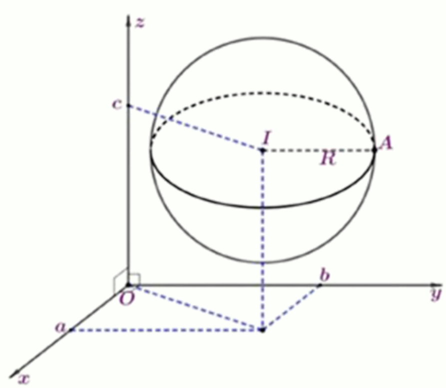
MỤC LỤC

Ⓐ. Tóm tắt kiến thức

1. Phương trình mặt cầu

Phương trình mặt cầu:

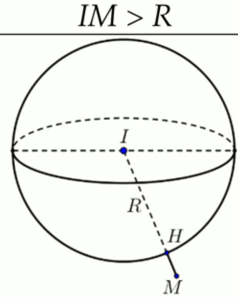
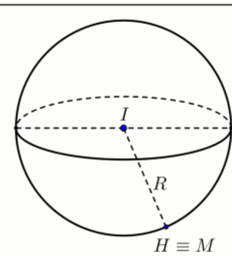
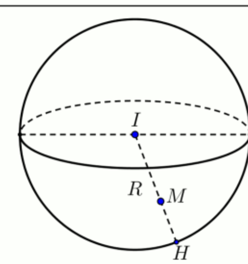
		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$	$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
Xác Định	*Tâm*	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x;y;z$ $\div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2+b^2+c^2-d>0$.



2. Vị trí tương đối

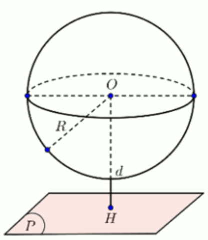
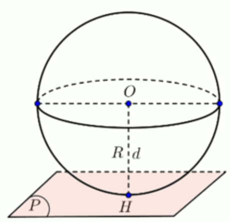
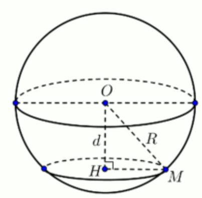
Giữa mặt cầu và điểm:

- Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M và $S(I;R)$. Khi đó:

	Điểm		
	Nằm ngoài $\Leftrightarrow IM\cap(S)=H$	*Nằm trên* $\Leftrightarrow IM\cap(S)=M\equiv H$	*Nằm trong* $\Leftrightarrow IM\cap(S)=\varnothing$
	$IM>R$	$IM=R$	$IM<R$
Mặt cầu			

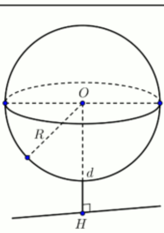
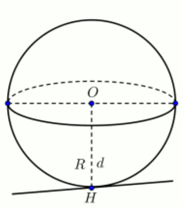
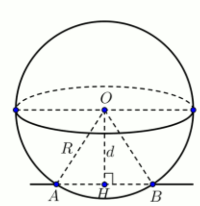
Giữa mặt cầu và mặt phẳng:

- Trong không gian $Oxyz$, cho $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $S(I;R)$. Khi đó:

	Mặt phẳng		
Mặt cầu	*Không cắt* $\Leftrightarrow (\alpha)\cap(S)=\varnothing$	*Tiếp xúc* $\Leftrightarrow (\alpha)\cap(S)=\{M\}$	*Cắt theo giao tuyến là đường tròn* $\Leftrightarrow (\alpha)\cap(S)=C(I';r)$
	$d(I;(\alpha))>R$	$d(I;(\alpha))=R$ $\Leftrightarrow$ Mặt phẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm M.	$d(I;(\alpha))<R$ $\Leftrightarrow (\alpha)$ cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn có tâm I' và bán kính r. $R=\sqrt{r^2+d^2(I;(\alpha))}$.
			

Giữa mặt cầu và mặt phẳng:

- Trong không gian $Oxyz$, cho $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ và $S(I;R)$. Khi đó:

	Đường thẳng		
Mặt cầu	*Không cắt* $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\varnothing$	*Tiếp xúc* $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\{H\}$	*Cắt tại hai điểm A;B* $\Leftrightarrow \Delta\cap(S)=\{A;B\}$
	$d(I;\Delta)>R$	$d(I;\Delta)=R$ $\Leftrightarrow$ Đường thẳng tiếp xúc mặt cầu tại điểm H	$d(I;\Delta)<R$ $\Leftrightarrow R=\sqrt{\dfrac{AB^2}{4}+d^2(I;\Delta)}$
			

Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

◆Dạng ❶: Xác định tâm – bán kính – nhận biết phương trình mặt cầu

Phương pháp

		LOẠI 1	LOẠI 2
Phương Trình		$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$	$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$
Nhận xét		(1) Hệ số trước x,y,z bằng nhau và bằng 1. (2) Hệ số trước các ngoặc bằng nhau và bằng 1. (3) Vế phải là hằng số dương.	(1) Hệ số trước x^2,y^2,z^2 bằng nhau và bằng 1. (2) Phương trình đầy đủ x^2,y^2,z^2 (3) Thỏa mãn điều kiện tồn tại $a^2+b^2+c^2-d>0$
Xác Định	*Tâm*	Lấy hệ số tự do trong ngoặc $\div -1$.	Lấy hệ số trước $x;y;z$ $\div -2$.
	Bán Kính	Lấy căn bậc 2 vế phải.	$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$. Điều kiện tồn tại: $a^2+b^2+c^2-d>0$.

Định nghĩa $S(I;R)=\{M \mid IM=R>0\}$.

- Cho hai điểm A,B cố định.
- Nếu $MA\perp MB$ thì tập hợp điểm M là mặt cầu (S) có tâm I là trung điểm AB và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ tâm và bán kính các mặt cầu sau:

(1) $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$. (2) $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$

Lời giải

(1) $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$.

Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0$ là $I(1;-2;3)$ và

$R=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2-(-2)}=4$

(2) $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ có tọa độ tâm $I(1;-2;0)$ và $R=3$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

(1) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1-2xy$ (2) $x^2+y^2+z^2-2x+2y=0$

(3) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0$ (4) $(x+y)^2=2xy-z^2+1-4x$

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu và mặt cầu đấy nhận $I(-1;1;0)$ làm tâm?

Lời giải

(1) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1-2xy$

$2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1-2xy \Leftrightarrow 2x^2+2y^2=x^2+y^2+2xy-z^2+2x-1-2xy$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+z^2=0$ không là phương trình mặt cầu.

(2) $x^2+y^2+z^2-2x+2y=0$

$x^2+y^2+z^2-2x+2y=0$

Kiểm tra: $1^2+(-1)^2=2>0$ là phương trình mặt cầu, có tâm $I(1;-1;0)$.

(3) $x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0$

$x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0$.

Kiểm tra: $(-1)^2+1^2-1=1>0$ là phương trình mặt cầu, có tâm $I(-1;1;0)$.

(4) $(x+y)^2=2xy-z^2+1-4x$

$(x+y)^2=2xy-z^2+1-4x \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-2xy+z^2-1+4x=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x-1=0$

Kiểm tra: $(-2)^2-(-1)=5>0$ là phương trình mặt cầu, có tâm $I(-2;0;0)$.

Vậy, phương trình là phương trình mặt cầu và nhận

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho các phương trình sau:

(1) $x^2+y^2+z^2-2x=0$ (2) $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$

(3) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$ (4) $(x+y)^2=2xy-z^2-1$

Có bao nhiêu phương trình mặt cầu?

Lời giải

(1) $x^2+y^2+z^2-2x=0$

$x^2+y^2+z^2-2x=0$ có tâm $I(1;0;0)$ và $R=\sqrt{1^2+0^2+0^2}=1$ là phương trình mặt cầu.

(2) $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$

$x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$ không là phương trình mặt cầu vì hệ số trước z^2 khác hệ số trước x^2 và y^2.

(3) $2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1$

$2x^2+2y^2=(x+y)^2-z^2+2x-1 \Leftrightarrow 2x^2+2y^2=x^2+y^2+2xy-z^2+2x-1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2xy-2x+1=0$ không là phương trình mặt cầu.

(4) $(x+y)^2=2xy-z^2-1$

$(x+y)^2=2xy-z^2-1 \Leftrightarrow x^2+y^2+2xy=2xy-z^2-1$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+1=0$ không là phương trình mặt cầu vì $x^2+y^2+z^2+1>0 \forall x;y;z$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-1)$ và $B(0;6;0)$. Chứng minh rằng nếu điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ thì M thuộc một mặt cầu (S). Tìm tâm và bán kính của mặt cầu (S).

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}=(-x;-y;-1-z)$ và $\overrightarrow{MB}=(-x;6-y;-z)$.

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow x^2-6y+y^2+z+z^2=0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-6y+z=0$.

Khi đó theo dạng mặt cầu thì ta có: $a=0, b=3, c=-\frac{1}{2}$ và $d=0$.

Xét $a^2+b^2+c^2-d=\frac{37}{4}>0$.

Vậy tập hợp điểm M là mặt cầu có tâm $I\left(0;3;-\frac{1}{2}\right)$, bán kính

$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\frac{\sqrt{37}}{2}$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;2;-2)$; $B(3;-3;3)$. Điểm M trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$. Tính độ dài OM lớn nhất.

