

# BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÍNH CHẤT

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Định nghĩa.

Giả sử  $A$  và  $B$  là hai biểu thức bằng số hoặc bằng chữ. Khi đó

+  $A > B$ ;  $A < B$ ;  $A \geq B$ ;  $A \leq B$  được gọi là các bất đẳng thức.

+ Các bất đẳng thức trên được viết lại như sau

$$A - B > 0; A - B < 0; A - B \geq 0; A - B \leq 0$$

+ Một bất đẳng thức bất kì có thể đúng, cũng có thể sai.

**Quy ước:** Khi nói về một bất đẳng thức mà không nói gì thêm thì ta hiểu đó là một bất đẳng thức đúng.

### 2. Tính chất cơ bản của bất đẳng thức.

+ Tính chất giao hoán

Với các số thực  $A$  và  $B$  bất kì, nếu  $A \leq B$  (hoặc  $A \geq B$ ;  $A > B$ ;  $A < B$ ) thì có thể viết lại  $B \geq A$  (hoặc  $B \leq A$ ;  $A < B$ ;  $A > B$ ).

+ Tính chất bắc cầu

Với các số thực  $A, B, C$  bất kì, ta luôn có  $A \leq B, B \leq C$  suy ra  $A \leq C$ .

Tương tự: Nếu  $A < B; B < C$  thì  $A < C$ .

Nếu  $A \geq B; B \geq C$  thì  $A \geq C$ .

Nếu  $A > B; B > C$  thì  $A > C$ .

+ Tính chất liên hệ với phép cộng

Với các số thực  $A, B$  và  $M$  bất kì, ta luôn có  $A \leq B$  suy ra  $A \pm M \leq B \pm M$ .

Với các số thực  $A, B, C, D$  bất kì, ta luôn có

$$A \leq B; C \leq D \text{ suy ra } A + C \leq B + D.$$

$$A \leq B; C \leq D \text{ suy ra } A - D \leq B - C.$$

+ Tính chất liên hệ với phép nhân

Với các số thực  $A, B$  bất kì, ta luôn có

$$A \leq B; M > 0 \text{ suy ra } AM \leq BM.$$

$$A \leq B; M < 0 \text{ suy ra } AM \geq BM.$$

Với các số thực  $A, B, C, D$  bất kì, ta luôn có

$$\text{Nếu } 0 < A < B; 0 < C < D \text{ thì } 0 < AC < BD.$$

+ Tính chất liên hệ với lũy thừa

Với các số thực  $A, B$  bất kì, ta luôn có

$$A \geq B \geq 0 \text{ suy ra } A^n \geq B^n \geq 0, \text{ với } n \text{ là số thực dương.}$$

$$A \geq B \text{ suy ra } A^n \geq B^n, \text{ với } n \text{ là số tự nhiên lẻ.}$$

$$|A| \geq |B| \text{ suy ra } A^n \geq B^n \geq 0, \text{ với } n \text{ là số tự nhiên chẵn.}$$

$$m \geq n > 0; A \geq 1 \text{ suy ra } A^m \geq A^n.$$

$$m \geq n > 0; 0 < A < 1 \text{ suy ra } A^m \leq A^n.$$

+ Tính chất liên hệ với tính nghịch đảo

Với các số thực dương  $A, B$  bất kì, ta luôn có  $A \geq B$  suy ra  $\frac{1}{A} \leq \frac{1}{B}$ .

## B. BÀI TẬP

### PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### DẠNG 1. BẤT ĐẲNG THỨC VÀ SO SÁNH.

##### 1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

- Câu 1. [NB]** Trong các cách viết sau, cách viết nào không phải là bất đẳng thức  
 A.  $1 < 2$ .                      B.  $-3 > -1$ .                      C.  $a = 2$ .                      D.  $3 < b$ .
- Câu 2. [NB]** Bất đẳng thức  $a + 1 < 3$  có vế trái là  
 A.  $a + 1$ .                      B.  $a$ .                      C.  $1$ .                      D.  $3$ .
- Câu 3. [NB]** Cho bất đẳng thức  $2 \geq 3a - 1$ . Bất đẳng thức nào cùng chiều với bất đẳng thức đã cho  
 A.  $4 < 2a$ .                      B.  $3a - 2 \leq 4$ .                      C.  $2 = 3a - 1$ .                      D.  $a - 1 \geq -2$ .
- Câu 4. [NB]** Với ba số  $a, b, c$  và  $a > b$ . Bất đẳng thức nào sau đây đúng  
 A.  $a - c > b + c$ .                      B.  $a + c < b + c$ .                      C.  $a + c > b + c$ .                      D.  $a - c < b - c$ .
- Câu 5. [TH]** Bất đẳng thức mô tả tình huống buổi sáng nhiệt độ  $t(^{\circ}C)$  không thấp hơn  $12(^{\circ}C)$   
 A.  $t < 12$ .                      B.  $t = 12$ .                      C.  $t \leq 12$ .                      D.  $t \geq 12$ .
- Câu 6. [TH]** Nếu  $a - 3 < b - 3$  thì  
 A.  $a > b$ .                      B.  $-a < -b$ .                      C.  $a + 2 < b + 2$ .                      D.  $3 - a < 3 - b$ .
- Câu 7. [TH]** Nếu  $-5a + 5 > -5b + 5$  thì bất đẳng thức nào sau đây đúng  
 A.  $-a < -b$ .                      B.  $-a > -b$ .                      C.  $2a > 2b$ .                      D.  $-3a < -3b$ .
- Câu 8. [TH]** Một cửa hàng, buổi sáng bán được  $a$  sản phẩm, buổi chiều bán được  $b$  sản phẩm, buổi tối bán được  $c$  sản phẩm. Biết số sản phẩm bán được buổi chiều nhiều hơn số sản phẩm bán được buổi sáng, số sản phẩm bán được buổi sáng lại nhiều hơn số sản phẩm bán được buổi tối. Khi đó hệ thức thể hiện số sản phẩm bán được buổi chiều và buổi tối là  
 A.  $a \geq c$ .                      B.  $a \leq c$ .                      C.  $b < c$ .                      D.  $b > c$ .
- Câu 9. [VD]** Cho  $x > 1,2$  và  $y < 1,2$ . So sánh  $x$  và  $y$  ta được  
 A.  $x \geq y$ .                      B.  $x > y$ .                      C.  $x = y$ .                      D.  $y > x > 1,2$ .
- Câu 10. [VD]** So sánh  $\frac{2025}{2024}$  và  $\frac{2020}{2021}$  ta được  
 A.  $\frac{2025}{2024} > \frac{2020}{2021}$ .                      B.  $\frac{2025}{2024} < \frac{2020}{2021}$ .                      C.  $\frac{2025}{2024} = \frac{2020}{2021}$ .                      D.  $\frac{2025}{2024} \leq \frac{2020}{2021}$
- Câu 11. [VD]** Cho  $a < b$  khi đó bất đẳng thức đúng là  
 A.  $2a - 1 < 2b - 3$ .                      B.  $-3a + 2 > -3b - 1$ .                      C.  $2a + 1 > 2b + 1$ .                      D.  $3a - 1 < -3b + 3$ .
- Câu 12. [VDC]** Cho  $a > 7$ . Kết quả so sánh  $4 - \frac{a+3}{5}$  và  $2$  là  
 A.  $4 - \frac{a+3}{5} = 2$ .                      B.  $4 - \frac{a+3}{5} > 2$ .                      C.  $4 - \frac{a+3}{5} < 2$ .                      D.  $4 - \frac{a+3}{5} \leq 2$ .

