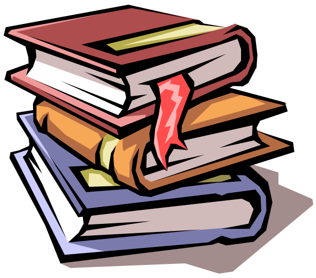
Detoan.com.vn

Điện thoại (Zalo) 0978207193



CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRỌNG TÂM ÔN VÀO 10

(Liệu hệ tài liệu word môn toán SĐT (zalo) : 0978207193)

Tài liệu sưu tầm, ngày 20 tháng 7 năm 2024

Bài 1. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm I nằm giữa A và O sao cho AI < $\frac{2}{3}$AO.

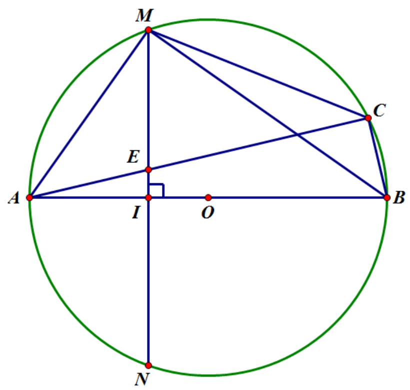
Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tuỳ ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

a) Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp .

b) Chứng minh $\Delta AME \backsim \Delta ACM$ để từ đó suy ra $AM^2 = AE.AC$

c) Chứng minh $AE.AC - AI.IB = AI^2$.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
5 **(3,0 điểm)**	Vẽ hình đúng cho câu a)  	0,25
	a) Ta có MN $\perp$ AB tại I (giả thiết) $\Rightarrow$ $MIB = 90^0$ hay $EIB = 90^0$	0,25
	Ta có ACB là nội tiếp chắn nửa (O) $\Rightarrow$ $ACB = 90^0$ hay $ECB = 90^0$	0,25
	$\Rightarrow EIB + ECB = 180^0$ Mà đây là hai góc đối của tứ giác IECB nên tứ giác IECB là tứ giác nội tiếp .	0,25 0,25
	b) Ta có MN $\perp$ AB tại I (giả thiết) $\Rightarrow$ I là trung điểm của cung MN	0,25
	$\Rightarrow AMN = ACM$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) hay $AME = ACM$ (1)	0,25
	Ta có CAM là góc chung của ΔAME và ΔAMC (2) Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AME \backsim \Delta ACM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AE}{AM}$ hay $AM^2 = AE.AC$ (đpcm).	0,25 0,25

	c) Ta có $\widehat{AMB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa (O)); $MN \perp AB$ tại I (giả thiết)	0,25
	$\Rightarrow$ ΔAMB vuông tại M có MI là đường cao $\Rightarrow MI^2 = AI.BI$ (hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông) .	0,25
	Xét ΔAIM vuông tại I có: $AI^2 = AM^2 - MI^2$ (định lí Py-ta-go) Hay $AI^2 = AE.AC - AI.BI$ (đpcm).	0,25

Bài 2.

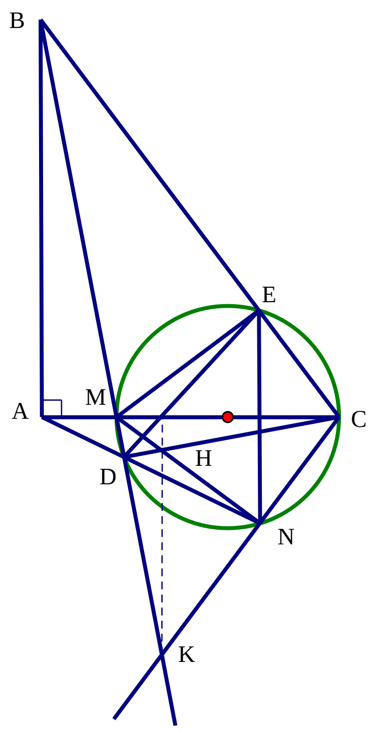
Cho tam giác ABC vuông tại A (AB > AC). Trên cạnh AC lấy điểm M (khác A và C). Đường tròn đường kính MC cắt BC tại E và cắt đường thẳng BM tại D (E khác C; D khác M).

a) Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{ABD} = \widehat{MED}$.

c) Đường thẳng AD cắt đường tròn đường kính MC tại N (khác D). Đường thẳng MD cắt CN tại K, MN cắt CD tại H. Chứng minh KH // NE.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
5 **(3,0 điểm)**	 **a)** $\widehat{MDC} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính MC) $\widehat{BAC} = 90^0$ (ΔABC vuông tại A)	0,25 0,25 0,5

	=> A, D thuộc đường tròn đường kính BC => tứ giác ABCD nội tiếp **b)** Xét đường tròn đường kính BC $\Rightarrow ABD = ACD$ (Góc nội tiếp cùng chắn cung AD) Mặt khác trong đường tròn đường kính MC $\Rightarrow MED = MCD$ (Góc nội tiếp cùng chắn cung MD) . Vậy $ABD = MED$ **c)** Xét tứ giác ABCD nội tiếp $\Rightarrow ABC = CDN$ (cùng bù góc ADC) mà $CDN = NEC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CN) $\Rightarrow ABC = NEC$ ở vị trí đồng vị$\Rightarrow$AB //EN, $AB \perp AC$ nên $EN \perp AC$ (1) Ta chứng minh H là trực tâm của tam giác MKC nên $KH \perp AC$ (2) Từ (1) và (2) suy ra KH // EN (cùng vuông góc với AC)	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25

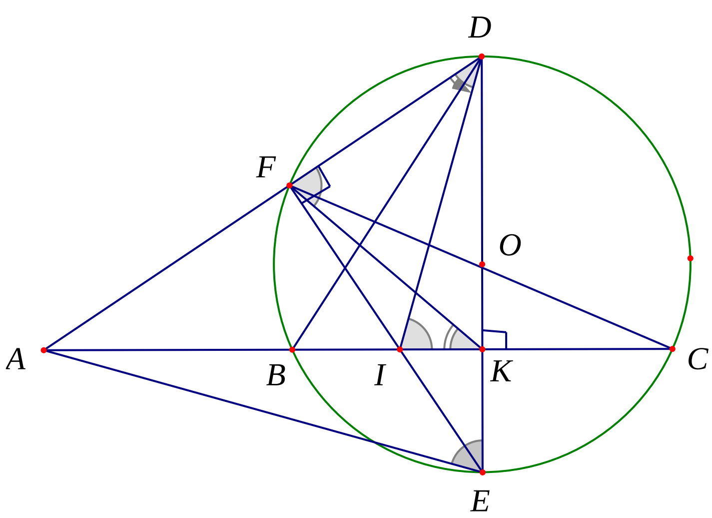
Bài 3.Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến ABC (AB < AC) với đường tròn. Kẻ đường kính DE vuông góc với BC tại điểm K (E thuộc cung nhỏ BC), AD cắt đường tròn (O) tại điểm F, EF cắt BC tại điểm I.

a) Chứng minh rằng: Tứ giác DFIK nội tiếp.

b) Gọi H là điểm đối xứng của I qua K. Chứng minh rằng: $DHA = DEA$

c) Chứng minh hệ thức: AI.KE.KD = KI.AB.AC

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
5 **(3,0 điểm)**		

	a) (1điểm)Ta có: $DFI = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))	0,25
	$DKI = 90^0$ ($DE \perp BC$)	0,25
	$\Rightarrow$ F và K cùng thuộc đường tròn đường kính DI (bài toán quỹ tích) $\Rightarrow$Tứ giác DFIK nội tiếp.	0,25 0,25
	b) (0.75 điểm)Ta có $DE \perp BC$ tại K (gt) K là trung điểm của HI (tính chất đối xứng)	0,25
	Suy ra: I và H đối xứng nhau qua DE $\Rightarrow EHI = EIH$	0,25
	Tứ giác DFIK nội tiếp $\Rightarrow$ $EIH = ADK$ (cùng bù với góc FIK) Do đó: $ADK = IHE$	0,25
	Mặt khác: D và H cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AE Suy ra: Tứ giác ADHE nội tiếp $\Rightarrow$ $DHA = DEA$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DA)	0,25
	c) (0.75điểm) C/m: ΔEIK đồng dạng ΔADK (g.g) $\Rightarrow \frac{EK}{AK} = \frac{IK}{DK} \Rightarrow EK.DK = IK.AK$ (1)	
	C/m: ΔAFI đồng dạng ΔAKD (g.g) $\Rightarrow \frac{AF}{AK} = \frac{AI}{AD} \Rightarrow AF.AD = AI.AK$ (2)	0,25
	C/m: ΔABD đồng dạng ΔAFC (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AF$ (3)	
	Từ (2) và (3) ta có: AB.AC = AI.AK $\Rightarrow$ IK.AB.AC = IK.AI.AK (4)	0,25
	Từ (1) và (4) ta có: IK.AB.AC = EK.DK.AI (đpcm)	0,25

Bài 4. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD không đi qua O (C nằm giữa M và D) với đường tròn (O).

