

CHỦ ĐỀ 3: CÁC BÀI TOÁN VỀ RÚT GỌN BIỂU THỨC CHỨA CĂN

Bài 1.

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- 2) Rút gọn biểu thức B
- 3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $B < A$

Bài 2.

Cho hai biểu thức $A = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$
- 2) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$
- 3) Cho $P = \frac{A}{B}$. Tìm các giá trị của x để $P \geq \frac{2}{x+2}$

Bài 3.

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1}; B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{2}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị biểu thức A tại $x = 9$
- 2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.
- 3) Cho $P = A.B$. Tìm các giá trị nguyên của x để $|P| + P = 0$.

Bài 4.

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{x-3}{\sqrt{x}-3} + \frac{9}{x-3\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 9$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Xét biểu thức $P = A \times B$. Chứng minh $P > 0$.

Bài 5.

Cho hai biểu thức

$A = \frac{3\sqrt{x}-9}{x-4}$ và $B = \frac{x+1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ ($x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$)

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 1$
- 2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$
- 3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A.B$

Bài 6.

Cho hai biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ và $B = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 16$
- 2) Đặt $P = A + B$. Rút gọn biểu thức P
- 3) Tìm m để có x thỏa mãn $P(\sqrt{x}+3) = m$

Bài 7.

Cho biểu thức: $M = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$; $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} + \frac{2+8\sqrt{x}}{x-1} - \frac{2}{1-\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$.

- 1) Tính M khi $x = 0,49$
- 2) Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1}$
- 3) Đặt $Q = M.P + \frac{x-5}{\sqrt{x}}$. So sánh Q với 3.

Bài 8.

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9}$ với $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 100$
- 2) Rút gọn biểu thức B
- 3) Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M = A : B$ có giá trị nguyên

Bài 9.

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức B với $x = 25$.
- 2) Chứng minh $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$.
- 3) Tìm x để biểu thức $S = A.B$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 10.

Cho hai biểu thức $A = \frac{x-9}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+4}{9-x}$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$
- 2) Chứng minh rằng: $B = \frac{\sqrt{x}+2}{x-9}$
- 3) Xét biểu thức $P = AB$. So sánh P^2 với P

Bài 11.

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$ ($x \geq 0; x \neq 9$)

- 1) Rút gọn biểu thức A .
-

2) Tìm giá trị của x để $A = \frac{1}{3}$

3) Tìm giá trị lớn nhất của A

Bài 12.

Cho hai biểu thức và $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$; $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{2x}{x-9}$ với $x > 0; x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$.

3) Tìm các giá trị nguyên của x để $P < 0$ với $P = A.B$.

Bài 13.

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$ và $B = \frac{5}{\sqrt{x-2}} - \frac{16+2\sqrt{x}}{x-4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

2) Chứng minh $B = \frac{3}{\sqrt{x+2}}$.

3) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $5A+B \leq 3$.

Bài 14.

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$; $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{4}{\sqrt{x-3}} + \frac{x-4\sqrt{x}+15}{9-x}$ với $x > 0; x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$.

3) Cho $P = A : B$. Tìm x nguyên để $|P| + P = 0$.

Bài 15.

Cho hai biểu thức: $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{x+\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

3) Đặt $P = A : B$. Tìm tất cả các giá trị của x để $P = P^4$.

Bài 16.

Cho hai biểu thức: $A = \frac{x-9}{x-3\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x+3}{x-9} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x > 0; x \neq 9$.

1) Tính giá trị của A khi $x=16$.

2) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

3) Đặt $P = A.B$. Tìm các giá trị nguyên của x để $P < 1$

Bài 17.

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x=9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{A}{B} = \frac{x}{4} + 5$.

Bài 18.

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{x+4}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Cho $P = A \cdot B$. Tìm giá trị của x khi $|P| = P$.

Bài 19.

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$.
- 2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}}$.
- 3) Xét biểu thức $P = A + \frac{1}{B}$. Tìm x để $P \geq 1$.

Bài 20.

Cho hai biểu thức $M = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $N = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$

- 1) Tính giá trị biểu thức của M khi $x = 9$.
- 2) Rút gọn biểu thức N .
- 3) Tìm giá trị của x để biểu thức $\frac{M}{N}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 21.

Cho hai biểu thức $A = \frac{x}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2x-3}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.
- 2) Chứng minh $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$.
- 3) Tìm tất cả giá trị của x để $A-B < 0$.

Bài 22.

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6}$

với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

1) Tính giá trị của A khi $x=16$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$.

3) Cho $P = A:B$. Tìm x để $P < \frac{1}{2}$

Bài 23.

Cho hai biểu thức: $P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{8\sqrt{x}}{x-4}$ và $Q = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ (với $x \geq 0; x \neq 4$)

1) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x=9$.

2) Rút gọn biểu thức P .

3) Biết $M = \frac{P}{Q}$; Tìm các giá trị của x để $M = 18$.

Bài 24.

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ và $B = \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ với $x > 0$.

1) Tính giá trị của A khi $x=9$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$

3) Tìm giá trị của x để $P = 2AB + \frac{4}{x+1}$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 25.

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ và $B = \frac{x+1}{x-\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x-1}}$ với $x > 0; x \neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 25$.

2) Rút gọn B .

3) Cho $P = A.B$. So sánh giá trị của P với 1.

Bài 26.

1) Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x+2}}$. Tính giá trị của biểu thức A với $x=36$.

2) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+4}} + \frac{4}{\sqrt{x-4}} \right) : \frac{x+16}{\sqrt{x+2}}$ (với $x \geq 0, x \neq 16$).

3) Với các biểu thức A và B , hãy tìm các giá trị nguyên của x để giá trị của biểu thức $B(A-1)$ là **nhận** giá trị nguyên.

Bài 27.

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+3}}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} + \frac{2\sqrt{x+4}}{x-1}$ (Với $x \geq 0; x \neq 1$)

1) Tính giá trị của A khi $x=4$

2) Rút gọn B

3) Tìm x để $A.B \leq \frac{1}{2}$

Bài 28.

Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \frac{x+2\sqrt{x}}{x}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$.

3) Tìm số nguyên x nhỏ nhất để $\frac{A}{B} < \frac{7}{4}$.

Bài 29.

Cho $M = \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1}$ và $N = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ Với $x > 0; x \neq 1$.

1) Tính giá trị của N khi $x=25$

2) Rút gọn $S = M.N$

3) Tìm x để $S < -1$

Bài 30.

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{x-9}$ và $B = \frac{3\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-2} + \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

2) Rút gọn biểu thức B .

3) Xét biểu thức $P = A.B$. Tìm x để $P < 1$.

Bài 31.

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+9}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{9\sqrt{x}-10}{4-x}$, với $x \geq 0, x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{-8}{27}}$.

2) Rút gọn biểu thức B .

3) Cho $P = B:A$. Tìm các giá trị x là số thực để P nhận là một số chính phương.

Bài 32.

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$

2) Rút gọn biểu thức B

3) Cho $P = A.B$. Hãy so sánh P và \sqrt{P} .

Bài 33.

Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x+8}}{3\sqrt{x}}$ và $Q = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{7\sqrt{x+3}}{9-x}$

với $x \geq 0$ và $x \neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x=4$

2) Chứng minh: $Q = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$

3) Tìm $x \in \mathbb{Q}$ để $A \geq 2$ với $A = P \cdot Q$

Bài 34.

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{a-\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{2}{a-1} \right)$

1) Rút gọn biểu thức A

2) Tính giá trị của biểu thức A, biết $a = 4 + 2\sqrt{3}$

3) Tìm a sao cho $A < 0$

Bài 35.

Cho hai biểu thức $A = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{3}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+3})}$ với $x > 0, x \neq 1$

1) Tính giá trị của A khi $x=4$.

2) Rút gọn biểu thức $P = B \cdot A$

3) Tìm các giá trị của x để P nhận giá trị nguyên.

Bài 36.

Cho hai biểu thức $A = \frac{x+7}{\sqrt{x-3}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} + \frac{6\sqrt{x}}{9-x} - \frac{3}{\sqrt{x+3}}$ (với $x \geq 0; x \neq 9$)

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=49$.

2) Rút gọn B.

3) Cho $M = A \cdot B$. Tìm x để M đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 37.

