành $ABCD$: .... $S_{ABCD} = 2S_{\Delta ABC} = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- (4) Thể tích tứ diện $ABCD$: .... $V = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.
- $\Rightarrow$ Đường cao chóp $ABCD$:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}d\left(A,(BCD)\right).S_{\Delta BCD} \Rightarrow d\left(A,(BCD)\right) = \frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]\right|}$$

Bài toán tính diện tích tam giác:

- Trong không gian $Oxyz$, cho $A(...),B(...),C(...)$. Tính diện tích tam giác ABC

Hướng giải quyết

- **Bước 1:** Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$.
- **Bước 2:** Sử dụng $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$ để tính diện tích ΔABC.
- *Nếu bài toán yêu cầu tính đường cao trong tam giác:*
- **Bước 3:** Sử dụng $S_{\Delta OAB} = \dfrac{1}{2}AH.OB \Rightarrow AH = \dfrac{2S_{\Delta OAB}}{OB}$ để tính độ dài đường cao AH.

Bài toán tính thể tích tứ diện:

- Trong không gian $Oxyz$, cho $A(...),B(...),C(...),D(...)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$

Hướng giải quyết

- **Bước 1:** Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}$.
- **Bước 2:** Sử dụng $V = \dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$ để tính thể tích tứ diện $ABCD$.
- *Nếu bài toán yêu cầu tính khoảng cách hạ từ đỉnh:*

- **Bước 3:** Sử dụng $V_{ABCD}=\frac{1}{3}d\left(A,\left(BCD\right)\right).S_{\Delta BCD}\Rightarrow d\left(A,\left(BCD\right)\right)=\frac{3V_{ABCD}}{S_{\Delta BCD}}$ để tính độ dài khoảng cách

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz,$ cho hai điểm $A\left(1;2;-1\right)$, $B\left(0;-2;3\right)$.

(1) Tính diện tích tam giác OAB với O là gốc tạo độ.

(2) Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác $OAB.$

Lời giải

(1) Tính diện tích tam giác OAB với O là gốc tạo độ.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{OA}=\left(1;2;-1\right)\\ \overrightarrow{OB}=\left(0;-2;3\right)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=\left(4;-3;-2\right)$

$\Rightarrow S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+\left(-3\right)^2+\left(-2\right)^2}=\frac{\sqrt{29}}{2}$.

(2) Tính độ dài đường cao AH hạ từ đỉnh A của tam giác $OAB.$

Mặt khác ta có: $OB=\sqrt{0^2+\left(-2\right)^2+3^2}=\sqrt{13}$ và $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}AH.OB$

$\Rightarrow AH=\frac{2S_{\Delta OAB}}{OB}=\frac{2.\frac{\sqrt{29}}{2}}{\sqrt{13}}=\sqrt{\frac{29}{13}}=\frac{\sqrt{377}}{13}$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A\left(1;-2;0\right)$, $B\left(2;0;3\right)$, $C\left(-2;1;3\right)$ và $D\left(0;1;1\right)$.

(1) Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

(2) Tính độ dài đường cao DH của tứ diện $ABCD$.

Lời giải

(1) Tính thể tích khối tứ diện $ABCD$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(1;2;3\right)$; $\overrightarrow{AC}=\left(-3;3;3\right)$; $\overrightarrow{AD}=\left(-1;3;1\right)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-3;-12;9\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=(-3).(-1)+(-12).3+9.1=-24$

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|-24\right|=4$.

(2) Tính độ dài đường cao DH của tứ diện $ABCD$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-3;-12;9\right)\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=3\sqrt{26}$

$$d\left(D;\left(ABC\right)\right)=DH=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\frac{24}{3\sqrt{26}}=\frac{4\sqrt{26}}{13}$$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ biết $A(3;-2;m), B(2;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;3)$. Tìm giá trị dương của tham số m để thể tích tứ diện bằng 8.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{DA}=(3;-2;m-3)$, $\overrightarrow{DB}=(2;0;-3)$, $\overrightarrow{DC}=(0;4;-3)$.

Thể tích tứ diện: $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right].\overrightarrow{DA}\right| \Leftrightarrow 8=\frac{1}{6}\left|24+8(m-3)\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-6 \\ m=6 \end{array}\right.$.

Vì m dương nên $m=6$.

©. Dạng toán rèn luyện

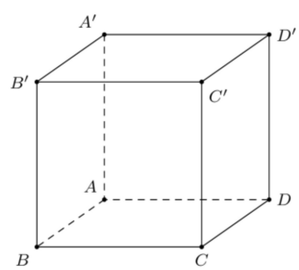
◆Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABCD)$?

A. $\overrightarrow{AC}$. **B.** $\overrightarrow{AC'}$. **C.** $\overrightarrow{AA'}$. **D.** $\overrightarrow{AD'}$.

Lời giải

Chọn C



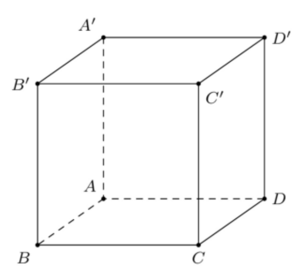
Dựa vào hình vẽ thì $\overrightarrow{AA'}$ là vectơ pháp tuyến của $(ABCD)$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ADD'A')$?