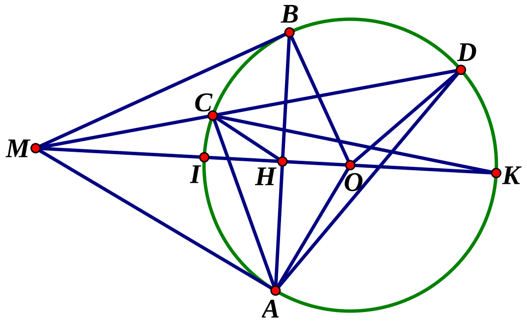
a) Chứng minh rằng tứ giác MAOB nội tiếp.

b) Chứng minh MA^2 = MC.MD

c) Đường thẳng MO cắt AB tại H và cắt (O) tại I và K (I nằm giữa M và K). Chứng minh CK là tia phân giác của $\widehat{DCH}$.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
5 **(3,0 điểm)**	Vẽ hình đúng cho phần a	0,25

		
	a) Có $\widehat{MAO}=90^0$ (MA là tiếp tuyến của (O) tại A)	0,25
	Có $\widehat{MBO}=90^0$ (MB là tiếp tuyến của (O) tại B)	0,25
	Xét tứ giác OICH có $\widehat{MBO}+\widehat{MAO}=180^0$	0,25
	Mà hai góc $\widehat{MBO}$ và $\widehat{MAO}$ ở vị trí đối nhau Do đó tứ giác MAOB nội tiếp.	0,25
	b) Xét (O) có $\widehat{ADC}=\widehat{MAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC)	0,25
	Xét ΔMAC và ΔMDA có $\widehat{ADC}=\widehat{MAC}$ (cm trên) $\widehat{DMA}$ chung	0,25
	Do đó $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g)	0,25
	$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC}=\dfrac{MD}{MA} \Leftrightarrow MA^2=MC.MD$	0,25
	c) Có MA = MB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nha của (O)) OA = OB = R Suy ra MO là đường trung trực của AB $\Rightarrow AH \perp MO$ Xét ΔMAO có $\widehat{MAO}=90^0$, $AH \perp MO$ suy ra $MA^2 = MH.MO$ Lại có $MA^2=MC.MD$	0,25
	Nên MH.MO = MC.MD $\Rightarrow \dfrac{MC}{MH}=\dfrac{MO}{MD}$ Xét ΔMCH và ΔMOD có $\begin{cases}\widehat{DMO}\ chung\\ \dfrac{MC}{MH}=\dfrac{MO}{MD}\end{cases}$ Do đó $\Delta MCH \backsim \Delta MOD$ (c.g.c)	0,25
	=> $\widehat{MCH}=\widehat{MOD}$ (hai góc tương ứng) => $\widehat{HCD}=\widehat{DOK}$ (kề bù với $\widehat{MCH}=\widehat{MOD}$) Xét (O) có $\widehat{DCK}=\dfrac{1}{2}\widehat{DOK}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung DK) Do đó $\widehat{DCK}=\dfrac{1}{2}\widehat{HCD}$ suy ra CK là tia phân giác của $\widehat{DCH}$.	0,25

Bài 5. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lấy điểm M (M khác A). Từ M vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với (O) (C là tiếp điểm). Kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$), MB cắt (O) tại điểm thứ hai là K và cắt CH tại N.

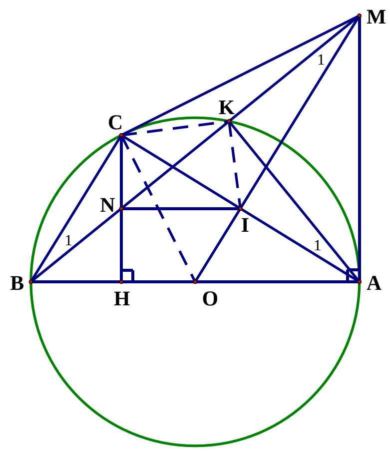
Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AKNH là tứ giác nội tiếp

b) $\widehat{KAC} = \widehat{OMB}$

c) N là trung điểm của CH.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
5 **(3,0 điểm)**	Hình vẽ đúng cho câu a) 	0,25
	a) Chứng minh tứ giác AKNH là tứ giác nội tiếp	
	Có $\widehat{AKN}$ =90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)	0,25
	$\widehat{AHN}$ =90^0 (vì CH $\perp$ AB: gt)	0,25
	$\Rightarrow \widehat{AKN}+\widehat{AHN}$ =90^0 + 90^0=180^0. Vậy tứ giác AKNH nội tiếp được (vì có tổng hai góc đối bằng 180^0)	0,25 0,25
	b) Chứng minh	
	Vì MA; MC là các tiếp tuyến của (O) nên theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có MA = MC $\Rightarrow$ ΔMAC cân tại M	0,25
	Lại có MO là tia phân giác $\widehat{AMC}$ nên MO đồng thời là đường cao $\Rightarrow$ MO $\perp$ AC tại I.	0,25
	Mặt khác BC $\perp$ AC (vì $\widehat{ACB}$=90^0: góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow$ MO // BC $\Rightarrow \widehat{B_1}=\widehat{M_1}$ (hai góc so le trong)	0,25
	Mặt khác xét (O) có $\widehat{B_1}=\widehat{A_1}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CK) $\Rightarrow \widehat{A_1}=\widehat{M_1}$ hay $\widehat{KAC}=\widehat{OMB}$ (đpcm)	0,25
	c) Chứng minh N là trung điểm của CH.	
	Gọi I là giao điểm của AC và MO. Vì $\widehat{A_1}=\widehat{M_1}$ nên tứ giác AIKM nội tiếp được => $\widehat{IKN}=\widehat{MAI}$ Mà CH // MA (cùng vuông góc với AB) => $\widehat{NCI}=\widehat{MAI}$ (so le trong)	0,25
	Vậy $\widehat{NCI}=\widehat{IKN}$. Mà C và K cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ NI $\Rightarrow$ C, K cùng thuộc cung chứa góc dựng qua đoạn NI	

	⇒ tứ giác CKIN nội tiếp được (vì có 4 đỉnh cùng thuộc một đường tròn) => $\widehat{CIN} = \widehat{CKN}$ hay $\widehat{CIN} = \widehat{CKB}$	
	Mà $\widehat{CAB}$= $\widehat{CKB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC) => $\widehat{CIN} = \widehat{CAB}$ => NI//AB	0,25
	- Xét ΔCAH có I là trung điểm của AC (câu a); IN // AB (c/m trên) ⇒ N là trung điểm của CH (đpcm)	0,25

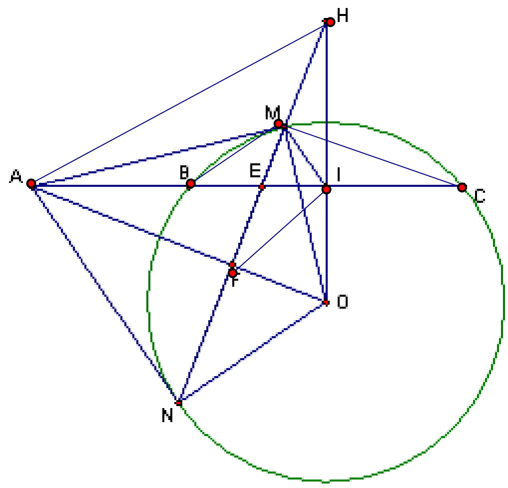
Bài 6. Cho ba điểm A, B, C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Đường tròn (O; R) thay đổi đi qua B và C sao cho O không thuộc BC. Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O). Gọi I là trung điểm của BC, E là giao điểm của MN và BC, H là giao điểm của đường thẳng OI và đường thẳng MN.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $OI.OH = R^2$.

c) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

DAPAN

Bài	**Câu**	**Nội dung**	**Điểm**
Bài 4 3,0đ		 Vẽ hình đúng câu a	0,25
	a	Chứng minh bốn điểm M, N, O, I cùng thuộc một đường tròn	**1,0**
		I là trung điểm của BC suy ra $OI \perp BC \Rightarrow AIO = 90^0$	0,25
		AM, AN là tiếp tuyến $\Rightarrow AMO = ANO = 90^0$	0,25
		Suy ra A, M, N, I, O cùng thuộc một đường tròn	0,25
		Suy ra M, N, I, O cùng thuộc một đường tròn	0,25
	b	Chứng minh $OI.OH = R^2$.	**1,00**
		Gọi $\{F\} = MN \cap AO \Rightarrow AFH = AIH = 90^0 \Rightarrow$ AFIH là tứ giác nội tiếp	0,25

		$\Rightarrow \widehat{OFI} = \widehat{OHA} \Rightarrow \Delta OFI$ đồng dạng với ΔOHA	0,25
		$\Rightarrow \frac{OF}{OH} = \frac{OI}{OA} \Rightarrow OI.OH = OF.OA$ (1)	0,25
		Tam giác AMO vuông tại M có MF là đường cao nên $OF.OA = OM^2 = R^2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $OI.OH = R^2$	0,25
	c	Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định	**0,75**
		Tam giác AMB đồng dạng với tam giác ACM $\Rightarrow AB.AC = AM^2$	0,25
		Tứ giác EFOI nội tiếp $\Rightarrow AE.AI = AF.AO = AM^2$	0,25
		Suy ra $AB.AC = AE.AI$; A, B, C, I cố định suy ra AE là hằng số.	
		Mặt khác E luôn thuộc đoạn thẳng BC cố định nên điểm E cố định. Vậy MN luôn đi qua điểm E cố định	0,25

Bài 7. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác BCEF nội tiếp.

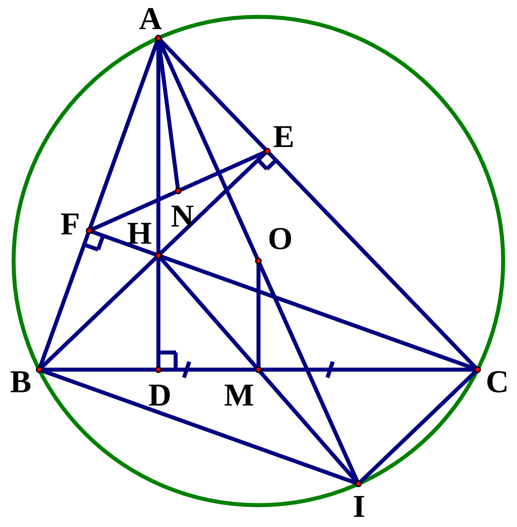
b) Gọi I là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của BC.

Chứng minh: Tứ giác BHCI là hình bình hành và AH = 2MO

c) Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh: R.AN = AM. OM

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
	1) (3,0 điểm)	
	Vẽ đúng hình cho câu a	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	 	
	a) (1 điểm)	
	Xét tứ giác BCEF có: $BEC = 90^0$ (Vì BE $\perp$ AC) $BFC = 90^0$ (CF $\perp$ AB) Suy ra $BEC = BFC = 90^0$ (Vì BE $\perp$ AC, CF $\perp$ AB)	0,25 0,25
4 (3,0 điểm)	$\Rightarrow$ 2 đỉnh E và F kề nhau cùng nhìn cạnh BC dưới 1 góc vuông . Nên tứ giác BCEF nội tiếp (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Có $ACI = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow$ CI $\perp$ AC Có BE $\perp$ AC (gt) $\Rightarrow$ CI // BE (quan hệ vuông góc - song song) Có H $\in$ BE nên CI // BH	0,25
	Có $ABI = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))$\Rightarrow$ BI $\perp$ AB Mà CF $\perp$ AB (gt) $\Rightarrow$ BI //CF (quan hệ vuông góc - song song) Có H $\in$ CF $\Rightarrow$ BI // CH	0,25
	Xét tứ giác BHCI có: CI // BH (cmt) BI // CH (cmt)	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	$\Rightarrow$ tứ giác BHCI là hình bình hành (Dấu hiệu nhận biết hình bình hành - Tứ giác có các cạnh đối song song)	
	Xét ΔAIH có: AO = OI (Bán kính của đường tròn (O)) BM = MC (gt) ; BHCI là hình bình hành (cmt) $\Rightarrow$ HM = MI (T/c hình bình hành) $\Rightarrow$ OM là đường trung bình của ΔAIH (Đ/n đường trung bình của tam giác) $\Rightarrow$ AH = 2OM (tính chất đường trung bình của tam giác)	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Có tứ giác BCEF nội tiếp (cmt) $\Rightarrow B_1 + FEC = 180^0$ (tính chất tứ giác nội tiếp) Mà $FEC + E_1 = 180^0$ (2 góc kề bù) suy ra $B_1 = E_1$ Xét ΔABC và ΔAEF có: A : chung $B_1 = E_1$ (cmt) Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta AEF$ (g.g) AM là trung tuyến của ΔABC (Vì M là trung điểm của BC) AN là trung tuyến của ΔAEF (Vì N là trung điểm của EF) $\Rightarrow k = \frac{AB}{AE} = \frac{AM}{AN}$ (T/c hai tam giác đồng dạng - Tỉ số trung tuyến bằng tỉ số đồng dạng) (1)	0,25
	Xét tứ giác AEHF có : $AEH = AFH = 90^0$ (Vì BE $\perp$AC, CF $\perp$ AB, H $\in$BE, H $\in$CF) $\Rightarrow AEH + AFH = 180^0$	0,25

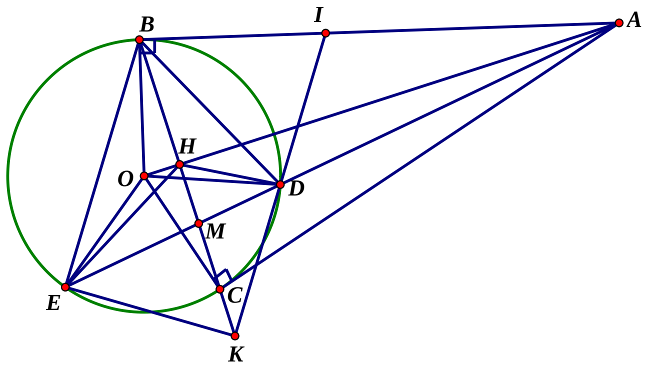
Bài	Đáp án	Điểm
	$\Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp) $\Rightarrow AFE = AHE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AE của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHF) Có $AFE = ACB$ (Cùng bù với EFB do tứ giác BCEF nội tiếp) Mà $ACB = AIB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AB của đường tròn (O;R)) Nên $AIB = AHE$	
	Xét ΔABI và ΔAEH có: $AIB = AHE$ (cmt) $ABI = AEH = 90^0$ Suy ra $\Delta ABI \backsim \Delta AEH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AI}{AH}$ (Đ/n hai tam giác đồng dạng) Mà AI = 2AO = 2R ; AH = 2OM (cmt) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{R}{OM}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM}{AN} = \frac{R}{OM} \Rightarrow$ R.AN = AM. OM	0,25

Bài 8. Từ điểm A ở ngoài (O; R) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC (B, C là hai tiếp điểm) và cát tuyến ADE của (O). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Chứng minh: Tứ giác OBAC nội tiếp và AO vuông góc với BC tại H
b) Chứng minh: $AH.AO = AD.AE$ và $OHE = AHD$
c) Đường thẳng qua D song song với BE, cắt AB, BC lần lượt tại I, K. Chứng minh D là trung điểm của IK.