## 2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai*

**Câu 1.**

- Hai bất đẳng thức  $2a - 1 < 2$  và  $3a - 3 > 4$  là hai bất đẳng thức ngược chiều.
- Nếu có  $a \leq b$  thì  $-3a \geq -3b$ .
- Nếu  $a \geq b$  thì  $-2 - a \geq -2 - b$ .
- Nếu  $2a - 3 < 2b - 4$  thì  $a > b$ .

**Câu 2.** Cho bất đẳng thức  $a \geq b$  thì

- Bất đẳng thức cùng chiều là  $2a - 1 \geq 3 - 2b$ .
- Vế trái bất đẳng thức là  $b$ .
- Ta sẽ có  $2a + 3 \leq 2b + 3$ .
- Ta có  $-5a - 5 \leq -5b + 5$ .

**Câu 3.** Chiều cao của các bạn nam trong lớp 9A từ 1,5m đến 1,8m.

- a) Bạn An là học sinh nam lớp 9A và có chiều cao  $h > 1,8\text{m}$ .
- b) Bạn My là bạn nữ lớp 9A và có chiều cao  $h > 1,5\text{m}$ .
- c) Chiều cao  $h$  của các bạn nam trong lớp 9A được biểu diễn là  $1,5 \leq h < 1,8$ .
- d) Chiều cao  $h$  của các bạn nam trong lớp 9A được biểu diễn là  $1,5 \leq h \leq 1,8$ .

**Câu 4.** Xe ô tô A đi nhanh hơn xe ô tô B, xe B chở tải trọng lớn hơn xe C. Gọi  $a$  và  $b$  lần lượt là vận tốc của xe A và xe B,  $b$  và  $c$  là tải trọng trên xe B và xe C. Khi đó:

- a) So sánh vận tốc của hai xe A và xe B là  $a > b$ .
- b) Vì  $a > b$  và  $b > c$  nên  $a > c$ .
- c) So sánh tải trọng của xe B và xe C là  $b < c$ .
- d) So sánh vận tốc của xe A và xe C là  $a < c$ .

### 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1. [NB]** Cho bất đẳng thức  $-3a + 7 < 3b - 12$ . Khi đó vế trái của bất đẳng thức là ...

**Câu 2. [NB]** Cho  $a \geq b$  và  $c > 0$ . Hãy điền dấu thích hợp vào chỗ (...) của hệ thức  $a.c \dots b.c$ .

**Câu 3. [TH]** Cho  $a < b$ . Hãy điền dấu thích hợp vào chỗ (...) của hệ thức  $-2a + 2025 \dots -2b + 2025$ .

**Câu 4. [TH]** Khi có  $2024a - 4 > 2024b - 4$ . Hãy điền dấu thích hợp vào chỗ (...) của hệ thức  $a \dots b$

**Câu 5. [TH]** Thay  $\boxed{?}$  trong các biểu thức sau bởi dấu ( $<$ ;  $>$ ) để được khẳng định đúng

- a)  $15.(-12, 05) \boxed{?} 15.13, 45$ .
- b)  $(-14).(-10, 45) \boxed{?} (-14).9$ .

**Câu 6. [VD]** Cho  $2a - 1 < 3b + 2$  và số  $c = 0$ . Hãy điền dấu thích hợp vào chỗ (...) của hệ thức  $(2a - 1).c \dots (3b + 2).c$ .

**Câu 7. [VDC]** Với bất đẳng thức  $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3}{4} \geq (a + b + c)$  dấu "=" xảy ra với giá trị nào của  $a, b, c$ .

### PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

#### Phương pháp giải:

- Nắm chắc định nghĩa bất đẳng thức và các yếu tố của bất đẳng thức.
- Thực hiện biến đổi theo thứ tự và phép cộng, phép nhân.

#### BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1. [NB]** Trong các hệ thức sau đâu là bất đẳng thức? Với mỗi bất đẳng thức hãy chỉ ra vế trái, vế phải.

- a)  $2a - 1 < 3$                       b)  $3a = 4 - 2b$                       c)  $4 \geq -5a + 2$                       d)  $3a - 4b$

**Ví dụ 2. [TH]** Cho  $-2a + 3 < -2b + 3$ . Hãy so sánh  $a$  và  $b$ .

**Ví dụ 3. [TH]** Cho  $a - 2 > b - 2$ . Hãy so sánh  $a$  và  $b$ .

**Ví dụ 4. [VD]** Không thực hiện phép tính hãy so sánh  $2023 + \sqrt{3}$  và  $2024 + \sqrt{3}$

**Ví dụ 5. [VD]** so sánh  $x^2 + 15$  và  $15$ , với  $x$  là số thực tùy ý.

**Ví dụ 6. [VD]** Cho bất đẳng thức .

Chứng minh rằng  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ .

#### ✓ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1. [NB]** Cho các bất đẳng thức sau, hãy xác định các bất đẳng thức cùng chiều.

- a)  $3a > 2b$ .                      b)  $3a - 2 < 2a + 1$ .                      c)  $3 > 2a - 4$ .                      d)  $-4 < a$ .

**Bài 2. [TH]** Cho  $a > b$ . Hãy so sánh

- a)  $1 - 3a$  và  $1 - 3b$                       b)  $6a - 5$  và  $-5 + 6b$ .                      c)  $-3a - 4$  và  $-3b - 4$ .

**Bài 3. [VD]** So sánh hai số  $a$  và  $b$ , nếu

a)  $6a \leq 6b$ .

b)  $3a+1 \geq 3b+1$ .

c)  $5a-1 > 5b-1$ .

d)  $8-a < 8-b$ .

e)  $-3a \geq -3b$ .

f)  $-2a+3 \geq 3-2b$ .

**Bài 4. [VD]** So sánh hai số  $a$  và  $b$ , nếu

a)  $a+1954 < b+1954$ .

b)  $a-7 \geq b-7$ .

c)  $a-(-4) \leq b+4$ .

d)  $-6+a \leq b-6$ .

e)  $3-(-a) > b+3$ .

**Bài 5. [VD]** Cho  $a > b$ . So sánh

a)  $-2a+3$  và  $-2b+5$ .

b)  $4a+1$  và  $4b-7$ .

**Bài 6. [VD]** Cho  $2a+1 \geq 2b-3$ . So sánh  $a+2$  và  $b$ .

## **DẠNG 2. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC**

**Loại 1: Sử dụng tính chất  $A^2 \geq 0$  để chứng minh đẳng thức**

### **1. Kiến thức cần dùng**

#### **1.1. Một số bất đẳng thức cơ bản cần nhớ**

+  $A^2 \geq 0$  với  $\forall A$ .

+  $A^{2k} \geq 0$  với  $\forall A$  và  $k$  là số tự nhiên.