A. $\overrightarrow{CC'}$. **B.** $\overrightarrow{AD}$. **C.** $\overrightarrow{BC'}$. **D.** $\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Chọn D



Dựa vào hình vẽ thì $\overrightarrow{AB}$ là vectơ chỉ phương của $(ABCD)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0), B(0;4;0), C(0;0;5)$. Tọa độ nào sau đây là tọa độ vectơ chỉ phương của mặt phẳng (ABC)?

A. $(3;4;5)$. **B.** $(0;4;5)$. **C.** $(-3;4;0)$. **D.** $(-3;0;-5)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;4;0)$ là vectơ chỉ phương của (ABC).

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;2;1), B(-1;4;1), C(3;-2;5)$. Tọa độ nào sau đây là tọa độ vectơ pháp tuyến của của mặt phẳng (ABC)?

A. $(1;2;2)$. **B.** $(8;-16;16)$. **C.** $(-1;2;-2)$. **D.** $(1;4;4)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-4;2;0)\\ \overrightarrow{AC}=(0;-4;4)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_{(ABC)}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(8;16;16).$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $-2x+2y-z-3=0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là

A. $(4;-4;2)$. **B.** $(-2;2;-3)$. **C.** $(-4;4;2)$. **D.** $(0;0;-3)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào mặt phẳng (P), ta được vectơ pháp tuyến là $(-2;2;-1)$. Chọn đáp án A vì nó cùng phương với $(-2;2;-1)$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}-1=0$. Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là?

A. $(4;6;2)$. **B.** $(2;3;1)$. **C.** $(3;2;6)$. **D.** $(3;2;1)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào mặt phẳng (P), ta được vectơ pháp tuyến là $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$. Chọn đáp án C vì nó cùng phương với $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6};\frac{1}{2}\right)$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x-3z+1=0$. Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là:

A. $\vec{n}_2=(2;0;-3)$. **B.** $\vec{n}_1=(2;-3;1)$. **C.** $\vec{n}_3=(-2;0;-3)$. **D.** $\vec{n}_4=(-2;3;-1)$.

Lời giải

Chọn A

Do mặt phẳng $(\alpha): 2x-3z+1=0$ nên vectơ pháp tuyến của (α) là: $\vec{n}_2=(2;0;-3)$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ đi qua điểm nào dưới đây:

A. $M(-1;-1;-1)$. **B.** $N(1;1;1)$. **C.** $P(-3;0;0)$. **D.** $Q(0;0;-3)$.

Lời giải

Chọn B

Thế $M(-1;-1;-1)$ vào mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ ta được $-1+(-1)+(-1)-3=0$ $\Leftrightarrow -6=0$ (không thỏa). Do đó (P) không đi qua $M(-1;-1;-1)$.

Thế $N(1;1;1)$ vào mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ ta được $1+1+1-3=0$ $\Leftrightarrow 0=0$ (thỏa). Do đó (P) đi qua $N(1;1;1)$.

Thế $P(-3;0;0)$ vào mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ ta được $-3+0+0-3=0$ $\Leftrightarrow -6=0$ (không thỏa). Do đó (P) không đi qua $P(-3;0;0)$.

Thế $Q(0;0;-3)$ vào mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ ta được $0+0+(-3)-3=0$ $\Leftrightarrow -6=0$ (không thỏa). Do đó (P) đi qua $Q(0;0;-3)$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ **không** đi qua điểm nào dưới đây:

A. $P(0;2;0)$. **B.** $Q(0;0;3)$. **C.** $M(1;2;3)$. **D.** $N(1;0;0)$.

Lời giải

Chọn C

Thế $P(0;2;0)$ vào mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ ta được $\frac{0}{1}+\frac{2}{2}+\frac{0}{3}=1$ $\Leftrightarrow 1=1$ (thỏa). Do đó (P) đi qua $P(0;2;0)$.

Thế $Q(0;0;3)$ vào mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ ta được $\frac{0}{1}+\frac{0}{2}+\frac{3}{3}=1$ $\Leftrightarrow 1=1$ (thỏa). Do đó (P) đi qua $Q(0;0;3)$.

Thế $M(1;2;3)$ vào mặt phẳng $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ ta được $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{3}=1$ $\Leftrightarrow 3=1$ (không thỏa). Do đó (P) không đi qua $M(1;2;3)$.

Thế $N(1;0;0)$ vào mặt phẳng $(P):\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ ta được $\frac{1}{1}+\frac{0}{2}+\frac{0}{3}=1 \Leftrightarrow 1=1$ (thỏa). Do đó (P) đi qua $N(1;0;0)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng nào sau đây đi qua gốc tọa độ?

A. $x+20=0$. **B.** $x-2024=0$. **C.** $y+2025=0$. **D.** $2x+5y-8z=0$.

Lời giải

Chọn D

Thế $O(0;0;0)$ vào mặt phẳng $x+20=0$ ta được $0+20=0$ (không thỏa). Do đó mặt phẳng $x+20=0$ không đi qua gốc tọa độ.