DAPAN

Bài 5	Nội dung	Điểm

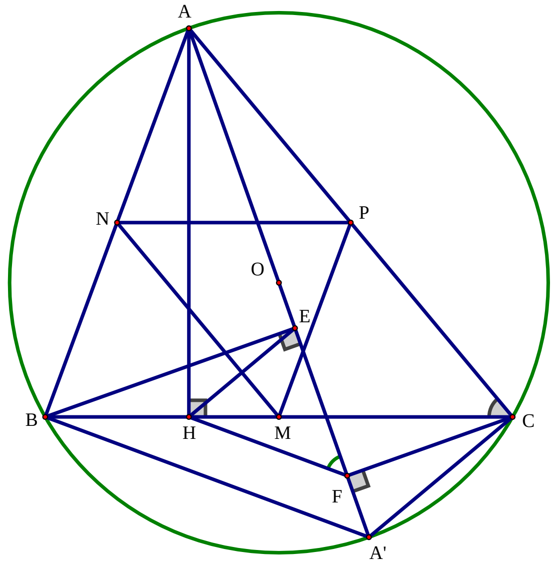
	 Vẽ hình đúng câu a	0,25
	a) Chứng minh: Tứ giác OBAC nội tiếp và AO vuông góc với BC tại H Xét (O) có AB, AC là tiếp tuyến tại B, C $\Rightarrow OBA = 90°$ và $OCA = 90$ Xét tứ giác OBAC có $OBA + OCA = 90° + 90° = 180°$ Mà $OBA; OCA$ là hai góc ở vị trí đối nhau $\Rightarrow$OBAC là tứ giác nội tiếp Xét (O) có AB, AC là tiếp tuyến tại B, C $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow A \in$đường trung trực của BC Mà $OB = OC \Rightarrow O \in$đường trung trực của BC $\Rightarrow$OA là đường trung trực của BC $\Rightarrow OA \perp BC$ H là giao điểm của OA và BC$\Rightarrow OA \perp BC$ tại H	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) Chứng minh: $AH.AO = AD.AE$ và $OHE = AHD$ Xét ΔOBA vuông tại B, có BH là đường cao $\Rightarrow AB^2 = AH.AO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) Xét (O) có $DBA = BED$ (Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BD) Xét ΔABE và ΔADB có: $BED = DBA$ (cmt) BAD chung $\Rightarrow \Delta ABE \sim \Delta ADB(g.g)$ $\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE$ $\Rightarrow AH.AO = AD.AE\left(= AB^2\right)$ $\Rightarrow \frac{AH}{AE} = \frac{AD}{AO}$ Xét ΔAHD và ΔAEO có $\frac{AH}{AE} = \frac{AD}{AO}$	0,25 0,25

	OAE chung $\Rightarrow \Delta AHD \sim \Delta AEO(c.g.c)$ $\Rightarrow AHD = AEO(1)$ Xét tứ giác OHDE có $AHD = AEO$ Mà AHD là góc ngoài tại đỉnh đối đối diện của AEO $\Rightarrow$OHDE là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow OHE = ODE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OE) Có OE = OD $\Rightarrow \Delta$ ODE cân tại O$\Rightarrow DEO = ODE$ hay $AEO = ODE$ $\Rightarrow OHE = AEO\left(= ODE\right)(2)$ Từ (1) và (2)$\Rightarrow OHE = AHD\left(= AEO\right)$`	0,25 0,25
	c) Chứng minh D là trung điểm của IK Gọi M là giao điểm của BC và AE Có $\begin{matrix} OHE + EHM = 90^\circ \\ MHD + AHD = 90^\circ \end{matrix}$ và $OHE = AHD$ (cmt) $\Rightarrow EHM = MHD$ $\Rightarrow$HM là phân giác trong của EHD Mà $AH \perp HM$ $\Rightarrow$AH là phân giác ngoài của EHD $\Rightarrow \frac{MD}{ME} = \frac{AD}{AE}$ Có DK//BE, BK giao với ED tại M $\Rightarrow \frac{MD}{ME} = \frac{DK}{BE}$ Có DI//BE, BI giao với ED tại A $\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{DI}{BE}$ $\Rightarrow \frac{DK}{BE} = \frac{DI}{BE}$ $\Rightarrow$DK = DI $\Rightarrow$ D là trung điểm của IK	 0,25 0,25 0,25

Bài 9. Cho đường tròn (O) với dây BC cố định (BC < 2R), điểm A trên cung lớn BC (A không trùng với B, C và A không là điểm chính giữa cung). Gọi H là hình chiếu của A trên BC, E và F lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường kính AA'.

a) Chứng minh rằng tứ giác BHEA nội tiếp và HE $\perp$ AC.
b) Chứng minh HE.AC = HF. AB.
c) Khi A di động, chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF cố định.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
Bài 5 (3 điểm)	Vẽ hình đúng cho phần a 	0,25
	a) (1 điểm)	
	Xét tứ giác BHEAcó $\widehat{BHA} = \widehat{BEA} = 90^0$ (gt) $\Rightarrow$ BHEA nội tiếp đường tròn đường kính AB(2 đỉnh H, E cùng nhìn cạnh AB dưới 1 góc vuông)	0,25
	Ta có $\widehat{A'AB} = \widehat{A'CB}$ (2 góc nội tiếp chắn cung A'B) và $\widehat{A'AB} = \widehat{CHE}$ (cùng bù với $\widehat{BHE}$) $\Rightarrow \widehat{A'CB} = \widehat{CHE}$	0,25
	$\Rightarrow$ A'C // HE mà A'C $\perp$ AC (góc ACA' = 90^0 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow$ HE $\perp$ AC	0,25 0.25
	b) (1,0 điểm)	
	Có: $\widehat{AFC} = \widehat{AHC}$ (= 90^0) mà đỉnh F và H kề nhau cùng nhìn cạnh AC $\Rightarrow$ AHFC nội tiếp. $\Rightarrow \widehat{EFH} = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AH}$) (1)	0,25
	Có tứ giác ABHE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FEH} = \widehat{ABC}$ (cùng bù với $\widehat{AEH}$) (2)	0,25
	Từ (1), (2) $\Rightarrow$ ΔHEF đồng dạng với ΔABC (g.g)	0,25
	$\Rightarrow \dfrac{HE}{AB} = \dfrac{HF}{AC} \Rightarrow HE.AC = HF.AB$	0,25
	c) (0,75 điểm)	

	Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC. Vì MN // AC và HE $\perp$ AC nên HE $\perp$ MN. Mặt khác N cách đều 2 điểm H, E $\Rightarrow$ MN là đường trung trực của đoạn thẳng HE.	0,25
	Chứng minh tương tự MP là đường trung trực của đoạn thẳng HF. Vậy M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHEF. (3)	0,25
	Có BC cố định mà M là trung điểm BC. $\Rightarrow$ M cố định khi A di chuyển trên cung BC lớn (4). Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHEF cố định	0,25

Bài 10. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O), vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD không đi qua O (điểm C nằm giữa M và D).

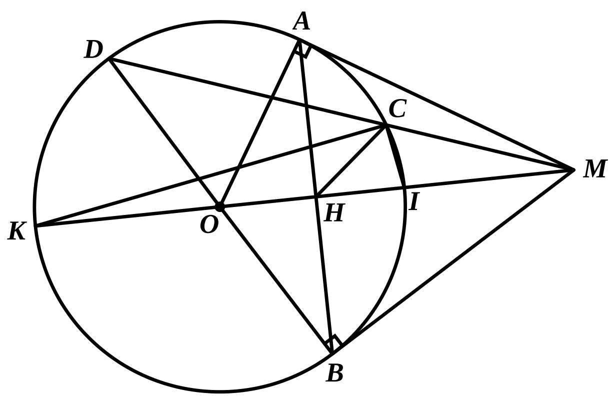
a) Chứng minh rằng tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

b) Gọi giao điểm của MO và AB là H. Chứng minh $MO \perp AB$ và $\Delta MCH \backsim \Delta MOD$

c) Đường thẳng MO cắt (O) tại I và K (I nằm giữa M và K).