#### **1.2. Một số kỹ thuật cơ bản**

+ Kỹ thuật xét hiệu hai biểu thức.

+ Kỹ thuật sử dụng các hằng đẳng thức.

+ Kỹ thuật thêm bớt một hằng số, một biểu thức.

+ Kỹ thuật đặt biến phụ.

### **2. Bài tập mẫu**

**Ví dụ 1. [TH]** Cho  $a, b, c$  là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:  $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$ .

**Ví dụ 2. [VD]** Cho  $a, b, c$  là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

**Ví dụ 3. [VD]** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c).$$

**Ví dụ 4. [VD]** Cho  $a, b$  là các số thực thỏa mãn điều kiện  $a, b \geq 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}.$$

**Ví dụ 5. [VDC]** Chứng minh rằng với mọi số thực  $a, b$  ta có:

$$ab(a-2)(b+6) + 12a^2 - 24a + 3b^2 + 18b + 36 > 0.$$

### **3. Bài tập tự luyện**

**Bài 1. [TH]** Cho  $a, b, c$  là các số thực bất kì. Chứng minh rằng:  $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} \geq \left(\frac{a + b + c}{3}\right)^2$ .

**Bài 2. [TH]** Cho  $a, b$  là các số thực khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a} - 1.$$

**Bài 3. [VD]** Cho  $a, b$  là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:

$$(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4).$$

**Bài 4. [VD]** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng:  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ .

**Loại 2: Sử dụng tính chất tỉ số để chứng minh bất đẳng thức.**

### **1. Kiến thức cần dùng**

## Một số tính chất của tỉ số

+ Với các số thực dương  $a, b$  bất kì, ta luôn có  $a \geq b$  thì  $\frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$ .

+ Với các số thực dương  $a, b, c, d$  bất kì, ta có:

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} < 1 \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}.$$

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} > 1 \text{ thì } \frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}.$$

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

## 2. Bài tập mẫu

**Ví dụ 1. [TH]** Cho  $a, b$  là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:  $\frac{a}{2a+b} + \frac{b}{a+2b} < 1$ .

**Ví dụ 2. [VD]** Cho  $a, b, c, d$  là các số thực dương thỏa mãn  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}.$$

**Ví dụ 3. [VD]** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}.$$

## 3. Bài tập tự luyện

**Bài 1. [TH]** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương bất kì. Chứng minh rằng:  $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$ .

**Bài 2. [VD]** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 1.$$

**Bài 3. [VDC]** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3} + \frac{1}{b^2+2c^2+3} + \frac{1}{c^2+2a^2+3} \leq \frac{1}{2}.$$

**Bài 4. [VD]** Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm thỏa mãn  $\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} = 3$ .

Chứng minh rằng:  $\frac{a}{1+a+bc} + \frac{b}{1+b+ca} + \frac{c}{1+c+ab} \geq \frac{3}{4}$ .

## Loại 3: Sử dụng phương pháp làm trội, làm giảm để chứng minh bất đẳng thức.

### 1. Kiến thức cần dùng

Giả sử cần chứng minh  $A \leq B$ , khi đó ta cần làm trội biểu thức  $A$  thành  $A \leq M$  rồi chứng minh  $M \leq B$ . Cũng có thể làm giảm  $B$  thành  $M \leq B$  rồi chứng minh  $A \leq M$ .

Phương pháp làm trội, làm giảm thường được áp dụng cho bất đẳng thức về tổng hoặc tích của một dãy số. Khi đó dùng các tính chất bất đẳng thức để đưa một vế của bất đẳng thức về dạng tích được tổng hữu hạn hoặc tích hữu hạn.

+ Ý tưởng chung cho bất đẳng thức dạng tổng của dãy số là:

Giả sử ta cần chứng minh  $A(x_1) + A(x_2) + A(x_3) + \dots + A(x_n) \leq M$ , khi đó ta thực hiện làm trội

$$A(x_i) \leq B(y_{i+1}) - B(y_i) \text{ để thu được}$$

$$A(x_1) + A(x_2) + A(x_3) + \dots + A(x_n) \leq B(y_n) - B(y_1)$$

Sau đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức  $B(y_n) - B(y_1) \leq M$ .

+ Ý tưởng chung cho bất đẳng thức dạng tích của dãy số là:

Giả sử ta cần chứng minh  $A(x_1).A(x_2).A(x_3)...A(x_n) \leq M$ , khi đó ta thực hiện làm trội

$$A(x_i) \leq \frac{B(y_{i+1})}{B(y_i)} \text{ để thu được } A(x_1).A(x_2).A(x_3)...A(x_n) \leq \frac{B(y_n)}{B(y_1)}$$

Sau đó ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức  $\frac{B(y_n)}{B(y_1)} \leq M$ .

+ Một số tổng sai phân hay dùng

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}; \quad \frac{a}{n(n+a)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a};$$

$$\frac{2a}{n(n+a)(n+2a)} = \frac{1}{n(n+a)} - \frac{1}{(n+a)(n+2a)};$$

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n};$$

$$\frac{1}{n(n+a)} + \frac{1}{(n+a)(n+2a)} + \dots + \frac{1}{[n+(k-1)a](n+ka)} = \frac{k}{n(n+ka)};$$

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right].$$

**Chú ý:**

Ta cần áp dụng làm trội, làm giảm sao cho bất đẳng thức cuối cùng cần chứng minh phải càng đơn giản càng tốt.

Thông thường ta tìm quy luật viết các số hạng của dãy rồi đưa ra cách viết tổng quát, từ đó ta mới làm trội cho số hạng tổng quát và áp dụng cho các số hạng cụ thể.

## 2. Bài tập mẫu

**Ví dụ 1. [TH]** Với mọi số tự nhiên  $n > 1$ . Chứng minh rằng:  $\frac{1}{2} < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$ .

**Ví dụ 2. [VD]** Chứng minh rằng với  $n$  là số nguyên dương, ta luôn có:  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$ .

**Ví dụ 3. [VD]** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$ , ta luôn có:  $\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} < \frac{1}{4}$ .

**Ví dụ 4. [VD]** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n$ , ta luôn có:  $\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$ .

**Ví dụ 5. [VDC]** Với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ .

Chứng minh rằng:  $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1} < 2$ .

## 3. Bài tập tự luyện

**Bài 1. [VD]** Chứng minh rằng:  $\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \dots + \frac{1}{2014^3} < \frac{1}{40}$ .

**Bài 2. [VD]** Chứng minh rằng:  $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{2015^2} < \frac{2014}{2015}$ .

**Bài 3. [VD]** Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên  $n \geq 1$ , ta luôn có:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{13} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{n^2 + (n+1)^2} < \frac{9}{20}.$$

**Bài 4. [VD]** Với số tự nhiên  $n \geq 3$ . Đặt  $S_n = \frac{1}{3(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{5(\sqrt{2}+\sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{(2n+1)(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}$

. Chứng minh rằng:  $S_n < \frac{1}{2}$ .

**Loại 4. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, bất đẳng thức Bunhiacopxki để chứng minh bất đẳng thức**

Các bất đẳng thức quan trọng là:

### 1. Bất đẳng thức AM-GM

+ Với hai số không âm  $a, b$  ta có:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ . Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ .

**Chứng minh:** Với hai số không âm  $a, b$ , xét hiệu:

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0. \end{aligned}$$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ .

Vậy  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ . Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi  $\sqrt{a} = \sqrt{b}$  hay  $a = b$ .

Chú ý: Ta hay áp dụng dạng  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ . Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi  $a = b$ .

+ Với ba số không âm  $a, b, c$  ta có:  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ . Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Chứng minh:** Với ba số không âm  $a, b, c$  ta có:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab};$$

$$c + \sqrt[3]{abc} \geq 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}$$

Cộng theo vế của hai bất đẳng thức trên ta được:

$$a+b+c + \sqrt[3]{abc} \geq 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}$$

$$a+b+c + \sqrt[3]{abc} \geq 2\left(\sqrt{ab} + \sqrt{c\sqrt[3]{abc}}\right)$$

$$\text{Lại có: } \sqrt{ab} + \sqrt{c\sqrt[3]{abc}} \geq 2\sqrt{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{c\sqrt[3]{abc}}} = 2\sqrt[3]{abc}$$

nên  $a+b+c + \sqrt[3]{abc} \geq 4\sqrt[3]{abc}$  hay  $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ . Do đó  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ .

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

Chú ý: Ta hay áp dụng dạng  $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ . Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### 2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki

Với bốn số thực bất kỳ  $a, b, x, y$  ta có:  $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$ .

Dấu "=" xảy ra khi  $ay = bx$  hay  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$  với  $x \neq 0; y \neq 0$ .

**Chứng minh:** Bất đẳng thức  $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

Xét hiệu:

$$\begin{aligned}
 & (ax+by)^2 - (a^2+b^2)(x^2+y^2) \\
 &= a^2x^2 + 2axby + b^2y^2 - (a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2) \\
 &= a^2y^2 - 2axby + b^2x^2 \\
 &= (ay-bx)^2 \geq 0
 \end{aligned}$$

Vậy  $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ .

## 1. Bài tập mẫu

**Ví dụ 1. [VD]** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a)  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ ;

b)  $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ .

**Ví dụ 2. [VD]** Cho  $a, b$  là các số dương thỏa mãn  $a > b$ ;  $ab = 1$  Chứng minh  $\frac{a^2+b^2}{a-b} = 2\sqrt{2}$ .

**Ví dụ 3. [VD]** Cho  $x + y + z = 2$  Chứng minh  $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{4}{3}$ .

## 2. Bài tập tự luyện

**Bài 1. [VD]** Cho  $x, y \neq 0$  Chứng minh bất đẳng thức sau:  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$  (1).

**Bài 2. [VD]** Cho  $x, y$  là các số dương. Chứng minh rằng:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ .

**Bài 3. [VD]** Cho  $x, y, z$  là các số dương thỏa mãn  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$ .

**Chứng minh:**  $\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+x+z} + \frac{1}{2z+x+y} \leq 1$ .

**Bài 4. [VD]** Cho  $a \geq 4$ . Chứng minh rằng:  $a + \frac{1}{a} \geq \frac{17}{4}$ .

**Bài 5. [VD]** Tìm GTNN của các biểu thức:

a.  $A = 4x^2 + 4x + 11$ .

b.  $B = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$ .

c.  $C = x^2 - 2x + y^2 - 4y + 7$ .

**Bài 6. [VD]** Tìm GTLN của các biểu thức:

a)  $A = 5 - 8x - x^2$ .

b)  $B = 5 - x^2 + 2x - 4y^2 - 4y$ .

**Bài 7. [VD]** Tìm GTLN của hàm số:  $y = \frac{1}{x^2 + x + 1}$ .

**Loại 5. Sử dụng bất đẳng thức vào giải một số bài toán thực tế**

## 1. Bài tập mẫu

**Ví dụ 1. [VD]** Người ta dùng 100 m rào để rào một mảnh vườn hình chữ nhật để thả gia súc. Biết một cạnh của hình chữ nhật là bức tường (không phải rào). Tính diện tích lớn nhất của mảnh vườn để có thể rào được.

**Ví dụ 2. [VD]** Từ một tờ giấy hình tròn bán kính  $R$  ta có thể cắt ra một hình chữ nhật có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu ?

**Ví dụ 3. [VD]** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức  $f(x) = 0,025x^2(30 - x)$ , trong đó  $x$  (miligam) là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân. Khi đó, liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất?

**Ví dụ 4. [VDC]** Trong mùa cao điểm du lịch, một tổ hợp nhà nghỉ ở Đà Nẵng gồm 100 phòng đồng giá luôn luôn kín phòng khi giá thuê là 480 nghìn đồng/phòng. Qua khảo sát các năm trước bộ phận kinh doanh của nhà nghỉ thấy rằng: cứ tăng giá phòng lên  $x\%$  ( $x \geq 0$ ) so với lúc kín phòng (giá thuê là 480 nghìn đồng/phòng) thì số phòng cho thuê giảm đi  $\frac{4x}{5}\%$ . Hỏi nhà nghỉ phải niêm yết giá phòng là bao nhiêu để đạt doanh thu cao nhất?

### 3. Bài tập tự luyện

**Bài 1. [VD]** Một ca nô đi xuôi dòng trong 2 giờ 30 phút. Biết rằng tốc độ của ca nô khi nước yên lặng không quá 40 km/h và tốc độ của dòng nước là 6 km/h. Chứng minh rằng quãng đường đi được trong thời gian trên không vượt quá 115 km.

**Bài 2. [VD]** Chỉ số khối cơ thể, thường được biết đến với tên viết tắt  $BMI$  cho phép đánh giá thể trạng của một người là gầy, bình thường hay béo. Chỉ số khối cơ thể của một người được tính theo công thức  $BMI = \frac{m}{h^2}$ , trong đó  $m$  là khối lượng cơ thể tính theo kilogam,  $h$  là chiều cao tính theo mét.

Căn cứ vào bảng đánh giá thể trạng ở người lớn theo  $BMI$  đối với khu vực châu Á – Thái Bình Dương, một người đàn ông có  $BMI \geq 30$  sẽ bị béo phì độ II (trung bình) hoặc độ III (nặng), người đó cần phải có các biện pháp tập thể dục, thể thao hay thay đổi chế độ dinh dưỡng để có được cơ thể khỏe mạnh. Bác Dũng có chiều cao 1,65 m và cân nặng ít nhất 82 kg. Hỏi bác Dũng có bị béo phì độ II hay độ III hay không?

**Bài 3. [VDC]** Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 2016 (cm). Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng  $x$  (cm) rồi gập tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp. Tìm  $x$  để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

**Bài 4. [VDC]** Ông Quang muốn xây một bể nước dạng hình hộp chữ nhật có nắp với dung tích 3000 lít. Đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng cho mỗi mét vuông. Hỏi chi phí thấp nhất ông Quang cần bỏ ra để xây bể nước là bao nhiêu?

# BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

## A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

### 1. Khái niệm bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Bất phương trình có dạng  $ax + b > 0$  ( hoặc  $ax + b < 0$ ;  $ax + b \geq 0$ ;  $ax + b \leq 0$ ) trong đó  $a, b$  là các số đã cho,  $a \neq 0$  được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

### 2. Nghiệm của bất phương trình

Số  $x_0$  là một nghiệm của bất phương trình  $A(x) < B(x)$  nếu  $A(x_0) < B(x_0)$  là khẳng định đúng. Giải một bất phương trình là tìm tất cả các nghiệm của bất phương trình đó.

### 3. Cách giải bất phương trình bậc nhất một ẩn.

Bất phương trình bậc nhất một ẩn  $ax + b < 0 (a \neq 0)$  được giải như sau:

$$ax + b < 0$$

$$ax < -b$$

$$+) \text{ Nếu } a > 0 \text{ thì } x < \frac{-b}{a}$$

$$+) \text{ Nếu } a < 0 \text{ thì } x > \frac{-b}{a} .$$

Các bất phương trình  $ax + b > 0$ ;  $ax + b \geq 0$ ;  $ax + b \leq 0$  được giải tương tự.

## B. BÀI TẬP

### DẠNG 1: GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

#### PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### 1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

**Câu 1. [NB]** Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất một ẩn?

**A.**  $\frac{1}{2}y^2 + 5 \geq 0$ .

**B.**  $\frac{2}{y} - 3 > 0$ .

**C.**  $3x - 9 > 0$ .

**D.**  $0.x - 6 < 0$ .

**Câu 2. [NB]** Trong các số  $-3; 4; 0; 2$  số nào là nghiệm của bất phương trình  $3x - 7 \geq 0$

**A.**  $-3$ .

**B.**  $4$ .

**C.**  $0$ .

**D.**  $2$ .

**Câu 3. [NB]** Số 3 là nghiệm của bất phương trình nào trong các phương trình sau?

**A.**  $2x - 5 < 0$ .

**B.**  $-5x + 7 \geq 0$ .

**C.**  $2x + 1 > 0$ .

**D.**  $5x - 10 \leq 0$ .

**Câu 4. [NB]** Nghiệm của bất phương trình  $2x \geq 4$  là

**A.**  $x > 2$ .

**B.**  $x \geq 2$ .

**C.**  $x < 2$ .

**D.**  $x \leq 2$ .

**Câu 5. [TH]** Nghiệm của bất phương trình  $4x - 18 > 0$  là

**A.**  $x > \frac{9}{2}$ .

**B.**  $x > \frac{-9}{2}$ .

**C.**  $x < \frac{9}{2}$ .

**D.**  $x < \frac{-9}{2}$ .

**Câu 6. [TH]** Nghiệm của bất phương trình  $5x - 6 \leq 2x + 9$  là

**A.**  $x \geq 5$ .

**B.**  $x \geq \frac{3}{7}$ .

**C.**  $x \leq 5$ .

**D.**  $x \leq \frac{3}{7}$ .

**Câu 7. [TH]** Nghiệm của bất phương trình  $8x - 12 \leq 14x - 5$  là

**A.**  $x \leq \frac{-7}{6}$ .

**B.**  $x \geq \frac{-7}{6}$ .

**C.**  $x \leq \frac{17}{24}$ .

**D.**  $x \geq \frac{17}{24}$ .

**Câu 8. [TH]** Với giá trị nào của  $m$  thì  $x = 2$  là một nghiệm của bất phương trình  $mx + 2 < x + 3 + m$ ?

- A.  $m = 2$ .                      B.  $m < 3$ .                      C.  $m > 1$ .                      D.  $m < -3$ .

**Câu 9. [VD]** Nghiệm của bất phương trình  $2(x - 3) - 7(x + 6) \geq 0$  là

- A.  $x \leq \frac{48}{5}$ .                      B.  $x \leq \frac{48}{5}$ .                      C.  $x \geq \frac{36}{5}$ .                      D.  $x \leq \frac{36}{5}$ .

**Câu 10. [VD]** Bất phương trình  $\frac{x+2}{3} + 3x + 1 > \frac{x+2}{2}$  có nghiệm là

- A.  $x > \frac{-6}{7}$ .                      B.  $x < \frac{6}{5}$ .                      C.  $x > \frac{-4}{17}$ .                      D.  $x > \frac{-6}{11}$ .

**Câu 11. [VD]** Bất phương trình  $(2x - 1)(x + 3) - 3x + 1 \leq (x - 1)(2x + 3)$  có nghiệm là

- A.  $x \leq -1$ .                      B.  $x \geq -1$ .                      C.  $x \geq \frac{-5}{3}$ .                      D.  $x \leq \frac{-5}{3}$ .

**Câu 12. [VDC]** Bất phương trình  $\frac{x+2004}{2005} + \frac{x+2005}{2006} < \frac{x+2006}{2007} + \frac{x+2007}{2008}$  có nghiệm là

- A.  $x < 1$ .                      B.  $x > 1$ .                      C.  $x > -1$ .                      D.  $x < -1$ .

## 2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu):

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai*

**Câu 1.** Cho bất phương trình  $3x - 4 > x - 2$

- a) Vế trái của bất phương trình trên là  $3x - 4$   
b) Vế phải của bất phương trình trên là  $x - 2$ .  
c)  $x = 2$  là một nghiệm của bất phương trình trên.  
d)  $x = -3$  là một nghiệm của bất phương trình trên.

**Câu 2.** Cho bất phương trình  $7x - 5 > -2$

- a) Ta có thể biến đổi bất phương trình trên về dạng  $7x > -7$   
b) Ta có thể biến đổi bất phương trình trên về dạng  $7x > 3$   
c)  $x = 1$  là một nghiệm của bất phương trình trên.  
d) Nghiệm của bất phương trình trên là  $x < \frac{3}{7}$

**Câu 3.** Cho bất phương trình  $2(x - 3) - 5 > 2(x - 7)$

- a) Bất phương trình trên vô nghiệm.  
b) Bất phương trình trên có vô số nghiệm.  
c) Nghiệm của bất phương trình trên là  $x < -3$   
d) Nghiệm của bất phương trình trên là  $x > -3$

**Câu 4.** Cho bất phương trình  $\frac{x+4}{5} < \frac{x+3}{3} - \frac{x-2}{2}$

- a) Bất phương trình trên là bất phương trình bậc nhất một ẩn.  
b) Khi thực hiện bước quy đồng thì mẫu số chung là 35

c) Có thể biến đổi bất phương trình trên về dạng  $\frac{6(x+4)}{30} < \frac{10(x+3)}{30} - \frac{15(x-2)}{30}$

d) Số nguyên lớn nhất thỏa mãn bất phương trình trên là 3

### 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

**Câu 1. [NB]** Bất phương trình  $3mx - 6 > 0$  là bất phương bậc nhất một ẩn khi  $m$  nhận giá trị là bao nhiêu?

**Câu 2. [NB]** Bất phương trình  $5x - 6 > 3$  có nghiệm là bao nhiêu?

**Câu 3. [NB]** Khi thực hiện cộng cả hai vế của bất phương trình  $7x - 9 > 8$  với 9 ta được bất phương trình nào?

**Câu 4. [NB]** Chia cả hai vế của bất phương trình  $-5x \geq 20$  cho  $-5$  ta được bất phương trình nào?

**Câu 5. [TH]** Bất phương trình  $12x - 9 > 3x + 18$  có nghiệm là bao nhiêu?

**Câu 6. [TH]** Với giá trị nào của  $m$  thì phương trình  $x - m + 2 = 0$  có nghiệm lớn hơn 3?

**Câu 7. [VD]** Cho bất phương trình  $(m+1)x < m^2 - 1$  với  $m$  là tham số. Các giá trị của  $m$  để bất phương trình trên có nghiệm  $x < 3$  là bao nhiêu?