Thế $O(0;0;0)$ vào mặt phẳng $x-2024=0$ ta được $0-2024=0$ (không thỏa). Do đó mặt phẳng $x-2024=0$ không đi qua gốc tọa độ.

Thế $O(0;0;0)$ vào mặt phẳng $y+2025=0$ ta được $0+2025=0$ (không thỏa). Do đó mặt phẳng $y+2025=0$ không đi qua gốc tọa độ.

Thế $O(0;0;0)$ vào mặt phẳng $2x+5y-8z=0$ ta được $0+0+0=0$ (thỏa). Do đó mặt phẳng $2x+5y-8z=0$ đi qua gốc tọa độ.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (Oxy) đi qua điểm nào sau đây:

A. $M(1;2;0)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(1;0;-3)$. **D.** $Q(0;2;-5)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$.

Thế $M(1;2;0)$ vào mặt phẳng (Oxy) ta được $0=0$ (thỏa). Do đó mặt phẳng (Oxy) đi qua $M(1;2;0)$.

Thế $N(3;2;-1)$ vào mặt phẳng (Oxy) ta được $-1=0$ (không thỏa). Do đó mặt phẳng (Oxy) không đi qua $N(3;2;-1)$.

Thế $P(1;0;-3)$ vào mặt phẳng (Oxy) ta được $-3=0$ (không thỏa). Do đó mặt phẳng (Oxy) không đi qua $P(1;0;-3)$.

Thế $Q(0;2;-5)$ vào mặt phẳng (Oxy) ta được $-5=0$ (không thỏa). Do đó mặt phẳng (Oxy) không đi qua $Q(0;2;-5)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $A(2;-1;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;3;-1)$ là:

A. $(\alpha):2x+3y-z-2=0$. **B.** $(\alpha):2x+3y-z+2=0$.

C. $(\alpha):2x-y+3z-2=0$. **D.** $(\alpha):2x-y+3z+2=0$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

Do đó $2(x-2)+3(y+1)-1(z-3)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-z+2=0$

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+4=0$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với (P)?

A. $2x+y-2z+5=0$.
B. $x+2y+2z-5=0$.
C. $x+3y-z+1=0$.
D. $x+y+z-6=0$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+4=0$ có VTPT $\vec{n}=(2;1;-2)$

Mặt phẳng $2x+y-2z+5=0$ có VTPT $\vec{n}_1=(2;1;-2)$

Ta có $\vec{n}_1=\vec{n}$ nên hai mặt phẳng không vuông góc.

Mặt phẳng $x+2y+2z-5=0$ có VTPT $\vec{n}_2=(1;2;2)$

Ta có $\vec{n}_2.\vec{n}=0$ nên hai mặt phẳng vuông góc.

Mặt phẳng $x+3y-z+1=0$ có VTPT $\vec{n}_3=(1;3;-1)$

Ta có $\vec{n}_3.\vec{n}=7\neq 0$ nên hai mặt phẳng không vuông góc.

Mặt phẳng $x+y+z-6=0$ có VTPT $\vec{n}_4=(1;1;1)$

Ta có $\vec{n}_4.\,\vec{n}=1\neq 0$ nên hai mặt phẳng không vuông góc.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách từ $M(1;2;-3)$ đến $(P): x+2y+2z-10=0$ là

A. 3.
B. $\frac{2}{3}$.
C. $\frac{4}{3}$.
D. $\frac{11}{3}$.

Lời giải

Chọn D

$$d(M,(P))=\frac{|1+4-6-10|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{11}{3}$$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, vectơ nào sau đây không phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P): x+3y-5z+2=0$.

A. $\vec{n}=(-1;-3;5)$.
B. $\vec{n}=(2;\ 6;\ -10)$.
C. $\vec{n}=(-2;-6;-10)$.
D. $\vec{n}=(-3;-9;15)$.

Lời giải

Chọn C

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $\vec{n}_{(P)}=(1;3;-5)$.

Vì vectơ $\vec{n}=(-2;-6;-10)$ không cùng phương với $\vec{n}_{(P)}$ nên không phải là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, véctơ nào sau đây là một véctơ pháp tuyến của (P), biết $\vec{a}=(-1;-2;-2)$, $\vec{b}=(-1;0;-1)$ là cặp véctơ chỉ phương của (P)?

A. $\vec{n}=(2;1;2)$. **B.** $\vec{n}=(2;-1;-2)$. **C.** $\vec{n}=(2;1;-2)$. **D.** $\vec{n}=(-2;1;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\left[\vec{a};\vec{b}\right]=(2;1;-2)$, nên véctơ $\vec{n}=(2;1;-2)$ là một véctơ pháp tuyến của (P).