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3MA=2MB\Leftrightarrow 9MA^2=4MB^2$

$\Leftrightarrow 9\left[(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2\right]=4\left[(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+12x-12y+12z=0\Leftrightarrow (x+6)^2+(y-6)^2+(z+6)^2=108$.

Như vậy, điểm M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6;6;-6)$ và bán kính $R=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

Do đó OM lớn nhất bằng $OI+R=\sqrt{(-6)^2+6^2+(-6)^2}+6\sqrt{3}=12\sqrt{3}$.

◆Dạng ❷: Mặt cầu có tâm và đi qua một điểm

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.	Từ giả thiết ta đã có sẵn tâm I và bán kính R. Phương trình $(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.
Tâm $I(a;b;c)$ và qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$.	≫ Bán kính mặt cầu $R=IM=\left\|\overrightarrow{IM}\right\|=\sqrt{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2}$. ≫ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IM$.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

(1) Tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$ (2) Tâm $I(0;-4;1)$ đường kính bằng 4.

Lời giải

(1) Tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$

Phương trình mặt cầu tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=3$ là: $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$

(2) Tâm $I(0;-4;1)$ đường kính bằng 4.

Đường kính của mặt cầu bằng 4 nên bán kính $R=2$

Phương trình của mặt cầu tâm $I(0;-4;1)$ là $x^2+(y+4)^2+(z-1)^2=4$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu sau:

(1) Tâm $I(-1;2;1)$ đi qua gốc tọa độ. (2) Tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$.

Lời giải

(1) Tâm $I(-1;2;1)$ đi qua gốc tọa độ.

Bán kính của mặt cầu là $R=IO=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$.

Phương trình của mặt cầu tâm $I(-1;2;1)$ qua O là $x^2+y^2+z^2=6$.

(2) Tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$.

Bán kính của mặt cầu là $R=IA=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Phương trình của mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ qua $A(1;1;2)$ là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

⬩Dạng 3: Mặt cầu có đường kính

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Nhận $M(x_M;y_M;z_M)$ và $N(x_N;y_N;z_N)$ làm đường kính	≫ Gọi I là tâm mặt cầu (S) $\Rightarrow I$ là trung điểm của MN $\Rightarrow I\left(\frac{x_M+x_N}{2};\frac{y_M+y_N}{2};\frac{z_M+z_N}{2}\right)$. ≫ Bán kính mặt cầu $R=\frac{MN}{2}=IM$.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-3)$ và $B(3;2;1)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

Lời giải

Gọi I là trung điểm của $AB=\sqrt{(3-1)^2+(2-0)^2+(1+3)^2}=2\sqrt{6}\Rightarrow R=\frac{AB}{2}=\sqrt{6}$.

Khi đó $\begin{cases} x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{1+3}{2}=2 \\ y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=\frac{0+2}{2}=1 \\ z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{-3+1}{2}=-1 \end{cases} \Rightarrow I(2;1;-1)$.

Phương trình mặt cầu cần tìm: $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z=0$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vecto $\overrightarrow{AO}=(-1;-2;3)$ và $\overrightarrow{BO}=(-7;-4;-5)$. Phương trình mặt cầu đường kính AB là?

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AO}(-1;-2;3)\Rightarrow A(1;2;-3)$; $\overrightarrow{BO}(-7;-4;-5).\Rightarrow B(7;4;5)$.

Phương trình mặt cầu đường kính AB thì tâm là trung điểm của $AB \Rightarrow I(4;3;1)$

Bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(7-1)^2+(4-2)^2+(5+3)^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{104}}{2}$

Phương trình mặt cầu $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=26$

Vậy phương trình mặt cầu (S) $(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=26$

⬩Dạng 4: Mặt cầu qua 4 điểm không đồng phẳng

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Đi qua 4 điểm $A;B;C;D$ không đồng phẳng	≫ Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ tâm mặt cầu cần tìm. ≫ Mặt cầu (S) đi qua 4 điểm $\Leftrightarrow IA=IB=IC=ID \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IA^2=IC^2 \\ IA^2=ID^2 \end{cases} \Rightarrow$ tọa độ I. ≫ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IA$.

☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, nếu mặt cầu.(S). đi qua bốn điểm $M(2;2;2), N(4;0;2), P(4;2;0)$ và $Q(4;2;2)$ thì tâm I của (S) có tọa độ là?

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu: $(S): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ $\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$.

Vì $M,N,P,Q\in(S)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^2+2^2+2^2+4a+4b+4c+d=0 \\ 4^2+0^2+2^2+8a+4c+d=0 \\ 4^2+2^2+0^2+8a+4b+d=0 \\ 4^2+2^2+2^2+8a+4b+4c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-1 \\ c=-1 \\ d=8 \end{cases} \Rightarrow I(3;1;1) \text{ là tâm mặt cầu } (S).$$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, $D(2;2;2)$. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải

Gọi phương trình mặt cầu có dạng $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$.

Vì mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên tọa độ các điểm $A,B,C,D\in(S)$.

Ta có: $\begin{cases}4+4a+d=0\\4+4b+d=0\\4+4c+d=0\\12+4a+4b+4c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-1\\c=-1\\d=0\end{cases}$

Suy ra phương trình mặt cầu là $x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z=0$.

◆Dạng 5: Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng/mặt phẳng

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I\in(P)$ và đi qua $A;B;C$. *Với* $(P):\alpha.x+\beta.y+\gamma.z+\delta=0$ *hoặc* (P) *là các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$. **Nhận xét:** *Trong trường hợp* $I\in$ *một trong các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ≫ Ta có $I\in(P)\Rightarrow\alpha.a+\beta.b+\gamma.c+\delta=0\ (1)$. ≫ Mặt cầu (S) đi qua ba điểm $A;B;C$ $\Leftrightarrow IA=IB=IC\Leftrightarrow\begin{cases}IA^2=IB^2\ (2)\\IA^2=IC^2\ (3)\end{cases}$. ≫ Từ $(1);(2)$ và $(3)\Rightarrow I$ là thỏa hệ: $\begin{cases}\alpha.a+\beta.b+\gamma.c+\delta=0\\IA^2=IB^2\\IA^2=IC^2\end{cases}\Rightarrow$ tọa độ I. ≫ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IA$.
Tâm $I\in d$ và đi qua $A;B$. *Với* $d:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ *hoặc* d *là các trục* $Ox;Oy;Oz$. **Nhận xét:** *Trong trường hợp* $I\in$ *một trong các trục* $Ox;Oy;Oz$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ≫ Ta có $I\in d\Rightarrow I(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$. ≫ Viết $\overrightarrow{IA};\overrightarrow{IB}$ theo t và tính độ dài $\left\lvert\overrightarrow{IA}\right\rvert;\left\lvert\overrightarrow{IB}\right\rvert$ ≫ Mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A;B$ $\Leftrightarrow IA=IB\Leftrightarrow\left\lvert\overrightarrow{IA}\right\rvert=\left\lvert\overrightarrow{IB}\right\rvert\Rightarrow t=?$. ≫ Từ $t=?\Rightarrow$ tọa độ I. ≫ Mặt cầu có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=IA$.

☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua 2 điểm $A(1;2;3), B(2;0;-2)$, và có tâm nằm trên trục Ox. Viết phương trình mặt cầu (S)?

Lời giải

Vì mặt cầu có tâm I thuộc trục Ox nên tâm có dạng $I(x;0;0)$.

Vì mặt cầu đi qua $A(1;2;3), B(2;0;-2)$, nên $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$\Leftrightarrow (1-x)^2 + 4 + 9 = (2-x)^2 + 4 \Leftrightarrow 2x = -6 \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow IA = \sqrt{4^2+2^2+3^2} = \sqrt{29}$.

Do đó phương trình mặt cầu là $(x+3)^2 + y^2 + z^2 = 29$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu qua 2 điểm $A(3;-1;2)$, $B(1;1;-2)$ và có tâm I thuộc $\Delta: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{-1}$?

Lời giải

Vì mặt cầu có tâm I thuộc Δ nên $I(2t;1+t;-t) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (2t;1+t;-t) \\ \overrightarrow{IB} = (1-2t;t;-2+t) \end{cases}$.

Vì mặt cầu đi qua hai điểm $A(3;-1;2), B(1;1;-2)$, nên $IA = IB$

$\Leftrightarrow (2t)^2 + (1+t)^2 + (-t)^2 = (1-2t)^2 + (t)^2 + (-2+t)^2$

$\Leftrightarrow 4t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow IA = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + (3)^2} = 7$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu đi qua 3 điểm $A(-2;3;3), B(-1;1;2), C(4;2;2)$ và có tâm nằm thuộc mặt phẳng (Oyz).

Lời giải

Vì mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oyz) nên tâm có dạng $I(0;b;c)$.

Vì mặt cầu đi qua ba điểm $A(-2;3;3), B(-1;1;2), C(4;2;2)$ nên ta có:

$IA = IB = IC = R \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 = IC^2 = R^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + (3-b)^2 + (3-c)^2 = 1 + (1-b)^2 + (2-c)^2 \\ 1 + (1-b)^2 + (2-c)^2 = 16 + (2-b)^2 + (2-c)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 40 + 9 - 6c + c^2 = 65 + 4 - 4c + c^2 \\ b = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2c = 20 \\ b = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -10 \\ b = 9 \end{cases} \Rightarrow I(0;9;-10), R = IA = \sqrt{4+36+169} = \sqrt{209}$.