Chứng minh $MK.HI = MI.HK$.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
Bài 5 (3,0 điểm)	Hình vẽ đúng: 0,25 điểm 	
	a) (1,0 điểm)	
	Có $\widehat{MAO} = 90^0$ (MA là tiếp tuyến của (O) tại A) Có $\widehat{MBO} = 90^0$ (MB là tiếp tuyến của (O) tại B)	0,5
	Xét tứ giác MAOB có $\widehat{MBO} + \widehat{MAO} = 180^0$	0,25
	Mà hai góc $\widehat{MBO}$; $\widehat{MAO}$ ở vị trí đối nhau	0,25

	Do đó tứ giác MAOB nội tiếp.	
	b) (1,0 điểm)	
	Có MA = MB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nha của (O)) OA = OB = R Suy ra MO là đường trung trực của AB $\Rightarrow$ AH $\perp$ MO	0,25
	Xét (O) có $ADC = MAC$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn AC) Xét ΔMAC và ΔMDA có $ADC = MAC$ (cm trên) DMA chung Do đó $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g)	0,25
	$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$ Xét ΔMAO có $MAO = 90^0$, $AH \perp MO$ suy ra $MA^2 = MH.MO$ Lại có $MA^2 = MC.MD$ Nên MH.MO = MC.MD $\Rightarrow \dfrac{MC}{MH} = \dfrac{MO}{MD}$	0,25
	Xét ΔMCH và ΔMOD có $\begin{cases} DMO \text{ chung} \\ \dfrac{MC}{MH} = \dfrac{MO}{MD} \end{cases}$ Do đó $\Delta MCH \backsim \Delta MOD$ (c.g.c)	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Do đó $\Delta MCH \backsim \Delta MOD$ (c.g.c) $\Rightarrow MCH = MOD$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow HCD = DOK$ (kề bù với $MCH = MOD$)	0,25
	Xét (O) có $DCK = \dfrac{1}{2}DOK$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn DK) Do đó $DCK = \dfrac{1}{2}HCD$ suy ra CK là tia phân giác của DCH. Xét (O) có $KCI = 90^0 \Rightarrow CK \perp CI$ Suy ra CI là tia phân giác của HCM	0,25

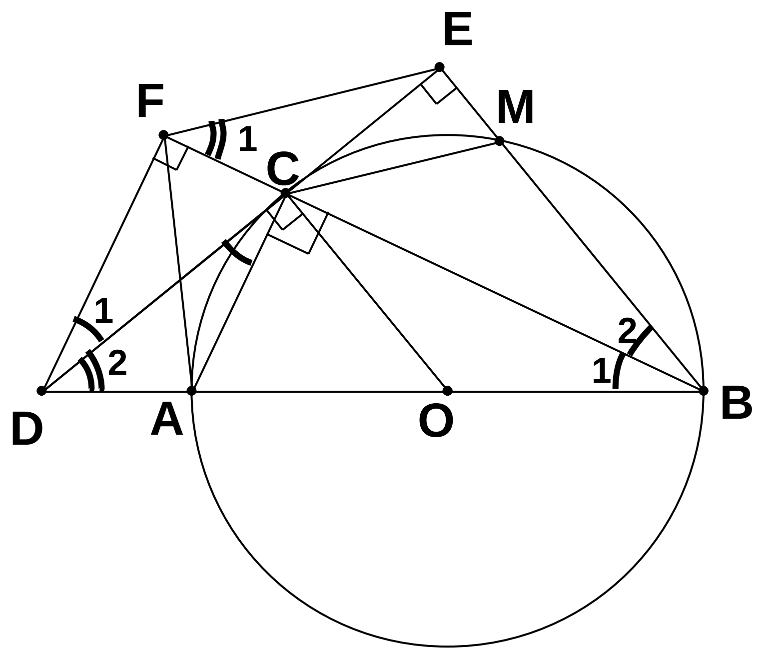
Bài 11. Cho đường tròn (O) có AB là đường kính. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D (không trùng với A), vẽ tiếp tuyến DC với đường tròn (O) (C là tiếp điểm). Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ B xuống đường thẳng DC và F là chân đường vuông góc hạ từ D xuống đường thẳng BC.

a) Chứng minh tứ giác EFDB là tứ giác nội tiếp và $\frac{CE}{CF} = \frac{EB}{FD}$.

b) Chứng minh tia BC là tia phân giác của $\widehat{EBD}$

c) Gọi M là giao điểm của BE và (O). Chứng minh CM . BF = EF . BC.

DAPAN

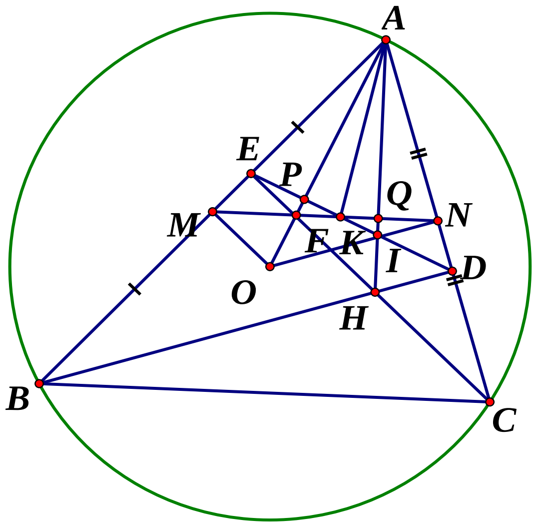
	Vẽ hình đúng cho câu a 	0,25
	a) Chứng minh tứ giác EFDB là tứ giác nội tiếp và CE . CD = CB . CF. (1,0 điểm)	
	Ta có BE ⊥ CD tại E; DF ⊥ BC tại F (gt) $\Rightarrow\ \widehat{BED} = \widehat{BFD} = 90^0$	0,25
5 (3 điểm)	⇒ B, E, F, D cùng thuộc đường tròn đường kính BD ⇒ Tứ giác EFDB là tứ giác nội tiếp (đinh nghĩa tứ giác nội tiếp)	0,25
	ΔCEB và ΔCFD có: $\widehat{CEB} = \widehat{CFD} = 90^0$ (c/m trên) $\widehat{ECB} = \widehat{FCD}$ (2 góc đối đỉnh)	0,25
	⇒ ΔCEB ~ ΔCFD (g.g) $\Rightarrow \frac{CE}{CF} = \frac{EB}{FD}$ (đpcm)	

		0,25
	b) Chứng minh tia BC là tia phân giác của $\widehat{EBD}$. (1,0 điểm)	
	+ Xét (O) có AB là đường kính $\Rightarrow \widehat{ACB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AC \perp BC$	0,25
	mà $DF \perp BC$ (gt) $\Rightarrow$ AC // DF (từ vuông góc đến song song) $\Rightarrow \hat{D}_1 = \widehat{ACD}$ (2 góc so le trong)	0,25
	Mà $\hat{B}_1 = \widehat{ACD}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC của (O) $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_1 (1)$	0,25
	+ Lại có: Tứ giác EFDB là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \hat{D}_1 = \hat{B}_2$ (2) (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EF) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_2$ $\Rightarrow$ Tia BC là tia phân giác của $\widehat{EBD}$ (đpcm)	0,25
	c) Gọi M là giao điểm của BE và (O). Chứng minh CM . BF = EF . BC. (0,75 điểm)	
	+ Xét (O) có $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CM}$ (2 góc nội tiếp bằng nhau chắn 2 cung bằng nhau) $\Rightarrow AC = CM$ (3) (liên hệ: cung – dây)	0,25
	+ Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác EFDB có: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ $\Rightarrow \overset{\frown}{FD} = \overset{\frown}{FE}$ (2 góc nội tiếp bằng nhau chắn 2 cung bằng nhau) $\Rightarrow FD = FE$ (4) (liên hệ: cung – dây)	0,25
	+ Xét ΔBDF có AC // DF (chứng minh trên) $\Rightarrow \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{BF}$ (hệ quả định lí Ta-lét) $\Rightarrow AC.BF = DF.BC$ (5) + Thế (3), (4) vào (5) ta được: $CM.BF = EF.BC$ (đpcm)	0,25

Bài 12. Cho tam giác $ABC\,(AB > AC)$ nội tiếp đường tròn tâm O. Các đường cao BD và CE cắt nhau tại H $(D \in AC, E \in AB)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a/ Chứng minh các tứ giác $BCDE, AMON$ nội tiếp
b/ Chứng minh $AE.AM = AD.AN$
c/ Gọi K là giao điểm của ED và MN, F là giao điểm của AO và MN, I là giao điểm của ED và AH. Chứng minh F là trực tâm của tam giác KAI

DAPAN

<table>
<tr><td>Bài 5
3.0 đ</td><td>Nội dung</td><td>Điểm</td></tr>
<tr><td></td><td>Vẽ hình đúng để làm câu a