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, phương trình mặt phẳng đi qua $A(1;-1;2)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;2;-6)$ là

A. $4x+2y-6z+5=0$. **B.** $2x+y-3z+5=0$.

C. $2x+y-3z+2=0$. **D.** $2x+y-3z-5=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $(P):\begin{cases} \bullet \text{ Qua } A(1;-1;2) \\ \bullet \text{ VTPT}: \vec{n}_{(P)}=(4;2;-6) \end{cases}$

$\Rightarrow (P): 4(x-1)+2(y+1)-6(z-2)=0 \Leftrightarrow (P): 2x+y-3z+5=0.$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;1); B(1;2;3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng AB.

A. $(P): x+y+2z-3=0$. **B.** $(P): x+y+2z-6=0$.

C. $(P): x+3y+4z-7=0$. **D.** $(P): x+3y+4z-26=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(P):\begin{cases} \bullet \text{ Qua } A(0;1;1) \\ \bullet \text{ VTPT}: \vec{n}_{(P)}=\overrightarrow{AB}=(1;1;2) \end{cases}$

$\Rightarrow (P): 1(x-0)+1(y-1)+2(z-1)=0 \Leftrightarrow (P): x+y+2z-3=0.$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1), B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

A. $2y+3z-11=0$. **B.** $2x-3y-11=0$. **C.** $x-3y+2z-5=0$. **D.** $3y+2z-11=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$.

Từ giả thiết suy ra $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;8;12)$ là vectơ pháp tuyến của mp(Q).

Mp (Q) đi qua điểm $A(2;4;1)$ suy ra phương trình tổng quát của mp(Q) là:

$0(x-2)+8(y-4)+12(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

Câu 20: Cho hai mặt phẳng $(\alpha):3x-2y+2z+7=0,(\beta):5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O đồng thời vuông góc với cả (α) và (β) là:

A. $2x-y-2z=0$. **B.** $2x+y-2z=0$. **C.** $2x-y+2z=0$. **D.** $2x+y-2z+1=0$.

Lời giải

Chọn B

Véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\overrightarrow{n_\alpha}=(3;-2;2),\overrightarrow{n_\beta}=(5;-4;3)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{n_\alpha};\overrightarrow{n_\beta}\right]=(2;1;-2)$

Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O,VTPT $\vec{n}=(2;1;-2)$: $2x+y-2z=0$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;-2;-2),B(3;2;0),C(0;2;1)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là

A. $2x-3y+6z+12=0$. **B.** $2x+3y-6z-12=0$.
C. $2x-3y+6z=0$. **D.** $2x+3y+6z+12=0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=(0;4;2)$, $\overrightarrow{AC}=(-3;4;3)$, $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(4;-6;12)$.

Ta có $\vec{n}=(4;-6;12)$ cùng phương $\vec{n}_1=(2;-3;6)$

Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $C(0;2;1)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(2;-3;6)$ nên (ABC) có phương trình là:

$2(x-0)-3(y-2)+6(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-3y+6z=0$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm là: $2x-3y+6z=0$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2),B(2;-2;1),C(-2;1;0)$. Khi đó, phương trình mặt phẳng (ABC) là $ax+y-z+d=0$. Hãy xác định a và d.

A. $a=6, d=-6$. **B.** $a=1, d=1$. **C.** $a=-1, d=-6$. **D.** $a=-6, d=6$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-3;-1)$; $\overrightarrow{AC}=(-2;0;-2)$.

$$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 0 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -2 & -2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & -3\\ -2 & 0\end{vmatrix}\right)=(6;6;-6).$$

Chọn $\vec{n}=\frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(1;1;-1)$ là một VTPT của $mp(ABC)$. Ta có pt $mp(ABC)$ là:

$x+y-1-z+2=0 \Leftrightarrow x+y-z+1=0$. Vậy $a=1, d=1$

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng đi qua điểm $A(1;3;-2)$ và song song với mặt phẳng $(P): 2x-y+3z+4=0$ là

A. $2x+y+3z+7=0$. **B.** $2x+y-3z+7=0$.
C. $2x-y+3z+7=0$. **D.** $2x-y+3z-7=0$.

Lời giải

Chọn C

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Vì $(\alpha)//(P) \Rightarrow \vec{n}_{(\alpha)}=\vec{n}_{(P)}=(2;-1;3)$

Ta có: (α) đi qua $A(1;3;-2)$ và có véctơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(\alpha)}=(2;-1;3)$.

Do đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là:

$2(x-1)-1(y-3)+3(z+2)=0$ hay $2x-y+3z+7=0$

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-1;-3)$ và mặt phẳng $(P): 3x-2y+4z-5=0$. Mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với mặt phẳng (P) có phương trình:

A. $(Q): 3x-2y+4z-4=0$. **B.** $(Q): 3x-2y+4z+4=0$.
C. $(Q): 3x-2y+4z+5=0$. **D.** $(Q): 3x+2y+4z+8=0$..

Lời giải

Chọn B

Do (Q) song song với (P) nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2;4)$.

Phương trình mặt phẳng (Q): $3(x-2)-2(y+1)+4(z+3)=0 \Leftrightarrow 3x-2y+4z+4=0$.