Cho biểu thức $A = \frac{3x+12}{\sqrt{x+3}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{7\sqrt{x+3}}{x-9}$ (với $x > 0; x \neq 9$)

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$

2) Chứng minh $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{A}{B}$

Bài 38.

Cho biểu thức $A = \frac{3x+12}{\sqrt{x+3}}$ và $B = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{7\sqrt{x+3}}{x-9}$ (với $x > 0; x \neq 9$)

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$

2) Chứng minh $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

3) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{A}{B}$

Bài 39.

$A = \frac{3\sqrt{x}-6}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0; x \neq 4$

1) Tính giá trị của B khi $x = 25$

2) Chứng minh $Q = A.B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

3) Tìm các số nguyên x để $\sqrt{Q} < \frac{\sqrt{4}}{3}$

Bài 40.

Cho hai biểu thức: $A = \frac{3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+10}{x-4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

1) Tính giá trị của B tại $x = 9$

2) Rút gọn A

3) Đặt $P = A.B$. Tìm số nguyên tố x để $P \leq -1$

Bài 41.

Cho hai biểu thức $A = \frac{x-5}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{2x+2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 36$

2) Rút gọn biểu thức B .

3) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $P = AB$ có giá trị nguyên.

Bài 42.

Cho hai biểu thức

$A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} - \frac{x-3\sqrt{x}+5}{x-5\sqrt{x}+6}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

1) Tính giá trị của A khi $x = 25$.

2) Rút gọn B .

3) Cho $P = A:B$. Tìm x để $2P = 2\sqrt{x} - 9$.

Bài 43.

Cho hai biểu thức $A = \frac{x-7}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}+2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$

2) Rút gọn biểu thức B .

3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị nguyên

Bài 44.

Cho hai biểu thức $N = \frac{24}{\sqrt{x} + 6}$ và $M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 6} + \frac{1}{\sqrt{x} - 6} + \frac{17\sqrt{x} + 30}{x - 36}$ với $x \geq 0, x \neq 36$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức N khi $x = 9$
- 2) Rút gọn biểu thức M .
- 3) Tìm số nguyên x để biểu thức $L = N.M$ có giá trị nguyên lớn nhất.

Bài 45.

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$ và $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} - \frac{3}{\sqrt{x} + 2} - \frac{12}{x - 4}$ với $x \geq 0, x \neq 4$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.
- 2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$.
- 3) Với $P = A.B$. Tìm giá trị của x để $|P| > P$.

Bài 46.

Cho hai biểu thức $A = \frac{x - 2}{\sqrt{x} + 2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} - \frac{2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{4}{x - 1}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$).

- 1) Tính giá trị của A khi $x = 16$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Đặt $P = A.B$. Tìm các giá trị nguyên của x để $P = \frac{7}{4}$.

Bài 47.

Cho hai biểu thức $A = \frac{x - 3}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - \frac{4\sqrt{x}}{4 - x}$ với $x > 0, x \neq 4$

- 1) Tính giá trị của biểu thức A biết $x = 16$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Cho $P = A.B$. Tìm các giá trị nguyên của x để $P \leq 6$.

Bài 48.

Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}} + \frac{x + 4}{4 - x} \right) : \frac{x}{x - 2\sqrt{x}}$ (với $x > 0, x \neq 4$).

- 1) Rút gọn biểu thức B .
- 2) Tính giá trị của B với $x = \frac{1}{4}$.
- 3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $B < -\sqrt{x}$.

Bài 49.

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} - 1}$ và $B = \frac{3\sqrt{x} + 1}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

- 1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$
-

2) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

3) Tìm tất cả giá trị của x để $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$.

Bài 50.

Cho hai biểu thức $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{3\sqrt{x}+6}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

2) Rút gọn biểu thức B .

3) So sánh biểu thức $\frac{A}{B}$ với 3.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1.

1) Với $x=25$ (thỏa mãn điều kiện) suy ra $A = \frac{\sqrt{25}+1}{\sqrt{25}-2} = \frac{6}{3} = 2$.

Vậy $x=25$ thì $A=2$

2) Thu gọn biểu thức

$$B = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)+\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$
$$= \frac{x-4+\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$
$$= \frac{x+4\sqrt{x}-3\sqrt{x}-12}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$
$$= \frac{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ thì $B = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2}$

3) Ta có: $B < A \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2} < \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4$$

Kết hợp điều kiện suy ra $0 \leq x < 4$. Mà $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Vậy $x \in \{0; 1; 2; 3\}$ thì $B < A$

Bài 2.

1) . Thay $x = 64$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được $A = \frac{2}{\sqrt{64}-2} = \frac{1}{3}$.

2) . Ta có $B = \frac{3(\sqrt{x}+2)+(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$.

3) . Với $x \geq 0, x \neq 4$ thì

$$P = \frac{A}{B} = \frac{2}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \frac{2}{\sqrt{x}+2}.$$

Để

$$P \geq \frac{2}{x+2} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{2}{x+2}.$$

Do $2 > 0$ và $x+2 > 0, \sqrt{x}+2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \leq x+2 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \geq 0$

TH1: $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = 0$ nên $\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ (

TH2: $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) > 0 \Rightarrow \sqrt{x}-1 > 0$ vì $\sqrt{x} \geq 0$ nên $x > 1$.

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$ ta được $x = 0$ hoặc $x \geq 1, x \neq 4$.

Bài 3.

1) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta có $A = \frac{\sqrt{9} - 2}{\sqrt{9} - 1} = \frac{3 - 2}{3 - 1} = \frac{1}{2}$.

Vậy $A = \frac{1}{2}$ khi $x = 9$.

2) $B = \frac{x - \sqrt{x} - \sqrt{x} - 1 + 2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$ (với $x \geq 0, x \neq 1$)

$$B = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \text{ (đpcm)}$$

3) Ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$

Ta có: $|P| + P = 0 \Leftrightarrow |P| = -P \Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} \leq 0$

Mà $x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 > 0$, với mọi x thỏa mãn ĐKXD

Suy ra $\sqrt{x} - 2 \leq 0$

$$\sqrt{x} \leq 2$$

$$x \leq 4.$$

Vì $x \in \mathbb{R}, x \geq 0, x \neq 1 \Leftrightarrow x \in \{0; 2; 3; 4\}$.

Vậy $x \in \{0; 2; 3; 4\}$ thì $|P| + P = 0$.

Bài 4.

1) Khi $x = 25$ (ĐKXD thỏa mãn)

$$\text{Ta có } A = \frac{\sqrt{25} - 3}{\sqrt{25} + 3} = \frac{5 - 3}{5 + 3} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{1}{4}$$

2) Rút gọn biểu thức B .

$$\text{Ta có } B = \frac{x - 3}{\sqrt{x} - 3} + \frac{9}{x - 3\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{x}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(x-3)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} + \frac{9}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} + \frac{3(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \\
&= \frac{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 9 + 3\sqrt{x} - 9}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \\
&= \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \\
&= \frac{x}{\sqrt{x}-3}
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{x}{\sqrt{x}-3}$$

3). Xét biểu thức $P = A \times B$. Chứng minh $P > 0$.

$$\text{Ta có } P = A \times B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{x}{\sqrt{x}-3} = \frac{x}{\sqrt{x}+3}$$

Với $x > 0; x \neq 9$, ta có $\sqrt{x}+3 > 0$ nên $P = \frac{x}{\sqrt{x}+3} > 0$

Bài 5.

1). Thay $x=1$ (TMĐK) vào biểu thức A

$$A = \frac{3\sqrt{x}-9}{x-4} = \frac{3\sqrt{1}-9}{1-4} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$$2). B = \frac{x+1}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} = \frac{x+1+(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{x+1+x-9-x+4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{x-4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

$$3). P = A.B = \frac{3\sqrt{x}-9}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} = \frac{3(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$$

Vì $x \geq 0$ nên $\sqrt{x}+2 \geq 2 > 0$. Suy ra $P = \frac{3}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{3}{2}$

Dấu “=” xảy ra khi $x=0$ (tmđk)

Vậy giá trị lớn nhất của $P = \frac{3}{2}$ khi $x=0$.

Bài 6.