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>a</td><td>a
Xét tứ giác $BCDE$ có $BEC = BDC = 90^0 (gt) \Rightarrow$ Tứ giác $BCDE$ là tứ giác nội tiếp (Tứ giác có 2 đỉnh kề nhau cùng nhìn một cạnh dưới các góc bằng nhau)
Ta có: M là trung điểm AB (gt) $\Rightarrow OM \perp AB \Rightarrow OAM = 90^0$ (tính chất đường kính dây cung).
Tương tự N là trung điểm của $AC(gt) \Rightarrow ON \perp AC \Rightarrow ONA = 90^0$ (tính chất đường kính dây cung)
Xét tứ giác $AMON$ có $OMA + ONA = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác $OMAN$ là tứ giác nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)</td><td>0,25
0,25
0,25
0,25</td></tr>
</table>

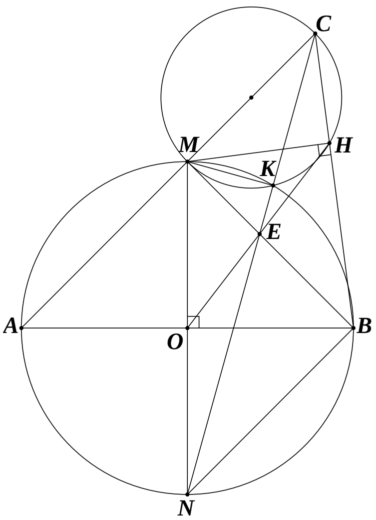
b	b/ Tứ giác $BCDE$ nội tiếp (cmt) $\Rightarrow AED = ACB$ (góc ngoài bằng góc trong tại đỉnh đối diện) Dễ thấy MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN//BC$ $\Rightarrow ACB = ANM$ (đồng vị) $\Rightarrow AED = ANM\left(=ACB\right)$ Xét ΔAED và ΔANM có: EAN chung; $AED = ANM\,(cmt)$ $\Rightarrow \Delta AED \sim \Delta ANM\left(g.g\right) \Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AD}{AM} \Rightarrow AE.AM = AD.AE$	0,25 0,25 0,25 0,25
c	c/ Gọi $P = OA \cap ED; Q = MN \cap AH$ $H = BD \cap CE \Rightarrow H$ là trực tâm của tam giác $ABC \Rightarrow AH \perp BC$ Ta có $MN//BC(cmt); AH \perp BC(cmt) \Rightarrow MN \perp AH$ tại Q Xét ΔAMQ và ΔAON có: $AMQ = AMN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AN) $AQM = ANO = 90^0$ $\Rightarrow \Delta AMQ \sim \Delta AON\left(g.g\right) \Rightarrow MAQ = OAN$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow MAQ - QAO = OAN - QAO$ $\Rightarrow OAM = QAN \Rightarrow PAE = QAN$ Lại có: $AED = ANM\,(cmt) \Rightarrow AEP = ANQ \Rightarrow PAE + AEP = QAN + ANQ$ Xét tam giác vuông AQN có: $QAN + ANQ = 90^0 \Rightarrow PAE + AEP = 90^0$ $\Rightarrow \Delta APE$ vuông tại P $\Rightarrow AP \perp PE$ hay $FA \perp KI$ (1) Ta đã chứng minh $MN \perp AH \Rightarrow FQ \perp AI$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow F$ là giao điểm của 2 đường cao FA, FQ của tam giác KAI Vậy F là trực tâm tam giác $KAI\left(dfcm\right)$	0,25 0,25 0,25

CAUHOI

Câu 13. Cho đường tròn O có hai đường kính AB và MN vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C khác điểm M. Kẻ MH vuông góc với BC ($H \in BC$).

a) Chứng minh tứ giác $BOMH$ nội tiếp và HO là tia phân giác của MHB.
b) Gọi E là giao điểm của MB và OH. Chứng minh: $ME.HM = BE.HC$.
c) Gọi giao điểm của đường tròn O và đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC là K (K khác M). Chứng minh ba điểm C, K, E thẳng hàng.

DAPAN

5 (3,0 điểm)	(3.0 điểm)	
	 Vẽ hình đúng hết phần a) 0,25 điểm.	
	a) (1,0 điểm)	
	Có $MOB = 90^\circ$ $AB \perp MN$	0,25
	$MHB = 90^\circ$ $MH \perp BC$	0,25
	Suy ra $MOB + MHB = 180^\circ$ nên tứ giác $BHMO$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).	0,25
	=> MHO là góc nội tiếp chắn cung MO và BHO là góc nội tiếp chắn cung BO mà $MO = BO$ (quan hệ giữa dây và cung) nên $MHO = BHO$. Do đó HO là tia phân giác của MHB.	0,25
	b) (1,0 điểm)	

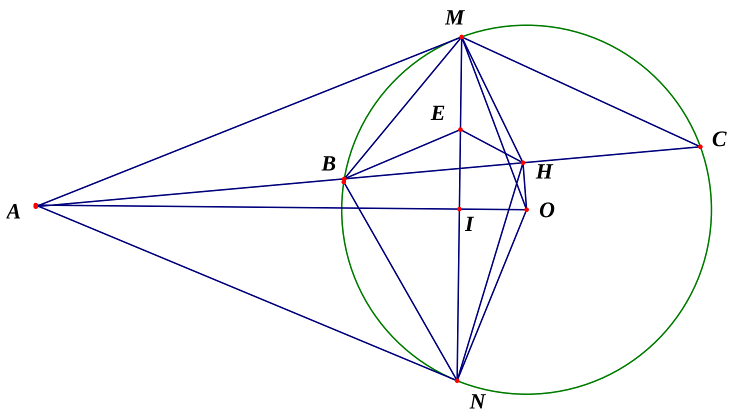
	Xét ΔMHB có HO là tia phân giác của $MHB \Rightarrow \dfrac{EM}{EB} = \dfrac{HM}{HB}$ (1)	0,25
	Xét O có $AMB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BMC = 90^\circ$ (kề bù với $AMB = 90^\circ$).	0,25
	Xét ΔBMC vuông tại M và $MH \perp BC$ nên $MH^2 = HC.HB \Leftrightarrow \dfrac{HM}{HB} = \dfrac{HC}{HM}$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{EM}{EB} = \dfrac{HC}{HM} \Leftrightarrow ME.HM = BE.HC$ (đpcm)	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Xét O có $MKN = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Xét đường tròn ngoại tiếp ΔMHC có $MKC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Suy ra $MKC + MKN = 180^\circ$ nên ba điểm C, K, N thẳng hàng. (3)	0,25
	Xét O có $MBN = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Xét ΔBHM và ΔBMC có MBC chung; $BHM = BMC = 90^\circ$ Do đó $\Delta BHM \backsim \Delta BMC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BH}{BM} = \dfrac{HM}{MC} \Leftrightarrow \dfrac{MC}{BM} = \dfrac{HM}{BH} \Rightarrow \dfrac{MC}{BN} = \dfrac{HM}{BH}$ Lại có $\dfrac{ME}{EB} = \dfrac{HM}{BH}$. Suy ra $\dfrac{ME}{BE} = \dfrac{MC}{BN}$	0,25
	Xét ΔMEC và ΔBEN có $EMC = EBN = 90^\circ$; $\dfrac{ME}{BE} = \dfrac{MC}{BN}$ Do đó $\Delta MEC \backsim \Delta BEN$ (c.g.c) $\Rightarrow MEC = BEN$ (hai góc tương ứng)	

	Mà $MEC + CEB = 180^\circ$ nên $NEB + CEB = 180^\circ$ Do đó ba điểm C, E, N thẳng hàng. (4) Từ (3) và (4) suy ra bốn điểm C, K, E, N thẳng hàng hay ba điểm C, K, E thẳng hàng.	0,25

Bài 14. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt B,C (O không thuộc (d); B nằm giữa A và C) và gọi H là trung điểm của BC, I là giao điểm OA với MN.

a) Chứng minh: Các điểm O,H,A,N,M cùng nằm trên một đường tròn. $MN \perp OA$
b) Chứng minh :HA là tia phân giác của MHN và AI.AO=AB.AC.
c) Lấy điểm E trên MN sao cho BE song song với AM. Chứng minh CM//HE.