Câu 25: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;3)$, $B(3;4;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $2x+y+mz-1=0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=\pm 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)\Rightarrow AB=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3\ \ (1)$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P): $d(A,(P))=\dfrac{|2.1+2+m.3-1|}{\sqrt{2^2+1^2+m^2}}=\dfrac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}}\quad (2)$.

Để $AB=d(A,(P))\Rightarrow 3=\dfrac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}}\Leftrightarrow 9(5+m^2)=9(m+1)^2\Leftrightarrow m=2$.

⬩Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+3y+z-2024=0$.

(a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;3;1)$.

(b) Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(6;9;3)$.

(c) Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-4;-6;-2)$.

(d) Điểm $M(0;0;2024)$ không thuộc mặt phẳng (P).

Lời giải

(a) Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;3;1)$.

Véctơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_2(2;3;1)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(6;9;3)$.

Ta có $\vec{n}=(6;9;3)=3(2;3;1)$

» Chọn ĐÚNG.

(c) Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-4;-6;-2)$.

$\vec{n}=(-4;-6;-2)=-2(2;3;1)$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Điểm $M(0;0;2024)$ không thuộc mặt phẳng (P).

Thay điểm $M(0;0;2024)$ vào mặt phẳng $(P): 2.0+3.0+2024-2024=0\Rightarrow M\in(P)$

» Chọn ĐÚNG.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0);B(4;1;2)$.

(a) $\overrightarrow{AB}=(3;1;2)$

(b) Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là $3x+y+2z-3=0$.

(c) Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB thì $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

(d) Mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB có phương trình là $3x+y+2z-12=0$.

Lời giải

(a) $\overrightarrow{AB}=(3;1;2)$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;1;2)$

» Chọn ĐÚNG.

(b) Mặt phẳng đi qua A và vuông góc với AB có phương trình là $3x+y+2z-3=0$.

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua $A(1;0;0)$ và vuông góc với AB

Suy ra mặt phẳng (Q) nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=(3;1;2)$ làm véc tơ pháp tuyến.

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) cần tìm: $3(x-1)+y+2z=0 \Leftrightarrow 3x+y+2z-3=0$

» Chọn ĐÚNG.

(c) Nếu I là trung điểm đoạn thẳng AB thì $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

I là trung điểm đoạn thẳng AB nên $I\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB có phương trình là $3x+y+2z-12=0$.

Mặt phẳng trung trực đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua I và vuông góc AB nên có phương trình là $3\left(x-\frac{5}{2}\right)+y-\frac{1}{2}+2(z-1)=0 \Leftrightarrow 3x+y+2z-10=0$

» Chọn SAI.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;4);B(2;7;9);C(0;9;13)$; $D(1;8;10)$. Mệnh đề nào sau đây đúng và mệnh đề nào sai?

(a) $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$

(b) $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$

(c) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm B và vuông góc với AC là $x-8y-9z+14=0$

(d) Phương trình mặt phẳng chứa AB song song với CD là $8x-7y-13z+50=0$

Lời giải

(a) $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$; $\overrightarrow{AC}=(-1;8;9)$,

$\overrightarrow{AB}=(1;6;5)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\vec{i}+6\vec{j}+5\vec{k}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 1.(-1)+6.8+5.9=0$ vô lí.

» Chọn SAI.

(c) Phương trình mặt phẳng đi qua điểm B và vuông góc với AC là $x-8y-9z+14=0$.
Phương trình mặt phẳng đi qua điểm B và vuông góc với AC có dạng:
$-(x-2)+8(y-7)+9(z-9)=0\Leftrightarrow x-8y-9z+135=0$

» Chọn SAI.

(d) Phương trình mặt phẳng chứa AB song song với CD là $8x-7y-13z+50=0$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;6;5);\overrightarrow{CD}=(1;-1;-3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right]=(-13;8;-7)$

Phương trình mặt phẳng cần tìm:

$-13(x-1)+8(y-1)-7(z-4)=0\Leftrightarrow 13x-8y+17z-33=0$.

» Chọn SAI.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;4)$, $B(2;7;9)$, $C(0;9;13)$.

(a) $\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$

(b) Mặt phẳng (ABC) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;1)$

(c) (ABC): $x-y+z-4=0$

(d) $O\in(ABC)$

Lời giải

(a) $\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$.

$A(1;1;4)$, $B(2;7;9)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(1;6;5)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Mặt phẳng (ABC) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;1)$.

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(14;-14;14)=14(1;-1;1)$ nên (ABC) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;1)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) (ABC): $x-y+z-4=0$

(ABC) đi qua $A(1;1;4)$ có vtpt $\vec{n}=(1;-1;1)$ nên có phương trình $x-y+z-4=0$.

» Chọn ĐÚNG.

(d) $O \in (ABC)$.

Tọa độ O không thỏa phương trình (ABC) nên $O \notin (ABC)$.

» Chọn SAI.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x+2y-z-1=0$ $(Q): 3x-y+z-5=0$ và $(R): 2x+4y-mz-2=0$.