Phương trình mặt cầu là $x^2 + (y-9)^2 + (z+10)^2 = 209$.

⬩Dạng ❻: Mặt cầu tiếp xúc đường thẳng/mặt phẳng

Phương pháp

- Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	Phương pháp
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với (P). *Với* $(P): Ax+By+Cz+D=0$ *hoặc* (P) *là các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$. **Nhận xét:** *Trong trường hợp* I *tiếp xúc một trong các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Bán kính mặt cầu $R = \left[\begin{array}{ll} d(I;(\alpha)) = \dfrac{\lvert Aa+Bb+Cc+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} & Tiep\ xuc\ (\alpha) \\ d(I;(Oxy)) = \sqrt{z_I^2} & Tiep\ xuc\ (Oxy) \\ d(I;(Oxz)) = \sqrt{y_I^2} & Tiep\ xuc\ (Oxz) \\ d(I;(Oyz)) = \sqrt{x_I^2} & Tiep\ xuc\ (Oyz) \end{array}\right.$. ≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;(\alpha))$.
Tâm $I(a;b;c)$ và tiếp xúc với Δ. *Với* $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$ *hoặc* Δ *là các trục* $Ox;Oy;Oz$. **Nhận xét:** *Trong trường hợp* I *tiếp xúc một trong các trục* $Ox;Oy;Oz$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Bán kính mặt cầu $R = \left[\begin{array}{ll} d(I;\Delta) = \dfrac{\left\lvert\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert} & Tiep\ xuc\ \Delta \\ d(I;Ox) = \sqrt{y_I^2+z_I^2} & Tiep\ xuc\ Ox \\ d(I;Oy) = \sqrt{x_I^2+z_I^2} & Tiep\ xuc\ Oy \\ d(I;Oz) = \sqrt{x_I^2+y_I^2} & Tiep\ xuc\ Oz \end{array}\right.$. ≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R = d(I;\Delta)$.

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy).

Lời giải

Do mặt cầu (S) tiếp xúc $(Oxy) \Rightarrow R = d(I;(Oxy)) = \sqrt{z_I^2} = \sqrt{(1)^2} = 1$.

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 1$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, tìm bán kính mặt cầu đi qua điểm $B(1;3;0)$ và tiếp xúc với (Oyz) tại $M(0;3;-2)$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu (S).

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) tại $M(0;3;-2)$

Nên hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oyz) là $H(0;b;c)$ trùng với M.

Do đó $b=3, c=-2$ và $I(a;3;-2)$.

$IB^2 = IM^2 \Leftrightarrow (a-1)^2 + 4 = a^2 \Leftrightarrow -2a+5=0 \Leftrightarrow a=\frac{5}{2} \Rightarrow I\left(\frac{5}{2};3;-2\right)$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;-4), B(2;3;4), C(3;5;7)$. Tìm phương trình mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với BC.

Lời giải

$\overrightarrow{AB}=(1;5;8)$, $\overrightarrow{BC}=(1;2;3) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right]=(-1;5;-3)$

Mặt cầu có tâm là A và tiếp xúc với $BC \Rightarrow R=d\left[A;(BC)\right]=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{BC}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Vậy phương trình mặt cần tìm là: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=\frac{5}{2}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $B(1;1;9)$, $C(1;4;0)$. Mặt cầu (S) đi qua B và tiếp xúc với (Oxy) tại C có phương trình là?

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu (S).

Vì (S) tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại $C(1;4;0)$

Nên hình chiếu của I lên mặt phẳng (Oxy) là $H(a;b;0)$ trùng với C.

Do đó $a=1, b=4$ và $I(1;4;c)$.

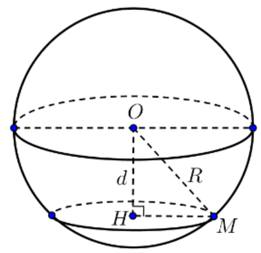
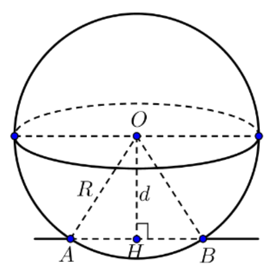
$IB^2 = IC^2 \Leftrightarrow 3^2+(c-9)^2=c^2 \Leftrightarrow -18c+90=0 \Leftrightarrow c=5$.

Vậy phương trình mặt cần tìm là: $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=25$.

⬩Dạng 7: Mặt cầu cắt đường thẳng/mặt phẳng

Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu (S)

Loại	**Phương pháp**
Tâm $I(a;b;c)$ và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm I' bán kính r. *Với* $(P): Ax+By+Cz+D=0$ *hoặc* (P) *là các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$. **Nhận xét:** *Trong trường hợp* I *tiếp xúc một trong các mặt phẳng* $(Oxy),(Oxz),(Oyz)$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Tính $d(I;(\alpha))=\dfrac{\lvert Aa+Bb+Cc+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ≫ Bán kính: $R^2=d^2(I;(\alpha))+r^2=OH^2+HM^2$ ≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R. 
Tâm $I(a;b;c)$ và cắt Δ tại $A(x_A;y_A;z_A)$, $B(x_B;y_B;z_B)$ và H là trung điểm AB. *Với* $\Delta: \dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ *hoặc* Δ *là các trục* $Ox;Oy;Oz$. **Nhận xét:** *Trong trường hợp* I *tiếp xúc một trong các trục* $Ox;Oy;Oz$ *bài toán sẽ đơn giản hơn.*	≫ Tính $d(I;\Delta)=\dfrac{\left\lvert\left[\vec{u};\overrightarrow{MI}\right]\right\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$ ≫ Bán kính: $R^2=d^2(I;(\alpha))+AH^2=OH^2+\dfrac{AB^2}{4}$ ≫ Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=d(I;\Delta)$. 

☞**Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=25$. Mặt phẳng (Oxy) cắt mặt cầu (S) có giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm: $I(2;-3;4)$, $R=5$.

Gọi H là tâm đường tròn cắt nên H là hình chiếu của I. Vậy $H(2;-3;0)$.

Bán kính đường tròn: $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(2;4;1)$ và $(P): x+y+z-4=0$. Tìm phương trình mặt cầu (S) tâm I sao cho (S) cắt (P) theo đường tròn có đường kính bằng 2

Lời giải

Ta có: $d(I,(P)) = \dfrac{|2+4+1-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$.

Gọi R là bán kính mặt cầu, ta có: $R^2 = d^2(\mathrm{I},(P)) + r^2 = 3+1 = 4$.

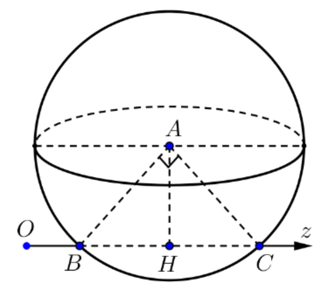
$\Rightarrow (S): (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-2;-4;5)$. Phương trình nào dưới đây là phương trình của mặt cầu tâm là A và cắt trục Oz tại hai điểm B, C sao cho ΔABC vuông.

Lời giải

Do $AB = AC$ nên ΔABC vuông tại A.
Gọi H trung điểm $BC \to AH = BH = HC$.
Do đó H là hình chiếu của điểm A lên trục Oz.
Xét ΔABH: $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 2AH^2$
$\Rightarrow R = AH\sqrt{2} = d(A,Oz).\sqrt{2} = \sqrt{{x_A}^2 + {y_A}^2}.\sqrt{2} = 2\sqrt{10}$

Vậy mặt cầu có phương trình: $(x+2)^2 + (y+4)^2 + (z-5)^2 = 40$



Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1}$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A và B với $AB = 10$. Viết phương trình của mặt cầu (S).

Lời giải

Gọi H là trung điểm AB ta có: $IH = d(I,d)$ và $IH \perp d$.

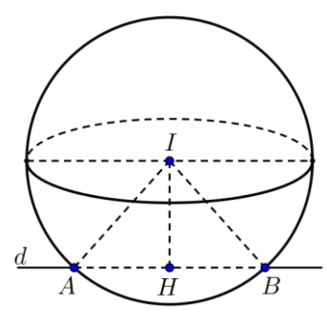
$H(1+t;-t;t) \Rightarrow \overrightarrow{IH} = (t;-t+1;t-2)$.

Vì: $IH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

$\Rightarrow H(2;-1;1) \Rightarrow d(I,d) = IH = \sqrt{2}$.

Xét ΔIAH: $IA = \sqrt{AH^2 + IH^2} = \sqrt{\left(\dfrac{10}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{27}$.

Vậy phương trình mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 27$.