**Câu 8. [VD]** Cho biểu thức  $A = 1 - \frac{2x+3}{2}$ . Để biểu thức  $A < 0$  thì  $x$  phải thỏa mãn điều kiện gì?

**Câu 9. [VDC]** Cho bất đẳng thức  $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-bc}{b+c} + \frac{x-ac}{a+c} > a+b+c$  ( $a, b, c > 0$ ). Khi đó  $x$  thỏa mãn điều kiện gì?

### PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

**Ví dụ 1 [NB]:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

a)  $mx + 5 < 0$

b)  $(m+1)x - 7 \geq 0$

c)  $(2m+1)x + 12 \geq 7$

d)  $(m^2 - 1)x^2 + 5x < 0$

**Ví dụ 2 [TH]:** Giải các bất phương trình sau.

a)  $2x - 20 < 0$

b)  $30 - 5x \geq 5$

c)  $7x - 10 < 15x + 3$

c)  $9x + 30 \geq 20x + 8$

**Ví dụ 3 [TH]:** Giải các bất phương trình sau.

a)  $2(x-3) + 5 < 3(x-6) + 7$

b)  $5(x-3) + 7 > 2(x+3) - 11$

b)  $3(x+7) - 15 \geq 18 - 2(x-8)$

c)  $-5(2x-2) - 13 \geq 20 - 3(x+7)$

**Ví dụ 4 [VD]:** Giải các bất phương trình sau.

a)  $x^2 - 3x + 1 > 2(x-1) - x(3-x)$

b)  $x(x^2 - 2) + 7x + 40 > 3(x+5) + x(x^2 - 3)$

b)  $(x-1)^2 + x^2 \leq (x+1)^2 + (x+2)^2$

c)  $(x^2 + 1)(x-6) \leq (x-2)^3$

**Ví dụ 5 [VD]:** Giải các bất phương trình sau.

a)  $\frac{2x-1}{2} - \frac{x+3}{3} < \frac{x+6}{6}$

b)  $\frac{3x+7}{2} - \frac{x+5}{10} \geq \frac{2x-6}{5}$

c)  $2x + \frac{2x+1}{2} > 3x - \frac{1}{5}$

d)  $\frac{x-1}{2} - \frac{7x+3}{15} \leq \frac{2x+1}{3} + \frac{3-2x}{5}$

### BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1 [NB]:** Tìm điều kiện của tham số  $m$  để các bất phương trình sau là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

a)  $mx - 7 > 0$

b)  $(m+7)x + 9 \geq 0$

c)  $(5m-15)x+5 \geq 20$

d)  $(m^2-9)x^2+6x-4 < 13$

**Bài 2 [TH]:** Giải các bất phương trình sau.

a)  $7x-63 > 0$

b)  $60-6x \geq 102$

c)  $12x-23 \geq 25x+3$

d)  $-21x+20 \geq 20x-103$

**Bài 3 [TH]:** Giải các bất phương trình sau.

a)  $4(x-1)+9 < 2(x-3)+20$

b)  $7(2-x)+9 > 3(x+6)-15$

b)  $2(x-3)+20 > -27-4(x-10)$

c)  $-7(3x+1)+4 \leq 35-5(x-10)$

**Bài 4 [VD]:** Giải các bất phương trình sau.

a)  $2x^2+9x-3 > 3(x-5)+2x(x-7)$

b)  $x(3-x^2)-2x < 10(x+1)-x(x^2-9)$

b)  $(x+2)^2+x^2 \geq (x+3)^2+(x-2)^2$

c)  $(2x^2+2)(4x+6) \leq (2x+1)^3$

**Bài 5 [VD]:** Giải các bất phương trình sau.

a)  $\frac{x-5}{3} + \frac{2x-3}{4} < \frac{x+7}{12}$

b)  $\frac{2x+5}{3} - \frac{x+7}{15} \leq \frac{5x+8}{5}$

b)  $3x + \frac{x-1}{3} > 4x + \frac{1}{6}$

c)  $\frac{x+2}{6} - \frac{x+5}{3} \leq \frac{x+3}{5} + \frac{x+6}{2}$

## DẠNG 2: BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

### PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

#### 1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN

**Câu 1. [NB]** Ông Trí dự định chạy bộ tổng cộng ít nhất 6500m vào buổi sáng và buổi chiều trong ngày. Buổi sáng ông Trí chạy được 4000m. Gọi  $x$  là số mét ông Trí chạy bộ vào buổi chiều. Điều kiện quãng đường chạy của ông Trí là

- A.**  $4000+x < 6500$     **B.**  $4000+x \geq 6500$     **C.**  $4000+x \leq 6500$     **D.**  $4000+x > 6500$

**Câu 2. [NB]** Để hưởng ứng phong trào “Trồng cây gây rừng”, lớp 9A có kế hoạch trồng nhiều nhất 100 cây xanh. Lớp 9A đã trồng được 54 cây. Nếu gọi  $x$  là số cây cần trồng thêm thì điều kiện tổng số cây lớp 9A trồng là

- A.**  $54+x < 100$     **B.**  $x+54 \geq 100$     **C.**  $54+x \leq 100$     **D.**  $54+100 > x$

**Câu 3. [NB]** Bạn Lan dùng 85000 đồng đi mua vở: Loại 1 giá 7500 đồng/quyển, loại 2 giá 6000 đồng/quyển. Gọi  $x$  là số vở mỗi loại bạn mua thì bất phương trình lập được thể hiện mối quan hệ giữa số tiền Lan mua và Lan mang đi là

- A.**  $7500x+6000x < 85000$     **B.**

$7500x+6000x \geq 85000$

- C.**  $7500x+6000x \leq 85000$     **D.**  $7500x+6000x = 85000$

**Câu 4. [NB]** Hai bạn Nga và An vào cửa hàng mua bút. Biết giá của một cái bút bi là  $x$  nghìn đồng và một cái bút chì là 10 nghìn đồng. Bạn Nga mua hai cái bút bi và hai bút chì. Bạn An mua ba cái bút bi và hai cái bút chì. Bất đẳng thức biểu thị đúng sự so sánh số tiền của hai bạn phải trả cho cửa hàng là:

- A.**  $2x+20 < 3x+20$     **B.**  $2x+20 \geq 3x+20$     **C.**  $3x+20 = 2x+20$     **D.**  $3x+20 < 2x+20$

**Câu 5. [TH]** Một người có số tiền không quá 72000 đồng gồm các tờ giấy bạc với mệnh giá 5000 đồng. Hỏi người đó có nhiều nhất bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?