(a) $(P)//(Q)$

(b) (α) qua O và song song (P) có phương trình là $(\alpha): x+2y-z=0$

(c) $(P)//(R)$ khi $m=2$

(d) $(P)\perp(R)$ khi $m=-10$

Lời giải

(a) $(P)//(Q)$

(P) có VTPT $\overrightarrow{n_1}=(1;2;-1)$, (Q) có VTPT $\overrightarrow{n_2}=(3;-1;1)$

$\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0$ nên $(P)\perp(Q)$.

» Chọn SAI.

(b) (α) qua O và song song (P) có phương trình là $(\alpha): x+2y-z=0$.

$(\alpha)//(P)$ nên $(\alpha): x+2y-z+D=0$.

$O \in (\alpha) \Rightarrow D=0$. Vậy $(\alpha): x+2y-z=0$

» Chọn ĐÚNG.

(c) $(P)//(R)$ khi $m=2$.

(R) có VTPT $\overrightarrow{n_3}=(2;4;-m)$.

$$(P)//(R) \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n_1}=k.\overrightarrow{n_3} \\ -1 \neq k(-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ k=\dfrac{1}{2} \\ k \neq \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ (vô lý).}$$

Vậy không có giá trị của m.

» Chọn SAI.

(d) $(P)\perp(R)$ khi $m=-10$.

$(P)\perp(R) \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_3}=0 \Leftrightarrow 1.2+2.4-1.(-m)=0 \Leftrightarrow m=-10$.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho $M\left(-2;-4;3\right)$ và $\left(P\right): 2x-y+2z-3=0$, $\left(Q\right): 2x-y+2z-6=0$

(a) $d\left(M,\left(P\right)\right)=2$

(b) M cách đều hai mặt phẳng $\left(P\right)$ và $\left(Q\right)$

(c) $d\left(\left(P\right),\left(Q\right)\right)=1$

(d) $\left(\alpha\right)$ song song và cách $\left(Q\right)$ một khoảng bằng 2 có phương trình là $\left(\alpha\right): 2x-y+2z-9=0$

Lời giải

(a) $d\left(M,\left(P\right)\right)=2$

$$d\left(M,\left(P\right)\right)=\frac{\left|2.(-2)+4+2.3-3\right|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2+2^2}}=1.$$

» Chọn SAI.

(b) M cách đều hai mặt phẳng $\left(P\right)$ và $\left(Q\right)$.

$$d\left(M,\left(Q\right)\right)=\frac{\left|2.(-2)+4+2.3-6\right|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2+2^2}}=0\Rightarrow M\in\left(Q\right)$$

» Chọn SAI.

(c) $d\left(\left(P\right),\left(Q\right)\right)=1$.

$$d\left(\left(P\right),\left(Q\right)\right)=d\left(M,\left(P\right)\right)=\frac{\left|2.(-2)+4+2.3-3\right|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2+2^2}}=1.$$

» Chọn ĐÚNG.

(d) $\left(\alpha\right)$ song song và cách $\left(Q\right)$ một khoảng bằng 2 có phương trình là $\left(\alpha\right): 2x-y+2z-9=0$.

$\left(\alpha\right)//\left(Q\right)$ nên $\left(\alpha\right): 2x-y+2z+D=0$.

$$d\left(\left(\alpha\right),\left(Q\right)\right)=2\Leftrightarrow d\left(M,\left(\alpha\right)\right)\Leftrightarrow\frac{\left|2.(-2)+4+2.3+D\right|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2+2^2}}=2\Leftrightarrow D=0$$

Vậy $\left(\alpha\right):\left(P\right): 2x-y+2z=0$

» Chọn SAI.

Câu 7: Cho hai mặt phẳng $(P): 2x-y+2z-5=0$; $(Q): 4x-2y+4z+1-m=0$ và điểm $M(2;1;5)$

(a) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{8}{3}$.

(b) Với $m=0$ thì khoảng cách M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{9}{2}$.

(c) Với $m=3$ thì khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 3.

(d) Có hai giá trị của m để khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) bằng 1. Khi đó tổng tất cả giá trị của m bằng 5.

Lời giải

(a) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{8}{3}$.

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P): $d(M;(P))=\frac{|2.2-1+2.5-5|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{8}{3}$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Với $m=0$ thì khoảng cách M đến mặt phẳng (Q) bằng $\frac{9}{2}$.

Với $m=0$ thì $(Q): 4x-2y+4z+1=0$.

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q): $d(M;(Q))=\frac{|4.2-2.1+4.5+1|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}}=\frac{9}{2}$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Với $m=3$ thì khoảng cách giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) bằng 3.

Với $m=3$ thì $(Q): 4x-2y+4z-2=0 \Leftrightarrow (Q): 2x-y+2z-1=0$.

Chọn $N(0;-5;0)\in(P)$. Vì $(P)//(Q)$ nên

$$d((P);(Q))=d(N;(Q))=\frac{|2.0-(-5)+2.0-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{4}{3}.$$

» Chọn SAI.