Dạng 8: Vị trí tương đối liên quan mặt cầu

Phương pháp

		Mặt cầu	
Mặt phẳng	Tính $d(I;(P))=\frac{\lvert ax_I+by_I+cz_I+d\rvert}{\lvert\vec{n}_{(P)}\rvert}$ và so sánh với bán kính R		
	$d(I;(P))>R$	Mặt phẳng ***không cắt*** mặt cầu	
	$d(I;(P))=R$	Mặt phẳng ***tiếp xúc*** mặt cầu tại M	
	$d(I;(P))<R$	Mặt phẳng ***cắt*** mặt cầu	
Đường thẳng	Tính $d(I;d)=\frac{\lvert[\vec{u};\overrightarrow{MI}]\rvert}{\lvert\vec{u}\rvert}$ và so sánh với bán kính R		
	$d(I;d)>R$	Đường thẳng ***không cắt*** mặt cầu	
	$d(I;d)=R$	Đường thẳng ***tiếp xúc*** mặt cầu	
	$d(I;d)<R$	Đường thẳng ***cắt*** mặt cầu	
Điểm	Tính IM và so sánh với bán kính R		
	$IM>R$	Điểm M ***nằm ngoài*** mặt cầu	
	$IM=R$	Điểm M ***nằm trên*** mặt cầu	
	$IM<R$	Điểm M ***nằm trong*** mặt cầu	

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0$ và một điểm $M(4;2;-2)$. Xét vị trí của điểm M so với mặt cầu (S)

Lời giải

Ta có $x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=9$

$\Rightarrow$ Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và bán kính $R=3$

Mà $\overrightarrow{IM}=(2;1;-1)\Rightarrow IM=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}<R$.

Vậy điểm M nằm trong mặt cầu (S).

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-1=0$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-2z+1=0$. Xét vị trí của mặt phẳng (P) so với mặt cầu (S)

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;-1)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2+1}=2$.

Với $(P): 2x+y-2z+1=0$ thì $d(I;(P))=\dfrac{|2.1+1-2.(-1)+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=2=R$.

Vậy mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S).

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $(\Delta): \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z}{-2}$ và và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z+2=0$. Số điểm chung của (Δ) và (S) là?

Lời giải

Đường thẳng (Δ) đi qua $M(1;-2;0)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;3;-2)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $\overrightarrow{MI}=(0;1;2)$ và $\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]=(8;-2;1) \Rightarrow d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{MI}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{966}}{14}$

Vì $d(I,\Delta)>R$ nên (Δ) không cắt mặt cầu (S).

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) lần lượt có phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2z-6=0$, $2x+2y+z+2m=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (P) tiếp xúc với (S)?

Lời giải

(S) có tâm là $I(1;-1;1)$ và bán kính $R=3$.

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên: $d(I,(P))=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2-2+1+2m|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3 \Leftrightarrow |2m+1|=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-5 \end{array}\right..$$

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=1$ và đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z}{-1}$. Giá trị của m để Δ không cắt mặt cầu (S) là ?

Lời giải

Từ phương trình đường thẳng Δ và mặt cầu (S) ta có:

$$(1+t-2)^2+(2+mt+1)^2+(-t-1)^2=1$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2+(3+mt)^2+(t+1)^2=1 \Leftrightarrow (m^2+2)t^2+2.3mt+10=0 \quad (1)$$

Để Δ không cắt mặt cầu (S) thì (1) vô nghiệm, hay (1) có $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$

♦Dạng ❾: Bài toán thực tế

Phương pháp

☞Các ví dụ minh họa

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(6;-2;4)$.

(1) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

(2) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(5;2;-2)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không.

(3) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(6;0;3)$.

Lời giải

(1) Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Viết phương trình mặt cầu (S) biểu diễn ranh giới của vùng phủ sóng.

Trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(6;-2;4)$.

Do đó gọi mặt cầu (S) có tâm $I(6;-2;4)$ và bán kính $R=3$ nên có phương trình:

$(S):(x-6)^2+(y+2)^2+(z-4)^2=9$.

(2) Một người sử dụng điện thoại tại điểm $M(5;2;-2)$. Hãy cho biết điểm M nằm trong hay nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên hay không.

Ta có: $\overrightarrow{IM}=(-1;4;-6) \Rightarrow IM=\sqrt{(-1)^2+4^2+(-6)^2}=\sqrt{53}\,km > R=3\,km$.

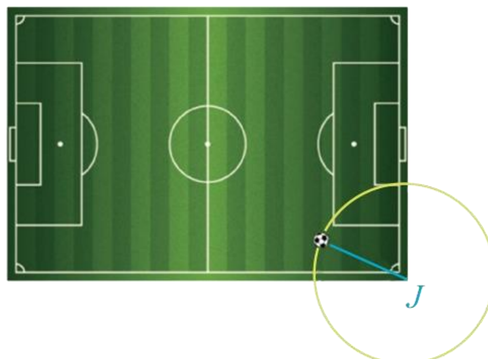
$\Rightarrow$ Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S) và người đó không thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên.

(3) Câu hỏi tương tự đối với người sử dụng điện thoại ở điểm $N(6;0;3)$.

Ta có: $\overrightarrow{IN}=(0;2;-1)\Rightarrow IN=\sqrt{0^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}\,km<R=3km$.

$\Rightarrow$ Điểm N nằm trong mặt cầu (S) và người đó có thể sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên.

Câu 2: Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M. Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z=0$, đồng thời thuộc mặt cầu $(S):(x-32)^2+(y-50)^2+(z-8)^2=100$ (đơn vị độ dài tính theo mét).



(1) Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

(2) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.

(3) Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J.

Lời giải

(1) Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S).

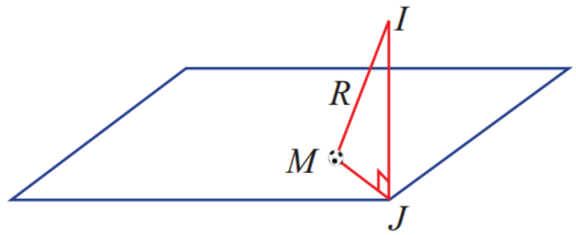
Mặt cầu (S) có phương trình: $(S):(x-32)^2+(y-50)^2+(z-8)^2=100$ nên có tâm $I(32;50;8)$ và bán kính $R=\sqrt{100}=10$.

(2) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc J của tâm I trên mặt sân.

Trong không gian $Oxyz$, mặt sân có phương trình $z=0$ trùng với mặt phẳng tọa độ (Oxy), suy ra hình chiếu vuông góc của điểm $I(32;50;8)$ xuống mặt sân có tọa độ $J(32;50;0)$.

(3) Tính khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J.

Trong tam giác vuông IJM, ta có: $\overrightarrow{JI}=(0;0;8)\Rightarrow IJ=8,\ IM=R=10$.



Suy ra: $JM = \sqrt{IM^2 - JI^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$.

Vậy khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là $6\,m$.

©. Dạng toán rèn luyện

◆Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 25$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(0;-4;-1), R = 25$. **B.** $I(0;-4;-1), R = 5$.
C. $I(0;4;1), R = 25$. **D.** $I(0;4;1), R = 5$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;4;1)$ và bán kính $R = 5$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8z + 4 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(-3;2;-4), R = 25$. **B.** $I(3;-2;4), R = 5$.
C. $I(3;-2;4), R = 25$. **D.** $I(-3;2;-4), R = 5$.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;-2;4)$ và bán kính $R = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2 - 4} = 5$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 8y - 2z - 4 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu (S) là

A. $I(2;-4;1), R = 5$. **B.** $I(-2;4;-1), R = 25$.
C. $I(2;-4;1), R = \sqrt{21}$. **D.** $I(-2;4;-1), R = 21$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-4;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+(-4)^2+1^2-(-4)}=5$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16$. Điểm có tọa độ nào sau đây nằm trên mặt cầu?

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(1;-2;-1)$. **C.** $(1;-2;1)$. **D.** $(1;-2;3)$.

Lời giải

Chọn B

Thay tọa độ của các điểm đã cho vào phương trình mặt cầu ta được điểm có tọa độ $(1;-2;-1)$ nằm trên mặt cầu.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+z^2=2$. Trong các điểm cho dưới đây, điểm nào nằm ngoài mặt cầu (S)?

A. $M(1;1;1)$ **B.** $N(0;1;0)$ **C.** $P(1;0;1)$ **D.** $Q(1;1;0)$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;1;0)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Khoảng cách từ các điểm đã cho tới tâm mặt cầu:

$MI=\sqrt{2}=R$; $NI=0<R$, $PI=\sqrt{3}>R$, $QI=1<R$.

Do đó điểm P nằm ngoài mặt cầu.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x-2y+2z-3=0$ và một điểm $M(4;2;-2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Điểm M là tâm của mặt cầu (S). **B.** Điểm M nằm trên mặt cầu (S).

C. Điểm M nằm trong mặt cầu (S). **D.** Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S).

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-1)$ và bán kính $R=3$.

Khi đó $IM=\sqrt{(4-2)^2+(2-1)^2+(-2+1)^2}=\sqrt{6}<R$.

Vậy điểm M nằm trong mặt cầu (S).

Câu 7: Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt cầu?

A. $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=-3$.

C. $(x-1)+(y-3)+(z+2)=9$. **D.** $(x-1)+(y-3)+(z+2)=-9$.

Lời giải

Chọn A

Do phương trình mặt cầu có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ nên vế phải của phương trình là $R^2>0$

Câu 8: Điều kiện để phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình mặt cầu?

A. $a+b+c-d>0$. **B.** $a^2+b^2+c^2+d>0$.

C. $a^2+b^2+c^2-d>0$. **D.** $a^2+b^2+c^2-d\geq 0$.

Lời giải

Chọn C

Để phương trình $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ là phương trình mặt cầu thì $a^2+b^2+c^2-d>0$

Câu 9: Trong các phương trình sau, phương trình nào không phải là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2=1$. **B.** $x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z+11=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+2x+4y-4z-21=0$. **D.** $2x^2+2y^2+2z^2+4x+4y-8z-10=0$.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z+11=0$

Có $a=\frac{2}{-2}=-1$; $b=\frac{2}{-2}=-1$; $c=\frac{-4}{-2}=2$; $d=11$

Ta có $a^2+b^2+c^2-d=(-1)^2+(-1)^2+2^2-11=-5<0$

Nên phương trình $x^2+y^2+z^2+2x+2y-4z+11=0$ không là phương trình mặt cầu.