1) Thay $x=16$ (tmđk) vào biểu thức $A = \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}}$ ta được $A = \frac{3\sqrt{16}-2}{1-\sqrt{16}} = \frac{3.4-2}{1-4} = \frac{12-2}{-3} = -\frac{10}{3}$

Vậy khi $x=16$ thì $A = -\frac{10}{3}$

1) Với $x \geq 0, x \neq 1$. Ta có:

$$P = A+B = \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} + \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$P = \frac{(-3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} + \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$P = \frac{-3x-7\sqrt{x}+6+15\sqrt{x}-11-2x-\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{-(\sqrt{x}-1)(5\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$P = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}. \quad \text{Vậy với } x \geq 0; x \neq 1 \text{ thì } P = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}$$

2) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có: $m = P(\sqrt{x}+3) = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} \cdot (\sqrt{x}+3) = -5\sqrt{x}+2$

$$\text{Với } x \geq 0 \Rightarrow -5\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow -5\sqrt{x}+2 \leq 2 \Rightarrow m \leq 2 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow -5\sqrt{x} \neq -5 \Rightarrow -5\sqrt{x}+2 \neq -3 \Rightarrow m \neq -3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow m \leq 2; m \neq -3$

Vậy với $m \leq 2; m \neq -3$ thì có x thỏa mãn $P(\sqrt{x}+3) = m$

Bài 7.

1) Thay $x=0,49$ (thỏa mãn) vào M , ta có: $M = \frac{\sqrt{0,49}-1}{\sqrt{0,49}} = \frac{-3}{7}$.

Vậy $M = \frac{-3}{7}$ khi $x=0,49$

$$2) P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} + \frac{2+8\sqrt{x}}{x-1} - \frac{2}{1-\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} + \frac{2+8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{2+8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{2(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{x-3\sqrt{x}+2+2+8\sqrt{x}+2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{x+7\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}+6)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1} \text{ (điều phải chứng minh)}$$

$$3) \text{ Xét } Q = M.P + \frac{x-5}{\sqrt{x}} \text{ suy ra } Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-1} + \frac{x-5}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Xét hiệu } Q-3 = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 3 = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}$$

Với $x > 0; x \neq 1$ thì $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$ và $\sqrt{x} > 0$ suy ra $\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} \geq 0$ hay $Q \geq 3$

Bài 8.

1) Điều kiện $x > 0; x \neq 4; x \neq 9$

$$\text{Khi } x = 100 \text{ (thỏa mãn điều kiện) thì } A = \frac{10}{10-2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$2) B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9\sqrt{x}}{x-9} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - x - 9\sqrt{x}}{x-9} = \frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

$$3) \text{ Ta có } M = A : B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}-2+5}{\sqrt{x}-2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}-2}$$

TH1: $x \in \mathbb{Q}$ nhưng $\sqrt{x} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{x}$ là số vô tỷ $\Rightarrow M \notin \mathbb{Q}$

TH2: $x \in \mathbb{Q}, \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$

Để M nguyên thì $\sqrt{x}-2 \in U(5)$ và $\sqrt{x}-2 > -2$

Suy ra $\sqrt{x}-2 \in \{-1; 1; 5\} \cap \sqrt{x} \in \{1; 3; 7\} \cap x \in \{1; 9; 49\}$ (thỏa mãn đkxđ)

Vậy $x \in \{1; 9; 49\}$ thì $M \in \mathbb{Q}$.

Bài 9.

1) Tính giá trị của biểu thức B với $x=25$.

Với $x=25$ (thỏa mãn điều kiện) thay vào biểu thức B ta có:

$$B = \frac{\sqrt{25}+3}{\sqrt{25}+1} = \frac{5+3}{5+1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Vậy $B = \frac{4}{3}$ khi $x=25$.

2) Chứng minh $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có: } A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\
&= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + (\sqrt{x}-1) - 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}
\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

3) Tìm x để biểu thức $S = A.B$ đạt giá trị lớn nhất.

Với $x \geq 0; x \neq 1$.

$$\text{Ta có: } S = A.B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Ta có: } x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=0$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy GTLN của S là $\frac{3}{2}$ khi $x=0$.

Bài 10.

1) Thay $x = 4$ (TMDK) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{x-9}{\sqrt{x}} = \frac{4-9}{\sqrt{4}} = \frac{-5}{2}$$

Vậy, khi $x = 4$ thì $A = \frac{-5}{2}$

2) ĐKXD: $x > 0, x \neq 9$.

$$B = \frac{2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+4}{9-x}$$

$$B = \frac{2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+4}{x-9}$$

$$B = \frac{2(\sqrt{x}+3)}{x-9} - \frac{\sqrt{x}+4}{x-9}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}+6-\sqrt{x}-4}{x-9}$$

vậy $B = \frac{\sqrt{x}+2}{x-9}$ với $x > 0, x \neq 9$.

3) ĐKXD: $x > 0, x \neq 9$

$$P = AB = \frac{x-9}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{x-9} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Xét hiệu } P - 1 = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Ta có: } P^2 - P = P(P - 1)$$

$$\text{Vì } x > 0 \text{ nên } \sqrt{x} > 0 \text{ và } \sqrt{x+2} > 0$$

$$\text{Khi đó } \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} > 0 \text{ và } \frac{2}{\sqrt{x}} > 0 \text{ hay } P > 0 \text{ và } P - 1 > 0.$$

$$\text{Suy ra } P(P - 1) > 0 \text{ hay } P^2 - P > 0$$

$$\text{Vậy } P^2 > P \text{ với } x > 0, x \neq 9$$

Bài 11.

1) Rút gọn biểu thức A.

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{3x+9}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x-3}) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x+3}) - 3x-9}{(\sqrt{x+3})(\sqrt{x-3})} = \frac{3}{\sqrt{x+3}} \text{ Với } x \geq 0; x \neq 9$$

$$\text{Vậy với } x \geq 0; x \neq 9 \text{ thì } A = \frac{3}{\sqrt{x+3}}$$

$$2) A = \frac{1}{3} \text{ khi } \frac{3}{\sqrt{x+3}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Suy ra } \sqrt{x+3} = 9$$

$$x = 36 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy với } x = 36 \text{ thì } A = \frac{1}{3}$$

$$3) \text{ Với } x \geq 0; x \neq 9 \text{ có } A = \frac{3}{\sqrt{x+3}} \leq \frac{3}{0+3} = 1$$

Dấu “=” xảy ra khi $x=0$ (t/m)

$$\text{Max } A = 1 \text{ khi } x = 0$$

Bài 12.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

Thay $x=16$ vào biểu thức A, ta được:

$$A = \frac{\sqrt{16}-2}{\sqrt{16}} = \frac{4-2}{4} = \frac{1}{2}.$$

$$2) \text{ Chứng minh } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}.$$

$$\text{Ta có: } B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{2x}{x-9}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} - \frac{2x}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + \sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 2x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} - 2x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{x - 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$$

3) Tìm các giá trị nguyên của x để $P < 0$ với $P = A.B$.

$$\text{Ta có: } P = A.B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}.$$

$$\text{Để } P < 0 \text{ thì } \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} < 0$$

$$\text{Vì } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 9 \end{cases} \text{ Nên } \sqrt{x}+3 > 0$$

$$\text{Do đó: } \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4.$$

Kết hợp với điều kiện $x > 0$, ta có: $0 < x < 4$.

Vì x nhận giá trị nguyên nên $x \in \{1; 2; 3\}$.

Bài 13.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức A ta được

$$A = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9}+2} = \frac{3}{5}$$

2) Chứng minh $B = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4$ ta có:

$$B = \frac{5}{\sqrt{x}-2} - \frac{16+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{5(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{16+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{3}{\sqrt{x}+2}$$

3) Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $5A+B \leq 3$.

Với $x \geq 0, x \neq 4$ ta có: $5A+B = \frac{5\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$

Để $5A+B \leq 3$ khi $\frac{5\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} \leq 3$

$$\frac{5\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - 3 \leq 0$$

$$\frac{5\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} - \frac{3(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2} \leq 0$$

$$\frac{5\sqrt{x}+3-3\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}+2} \leq 0$$

$$\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} \leq 0$$

$$0 \leq x \leq \frac{9}{4}$$

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của x thỏa mãn yêu cầu là $x=2$.