(d) Có hai giá trị của m để khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) bằng 1. Khi đó tổng tất cả giá trị của m bằng 5.

khoảng cách từ M đến mặt phẳng (Q) bằng 1

$$\Leftrightarrow d(M;(Q))=1 \Leftrightarrow \frac{|4.2-2.1+4.5+1-m|}{\sqrt{4^2+(-2)^2+4^2}}=1$$

$\Leftrightarrow \dfrac{|27-m|}{6}=1 \Leftrightarrow |27-m|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}27-m=6\\27-m=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=21\\m=33\end{array}\right.$.

Vậy tổng các giá trị của m bằng $21+33=54$.

» Chọn SAI.

◆Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z-7=0$, Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α) có dạng $\dfrac{a}{b}$ tối giản; $a;b\in\mathbb{Z}$. Tính $T=2a-b$?

Lời giải

Trả lời: 13

Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (α):

$$d(M;(\alpha))=\frac{|2.1-2.2+(-1)-7|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{8}{3}=\frac{a}{b}\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=3\end{cases}.$$

Vậy $T=2a-b=13$.

Câu 2: Cho điểm $A(1;2;-1)$ và mặt phẳng $(\alpha):x-2y+2z+2=0$. Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) và cách A một khoảng 1 có dạng $(\alpha):x-by+cz+d=0$. Khi đó $S=3b-c+d$?

Lời giải

Trả lời: 12

Mặt phẳng (β) song song với mặt phẳng (α) nên mặt phẳng (β) có dạng: $x-2y+2z+d=0;\ (d\neq 2)$.

Khoảng cách từ M đến (β) bằng $1\Leftrightarrow \dfrac{|1-2.2+2(-1)+d|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=1\Leftrightarrow |d-5|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=8\\d=2\ (l)\end{array}\right.$.

Do đó: $(\beta):x-2y+2z+8=0\Rightarrow\begin{cases}b=2\\c=2\\d=8\end{cases}$.

Vậy $S=3.2-2+8=12$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(a;b;1)$ thuộc mặt phẳng $(P):2x-y+z-3=0$. Tính giá trị biểu thức $S=2\text{a}-b$.

Lời giải

Trả lời: 2

Vì $M\in(P)$ nên $2a-b+1-3=0\Leftrightarrow 2a-b=2$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt phẳng (P) qua $A(2;1;-3)$ và song song với mặt phẳng $(Q): x-y+2z-1=0$ có dạng $x-y+az+b=0$ Tính giá trị biểu thức $S=\text{a}-b$
.

Lời giải

Trả lời: -3

Vì (P) // $(Q): x-y+2z-1=0$, nên VTPT của $(Q): \vec{n}_{(Q)}=(1;-1;2)$ cũng là VTPT của (P)
.

Ta có mặt phẳng (P) qua $A(2;1;-3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-1;2)$

Nên phương trình mặt phẳng (P) là: $1.(x-2)-1(y-1)+2(z+3)=0$ hay $x-y+2z+5=0$

Suy ra $\begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow a-b=2-5=-3$.

Câu 5: Trong gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;1)$, $B(1;0;4)$, $C(0;-2;-1)$. Mặt phẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC có phương trình dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính giá trị biểu thức $S=a+b+c$.

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có $\overrightarrow{BC}=(-1;-2;-5)$.

Mặt phẳng qua $A(2;-1;1)$ và vuông góc với đường thẳng BC nhận vectơ $\overrightarrow{BC}=(-1;-2;-5)$ là một vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $-(x-2)-2(y+1)-5(z-1)=0 \Leftrightarrow -x-2y-5z+5=0 \Leftrightarrow x+2y+5z-5=0$

$\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5 \\ c=-5 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=2$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): ax+by+cz-27=0$ qua hai điểm $A(3;2;1)$ và $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x+y+z+4=0$. Tính tổng $S=a+b+c$.

Lời giải

Trả lời: -12

Cách 1:

$\overrightarrow{AB}=(-6;3;1)$, $\vec{n}_{(Q)}=(3;1;1)$.

(P) qua hai điểm $A(3;2;1), B(-3;5;2)$ và vuông góc mặt phẳng (Q), nên (P) có cặp vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(-6;3;1)$, $\vec{n}_{(Q)}=(3;1;1)$.

Suy ra (P) có VTPT $\vec{n}_{(P)}=\left[\overrightarrow{AB};\vec{n}_{(Q)}\right]=(2;9;-15)$, và qua điểm $A(3;2;1)$.

Phương trình $(P): 2x+9y-15z-4=0 \Leftrightarrow 6x+27y-45z-12=0$.

Vậy $S=a+b+c=-12$.

Cách 2:

Ta có $\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)$, $\vec{n}_{(Q)}=(3;1;1)$.