Câu 10: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$ bán kính $R=3$

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$. **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=3$. **D.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt cầu $I(1;-2;3)$ bán kính $R=3$ có dạng $(x-1)^2+(y+2)^2+(y-3)^2=9$

Câu 11: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(-1;2;-3)$ và đi qua điểm $M(0;3;2)$

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=13$.
B. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=\sqrt{13}$.

C. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=27$.
D. $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=\sqrt{27}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{IM}=(1;1;5)\Rightarrow R=IM=\sqrt{27}$.

Phương trình mặt cầu $I(-1;2;-3)$, $R=\sqrt{27}$ có dạng $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=27$.

Câu 12: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu tâm $I(0;3;1)$ bán kính $R=2$

A. $x^2+y^2+z^2+6y+2z+6=0$.
B. $x^2+y^2+z^2+6y+2z-6=0$.

C. $x^2+y^2+z^2-6y-2z-6=0$.
D. $x^2+y^2+z^2-6y-2z+6=0$.

Lời giải

Chọn D

Do phương trình mặt cầu có tâm $I(0;3;1)$ nên $-2a=0$; $-2b=-6$; $-2c=-2$.

Mặt khác bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{0^2+3^2+1^2-6}=2$ nên giá trị $d=6$.

Câu 13: Xác định tâm và bán kính của mặt cầu $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$.

A. Tâm $I(-4;3;-1)$ và bán kính $R=6$.
B. Tâm $I(-4;3;-1)$ và bán kính $R=36$.

C. Tâm $I(4;-3;1)$ và bán kính $R=6$.
D. Tâm $I(4;-3;1)$ và bán kính $R=36$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$ có $a=-4;b=3;c=-1,d=-10$

Vậy tâm của mặt cầu là $I(-4;3;-1)$, bán kính $R=\sqrt{16+9+1+10}=\sqrt{36}=6$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là $2\,km$. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-4;0;2)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(0;-1;4)$

Lời giải

Chọn B

Ta có $IA=3>2; IB=\sqrt{3}<2, IC=\sqrt{13}>2, ID=6>2$.

Vậy người đứng tại điểm B nằm trong mặt cầu nên sẽ sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là kilomet), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu phát được đặt tại điểm $I(-6;-1;4)$. Cho biết bán kính phủ sóng của trạm là $2\,km$. Người sử dụng điện thoại đứng ở điểm nào sau đây thì **không** sử dụng được dịch vụ của trạm nói trên?

A. $A(-5;0;3)$ **B.** $B(-5;-2;5)$. **C.** $C(-6;2;2)$ **D.** $D(-7;-2;3)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $IA=\sqrt{3}<2; IB=\sqrt{3}<2, IC=\sqrt{13}>2, ID=\sqrt{3}<2$.

Vậy người đứng tại điểm C nằm ngoài mặt cầu nên sẽ không sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng điện thoại di động.

Câu 16: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu?

A. $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$ **B.** $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z+6=0$

C. $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z+14=0$ **D.** $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$

Lời giải

Chọn D

Phương trình $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=-1<0$.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-2y+2z+6=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=0$.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z+14=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=0$.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=36>0$.

Vậy phương trình $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-10=0$ là phương trình của mặt cầu.

Câu 17: Trong các phương trình sau, có bao nhiêu phương trình là phương trình của mặt cầu?

(i). $x^2+y^2+z^2+4z-32=0$ (ii). $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$

(iii). $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-10=0$ (iv). $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-4=0$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $x^2+y^2+z^2+4z-32=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=36>0$.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+2x+2y-2z+4=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=-1<0$.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-6y+4z-10=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=24>0$.

Phương trình $x^2+y^2+z^2+8x-6y+2z-4=0$ có $a^2+b^2+c^2-d=30>0$.

Vậy có 3 phương trình là phương trình của mặt cầu.

Câu 18: Viết phương trình mặt cầu có tâm $M(3;1;-4)$ và đi qua điểm $N(1;0;1)$.

A. $(x+3)^2+(y+1)^2+(z-4)^2=30$

B. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=30$

C. $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=\sqrt{30}$

D. $(x-3)^2-(y-1)^2-(z+4)^2=30$

Lời giải

Chọn B

Ta có $R=MN=\sqrt{30}$

Phương trình mặt cầu $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+4)^2=30$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(3;4;2)$. Phương trình mặt cầu tâm I và tiếp xúc với trục Oz là

A. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=16$.

B. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=4$.

C. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=5$.

D. $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=25$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên trục Oz, suy ra $H(0;0;2)$.

Ta có: $\overrightarrow{HI}=(3;4;0)$.

Mặt cầu tâm I và tiếp xúc trục Oz có bán kính:

$R=d(I,Oz)=HI=\sqrt{3^2+4^2+0^2}=5$.

Suy ra phương trình mặt cầu: $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=25$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho $(S): x^2+y^2+z^2-4x-2y+10z-14=0$. Mặt phẳng $(P): -x+4z+5=0$ cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C). Toạ độ tâm H của (C) là

A. $H(-3;1;-2)$. **B.** $H(-7;1;-3)$. **C.** $H(9;1;1)$. **D.** $H(1;1;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;-5)$ và mặt phẳng (P) có VTPT $\vec{n}=(-1;0;4)$.

Vì mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) nên tâm H của (C) là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng IH qua $I(2;1;-5)$ và nhận $\vec{n}=(-1;0;4)$ là VTCP có phương trình là $\begin{cases} x=2-t \\ y=1 \\ z=-5+4t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Khi đó $IH\cap(P)=H(2-t;1;-5+4t)$.

Ta có $-(2-t)+4(-5+4t)+5=0 \Leftrightarrow t=1$. Suy ra $H(1;1;-1)$.

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính $R=5$, có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với trục Oy. Biết rằng I có tung độ dương. Điểm nào sau đây thuộc mặt cầu (S)?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(-5;2;-7)$. **D.** $Q(5;-2;7)$.

Lời giải

Chọn B

Điểm I thuộc đường thẳng d nên I có tọa độ: $I(2+t;-t;-1+2t)$

Vì mặt cầu (S) tiếp xúc với trục Oy nên $d(I,Oy)=R \Leftrightarrow \sqrt{(2+t)^2+(-1+2t)^2}=5$

$\Leftrightarrow \sqrt{5t^2+5}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-2 \end{array}\right.$

Với $t=2$ ta có $I(4;-2;3)$.

Với $t=-2$ ta có $I(0;2;-5)$.

Nên mặt cầu (S) có phương trình là: $x^2+(y-2)^2+(z+5)^2=25$.

Thay tọa độ các điểm trong các phương án vào phương trình mặt cầu, nhận thấy điểm $N(3;2;-1)$ thỏa mãn.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$, một thiết bị phát sóng đặt tại vị trí $A(3;0;0)$. Vùng phủ sóng của thiết bị có bán kính bằng 5. Hỏi vị trí của điểm nào sau đây không thuộc vùng phủ sóng của thiết bị nói trên?

A. $M(5;0;0)$. **B.** $N(3;2;-1)$. **C.** $P(-1;3;1)$. **D.** $Q(0;-2;0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $AM = 2 < R$ nên điểm M thuộc vùng phủ sóng.

Ta có $AN = \sqrt{5} < R$ nên điểm N thuộc vùng phủ sóng.

Ta có $AP = \sqrt{26} > R$ nên điểm P không thuộc vùng phủ sóng.

Ta có $AQ = \sqrt{13} < R$ nên điểm Q thuộc vùng phủ sóng.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $OABC$ có tọa độ đỉnh $A(m;\ m;\ 0)$, $B(0;\ m;\ m)$, $C(m;\ 0;\ m)$. Biết tứ diện $OABC$ có bán kính mặt cầu (S) nội tiếp bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Khi đó phương trình mặt cầu (S) là

A. $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{1}{3}$. **B.** $(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=\frac{1}{3}$.

C. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=\frac{1}{3}$. **D.** $(x+2)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Vì $OABC$ là tứ diện đều, nên tâm I của mặt cầu nội tiếp tứ diện trùng với trọng tâm của tứ diện ta có $I\left(\frac{m}{2},\frac{m}{2},\frac{m}{2}\right)$.

G là trọng tâm tam giác ABC, $G\left(\frac{2m}{3},\frac{2m}{3},\frac{2m}{3}\right) \Rightarrow IG = \frac{m\sqrt{3}}{6}$

Theo bài $IG = \frac{m\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m = 2$.

Khi đó tâm $I(1,1,1)$.

Phương trình mặt cầu $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{1}{3}$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-4x+12y+6z+24=0$. Hai điểm M, N thuộc (S) sao cho $MN = 8$ và $OM^2 - ON^2 = -112$. Khoảng cách từ O đến đường thẳng MN bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: (S) có tâm $I(2;-6;-3)$ và bán kính $R=5$.

Ta có: $\overrightarrow{OI}=(2;-6;-3)\Rightarrow OI=7$.