Bài 14.

1) Thay $x = 25$ (tmdk) vào A ta được $A = \frac{\sqrt{25}-1}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$

Vậy với $x = 25$ thì $A = \frac{4}{5}$

$$\begin{aligned} 2) B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{4}{\sqrt{x}-3} - \frac{x-4\sqrt{x}+15}{x-9} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{4(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{x-4\sqrt{x}+15}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{2x-6\sqrt{x}+(4\sqrt{x}+12)-(x-4\sqrt{x}+15)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x+2\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

3) $P = A : B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ (đkbs: $x \neq 1$)

$$|P| + P = 0 \Rightarrow |P| = -P \Rightarrow P \leq 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 9$$

KHĐK $\Rightarrow 0 < x < 9; x \neq 1$

Mà $x \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Bài 15.

1) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức ta được: $A = \frac{2\sqrt{25}}{\sqrt{25}-1}$

Tính được $A = \frac{5}{2}$ và kết luận

$$2) B = \frac{x + \sqrt{x} - 2}{x - 2\sqrt{x} + 1} + \frac{1}{1 - \sqrt{x}} = \frac{x + \sqrt{x} - 2 - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)^2}$$

$$= \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \text{ (đpcm)}$$

$$3) P = A : B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \text{ Có}$$

$$P = P^4$$

$$P - P^4 = 0$$

$$P(1 - P^3) = 0$$

$$P = 0; P = 1$$

$$P = 0$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 0$$

$$x = 0 \text{ (TMĐK)}$$

$$P = 1$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1$$

$$x = 1 \text{ (KTM)}$$

Vậy $x = 0$ là giá trị cần tìm.

Bài 16.

1) Thay $x = 16$ (thỏa mãn đk) vào biểu thức A ta được: $A = \frac{16-9}{16-3\sqrt{16}} = \frac{7}{4}$.

$$2) \text{ Với } x > 0; x \neq 9 \text{ ta có: } B = \frac{x+3}{x-9} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

$$= \frac{x+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+3+\sqrt{x}+3+2\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ với $x > 0; x \neq 9$. (đpcm)

$$3) \text{ Ta có: } P = A \cdot B = \frac{x-9}{x-3\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)^2} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$$

$$\text{Do đó: } P < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}} < 0 \Leftrightarrow \frac{6}{\sqrt{x-3}} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-3} < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 9$$

Do x nguyên nên $x \in \{1; 2; 3; \dots; 8\}$

Vậy $x \in \{1; 2; 3; \dots; 8\}$ thì $P < 1$

Bài 17.

1) Thay $x = 9$ (TM) vào biểu thức A, ta có:

$$A = \frac{\sqrt{9}+4}{\sqrt{9}-1} = \frac{3+4}{3-1} = \frac{7}{2}$$

Vậy $A = \frac{7}{2}$ tại $x = 9$.

2) Ta có $B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0, x \neq 1$. $\frac{A}{B} = \frac{x}{4} + 5$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1-2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

3) Ta có $\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{1} = \sqrt{x}+4$

Để

$$\frac{A}{B} = \frac{x}{4} + 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+4 = \frac{x}{4} + 5$$

$$4\sqrt{x}+16 = x+20$$

$$x-4\sqrt{x}+4 = 0$$

$$\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (TM)}$$

Vậy để $\frac{A}{B} = \frac{x}{4} + 5$ thì $x = 4$.

Bài 18.

$$1) \text{ Khi } x=9 \text{ thì } A = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{9+4}}{\sqrt{9}} = \frac{3+4}{3} = \frac{7}{3}.$$

$$2) B = \frac{2}{\sqrt{x+2}} + \frac{x+4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} = \frac{2\sqrt{x-2} + x+4}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} = \frac{2\sqrt{x} + x}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(2+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-2})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$$

$$3) P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-2}} \text{ mà } |P| = P \text{ khi và chỉ khi } P \geq 0 \text{ hay } \frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-2}} \geq 0 \text{ do đó}$$

$$\sqrt{x-2} > 0$$

$$\sqrt{x} > 2$$

$$x > 4 \text{ (TM)}$$

Vậy $x > 4$.

Bài 19.

1). Tính giá trị của biểu thức A khi $x=4$

$$\text{Biểu thức } A \text{ được cho là: } A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}$$

Thay $x=4$ vào biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4+2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Vậy giá trị của A khi $x=4$ là $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2). Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x+2}}{x-\sqrt{x}}$

Biểu thức B được cho là:

$$B = \frac{2}{\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x-2}}{x-\sqrt{x}}$$

$$B = \frac{2}{(\sqrt{x-1})} - \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}(\sqrt{x-1})}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x-1})} - \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}(\sqrt{x-1})}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x} - \sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x-1})}$$

$$B = \frac{\sqrt{x+2}}{x-\sqrt{x}}$$

Điều phải chứng minh

$$3). \text{ Ta có: } P = A + \frac{1}{B} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{x}{\sqrt{x+2}} \text{ với}$$

$$P = \frac{x}{\sqrt{x+2}} \geq 1 \Rightarrow x \geq \sqrt{x+2} \Rightarrow x - \sqrt{x} - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) \geq 0$$

$$(\sqrt{x}-2) \geq 0$$

$$\sqrt{x} \geq 2$$

$$\Rightarrow x \geq 4$$

Kết hợp với điều kiện ta đc $x \geq 4$ thì $P \geq 1$

Bài 20.

$$1) \quad M = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} \text{ và } N = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} \text{ với } x > 0, x \neq 4.$$

$$\text{Thay } x=9 \text{ vào biểu thức M ta được : } M = \frac{9+3}{\sqrt{9}-2} = 12$$

$$2) \quad N = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$
$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$3) \quad M:N = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}}$ hay $x=3$ (thỏa mãn đkxđ)

Vậy $x=3$

Bài 21.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

$$\text{Thay } x=16 \text{ (tmđk) vào A ta có: } A = \frac{16}{\sqrt{16}-3} = \frac{16}{4-3} = 16$$

Vậy với $x=16$ thì $A=16$.

2) Chứng minh $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$.

ĐKXĐ: $x > 0, x \neq 9$

$$B = \frac{2x-3}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$B = \frac{2x-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$$

Vậy với $x > 0, x \neq 9$ thì $B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3}$.

3) Tìm tất cả giá trị của x để $A - B < 0$.

$$A - B < 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-3} < 0$$

Ta có: $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$

Do đó: $\begin{cases} \sqrt{x}-3 < 0 \\ \sqrt{x}-1 \neq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sqrt{x} < 3 \\ \sqrt{x} \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $0 < x < 9$ và $x \neq 1$

Vậy với $0 < x < 9$ và $x \neq 1$ thì $A - B < 0$.

Bài 22.

1) Tính giá trị của A khi $x = 16$.

Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được: $A = \frac{\sqrt{16}-1}{\sqrt{16}-3} = 3$

Vậy $A = 3$ khi $x = 16$.

2) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$.

Với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$

$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}-8}{x-5\sqrt{x}+6} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} - \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} + \frac{6\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2x-6\sqrt{x}-x+4+6\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x-4}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

3) Cho $P = A : B$. Tìm x để $P < \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} P = A : B &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

Ta có: $P < \frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} < \frac{1}{2}$

$$2\sqrt{x}-2 < \sqrt{x}+2 \quad (\text{vì } 2(\sqrt{x}+2) > 0)$$

$$\sqrt{x} < 4$$

$$0 \leq x < 16$$

Vậy $0 \leq x < 16; x \neq 4; x \neq 9$ thì $P < \frac{1}{2}$.

Bài 23.

1) Với $x=9$ (TMĐK) thay vào biểu thức Q ta được: $Q = \frac{1}{3+2} = \frac{1}{5}$

Vậy $x=9$ thì biểu thức $Q = \frac{1}{5}$.

2) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{8\sqrt{x}}{x-4} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - \sqrt{x}(\sqrt{x}+2) + 8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{3x - 6\sqrt{x} - x - 2\sqrt{x} + 8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \end{aligned}$$

3) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có: $M = \frac{P}{Q} = \frac{2x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} : \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{2x}{\sqrt{x}-2}$

Để $M=18$ thì $\frac{2x}{\sqrt{x}-2} = 18$

$$x - 9\sqrt{x} + 18 = 0$$

$$(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-6) = 0$$

$$\sqrt{x} = 3 \text{ hoặc } \sqrt{x} = 6$$

$$x = 9 \text{ hoặc } x = 36 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy để $M=18$ thì $x \in \{9; 36\}$.