DAP AN

CÂU	NỘI DUNG	ĐIỂM
		0,25
a) (1 Điểm)	Xét (O) Ta có: $AMO = 90^0$ (Vì AM là tiếp tuyến tại M của (O)) $ANO = 90^0$ (Vì AN là tiếp tuyến tại N của (O)) Lại có BC là dây không đi qua O và H là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow OH \perp BC$ tại H $\Rightarrow AHO = 90^0$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)	0,25 0.25
	$\Rightarrow AMO = ANO = AHO = 90^0$ $\Rightarrow$5 điểm O,H,A,N,M cùng nằm trên một đường tròn đường kính OA	0,25
	Chứng minh được OA là đường trung trực của MN$\Rightarrow MN \perp OA$ tại I	0,25
b (1 Điểm)	Ta có các điểm O, H, M, A, N cùng thuộc đường tròn (chứng minh câu a) Mà AM = AN (tính chất 2 tiếp tuyến AM, AN cắt nhau) $\Rightarrow$ AM = AN	0,25

	$\Rightarrow MHA = NHA$(hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) $\Rightarrow$ HA là tia phân giác của MHN	0,25
	Xét ΔAMB và ΔACM Có MAC là góc chung và $AMB = MCB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung MB) $\Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta ACM$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow$ AM^2 = AB. AC (1) Tam giác AMO vuông tại M, $MN \perp OA$ tại I (c/m câu a) $\Rightarrow AM^2$=AI.AO (Hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$AB.AC=AI.AO	0,25 0,25
C (0,75 điểm)	Theo giả thiết AM//BE nên $MAC = EBH$ (đồng vị) (3) Do 5 điểm A, M, H, O, N cùng thuộc một đường tròn nên: $MAH = MNH$ (hai góc nội tiếp chắn cung MH) (4)	0,25
	Từ (3) và (4) suy ra $EBH = MNH$ hay $ENH = EBH \Rightarrow$ tứ giác EBNH nội tiếp	0,25
	$\Rightarrow EHB = ENB$(hai góc nội tiếp cùng chắn cung EB) Mà $ENB = MCB$(góc nội tiếp chắn cung MB) $\Rightarrow EHB = MCB$ mà hai góc ở vị trí đồng vị $\Rightarrow$ EH // MC.	0,25

Bài 15. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn (*AB*<*AC*) nội tiếp đường tròn (*O*). Hai đường cao *BE* và *CF* của tam giác *ABC* cắt nhau tại điểm *H*.

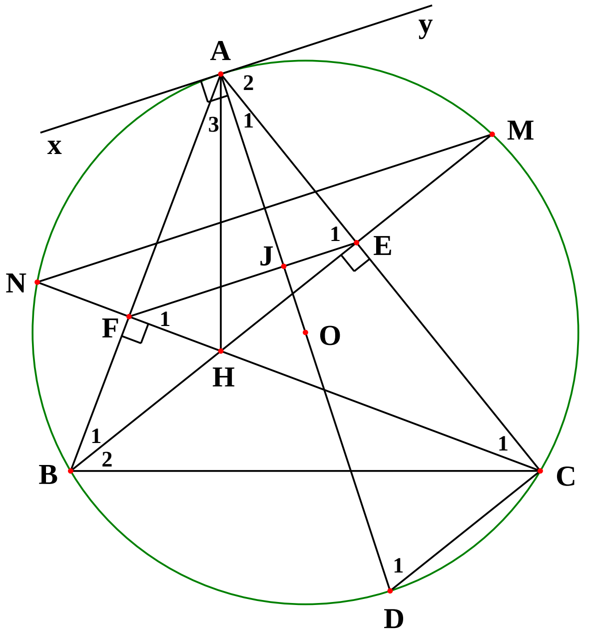
a) Chứng minh bốn điểm *B, C, E, F* cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh đường thẳng *OA* vuông góc với đường thẳng *EF*.

c) Gọi *K* là trung điểm của đoạn thẳng *BC*. Đường thẳng *AO* cắt đường thẳng *BC* tại điểm *I*, đường thẳng *EF* cắt đường thẳng *AH* tại điểm *P*. Chứng minh tam giác *APE* đồng dạng với tam giác *AIB* và đường thẳng *KH* song song với đường thẳng *IP*.

DAPAN

Bài	**Nội dung**	**Điểm**
5 (3,0 điểm)	Vẽ hình đúng đến phần a	0,25



0,5

0,5

0,5

a)

Vì BE, CF là các đường cao của ΔABC nên: 0,5

$\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^o$

$\Rightarrow$ E, F thuộc đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow$ Bốn điểm *B, C, E, F* cùng thuộc một đường tròn.

b)

Vẽ đường kính AD của (O), AD cắt EF tại J.

Vì BCEF là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{ABC}\ (= 180^o - \widehat{CEF})$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{D_1}\ \left(= \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{AC}\right) \Rightarrow \widehat{E_1} = \widehat{D_1}$

Ta có $\widehat{ACD} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{D_1} = 90^o \Rightarrow \widehat{A_1} + \widehat{E_1} = 90^o \Rightarrow \widehat{AJE} = 90^o$

$\Rightarrow OA \perp EF$ tại J 0,5

c)

Dễ thấy $\widehat{A_3} + \widehat{ABC} = 90^o$

Mà $\widehat{A_1} + \widehat{D_1} = 90^o$ và $\widehat{ABC} = \widehat{D_1}$ 0,25

$\Rightarrow \widehat{A_3} = \widehat{A_1} \Rightarrow \widehat{BAI} = \widehat{PAE}$

ΔAPE và ΔAIB có: $\widehat{PAE} = \widehat{BAI}$; $\widehat{E_1} = \widehat{ABC}$

$\Rightarrow \Delta APE \backsim \Delta AIB$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{AP}{AI} = \frac{AE}{AB}$ (1)

Dễ chứng minh $\Delta AEH \backsim \Delta ABD$ (g-g)

$\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD}$ (2)

	Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AP}{AI} = \dfrac{AH}{AD}$ $\Rightarrow$ PI // HD (định lí Ta-lét đảo) Chứng minh được BHCD là hình bình hành $\Rightarrow$ H, K, D thẳng hàng $\Rightarrow$ KH // IP (đpcm).	

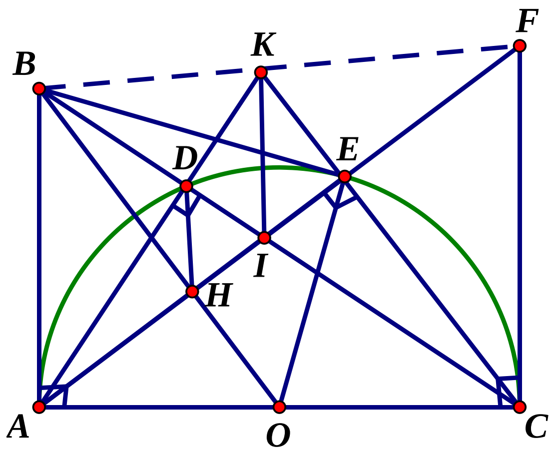
Bài 16. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC chứa điểm B vẽ nửa đường tròn (O) đường kính AC, nửa đường tròn này cắt BC tại D. Vẽ tiếp tuyến BE của nửa đường tròn (O) (với E là tiếp điểm, E khác A). BO cắt AE tại điểm H.

a) Chứng minh $BAOE$ nội tiếp và $BH.BO = BD.BC$.

b) Chứng minh $DHOC$ là tứ giác nội tiếp và $BHD = OHC$.

c) Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn (O) cắt AE tại F, AD cắt CE tại K. Chứng minh ba điểm B, K, F thẳng hàng.