Gọi H là trung điểm $MN\Rightarrow IH=\sqrt{R^2-\dfrac{MN^2}{4}}=3$.

Ta có: $OM^2-ON^2=-112\Rightarrow\left(\overrightarrow{OM}\right)^2-\left(\overrightarrow{ON}\right)^2=-112\Rightarrow\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)^2-\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\right)^2=-112$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{OI}\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}\right)=-112\Rightarrow\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{MN}=56$.

Ta lại có: $\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{MN}=OI.MN.\cos\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{MN}\right)=56\Rightarrow\cos\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{MN}\right)=1\Rightarrow OI//MN$.

Do $OI//MN\Rightarrow d(O;MN)=d(I;MN)=IH=3$.

⬩Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(C):(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=16$.

(a) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

(b) Điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).

(c) Điểm $C(0;2;1)$ nằm trên mặt cầu (C).

(d) Với điểm $D(2;1;-1)$, ta có $ID<4$.

Lời giải

(a) Điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

Tâm $I(1;-2;0)$.

Ta có $(1-1)^2+(2+2)^2+(-1)^2=17>16\ \Rightarrow$ điểm $A(1;2;-1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

» Chọn ĐÚNG.

(b) Điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).

Ta có $(0-1)^2+(0+2)^2+1^2=6<16\ \Rightarrow$ điểm $B(0;0;1)$ nằm bên trong mặt cầu (C).

» Chọn ĐÚNG.

(c) Điểm $C(0;2;1)$ nằm trên mặt cầu (C).

Ta có $(0-1)^2+(2+2)^2+1^2=18>16 \Rightarrow$ điểm $C(0;2;1)$ nằm bên ngoài mặt cầu (C).

» Chọn SAI.

(d) Với điểm $D(2;1;-1)$, ta có $ID<4$.

Ta có $ID=\sqrt{(2-1)^2+(1+2)^2+(-1)^2}=\sqrt{11}<4$.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=9$ có tâm I và bán kính R.

(a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$.

(b) Điểm $A(0;2;-3)$ nằm trong mặt cầu.

(c) Điểm $J(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.

(d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S'):x^2+y^2+(z-1)^2=3$ bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

(a) Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;-1;2)$, bán kính $R=3$ là $(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$.

» Chọn SAI.

(b) Điểm $A(0;2;-3)$ nằm trong mặt cầu.

Ta có: $(0+1)^2+(2-1)^2+(-3+2)^2=3=R=3$, do đó điểm A nằm trên mặt cầu.

» Chọn SAI.

(c) Điểm $J(1;2;3)$ nằm ngoài mặt cầu và khoảng cách từ tâm I đến điểm J bằng $\sqrt{10}$.

Ta có: $(1+1)^2+(2-1)^2+(3+2)^2=30>R=3$, do đó điểm J nằm ngoài mặt cầu.

Và $\overrightarrow{IJ}=(0;3;1)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IJ}\right|=\sqrt{0^2+3^2+1^2}=\sqrt{10}$

» Chọn ĐÚNG.

(d) Khoảng cách từ tâm I đến tâm mặt cầu $(S'):x^2+y^2+(z-1)^2=3$ bằng $\sqrt{2}$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$,

Mặt cầu (S') có tâm $K(0;0;1)$,

Khi đó $\overrightarrow{IK}=\left(-1;1;-1\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{IK}\right|=\sqrt{\left(-1\right)^2+1^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{3}\neq\sqrt{2}$

» Chọn SAI.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $\left(S\right):x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có tâm I và bán kính R.

(a) Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(1;-2;0\right)$ và bán kính $R=2$.

(b) Bán kính của mặt cầu $\left(S\right)$ là đoạn IM với điểm $M\left(1;1;2\right)$.

(c) Mặt cầu $\left(S\right)$ có đường kính AB với $A\left(0;1;-2\right)$ và $B\left(2;-1;-4\right)$.

(d) Mặt cầu $\left(S\right)$ tiếp xúc với mặt phẳng $\left(P\right):x+y-z-2=0$.

Lời giải

(a) Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(1;-2;0\right)$ và bán kính $R=2$.

Mặt cầu $\left(S\right):x^2+y^2+z^2-2x+4y+1=0$ có $a=1$, $b=-2$, $c=0$, $d=1$

$\Rightarrow$ tâm $I\left(1;-2;0\right)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=2$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Bán kính của mặt cầu $\left(S\right)$ là đoạn IM với điểm $M\left(1;1;2\right)$.

Xét $M\left(1;1;2\right)$: $1^2+1^2+2^2-2.1+4.1+1=9$ do đó M không nằm trên $\left(S\right)$

Vậy bán kính mặt cầu $\left(S\right)$ không là đoạn IM.

» Chọn SAI.

(c) Mặt cầu $\left(S\right)$ có đường kính AB với $A\left(0;1;-2\right)$ và $B\left(2;-1;-4\right)$.

Mặt cầu $\left(S\right)$ nhận AB làm đường kính thì $\dfrac{AB}{2}=R$ và tâm I là trung điểm của AB.

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(2;-2;-2\right)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+\left(-2\right)^2+\left(-2\right)^2}=2\sqrt{3}\Rightarrow\dfrac{AB}{2}=\sqrt{3}\neq R=2$

» Chọn SAI.

(d) Mặt cầu $\left(S\right)$ tiếp xúc với mặt phẳng $\left(P\right):x+y-z-2=0$.

Mặt cầu $\left(S\right)$ tiếp xúc với mặt phẳng $\left(P\right):x+y-z-2=0\Leftrightarrow R=d\left(I,\left(P\right)\right)$.

Ta có $d\left(I,\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|1+\left(-2\right)-0-2\right|}{\sqrt{1^2+1^2+\left(-1\right)^2}}=\sqrt{3}\neq R=2$.

» Chọn SAI.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$ và $C(0;0;3)$. Khi đó

(a) Mặt cầu tâm B, bán kính $R=3$ có phương trình là $x^2+(y-2)^2+z^2=3$.

(b) Mặt cầu tâm A, đi qua B có phương trình là $(x-1)^2+y^2+z^2=5$.

(c) Mặt cầu nhận BC làm đường kính có phương trình là $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{13}{4}$.

(d) Mặt cầu tâm O và có bán kính $R=OG$ với G là trọng tâm ΔABC, có phương trình là $x^2+y^2+z^2=\frac{14}{9}$.

Lời giải

(a) Mặt cầu tâm B, bán kính $R=3$ có phương trình là $x^2+(y-2)^2+z^2=3$.

Mặt cầu tâm B, bán kính $R=3$ có phương trình là $x^2+(y-2)^2+z^2=9$.

» Chọn SAI.

(b) Mặt cầu tâm A, đi qua B có phương trình là $(x-1)^2+y^2+z^2=5$.

Ta có bán kính mặt cầu là $R=AB=\sqrt{5}$, nên phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+y^2+z^2=5$

.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Mặt cầu nhận BC làm đường kính có phương trình là $x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=\frac{13}{4}$.

Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow I\left(0;1;\frac{3}{2}\right)$, $BC=\sqrt{13} \Rightarrow R=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Vậy phương trình mặt cầu đường kính BC là $x^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{4}$.

» Chọn SAI.

(d) Mặt cầu tâm O và có bán kính $R=OG$ với G là trọng tâm ΔABC, có phương trình là $x^2+y^2+z^2=\frac{14}{9}$.

Ta có $G\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\right) \Rightarrow OG=\frac{\sqrt{14}}{3}$ nên phương trình mặt cầu cần tìm là $x^2+y^2+z^2=\frac{14}{9}$.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng (xem hình vẽ) được đặt ở vị trí $I\left(25;30;50\right)$. Mặt cầu $\left(S\right)$ mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng $R=5\text{km}$.

(Nguồn:https://shutterstock.com)

(a) Mặt cầu $\left(S\right)$ có phương trình là $\left(x-25\right)^2+\left(y-30\right)^2+\left(z-50\right)^2=25$.

(b) Điểm $A\left(1025;30;50\right)$ nằm bên trong mặt cầu $\left(S\right)$.

(c) Một người đi biển ở vị trí $M\left(45;60;50\right)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

(d) Một người đi biển ở vị trí $N\left(5125;30;0\right)$ thì **không** thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Lời giải

(a) Mặt cầu $\left(S\right)$ có phương trình là $\left(x-25\right)^2+\left(y-30\right)^2+\left(z-50\right)^2=25$.

Ta có mặt cầu mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng, biết rằng ngọn hải đăng đó được thiết kế với bán kính phủ sáng $R=5\text{km}=5000\,\text{m}$, có phương trình là $\left(x-25\right)^2+\left(y-30\right)^2+\left(z-50\right)^2=5000^2$.

» Chọn SAI.

(b) Điểm $A\left(1025;30;50\right)$ nằm bên trong mặt cầu $\left(S\right)$.

Ta có $IA=\sqrt{\left(1025-25\right)^2}=1000<5000=R$. Suy ra điểm A nằm bên trong mặt cầu $\left(S\right)$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Một người đi biển ở vị trí $M\left(45;60;50\right)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Ta có $IM=\sqrt{20^2+30^2}=10\sqrt{13}<5000=R$, suy ra điểm M nằm bên trong mặt cầu $\left(S\right)$.

Do đó người ở vị trí $M\left(45;60;50\right)$ thì có thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

» Chọn ĐÚNG.