- A.** 12.    **B.** 13.    **C.** 14.    **D.** 15.

**Câu 6. [TH]** Bạn Thanh có 100 nghìn đồng. Bạn muốn mua một cái bút giá 18 nghìn đồng và một số quyển vở, mỗi quyển vở giá 7 nghìn đồng. Hỏi bạn Thanh mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở?

A. 11

B. 12

C. 13

D. 14

**Câu 7. [TH]** Một hãng taxi có giá mở cửa là 15 nghìn đồng và giá 12 nghìn đồng cho mỗi kilômét tiếp theo. Hỏi với 200 nghìn đồng thì hành khách có thể di chuyển được tối đa bao nhiêu kilômét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

A. 20

B. 14

C. 10

D. 15

**Câu 8. [TH]** Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn một tháng là 0,4% / tháng. Hỏi nếu muốn có số tiền lãi hàng tháng ít nhất là 3 triệu đồng thì số tiền gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)?

A. 700

B. 720

C. 750

D. 740

**Câu 9. [VD]** Lan có số tiền không quá 50000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá: Loại 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi Lan có nhiều nhất bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?

A. 4.

B. 5.

C. 6.

D.

7.

**Câu 10. [VD]** Bạn Nam tham dự kì thi kiểm tra năng lực tiếng Anh gồm bốn bài, mỗi bài kiểm tra được cho điểm là số nguyên từ 0 đến 10. Điểm trung bình của ba bài kiểm tra An đã làm là 6,6. Hỏi bài kiểm tra thứ tư An cần làm được thấp nhất là bao nhiêu điểm để có điểm trung bình của cả bốn bài kiểm tra từ 7 điểm trở lên?

A. 8.

B. 7.

C. 6.

D. 9.

**Câu 11. [VD]** Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng là 6,9% / năm. Bà Hoa dự kiến gửi một khoản tiền vào ngân hàng này và cần số tiền lãi hàng năm ít nhất là 50 triệu để chi tiêu. Hỏi số tiền bà Hoa cần gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến triệu đồng)

A. 725.

B. 750.

C. 800.

D. 650.

**Câu 12. [VDC]** Sau một thời gian phát hành, nhà sản xuất đã ra quyết định giảm giá một dòng máy tính bảng để khuyến mãi. Đợt một giảm 5% đợt hai giảm 4% trên giá sau khi giảm đợt một. Sau hai đợt giảm giá, một chiếc máy tính bảng hiện được bán với giá gần đến 4560000 đồng. Hỏi giá chiếc máy tính bảng ban đầu khoảng bao nhiêu ?

A. khoảng 5 triệu đồng.

B. khoảng 6 triệu đồng.

C. khoảng 7 triệu đồng.

D. khoảng 8 triệu đồng.

## 2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu):

*Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai*

**Câu 1.** Quãng đường đi từ A đến B dài 50 km. Một ô tô đi từ A đến B, khởi hành lúc 7 giờ. Hỏi ô tô phải đi với vận tốc bao nhiêu km/h để đến B trước 9 giờ cùng ngày? Gọi  $x$  là vận tốc của ô tô ( $x > 0$ , km/h).

a) Thời gian đi từ A đến B là 2 giờ.

b) Thời gian đi từ A đến B là  $\frac{50}{x}$  (giờ)

c) Để đến B trước 9 giờ thì thời gian đi cần nhỏ hơn hoặc bằng 2.

d) Bất phương trình thỏa mãn bài toán là  $\frac{50}{x} < 2$ .

**Câu 2.** Bạn Dương có số tiền không quá 70000 đồng gồm 15 tờ tiền mệnh giá 2000 đồng và 5000 đồng. Hỏi bạn Dương có nhiều nhất bao nhiêu tờ tiền loại 5000 đồng? Gọi số tờ tiền loại 5000 đồng là  $x$  ( $x$  nguyên dương).

a) Số tờ loại 2000 đồng là  $x - 15$  (tờ)

b) Số tờ loại 2000 đồng là  $15 - x$  (tờ)

c) Số tiền loại 5000 đồng và 2000 đồng lần lượt là  $5000x$ ;  $2000(15 - x)$  (đồng)

d) Bất phương trình thỏa mãn bài toán là:  $5000x + 2000(15 - x) \leq 70000$ .

**Câu 3.** Bạn An có 100000 đồng đi mua vở. Bạn mua 2 loại: loại I giá 7000 đồng một quyển, loại II giá 5000 đồng một quyển. Hỏi An mua được nhiều nhất bao nhiêu quyển vở loại I biết An đã mua 5 quyển loại II.

a) Số tiền mua vở loại II là 25000 đồng.

b) Số tiền mua vở loại I là  $7000 \cdot x$  (đồng) với  $x$  là số vở loại I cần mua.

c) Mua được nhiều nhất 11 quyển vở loại I.

d) Mua được nhiều nhất 10 quyển vở loại I.

**Câu 4.** Một nhân viên văn phòng muốn kiếm thêm thu nhập bằng cách làm thêm giờ. Biết anh ấy được trả 120000 đồng mỗi giờ nhưng phải trả tiền thuế là 10%.

a) Nhân viên cần đóng 15 nghìn đồng tiền thuế cho mỗi giờ làm thêm.

b) Sau khi trừ thuế, nhân viên nhận được 108 nghìn đồng cho mỗi giờ làm thêm.

c) Để có được ít nhất một triệu đồng, anh ấy cần làm thêm ít nhất 9 giờ.

d) Để có được ít nhất một triệu đồng, anh ấy cần làm thêm ít nhất 10 giờ.

### 3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

**Câu 1. [NB]** Bình được mẹ cho 50000 đồng để đi mua vở viết. Biết giá mỗi quyển vở Bình định mua có giá 8500 đồng. Viết bất phương trình thu được trong đó  $x$  là số vở mà Bình có thể mua.

**Câu 2. [NB]** Lan có 50000 đồng để đi chợ. Lan định mua một mớ rau muống giá 6000 đồng/mớ và  $x$  (kg) dưa chuột. Biết dưa chuột có giá 16000 đồng/kg. Viết bất phương trình ẩn  $x$  thu được?

**Câu 3. [TH]** Một xe tải trọng lượng 5 tấn đi chở hàng. Biết số hàng cần chở là 37 tấn. Hỏi xe tải cần chở ít nhất bao nhiêu chuyến để chở hết số hàng?

**Câu 4. [TH]** Bác An có 500000 đồng. Bác muốn mua một túi nước giặt 190000 đồng, một chai nước xả vải 110000 đồng và một số chai nước rửa tay, mỗi chai có giá 45000 đồng. Hỏi Bác An mua được nhiều nhất bao nhiêu chai nước rửa tay?

**Câu 5. [VD]** Một ngân hàng đang áp dụng lãi suất gửi tiết kiệm kỳ hạn 12 tháng là 6,8% / năm. Ông Kiên dự kiến gửi một số tiền và muốn số lãi hàng năm của mình ít nhất là 70 triệu để chi tiêu. Hỏi số tiền ông Kiên cần gửi tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu (làm tròn đến hàng triệu đồng)?