Bài 24.

1) $A = \frac{\sqrt{9}}{9+1} = \frac{3}{10}$.

Vậy với $x=9$ thì $A = \frac{3}{10}$.

2) Điều kiện xác định: $x > 0$.

$$\begin{aligned} B &= \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-2-\sqrt{x}-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ (đpcm).

3)
$$\begin{aligned} P &= 2AB + \frac{4}{x+1} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+1} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x+1} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-4}{x+1} + \frac{4}{x+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}-4+4}{x+1}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{x+1}$$

Xét hiệu:

$$P-1 = \frac{2\sqrt{x}}{x+1} - 1 = \frac{2\sqrt{x}-x-1}{x+1} = \frac{-(x-2\sqrt{x}+1)}{x+1} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{x+1}$$

$$\forall x > 0 \Rightarrow (\sqrt{x}-1)^2 \geq 0 \Rightarrow -(\sqrt{x}-1)^2 \leq 0 \quad (1)$$

$$\forall x > 0 \Rightarrow x+1 > 1 > 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \quad \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{x+1} \leq 0 \Rightarrow P-1 \leq 0 \Rightarrow P \leq 1$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } P_{\max} = 1 \Leftrightarrow x=1.$$

Bài 25.

1) Tính giá trị của biểu thức A tại $x = 25$.

Thay $x = 25$ thỏa mãn điều kiện $x > 0; x \neq 1$ vào biểu thức A, ta được:

$$A = \frac{\sqrt{25}+1}{\sqrt{25}-1} = \frac{5+1}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Vậy giá trị của biểu thức A bằng $\frac{3}{2}$ tại $x = 25$.

$$2) B = \frac{x+1}{x-\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \text{ với } x > 0; x \neq 1$$

$$B = \frac{x+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$B = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}.$$

$$\text{Vậy } B = \frac{(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

3) Cho $P = A.B$. So sánh giá trị của P với 1.

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

Xét hiệu:

$$P-1 = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0$, suy ra $\frac{1}{\sqrt{x}} > 0$. Do vậy $P-1 > 0 \Rightarrow P > 1$.

Vậy $P > 1$.

Bài 26.

1) Với $x = 36$, ta có $A = \frac{\sqrt{36} + 4}{\sqrt{36} + 2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$.

2) Với $x \geq 0$, $x \neq 16$ ta có

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{x-16} + \frac{4(\sqrt{x}+4)}{x-16} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{x+16} = \frac{(x+16)(\sqrt{x}+2)}{(x-16)(x+16)} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16}.$$

3) $B(A-1) = \frac{\sqrt{x}+2}{x-16} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+4-\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \right) = \frac{2}{x-16}.$

$B(A-1)$ nhận giá trị nguyên khi

$$(x-16) \in U(2)$$

$$(x-16) \in \{-2; -1; 1; 2\}$$

$$x \in \{14; 15; 17; 18\}$$

Kết hợp điều kiện, để $B(A-1)$ nhận giá trị nguyên thì $x \in \{14; 15; 17; 18\}$.

Bài 27.

1) Thay $x = 4$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{\sqrt{4} + 1}{\sqrt{4} + 3} = \frac{3}{5}$$

Vậy giá trị của biểu thức A tại $x = 4$ là: $\frac{3}{5}$

2) Ta có:
$$\begin{aligned} B &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2\sqrt{x}+4}{x-1} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1) + 2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{2x - 2\sqrt{x} - x - 2\sqrt{x} - \sqrt{x} - 2 + 2\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x - 3\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

3) Ta có: $A.B \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} - \frac{1}{2} \leq 0$$

$$\frac{2\sqrt{x}-4-\sqrt{x}-3}{2(\sqrt{x}+3)} \leq 0$$

$$\frac{\sqrt{x}-7}{2(\sqrt{x}+3)} \leq 0$$

$$\sqrt{x}-7 \leq 0 \quad (\text{Vì } 2(\sqrt{x}+3) > 0)$$

$$\sqrt{x} \leq 7$$

$$x \leq 49$$

Kết hợp điều kiện ta có: $0 \leq x \leq 49$; $x \neq 1$

Vậy $0 \leq x \leq 49$; $x \neq 1$ thì $A.B \leq \frac{1}{2}$

Bài 28.

1) Khi $x=4$ (thỏa mãn điều kiện), ta thay vào biểu thức A

$$\text{Ta có } A = \frac{x+2\sqrt{x}}{x} = \frac{4+2\sqrt{4}}{4} = 2$$

Vậy $A=2$ khi $x=4$

2)

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy với $x > 0$ thì $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}$

$$3) \frac{A}{B} = \frac{x+2\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+2})}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})}{x} = \frac{x+\sqrt{x}}{x}$$

Ta có: $\frac{A}{B} < \frac{7}{4}$

$$\frac{x+\sqrt{x}}{x} < \frac{7}{4}$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{7}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{3}{4}$$

$$\sqrt{x} > \frac{4}{3}$$

Nên $x > \frac{16}{9}$

Vậy số nguyên x nhỏ nhất thỏa điều kiện bài toán là $x = 2$.

Bài 29.

Có $M = \frac{\sqrt{x+2}}{x+2\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$ và $N = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$ Với $x > 0; x \neq 1$.

1) Thay $x = 25$ (thỏa mãn ĐKXD) vào biểu thức $N = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$, ta có:

$$N = \frac{\sqrt{25+1}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

Vậy với $x = 25$ thì giá trị của biểu thức $N = \frac{6}{5}$

2) Có: $M = \frac{\sqrt{x+2}}{x+2\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-2}}{x-1}$

$$M = \frac{\sqrt{x+2}}{(\sqrt{x+1})^2} - \frac{\sqrt{x-2}}{(\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1})}$$

$$M = \frac{(\sqrt{x+2})(\sqrt{x-1}) - (\sqrt{x-2})(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})^2(\sqrt{x-1})}$$

$$M = \frac{x + \sqrt{x} - 2 - x + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x+1})^2(\sqrt{x-1})}$$

$$M = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1})^2(\sqrt{x-1})}$$

$$+) \text{ Có } M = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)}; N = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \text{ mà } S = M.N$$

$$\text{Nên } S = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}. \text{ Do đó, } S = \frac{2}{x-1}$$

$$3) \text{ Có } S = \frac{2}{x-1} \text{ (} x > 0; x \neq 1.) \text{ mà } S < -1$$

$$\text{nên có: } \frac{2}{x-1} < -1. \text{ Do đó: } \frac{2+x-1}{x-1} < 0 \text{ hay } \frac{x+1}{x-1} < 0 \text{ (1)}$$

$$\text{Vì } x > 0 \text{ nên } x+1 > 0 \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) (2), ta có: } x-1 < 0 \text{ nên } x < 1$$

$$\text{Kết hợp điều kiện xác định } x > 0; x \neq 1. \text{ Ta có: } 0 < x < 1$$

$$\text{Vậy } 0 < x < 1 \text{ thì } S < -1$$

Bài 30.

1) Tính giá trị của A khi $x = 16$.

Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{16}}{16-9} = \frac{4}{7}.$$

$$\text{Vậy khi } x = 16 \text{ thì } A = \frac{4}{7}.$$

2) Rút gọn biểu thức B .

Điều kiện: với $x \geq 0$ và $x \neq 4, x \neq 9$

$$\begin{aligned} B &= \frac{3\sqrt{x}-6}{\sqrt{x}-2} + \frac{x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{3(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2} \\ &= 3 + \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = 3 + \sqrt{x} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } x \neq 4, x \neq 9.$$

3) Xét biểu thức $P = A.B$. Tìm x để $P < 1$.

$$P = \frac{\sqrt{x}}{x-9} \cdot (\sqrt{x}+3) = \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot (\sqrt{x}+3) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}.$$

$$\text{Để } P < 1 \text{ thì } \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} < 1 \text{ hay } \frac{3}{\sqrt{x}-3} < 0. \text{ Suy ra } \sqrt{x}-3 < 0 \text{ (vì } 3 > 0)$$

Do đó $\sqrt{x} < 3$ hay $x < 9$. Kết hợp với điều kiện $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$, ta được $0 \leq x < 9$ và $x \neq 4$

$$\text{Vậy } P < 1 \text{ khi } 0 \leq x < 9 \text{ và } x \neq 4.$$

Bài 31.

Điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$.

1) Ta có: $x = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{-8}{27}} = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{-2}{3}\right)^3} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{-2}{3} = 1.$

Thay $x=1$ (thỏa mãn điều kiện) vào A ta được: $A = \frac{\sqrt{1-2}}{\sqrt{1+9}} = \frac{1-2}{1+9} = \frac{-1}{10}.$

Vậy $A = \frac{-1}{10}$ khi $x = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{-8}{27}}.$

2) Ta có:
$$B = \frac{3}{\sqrt{x+2}} - \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{9\sqrt{x}-10}{4-x}$$

$$= \frac{3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{9\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}-6+x+2\sqrt{x}-9\sqrt{x}+10}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{x-4\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}.$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 4.$

3) Ta có:

$$P = B : A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+9} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+9}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{7}{\sqrt{x}+2}$$

Vì $7 > 0, \sqrt{x}+2 > 0$ nên $\frac{7}{\sqrt{x}+2} > 0.$

Do $\sqrt{x} \geq 0$ nên $\sqrt{x}+2 \geq 2$, suy ra $\frac{7}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{7}{2}$

Do đó $0 < \frac{7}{\sqrt{x}+2} \leq \frac{7}{2}$, suy ra $1 < \frac{7}{\sqrt{x}+2} + 1 \leq \frac{7}{2} + 1$ hay $1 < P < \frac{9}{2}$

mà P là số chính phương nên $P = 4.$

+ Với $P = 4$, ta có $\frac{7}{\sqrt{x}+2} = 3$

$$\sqrt{x}+2 = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{1}{9} \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{9}.$$

Bài 32.

1). Thay $x=16$ (TMĐK) vào biểu thức A ta được $A = \frac{3}{4}$ và kết luận

$$\begin{aligned} 2). B &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}-1-3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

3). Với $x \geq 0, x \neq 1$

$$P = AB = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

Vì $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \geq 0$ nên $\sqrt{x}+2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+2} > 0 \Rightarrow P > 1 \Rightarrow \sqrt{P} > 1 \Rightarrow P - \sqrt{P} = \sqrt{P}(\sqrt{P}-1) > 0 \Rightarrow P > \sqrt{P}$$

Bài 33.

1) Thay $x=4$ (TMĐK) vào biểu thức P , ta có:

$$P = \frac{\sqrt{4}+8}{3\sqrt{4}} = \frac{2+8}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Vậy } x=4 \text{ thì } P = \frac{5}{3}$$

2) Với $x \geq 0; x \neq 9$. Ta có

$$Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{7\sqrt{x}+3}{9-x}$$

$$Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{7\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$Q = \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) - 7\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$Q = \frac{3x-9\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \text{ (đpcm)}$$

$$A = P.Q = \frac{\sqrt{x+8}}{3\sqrt{x}} \cdot \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} = \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}}$$

3) Ta có

$$\text{Để } A \geq 2 \text{ thì } \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}} \geq 2 \text{ suy ra } \frac{\sqrt{x+8}}{\sqrt{x+3}} - 2 \geq 0 \text{ suy ra } \frac{-\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+3}} \geq 0$$

Suy ra $-\sqrt{x+2} \geq 0$ (Vì $\sqrt{x+3} > 0 \forall x > 0, x \neq 9$)

$$-\sqrt{x} \geq -2 \text{ suy ra } \sqrt{x} \leq 2 \text{ thì } x \leq 4$$

Kết hợp với điều kiện $x > 0, x \neq 9$ và $x \in \square$

Vậy $x \in \{1; 2; 3; 4\}$ thì $A \geq 2$

Bài 34.

1) Điều kiện $0 < a \neq 1$

$$\text{Khi đó ta có } A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} + \frac{2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)} \right)$$

$$A = \frac{a-1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)} = \frac{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)} : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} : \frac{1}{(\sqrt{a}-1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)}{1} = \frac{a-1}{\sqrt{a}}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{a-1}{\sqrt{a}}$$

$$2) a = 4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{2}+1)^2$$

$$A = \frac{2+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+1} = 2$$

Vậy với $a = 4 + 2\sqrt{3}$ thì giá trị của biểu thức A là 2

$$3) \text{ Với } 0 < a \neq 1 \text{ thì } A < 0 \Leftrightarrow \frac{a-1}{\sqrt{a}} < 0 \Leftrightarrow a-1 < 0 \Leftrightarrow a < 1$$

Kết hợp với điều kiện ta có $A < 0$ khi $0 < a < 1$

Bài 35.

$$1) \text{ Thay } x=4 \text{ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức } A, \text{ ta được } A = 1 - \frac{1}{\sqrt{4}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2) \text{ Ta có } B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+3) + 3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$3) \text{ Xét } P = B \cdot A = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$$

Xét $P=0$ hay $\sqrt{x}-2=0 \Rightarrow x=4$ (thỏa mãn)

$$\text{Xét } P \neq 0. \text{ Có } P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+3}.$$

Để P nhận giá trị nguyên thì $\frac{5}{\sqrt{x}+3}$ nhận giá trị nguyên

$$\text{Vì } x > 0 \text{ nên } \frac{5}{\sqrt{x}+3} > 0 \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } \sqrt{x}+3 \geq 3 \text{ nên } \frac{5}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{5}{3} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$0 < \frac{5}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x}+3} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+3=5$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}=2$$

Nên $x=4$ (thỏa mãn)

Bài 36.

ĐK: $x \geq 0; x \neq 9$

1) Với $x=49$ (TMĐK) nên $\sqrt{x}=7$ Thay vào A ta được:

$$A = \frac{49+7}{7-3}$$

$$A = 14$$

2)

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{6\sqrt{x}}{9-x} - \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{6\sqrt{x}}{x-9} - \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - 6\sqrt{x} - 3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{x+3\sqrt{x}-6\sqrt{x}-3\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{x-6\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$$

$$3) \text{ Ta có } M = A.B = \frac{x+7}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$$

$$M = \frac{x+7}{\sqrt{x}+3}$$

$$M = \frac{x-9+16}{\sqrt{x}+3}$$

$$M = \sqrt{x}-3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3}$$

$$M = \sqrt{x}+3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} - 6$$

Với $a, b \geq 0$ ta có $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ nên $a+b \geq 2\sqrt{ab}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $x \geq 0$ nên $\sqrt{x}+3 > 0, \frac{16}{\sqrt{x}+3} > 0$

$$\text{Do đó } \sqrt{x}+3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+3) \cdot \frac{16}{\sqrt{x}+3}} = 8$$

$$\sqrt{x}+3 + \frac{16}{\sqrt{x}+3} - 6 \geq 8 - 6 = 2$$

Nên $M \geq 2$ Suy ra Min $M = 2$ khi

$$\sqrt{x}+3 = \frac{16}{\sqrt{x}+3}$$

$$(\sqrt{x}+3)^2 = 16$$

$$\sqrt{x}+3 = 4$$

$$\sqrt{x} = 1$$

$$x = 1 \text{ (TMĐK)}$$

Bài 37.

1) Thay $x=4$ (TMĐK) vào biểu thức A có:

$$A = \frac{3 \cdot 4 + 12}{\sqrt{4} + 3} = \frac{24}{5}$$

Vậy $A = \frac{24}{5}$ khi $x=4$

2) Chứng minh $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$

$$B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{7\sqrt{x}+3}{x-9}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{7\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \\
&= \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+3}) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x-3}) - 7\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \\
&= \frac{x+3\sqrt{x} + \sqrt{x}+3 + 2x - 6\sqrt{x} - 7\sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \\
&= \frac{3x - 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \\
&= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \\
&= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}
\end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$ với $x > 0; x \neq 9$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{A}{B}$

$$P = \frac{A}{B} = \frac{3x+12}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{x+3}}{3\sqrt{x}} = \frac{x+4}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

Xét bất đẳng thức Cauchy: Với hai số thực không âm a, b ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a=b$$

Thật vậy: $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0; \frac{4}{\sqrt{x}} > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$P = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 4$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}}$

$x = 4$ (Thỏa mãn)

Vậy $P_{\min} = 4$ khi và chỉ khi $x = 4$

Bài 38.