(d) Một người đi biển ở vị trí $N(5125;30;0)$ thì **không** thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

Ta có $IN=\sqrt{5100^2+(-50)^2}>5000=R$, suy ra điểm N nằm bên ngoài mặt cầu (S).

Do đó người ở vị trí $N(5125;30;0)$ thì không thể được chiếu sáng bởi ánh sáng của ngọn hải đăng.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $OABC.O'A'B'C'$ với O là gốc tọa độ, $A(2;0;0)$, $C(0;3;0)$, $O'(0;0;4)$. Ta có

(a) Mặt cầu tâm O, bán kính OA có phương trình là $x^2+y^2+z^2=2$.

(b) Mặt cầu tâm A, đi qua C có phương trình là $(x-2)^2+y^2+z^2=13$.

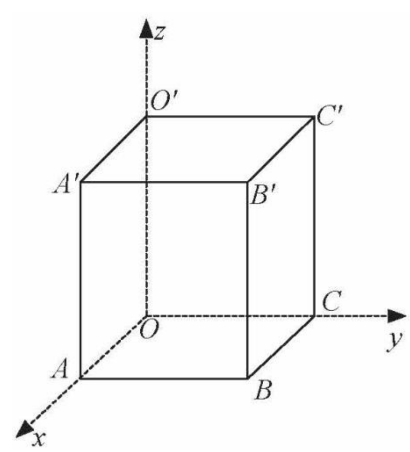
(c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ACO'), mặt cầu tâm O đi qua H có phương trình là $x^2+y^2+z^2=\dfrac{12}{61}$.

(d) Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có phương trình là

$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\dfrac{29}{4}$.

Lời giải

Gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, ta có tọa độ các đỉnh của hình hộp



$O(0;0;0), A(2;0;0); B(2;3;0), C(0;3;0)$, $O'(0;0;4), A'(2;0;4); B'(2;3;4), C'(0;3;4)$

(a) Mặt cầu tâm O, bán kính OA có phương trình là $x^2+y^2+z^2=2$.

Ta có $OA=2$, mặt cầu tâm O, bán kính OA có phương trình là $x^2+y^2+z^2=4$.

» Chọn SAI.

(b) Mặt cầu tâm A, đi qua C có phương trình là $(x-2)^2+y^2+z^2=13$.

Ta có $AC^2=OA^2+OC^2=4+9=13 \Rightarrow$ mặt cầu tâm A, đi qua C có phương trình là $(x-2)^2+y^2+z^2=13$.

» Chọn ĐÚNG.

(c) Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên (ACO'), mặt cầu tâm O đi qua H có phương trình là $x^2+y^2+z^2=\dfrac{12}{61}$.

Ta có $(ACO'):\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{4}=1 \Leftrightarrow 6x+4y+3z-12=0$.

$R=d\left(O,(ACO')\right)=\dfrac{|-12|}{\sqrt{36+16+9}}=\dfrac{12}{\sqrt{61}}$. Vậy phương trình mặt cầu $x^2+y^2+z^2=\dfrac{144}{61}$

» Chọn SAI.

(d) Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có phương trình là

$(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\dfrac{29}{4}$.

Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình hộp có tâm I là trung điểm của $OB' \Rightarrow I\left(1;\dfrac{3}{2};2\right)$ và có bán kính $R=\dfrac{OB'}{2}=\dfrac{\sqrt{29}}{2}$.

Phương trình mặt cầu là $(x-1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2+(z-2)^2=\dfrac{29}{4}$.

» Chọn ĐÚNG.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 3x+y-z-5=0$. Mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn lớn nhất có bán kính $r=5$.

(a) Mặt phẳng $(P): 3x+y-z-5=0$ có VTPT $\vec{n}=(3;1;-1)$.

(b) Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t;-1+2t;-2-t)$.

(c) $d\left(I,(P)\right)=3$.

(d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.

Lời giải

(a) Mặt phẳng $(P): 3x+y-z-5=0$ có VTPT $\vec{n}=(3;1;-1)$.

$(P): 3x+y-z-5=0$ có VTPT là $\vec{n}=(3;1;-1)$.

» Chọn ĐÚNG.

(b) Tọa độ tổng quát của tâm I là $(t;-1+2t;-2-t)$.

Ta có: $d: x=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{-1} \Rightarrow d: \begin{cases} x=t \\ y=1+2t \\ z=2-t \end{cases}, t\in \mathbb{R} I\in d \Rightarrow I(t;1+2t;2-t)$

» Chọn SAI.

(c) $d(I,(P))=3$.

Do giao tuyến của (S) và (P) là đường tròn lớn nên $I\in(P) \Rightarrow d(I,(P))=0$.

» Chọn SAI.

(d) Mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.

Ta có $I\in d \Rightarrow I(t;1+2t;2-t)$

Theo giả thiết $I=d\cap(P)$ nên tọa độ điểm I thỏa mãn phương trình mặt phẳng (P)

Thay tọa độ điểm I vào (P) ta có :

$$3t+(1+2t)-(2-t)-5=0 \Leftrightarrow 6t-6=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow I(1;3;1)$$

Vì $(S)\cap(P)$ theo giao tuyến là đường tròn lớn có bán kính $r=5$ nên ta có bán kính mặt cầu (S) là $R=r=5$.

Vậy mặt cầu có phương trình là: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-1)^2=25$.

» Chọn ĐÚNG

⬩Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong không gian Oxy, tổng tất cả bao nhiêu số tự nhiên của tham số m để phương trình $x^2+y^2+z^2+2(m-2)y-2(m+3)z+3m^2+7=0$ là phương trình của một mặt cầu.

Lời giải

Trả lời: 6

Ta có: $\begin{cases} a=0 \\ b=m-2 \\ c=-(m+3) \\ d=3m^2+7 \end{cases}$

Phương trình trên là phương trình mặt cầu khi:

$a^2+b^2+c^2-d>0 \Leftrightarrow (m-2)^2+(m+3)^2-(3m^2+7)>0$

$\Leftrightarrow -m^2+2m+6>0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{7}<m<1+\sqrt{7}$.

Mà $m\in\mathbb{N} \Rightarrow m\in\{0;1;2;3\}$. Nên $0+1+2+3=6$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;m;1)$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2y+4z-9=0$. Tập các giá trị của m để điểm A nằm trong khối cầu có dạng $(a;b)$ với $a;b$ là các số nguyên. Giá trị của a^b bằng.

Lời giải

Trả lời: -1

Mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-2y+4z-9=0$.

Điểm $A(1;m;1)$ nằm trong khối cầu $(S) \Leftrightarrow 1^2+m^2+1^2-2m+4.1-9<0$

$\Leftrightarrow m^2-2m-3<0$

$\Leftrightarrow m\in(-1;3)$.

Vậy $a^b=-1$

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu giá trị nguyên dương m để phương trình $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0$ là phương trình của một mặt cầu?

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có: $x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+m=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=6-m$.

Để phương trình trên là phương trình mặt cầu thì $6-m>0 \Leftrightarrow m<6$.

Vậy giá trị nguyên dương m cần tìm là $1;2;3;4;5$.

Vậy có 5 giá trị thỏa đề.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;2)$ và đi qua $A(5;-1;4)$ có dạng $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c+R^2$.

Lời giải

Trả lời: 24

Tâm $I\left(1;-3;2\right)$

Bán kính $R=IA=\sqrt{16+4+4}=\sqrt{24}$

Vậy phương trình mặt cầu $\left(S\right)$: $\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2+\left(z-2\right)^2=24$.

Ta có: $a+b+c+R^2=1+\left(-3\right)+2+24=24$.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A\left(1;2;-4\right)$, $B\left(1;-3;1\right)$, $C\left(2;2;3\right)$. Tính đường kính l của mặt cầu $\left(S\right)$ đi qua ba điểm trên và có tâm nằm trên mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 10,2

Gọi tâm mặt cầu là: $I\left(x;y;0\right)$.

$$\begin{cases} AI=BI \\ AI=CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+4^2}=\sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y+3\right)^2+1^2} \\ \sqrt{\left(x-1\right)^2+\left(y-2\right)^2+4^2}=\sqrt{\left(x-2\right)^2+\left(y-2\right)^2+3^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(y-2\right)^2+4^2=\left(y+3\right)^2+1^2 \\ \left(x-1\right)^2+4^2=\left(x-2\right)^2+3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-4y+4+4^2=y^2+6y+9+1^2 \\ x^2-2x+1+16=x^2-4x+4+9 \end{cases}$$

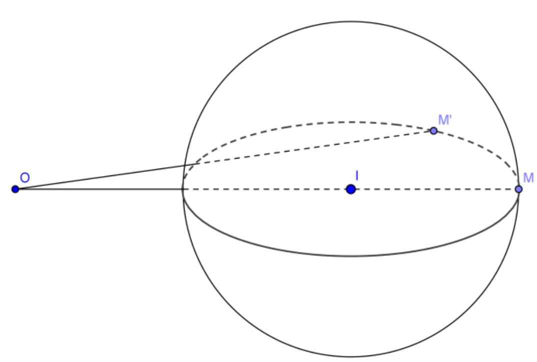
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y=10 \\ 2x=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$. Suy ra $I\left(-2;1;0\right)$

Vậy $l=2R=2\sqrt{\left(-2-1\right)^2+\left(1-2\right)^2+4^2}=2\sqrt{26}\approx 10,2$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A\left(-2;2;-2\right)$, $B\left(3;-3;3\right)$ và điểm M không cố định trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Khi đó độ dài OM lớn nhất bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần chục.