**Câu 6. [VDC]** Một hãng taxi có bảng giá như sau:

**VUI LÒNG KIỂM TRA HÀNH LÝ TRƯỚC KHI XUỐNG XE!**  
**PLEASE CHECK YOUR LUGGAGE BEFORE LEAVING!**

VUI LÒNG THANH TOÁN PHÍ CẦU ĐƯỜNG, PHÀ VÀ BẾN BÃI (NẾU CÓ)

Giá mở cửa Commencement rate up to 500 m	Trong phạm vi 30 km From the following km to 30 <sup>th</sup> km	Từ km thứ 31 trở đi For each km from the 31 <sup>st</sup> km +
<b>11.000</b> VNĐ / 500m	<b>17.600</b> VNĐ / 1Km	<b>14.500</b> VNĐ / 1Km

CUSTOMERS ARE REQUIRED TO PAY TOLL OR FERRY CHARGE (IF ANY)

Nếu gọi taxi của hãng này, với 700000 đồng, bạn có thể đi được tối đa bao nhiêu km?

## PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

### Phương pháp giải:

- Bước 1. Gọi ẩn  $x$  cần tìm, tìm điều kiện cho  $x$ .
- Bước 2. Dựa vào đề bài thiết lập mối quan hệ của ẩn với các đại lượng đã biết, chưa biết.
- Bước 3. Thiết lập bất phương trình dựa vào mối quan hệ đó theo yêu cầu đề bài.
- Bước 4. Giải bất phương trình..
- Bước 5. Kết luận yêu cầu của bài toán..

### BÀI TẬP MẪU

**Ví dụ 1 [NB]:** Một kho hàng chứa 100 tấn xi măng, mỗi ngày đều xuất đi 20 tấn xi măng. Gọi  $x$  là số ngày xuất xi măng của kho đó, điều kiện  $x \in \mathbb{N}^*$ . Chủ kho muốn giữ lại nhiều hơn 10 tấn xi măng trong kho. Tìm  $x$  sao cho khối lượng xi măng còn lại là ít nhất?

**Ví dụ 2 [TH]:** Tổng chi phí của một doanh nghiệp sản xuất áo sơ mi là 410 triệu đồng/tháng. Giá bán của mỗi chiếc áo sơ mi là 350 nghìn đồng. Hỏi trung bình mỗi tháng doanh nghiệp phải bán được ít nhất bao nhiêu chiếc áo sơ mi để thu được lợi nhuận ít nhất là 1,38 tỉ đồng sau 1 năm?

**Ví dụ 3 [TH]:** Bạn Mai được mẹ cho 100000 đồng đi mua bút và vở. Biết rằng giá một cuốn vở là 10000 đồng, một cái bút là 5000 đồng. Biết rằng mẹ bạn Mai yêu cầu bạn Mai mua ít nhất 6 cuốn vở. Hỏi bạn Mai mua được nhiều nhất bao nhiêu cái bút?

**Ví dụ 4 [VD]:** Trong kì thi, bạn Xuân Hương thi bốn môn Toán, Văn, Anh, Sử. Xuân Hương đã thi ba môn và được kết quả như sau

Môn	Toán	Anh	Sử
Điểm	9	7	6

Kì thi quy định muốn đạt giải thì phải có điểm trung bình các môn từ 8 trở lên và không môn nào bị dưới 6 điểm. Biết môn Văn, Toán được tính hệ số 2. Hãy cho biết, để đạt giải thì bạn Xuân Hương phải có điểm môn Văn ít nhất là bao nhiêu? Biết điểm tối đa của mỗi môn là 10 điểm.

**Ví dụ 5 [VD]:** Bác Ngọc gửi tiết kiệm 12 tháng ở một ngân hàng với lãi suất 7,2% /năm. Bác Ngọc dự định tổng số tiền nhận được sau khi gửi 12 tháng ít nhất là 21440000 đồng. Hỏi bác Ngọc phải gửi số tiền tiết kiệm ít nhất là bao nhiêu để đạt được dự định đó?

**Ví dụ 6 [VD]:** Bạn Dũng có một tờ tiền Việt Nam chưa rõ mệnh giá. Biết rằng nếu mệnh giá của tờ tiền đó nhân với 3 thì nhỏ hơn 160000 nhưng nếu nhân với 2 thì lớn hơn 90000. Hỏi bạn Dũng có tờ tiền mệnh giá bao nhiêu?

### ✓ **BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

**Bài 1. [NB]** Một người có số tiền không quá 70000 đồng gồm 15 tờ giấy bạc với hai loại mệnh giá: loại 2000 đồng và loại 5000 đồng. Hỏi người đó có thể có bao nhiêu tờ giấy bạc loại 5000 đồng?

**Bài 2. [TH]** Một người đi bộ một quãng đường  $AC$  dài 18km trong khoảng thời gian không nhiều hơn 4 giờ. Lúc đầu người đó đi đoạn đường  $AB$  với vận tốc 5 km/h ( $B$  là điểm nằm giữa  $A$  và  $C$ ), về sau đi đoạn đường  $BC$  với vận tốc 4 km/h. Tìm điều kiện về độ dài của đoạn đường  $AB$ ?

**Bài 3. [VD]** Trong một cuộc thi đố vui, ban tổ chức quy định mỗi người dự thi phải trả lời 10 câu hỏi ở vòng sơ tuyển. Mỗi câu hỏi này có sẵn 4 đáp án, nhưng trong đó chỉ có 1 đáp án đúng. Người dự thi chọn đáp án đúng sẽ được 5 điểm, chọn đáp án sai sẽ bị trừ 1 điểm. Ở vòng sơ tuyển Ban tổ chức tặng cho mỗi người thi 10 điểm và quy định người nào có tổng số điểm từ 40 trở lên mới được dự thi vòng tiếp theo. Hỏi người dự thi phải trả lời chính xác bao nhiêu câu hỏi ở vòng sơ tuyển thì mới được dự thi ở vòng sau?

**Bài 4 [VD]** Trong hội khỏe Phù Đổng thành phố Hà Nội, cuộc thi bắn súng vòng chung kết diễn ra giữa 3 vận động viên A, B và C. Mỗi vận động viên bắn 3 lần. Vận động viên A bắn 3 lượt với điểm trung bình cho 3 lượt bắn là 8 điểm. Vận động viên B điểm trung bình của 3 lượt bắn là 9,1 điểm. Vận động viên C hiện tại bắn 2 lượt đầu lần lượt được 8,5 và 9,5 điểm. Hỏi lần bắn cuối cùng của lượt thứ ba, vận động viên C cần ít nhất bao nhiêu điểm để đạt huy chương vàng, biết rằng ban tổ chức chỉ có một huy chương vàng duy nhất và điểm bắn được ghi ở dạng số thập phân làm tròn tới phần mười.

**Bài 5 [VD]** Hai đội 8A và 8B tổ chức chạy thi, mỗi đội có 3 người. Người nào về đích thứ nhất thì được 1 điểm, về nhì được 2 điểm,...Đội nào có tổng số điểm ít hơn thì sẽ thắng. Giả sử không có hai người nào về đích cùng một lúc, hỏi đội thắng có thể ghi được tổng cộng bao nhiêu điểm khác nhau?