3) Thay $x=4$ (TMĐK) vào biểu thức A có:

$$A = \frac{3 \cdot 4 + 12}{\sqrt{4} + 3} = \frac{24}{5}$$

Vậy $A = \frac{24}{5}$ khi $x = 4$

2) Chứng minh $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{7\sqrt{x+3}}{x-9} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} - \frac{7\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x+3}) + 2\sqrt{x}(\sqrt{x-3}) - 7\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{x+3\sqrt{x} + \sqrt{x+3} + 2x - 6\sqrt{x} - 7\sqrt{x+3}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{3x - 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x-3})}{(\sqrt{x-3})(\sqrt{x+3})} \\ &= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x+3}}$ với $x > 0; x \neq 9$

4) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{A}{B}$

$$P = \frac{A}{B} = \frac{3x+12}{\sqrt{x+3}} \cdot \frac{\sqrt{x+3}}{3\sqrt{x}} = \frac{x+4}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

Xét bất đẳng thức Cauchy: Với hai số thực không âm a, b ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a=b$$

$$\text{Thật vậy: } (a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0; \frac{4}{\sqrt{x}} > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$P = \sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} = 4$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}}$

$$x = 4 \text{ (Thỏa mãn)}$$

Vậy $P_{\min} = 4$ khi và chỉ khi $x = 4$

Bài 39.

1) Thay $x=25$ (tmdk) vào B

$$B = \frac{5-2}{5+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Vậy khi $x=25$ thì $B = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 2) A &= \frac{3\sqrt{x}-6+\sqrt{x}+(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-6+\sqrt{x}+x-5\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

3) $Q = A.B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$. ĐK để \sqrt{Q} xác định là $Q \geq 0$ suy ra $x \geq 1$

$$\sqrt{Q} < \frac{2}{3}$$

$$Q < \frac{4}{9}$$

$$\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} < \frac{4}{9}$$

$$\sqrt{x} < \frac{13}{5} \text{ suy ra } 0 < x < \frac{169}{25}$$

Kết hợp điều kiện x nguyên tìm được $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Bài 40.

1) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức B ta có:

$$B = \frac{\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}-2} = \frac{3+2}{1} = 5$$

Vậy giá trị của B tại $x=9$ là 5.

$$2) A = \frac{3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+10}{x-4}$$

$$A = \frac{3(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}+10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$A = \frac{3(\sqrt{x}+2) - \sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$A = \frac{2}{\sqrt{x}+2}$$

$$3) P = A.B = \frac{2}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} = \frac{2}{\sqrt{x-2}}$$

$$P \leq -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x-2}} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x-2}} + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} \leq 0$$

* Nếu $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} = 0$ thì $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (không thỏa mãn đk x là số nguyên tố)

* Nếu $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}} < 0$ thì ta có hai trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x-2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4 \text{ (thỏa mãn đk } x \geq 0; x \neq 4) \text{ mà } x \text{ là số nguyên tố nên}$$

$$x = 2; x = 3$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} \sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy $x = 2; x = 3$ thì thỏa mãn đề bài

Bài 41.

$$1) \text{ Thay } x = 36 \text{ (tmdk)} \text{ vào } A \text{ ta được } A = \frac{36-5}{\sqrt{36}} = \frac{31}{6}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{31}{6} \text{ khi } x = 36$$

$$2) B = \frac{2x+2\sqrt{x}}{x-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

$$B = \frac{2x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{x+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, x > 0, x \neq 1$$

3) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $P = AB$ có giá trị nguyên

$$P = \frac{x-5}{\sqrt{x}-1}$$

$$P = \frac{x-5}{\sqrt{x}-1} = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ (tm)}$$

$$P \neq 0, x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \in \mathbb{I} \Rightarrow P \notin \mathbb{Z}$$

$$P = \sqrt{x} + 1 - \frac{4}{\sqrt{x}-1} \neq 0, x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-1 \in U(4)$$

$$x \in \{4; 9; 25\} \text{ (tmđk)}$$

$$\text{Vậy } x \in \{4; 5; 9; 25\}$$

Bài 42.

1) Tính giá trị của A khi $x = 25$

$$\text{Biểu thức: } A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Điều kiện: } x \geq 0$$

Với $x = 25$ thỏa mãn điều kiện

$$\text{Thay } x = 25 \text{ vào biểu thức } A \text{ ta có: } A = \frac{\sqrt{25}+3}{\sqrt{25}+1} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Vậy với } x = 25 \text{ thì } A = \frac{4}{3}$$

2) Rút gọn B

$$\text{Điều kiện xác định: } x \geq 0; x \neq 4; \neq x \neq 9$$

$$\text{Ta có: } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} - \frac{x-3\sqrt{x}+5}{x-5\sqrt{x}+6}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} - \frac{x-3\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3) + (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) - (x-3\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{x-3\sqrt{x}+x-4-x+3\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$$

3) Cho $P = A : B$. Tìm x để $2P = 2\sqrt{x} - 9$

$$\text{Điều kiện xác định: } x \geq 0; x \neq 4; \neq x \neq 9$$

$$\text{Ta có: } P = A : B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Để } 2P = 2\sqrt{x} - 9$$

$$\frac{2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+1} = 2\sqrt{x}-9$$

$$2\sqrt{x}-4 = (2\sqrt{x}-9)(\sqrt{x}+1)$$

$$2\sqrt{x}-4 = 2x+2\sqrt{x}-9\sqrt{x}-9$$

$$2x-9\sqrt{x}+5=0$$

$$(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-5)=0$$

$$\begin{cases} 2\sqrt{x}+1=0 \text{ (PTVN)} \\ \sqrt{x}-5=0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x}-5=0$$

$$x=25 \text{ (TM)}$$

Vậy đề $2P=2\sqrt{x}-9$ thì $x=25$.

Bài 43.

1) Thay $x=9$ (tmđk) vào biểu thức A , ta được:

$$A = \frac{9-7}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

Vậy khi $x=9$ thì $A = \frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} 2) B &= \frac{1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} + \frac{2x-\sqrt{x}+2}{x-4} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2-\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)+2x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2-x-2\sqrt{x}+2x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0, x \neq 4$

$$\begin{aligned} 3) P &= \frac{x-7}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-7}{\sqrt{x}+2} \\ + \text{Xét } P &= \frac{x-7}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-7}{\sqrt{x}+2} \text{ (thỏa mãn đk)} \end{aligned}$$

+ Xét $P \neq 0$

TH1: $x \in \mathbb{Q}; x \neq 7; \sqrt{x}$ là số vô tỉ $P \notin \mathbb{Q}$ (loại)

TH2: $x \in \mathbb{Q}, \sqrt{x} \in \mathbb{Q}$

Ta có: $P = \frac{x-4-3}{\sqrt{x+2}} = \frac{x-4}{\sqrt{x+2}} - \frac{3}{\sqrt{x+2}} = \sqrt{x} - 2 - \frac{3}{\sqrt{x+2}}$

Đề $P \in \square$

Suy ra $\sqrt{x} - 2 - \frac{3}{\sqrt{x+2}} \in \square$

Suy ra $\frac{3}{\sqrt{x+2}} \in \square$

Suy ra $\sqrt{x} + 2 \in U(3)$

Vậy $\sqrt{x} + 2 \in \{1; 3\}$

Do $\sqrt{x} + 2 \geq 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn)

Vậy với $x \in \{1; 7\}$; thì P có giá trị nguyên

Bài 44.

1) Thay $x = 9$ (tmđk) vào N

Tính $N = \frac{24}{\sqrt{9} + 6} = \frac{8}{3}$.