Lời giải

Trả lời: 20,8



.

Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có: $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 9MA^2=4MB^2$

$\Leftrightarrow 9\left[(x+2)^2+(y-2)^2+(z+2)^2\right]=4\left[(x-3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2\right]$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+12x-12y+12z=0$

Suy ra M thuộc mặt cầu (S) tâm $I(-6;6;-6)$ bán kính $R=6\sqrt{3}$.

Khi đó $OM_{\max}=d(O;I)+R=OI+R=6\sqrt{3}+6\sqrt{3}=12\sqrt{3}\approx 20,8$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, khi phương trình

$x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+7m^2-1=0$ là phương trình mặt cầu. Xác định m để mặt cầu có bán kính lớn nhất.

Lời giải

Trả lời: 2

Phương trình $x^2+y^2+z^2-2(m+2)x+4my-2mz+7m^2-1=0$ là phương trình mặt cầu

$\Leftrightarrow (m+2)^2+4m^2+m^2-(7m^2-1)>0\Leftrightarrow -m^2+4m+5>0\Leftrightarrow -1<m<5$.

Với $m\in(-1;5)$ ta có mặt cầu có bán kính là $R=\sqrt{-m^2+4m+5}=\sqrt{-(m-2)^2+9}$.

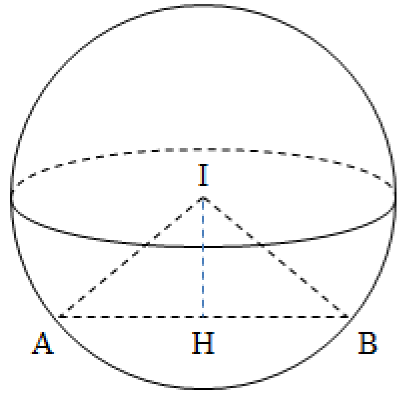
Ta có $(m-2)^2\geq 0\Rightarrow -(m-2)^2+9\leq 9\Leftrightarrow \sqrt{-(m-2)^2+9}\leq 3$.

Vậy, bán kính mặt cầu lớn nhất bằng 3 khi $m=2$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $I(1;-2;3)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I và cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}$. Khi đó, phương trình mặt cầu (S) có dạng là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$, tính giá trị của $P=\dfrac{abc}{R}$?

Lời giải

Trả lời: -1,5



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên trục $Ox \Rightarrow H(1;0;0) \Rightarrow IH = \sqrt{13}$

Mà $HA = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$.

Nên bán kính mặt cầu cần tìm là $R = IA = \sqrt{IH^2 + HA^2} = 4$.

Khi đó, phương trình mặt cầu cần tìm là: $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$.

Vậy giá trị của $P = \frac{abc}{R} = \frac{1\cdot(-2)\cdot 3}{4} = -\frac{3}{2} = -1,5$.

Câu 9: Cho các điểm $A(-2;4;1)$, $B(2;0;3)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = -2+t \end{cases}$. Gọi (S) là mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d. Bán kính của mặt cầu (S) là $R = a\sqrt{b}$, tính giá trị của $P = a+b$?

Lời giải

Trả lời: 6

Tâm $I \in d \Rightarrow I(1+t;1+2t;-2+t)$.

$\overrightarrow{AI} = (3+t;-3+2t;-3+t)$; $\overrightarrow{BI} = (-1+t;1+2t;-5+t)$.

Vì (S) đi qua A, B nên ta có:

$IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (3+t)^2 + (-3+2t)^2 + (-3+t)^2 = (-1+t)^2 + (1+2t)^2 + (-5+t)^2$

$\Leftrightarrow 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{IA} = (3;-3;-3)$.

Suy ra, bán kính mặt cầu (S): $R = IA = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{3}$.

Vậy giá trị của $P = a+b = 3+3 = 6$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+z-3=0$. Gọi mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ thuộc Δ và tiếp xúc với (P) tại $H(1;-1;0)$. Khi đó giá trị $a^2+b^2+c^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 14

Ta có: phương trình tham số của Δ là $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2t \\ z=2+t \end{cases}$. Vì $I\in\Delta\Rightarrow I(1-2t;2t;2+t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1-2t;2t;2+t)\in\Delta$ và tiếp xúc với (P) tại $H(1;-1;0)$ nên ta có:

$$d(I,(P))=IH\Leftrightarrow\frac{\left|2(1-2t)-2t+(2+t)-3\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}=\sqrt{(2t)^2+(-1-2t)^2+(-2-t)^2}$$

$\Leftrightarrow(-5t+1)^2=6(9t^2+8t+5)\Leftrightarrow-29t^2-58t-29=0\Leftrightarrow t=-1$.

$t=-1\Rightarrow I(3;-2;1)\Rightarrow a=3,b=-2,c=1$.

Vậy $a^2+b^2+c^2=14$.

Câu 11: Trong hệ trục $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Lời giải

Trả lời: 512

Để một người dùng điện thoại ở vị trí $A(m+100;m+370;0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200;450;60)$ thì $IA\le 600\Leftrightarrow(m-100)^2+(m-80)^2+(-60)^2\le 600^2$

$\Leftrightarrow 2m^2-360m-340000\le 0\Leftrightarrow\dfrac{180-\sqrt{712400}}{2}\le m\le\dfrac{180+\sqrt{712400}}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của m là $\dfrac{180+\sqrt{712400}}{2}\approx 512$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{-3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$, $(P):x+2y-2z-2=0$, $(Q):x+2y-2z+4=0$. Gọi mặt cầu $S(I,R)$ có tâm I thuộc Δ và tiếp xúc với $(P),(Q)$. Khi đó đường kính của mặt cầu có giá trị bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có: phương trình tham số của Δ là $\begin{cases}x=2-3t\\ y=1+2t\\ z=1+2t\end{cases}$. Vì $I\in\Delta\Rightarrow I(2-3t;1+2t;1+2t)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2-3t;1+2t;1+2t)$ thuộc Δ và tiếp xúc với $(P),(Q)$ nên ta có:

$d(I,(P))=d(I,(Q))$

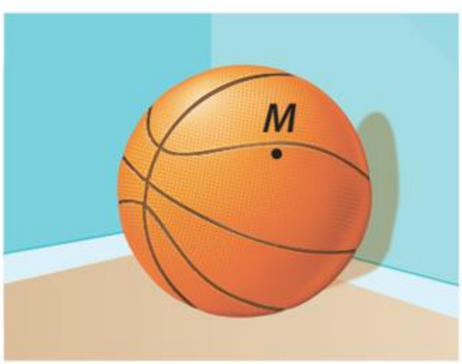
$\Leftrightarrow\frac{|(2-3t)+2(1+2t)-2(1+2t)-2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|(2-3t)+2(1+2t)-2(1+2t)+4|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}$

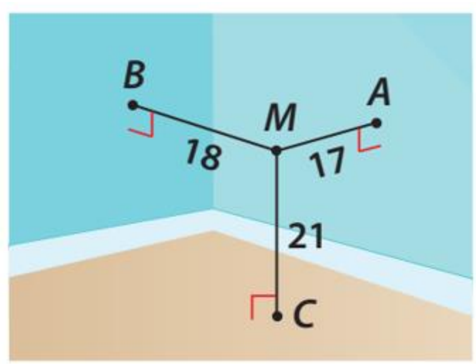
$\Leftrightarrow|-3t|=|-3t+6|\Rightarrow t=1$.

Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(-1;3;3)$ và bán kính $R=1$.

Vậy đường kính của mặt cầu (S) bằng 2.

Câu 13: Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đương kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.

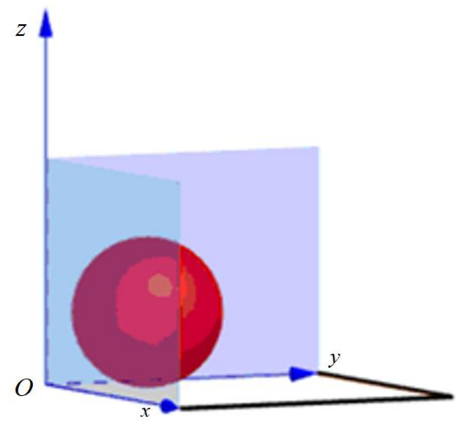




Lời giải

Trả lời: 23,9

Ta đặt hệ trục vào căn phòng sao cho có hai bức tường là mặt $(Oxz),(Oyz)$, và nền là (Oxy).



Vậy bài toán dẫn đến việc tìm đường kính của mặt cầu tiếp xúc với 3 mặt phẳng toạ độ và chứa điểm $M(17;18;21)$.

Ta có thể gọi phương trình mặt cầu là $(S):(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$, với $a>0$ (do mặt cầu tiếp xúc với các mặt phẳng toạ độ nên $a=b=c=R$).

Do $M(17;18;21)\in(S)$ nên $(17-a)^2+(18-a)^2+(21-a)^2=a^2$

$$\Rightarrow 2a^2-112a+1054=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=28-\sqrt{257} \\ a=28+\sqrt{257} \end{array}\right..$$

Vì quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm nên $a=28-\sqrt{257}$ thỏa.

Vậy đường kính quả bóng bằng $2a=56-2\sqrt{257}\approx 23{,}9(\text{cm})$.