Mặt phẳng (P) qua hai điểm $A(3;2;1)$ và $B(-3;5;2)$ và vuông góc với mặt phẳng (Q)

$\begin{cases} 3a+2b+c=27 \\ -3a+5b+2c=27 \\ 3a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=27 \\ c=-45 \end{cases}$. Vậy $S=a+b+c=-12$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) đi qua $A(1;0;0)$; $B(0;0;2)$ và cắt tia Oy tại điểm C sao cho thể tích khối chóp $OABC$ bằng 2. Biết điểm $S(-1;6;m)$ thuộc (P), thì m bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $C(0;y;0)\in Oy$ với $y>0$;

Ta có: $OA=1$, $OB=2$, $OC=y$ và OA, OB, OC đôi một vuông góc;

$\Rightarrow V_{OABC}=\dfrac{1}{6}OA.OB.OC=\dfrac{1}{3}y$.

Giả thiết $\Rightarrow \dfrac{1}{3}y=2\Rightarrow y=6\Rightarrow C(0;6;0)$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{2}=1$.

Điểm $S(-1;6;m)$ thuộc (P) $\Leftrightarrow \dfrac{-1}{1}+\dfrac{6}{6}+\dfrac{m}{2}=1\Leftrightarrow m=2$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha):x+2y-z-1=0$ và $(\beta):2x+4y-mz+2=0$. Tìm m để (α) và (β) song song với nhau.

Lời giải

Trả lời: 2

Vec-tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng lần lượt là $\vec{n}_{(\alpha)}=(1;\ 2;-1)$; $\vec{n}_{(\beta)}=(2;\ 4;-m)$

Để (α) và (β) song song với nhau thì: $\vec{n}_{(\alpha)}=k.\vec{n}_{(\beta)}\left(k\in\mathbb{N}^*\right)\Leftrightarrow \dfrac{2}{1}=\dfrac{4}{2}=\dfrac{m}{1}\Rightarrow m=2$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;-2)$ và $(P):x-y+z-4=0$. Phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P), có dạng $(Q):ax+by+cz+2=0$. Tính $T=a+b+c$.

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;-2)=2(1;1;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P=(1;-1;1)$.

Mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{n}_P\right] = (0;-4;-4) = -4(0;1;1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (Q): $y + z - 2 = 0 \Leftrightarrow -y - z + 2 = 0 \Rightarrow T = a + b + c = -2$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;1;2), B(2;-2;1), C(-2;1;0), M(3;0;1)$. Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ABC), (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 1,73

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (2;-3;-1); \overrightarrow{AC} = (-2;0;-2)$.

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}\right) = (6;6;-6).$$

Chọn $\vec{n} = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1;1;-1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $x + y - 1 - z + 2 = 0 \Leftrightarrow x + y - z + 1 = 0$.

$$d(M,(ABC)) = \frac{|3+0-1+1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3} \approx 1,73.$$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, biết mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng-7 và cách điểm $A(2,-3,4)$ một khoảng bằng 3. Tính tích hai hệ số tự do của phương trình tổng quát mặt phẳng (P) (biết hoành độ của vectơ pháp tuyến của (P) bằng 1).

Lời giải

Trả lời: 175

$(P)//(Q): 2x - 4y + 4z + 3 = 0 \Rightarrow (P): 2x - 4y + 4z + D = 0 \, (D \neq 3)$

$$d(A,(P)) = 3 \Leftrightarrow \frac{|4+12+16+D|}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{|D+32|}{6} = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} D = -14 \\ D = -50 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow (P): 2x - 4y + 4z - 14 = 0; 2x - 4y + 4z - 50 = 0$.

Vì hoành độ của vectơ pháp tuyến của (P) bằng 1nên phương trình của các mặt phẳng cần tìm là: $x - 2y + 2z - 7 = 0; x - 2y + 2z - 25 = 0$.

Khi đó tích hai hệ số tự do của phương trình tổng quát mặt phẳng (P) là $(-7).(-25) = 175$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0), N(0;n;0), P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2 + n^2 + p^2 = 3, m, n, p$ là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP). (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,58

Phương trình mặt phẳng (MNP) có phương trình là $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1$.

Theo bất đẳng thức Bunhia-Copsky ta có:

$$\left(m^2+n^2+p^2\right)\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\right)\geq 9 \Rightarrow \frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\geq \frac{9}{m^2+n^2+p^2}=3$$

Khi đó: $d\left(O;(P)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}}}\leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Dấu bằng xảy ra khi $m=n=p=1$.

Vậy khoảng cách lớn nhất từ O đến (MNP) bằng $\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0,58$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;2)$ và mặt phẳng $(P):(m-1)x+y+mz-1=0$, với m là tham số. Tìm m để khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có $d\left(A,(P)\right)=\dfrac{|m-1+1+2m-1|}{\sqrt{(m-1)^2+1+m^2}}=\sqrt{\dfrac{(3m-1)^2}{2\left(m^2-m+1\right)}}$.

Xét $f(m)=\dfrac{(3m-1)^2}{2\left(m^2-m+1\right)}\Rightarrow f'(m)=\dfrac{(5-m)(3m-1)}{2\left(m^2-m+1\right)^2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{3} \\ m=5 \end{array}\right.$.

m	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		5		$+\infty$
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(m)$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{14}{3}$	$\searrow$	$\frac{9}{2}$

Vậy $\max d\left(A,(P)\right)=\sqrt{\frac{14}{3}}$ khi $m=5$.