2) $M = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 6)}{(\sqrt{x} + 6)(\sqrt{x} - 6)} + \frac{\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 6)(\sqrt{x} - 6)} + \frac{17\sqrt{x} + 30}{(\sqrt{x} + 6)(\sqrt{x} - 6)}$

$= \frac{x - 6\sqrt{x} + \sqrt{x} + 6 + 17\sqrt{x} + 30}{(\sqrt{x} + 6)(\sqrt{x} - 6)}$

$= \frac{x + 12\sqrt{x} + 36}{(\sqrt{x} + 6)(\sqrt{x} - 6)} = \frac{(\sqrt{x} + 6)^2}{(\sqrt{x} + 6)(\sqrt{x} - 6)}$

$= \frac{\sqrt{x} + 6}{\sqrt{x} - 6}$

3) $L = \frac{24}{\sqrt{x} - 6}$

Lý luận P đạt giá trị nguyên lớn nhất khi $x = 49$ khi đó $P = 24$.

Bài 45.

1) $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

$A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{25} - 2}{\sqrt{25} + 2} = \frac{3}{7}$

Vậy $A = \frac{3}{7}$ khi $x = 25$.

2) Với $x \geq 0, x \neq 4$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có : } B &= \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}} - \frac{3}{\sqrt{x+2}} - \frac{12}{x-4} \\
 &= \frac{(\sqrt{x+2})^2}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} - \frac{3(\sqrt{x-2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} - \frac{12}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} \\
 &= \frac{x+4\sqrt{x}+4-3\sqrt{x}+6-12}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{x+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x-2})(\sqrt{x+2})} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-2}}
 \end{aligned}$$

$$3) \text{ Ta có : } P = A.B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+2}}$$

$$|P| > P$$

$$\text{TH 1: } P > P \text{ (Vô lí)}$$

$$\text{TH 2: } -P > P \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} > \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+2}}$$

$$\Rightarrow 1-\sqrt{x} > \sqrt{x}-1 \Leftrightarrow 2 > 2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow 1 > \sqrt{x} \Leftrightarrow 1 > x$$

Kết hợp với điều kiện xác định ta có : $1 > x \geq 0$

Bài 46.

1) Thay $x=16$ (thỏa mãn điều kiện) vào biểu thức A , ta được:

$$A = \frac{16-2}{\sqrt{16}+2} = \frac{7}{3}$$

Vậy khi $x=16$ thì $A = \frac{7}{3}$.

2) Với $x \geq 0$; $x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} - \frac{2}{1-\sqrt{x}} - \frac{4}{x-1} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-1)} + \frac{2(\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-1)} - \frac{4}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-1)} \\
 &= \frac{x+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-1)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-1)} \\
 &= \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}
 \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

3) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$P = A.B = \frac{x-2}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} = \frac{x-2}{\sqrt{x+1}}$$

$$\text{Đề } P = \frac{7}{4}$$

$$\frac{x-2}{\sqrt{x+1}} = \frac{7}{4}$$

$$4x - 7\sqrt{x} - 15 = 0$$

$$(\sqrt{x}-3)(4\sqrt{x}+5) = 0$$

Nên $\sqrt{x}-3=0$ hoặc $4\sqrt{x}+5=0$

Vậy $x=9$ thì $P = \frac{7}{4}$.

Bài 47.

1) Có $A = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$ ($x > 0, x \neq 4$)

Thay $x=16$ (TMDK) vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{16-3}{\sqrt{16}} = \frac{13}{4}$$

Vậy $A = \frac{13}{4}$ khi $x=16$

2) Rút gọn B :

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} - \frac{4\sqrt{x}}{4-x} \quad (x > 0, x \neq 4)$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} + \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})} + \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})}$$

$$B = \frac{x-2\sqrt{x}+4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})}$$

$$B = \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x+2})}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ với $x > 0, x \neq 4$

3) Có $A = \frac{x-3}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$ ($x > 0, x \neq 4$)

$$P = A.B$$

$$P = \frac{x-3}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}}$$

$$P = \frac{x-3}{\sqrt{x-2}}$$

Đề $P \leq 6$ thì $\frac{x-3}{\sqrt{x-2}} \leq 6$

$$\frac{x-3}{\sqrt{x-2}} - 6 \leq 0$$

$$\frac{x-3-6(\sqrt{x-2})}{\sqrt{x-2}} \leq 0$$

$$\frac{x-3-6\sqrt{x}+12}{\sqrt{x-2}} \leq 0$$

$$\frac{x-6\sqrt{x}+9}{\sqrt{x-2}} \leq 0$$

$$\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{\sqrt{x-2}} \leq 0$$

TH1: $\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{\sqrt{x-2}} = 0$

$$(\sqrt{x}-3)^2 = 0$$

$$\sqrt{x}-3=0$$

$$\sqrt{x}=3$$

$$x=9 \text{ (TMĐK)}$$

TH2: $\frac{(\sqrt{x}-3)^2}{\sqrt{x-2}} < 0$

Mà $(\sqrt{x}-3)^2 \geq 0, \forall x$ TMĐKXĐ

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sqrt{x}-3)^2 > 0 \\ \sqrt{x}-2 < 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x}-3 \neq 0 \\ \sqrt{x} < 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} \neq 3 \\ x < 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 9 \\ x < 4 \end{cases}$$

$x < 4$ mà $x > 0, x \neq 4$ và x là số nguyên

$$x \in \{1; 2; 3\}$$

Vậy đề $P \leq 6$ thì $x \in \{1; 2; 3; 9\}$

Bài 48.

$$1) B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - x - 4}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{x}$$

$$= \frac{x - 2\sqrt{x} - x - 4}{(\sqrt{x}+2)\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{x}}, x > 0, x \neq \pm 4$$

$$2) \text{ Với } x = \frac{1}{4}, \text{ thay vào } B, \text{ ta có } B = \frac{-2}{\sqrt{x}} = \frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{-2}{\frac{1}{2}} = -4$$

3) Với $x > 0, x \neq 4$, ta có

$$B < -\sqrt{x}$$

$$\frac{-2}{\sqrt{x}} < -\sqrt{x}$$

$$\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} > 0$$

$$\frac{2-x}{\sqrt{x}} > 0$$

$$4) 2-x > 0.$$

$$x < 2$$

Kết hợp điều kiện suy ra $0 < x < 2$, mà x nguyên nên $x = 1$

Vậy $x = 1$.

Bài 49.

1) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{\sqrt{9}+4}{\sqrt{9}-1} = \frac{7}{2}$$

Vậy khi $x = 9$ thì $A = \frac{7}{2}$.

$$2) B = \frac{3\sqrt{x}+1}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2}{\sqrt{x}+3}$$

$$B = \frac{3\sqrt{x}+1-2\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Vậy $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

$$3) \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1} : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+4 \quad (x \geq 0; x \neq 1; x \neq 3)$$

$$\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$$

$$\sqrt{x}+4 \geq \frac{x}{4} + 5$$

$$\frac{x}{4} - \sqrt{x} + 1 \leq 0$$

$$x - 4\sqrt{x} + 4 \leq 0$$

$$(\sqrt{x}-2)^2 \leq 0$$

Mà $(\sqrt{x}-2)^2 \geq 0$ với mọi x thỏa mãn điều kiện xác định.

$$(\sqrt{x}-2)^2 \leq 0$$

$$\sqrt{x}-2=0$$

$$\sqrt{x}=2$$

$$x=4$$

So với điều kiện, thỏa mãn.

Vậy $x=4$ thì $\frac{A}{B} \geq \frac{x}{4} + 5$.

Bài 50.

1) Với $x=16$ (thỏa mãn $x > 0, x \neq 4$) ta có $A = \frac{16+3}{\sqrt{16}-2} = \frac{19}{2}$. Vậy $A = \frac{19}{2}$ khi $x=16$.

2) Với $x > 0, x \neq 4$ ta có $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{3\sqrt{x}+6}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$

$$= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+2) - 3\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{x+5\sqrt{x}+6-3\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy với $x > 0, x \neq 4$ thì $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$

3) Ta có $\frac{A}{B} = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$

$$\text{Xét } \frac{A}{B} - 3 = \frac{x+3}{\sqrt{x}} - 3 = \frac{x-3\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x}-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\sqrt{x}}$$

Với $x > 0, x \neq 4$ thì $\sqrt{x} > 0, \left(\sqrt{x}-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ nên $\frac{A}{B} - 3 > 0$. Suy ra $\frac{A}{B} > 3$.

Vậy với $x > 0, x \neq 4$ thì $\frac{A}{B} > 3$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>