DAP AN

Bài	Nội dung	Điểm
5	Vẽ hình đúng cho câu a 	0,25
	a)1,0 điểm	
	$BAO = 90^0$ (ΔABC vuông tại A) $BEO = 90^0$ (BE là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O))	0,25
	Tứ giác $ABEO$ có: $BAO + BEO = 90^0 + 90^0 = 180^0$ $\Rightarrow ABEO$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)	0,25

	Ta có $BA = BE \Rightarrow B$ thuộc trung trực của đoạn AE. Ta có $OA = OE \Rightarrow O$ thuộc trung trực của đoạn AE. Suy ra BO là trung trực của đoạn $AE \Rightarrow BO \perp AE$ tại H. + Chứng minh được $BH.BO = BE^2$	0,25
	+ Chứng minh $BD.BC = BE^2$ Suy ra $BH.BO = BD.BC$.	0,25
	b) 1,0 điểm	
	+ Xét ΔBHD và ΔBCO có: OBC góc chung, $\frac{BH}{BD} = \frac{BC}{BO}$ (câu a) Suy ra $\Delta BHD \sim \Delta BCO$ (c.g.c)	0,25
	$\Rightarrow BHD = BCO \Rightarrow DHOC$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	+ Vì $DHOC$ là tứ giác nội tiếp nên $OCD = BHD, ODC = OHC$. Ta có ΔOCD cân tại $O\,(OC = OD) \Rightarrow OCD = ODC$.	0,25
	Từ hai điều trên suy ra $\Rightarrow DHB = CHO$.	0,25
	c) 0,75 điểm	
	+ Từ câu b suy ra HI là phân giác của CHD, mà $HI \perp HB$ suy ra HB là phân giác ngoài tại đỉnh H của $\Delta DHC \Rightarrow \frac{ID}{BD} = \frac{IC}{BC}$ (1) + Chỉ ra được I là trực tâm của $\Delta AKC \Rightarrow KI \perp AC \Rightarrow KI // AB$ $\Rightarrow \frac{KI}{AB} = \frac{ID}{BD}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow \frac{KI}{AB} = \frac{IC}{BC}$ (3)	0,25
	Ta có $AB // CF \Rightarrow \frac{IC}{IB} = \frac{IF}{IA} \Rightarrow \frac{IC}{BC} = \frac{IF}{AF}$ (4)	0,25
	Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{KI}{AB} = \frac{IF}{AF}$ mà $FIK = FAB$ (đồng vị) Suy ra $\Delta FIK \sim \Delta FAB \Rightarrow AFK = AFB$ $\Rightarrow$ hai tia FK và FB trùng nhau $\Rightarrow$ đpcm	0,25

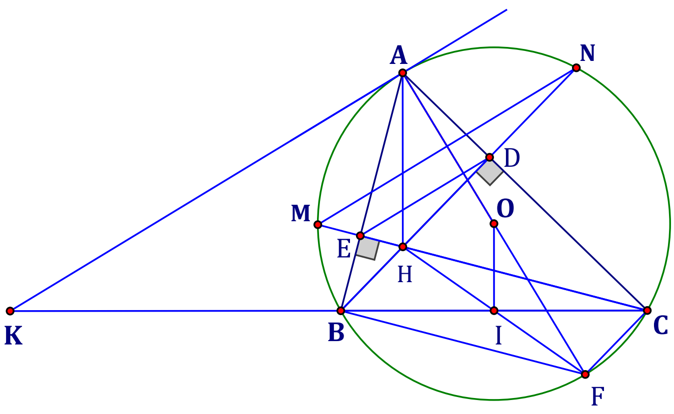
Bài 17: Cho đường tròn (O) cố định ngoại tiếp tam giác nhọn ABC (trong đó cạnh BC không đổi). Các đường cao BD, CE của tam giác cắt nhau ở H và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai theo thứ tự ở N, M.

a) Chứng minh tứ giác BCDE nội tiếp và $ACM = ABN$

b) Qua A kẻ đường thẳng song song với MN cắt đường thẳng BC ở K. Chứng minh rằng $MN \perp OA$ và $KA^2 = KB.\ KC$

c) Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔADE không đổi.

DAPAN

Bài	Nội dung	Biểu điểm
	Vẽ hình đúng cho câu a 	0,25
	a.(1,0 điểm)	
	Xét tứ giác BCDE, ta có $BD \perp AC$ (gt) $\Rightarrow BDC = 90^0$ và $CE \perp AB$ (gt) $\Rightarrow BEC = 90^0$	0,25
	$\Rightarrow BDC = BEC = 90^0$	0,25
	Mà E; D là hai đỉnh liền kề $\Rightarrow$ Tứ giác BCDE nội tiếp đường tròn (Dhnb)	0,25
	$\Rightarrow DCE = DBE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ED) hay $ACM = ABN$	0,25
	b.(1,0 điểm)	
	Xét (O) có $ACM = ABN$ (chứng minh trên) $\Rightarrow$ AM = AN (hai cung chắn hai góc nội tiếp bằng nhau) $\Rightarrow$ AM = AN (liên hệ cung và dây) Mà OM = ON (bán kính đường tròn (O)) $\Rightarrow$ OA là đường trung trực của đoạn MN $\Rightarrow OA \perp MN$	0,25
	Có AK // MN (gt) ; mà $MN \perp OA$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AK \perp OA$ tại A, trong đó $A \in (O)$. $\Rightarrow$ AK là tiếp tuyến của (O)	0,25
	Xét ΔAKB và ΔCKA có	

	$\widehat{AKC}$ là góc chung $\widehat{KAB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}$sđAB (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \Delta AKB \sim \Delta CKA$ (g-g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KA}$ (tính chất) $\Rightarrow KA^2 = KB.KC$	0,25
	c.(0,75 điểm)	
	Gọi F là giao điểm AO với (O) Ta có $\widehat{ACF} = \widehat{ABF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow$ FC $\perp$ AC và FB $\perp$ AB Lại có BH $\perp$ AC và CH $\perp$ AB (gt) $\Rightarrow$ BH // CF và CH // BF $\Rightarrow$ tứ giác BHCF là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết) Gọi I là giao điểm của BC và HF $\Rightarrow$ I là trung điểm của HF, BC (tính chất đường chéo hình bình hành)	0,25
	Xét ΔAHF có: O là trung điểm của AF I là trung điểm của BC $\Rightarrow$ OI là đường trung bình của ΔAHF $\Rightarrow$ AH = 2. OI (1) Xét (O) có I là trung điểm của dây BC không đi qua tâm O $\Rightarrow$ OI $\perp$ BC (tính chất) Mà BC không đổi và (O) cố định $\Rightarrow$ OI không đổi (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AH không đổi (3)	0,25
	Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^0$ (gt) $\Rightarrow$ E; D cùng thuộc đường tròn đường kính AH (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow$ tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn đường kính AH $\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp ΔADE đi qua H và có AH là đường kính (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow$Đường tròn ngoại tiếp ADE có bán kính không đổi.	0,25

Bài 18. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn O. Đường cao AD của tam giác ABC cắt đường tròn O tại E (E khác A). Từ E vẽ EK vuông góc với đường thẳng AB tại K. Qua điểm A vẽ tiếp tuyến xy với đường tròn O. Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng xy tại Q.

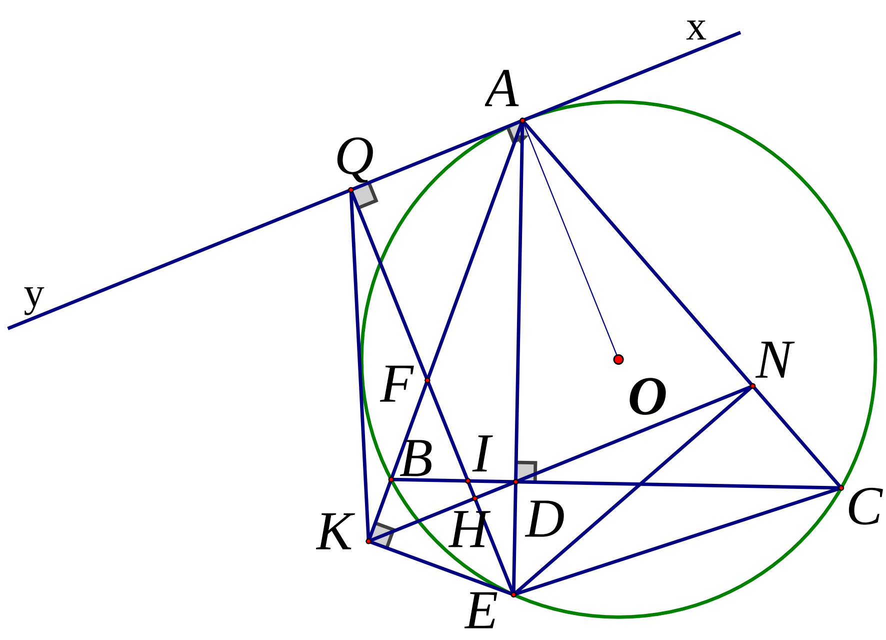
a) Chứng minh tứ giác $AQKE$ nội tiếp và $\widehat{KQE} = \widehat{BCE}$.

b) Tia KD cắt AC tại N. Chứng minh tứ giác $DECN$ nội tiếp và $EN.QK = ND.EQ$.

c) Đường thẳng QE cắt BC và AB lần lượt tại I và F. Chứng minh $\frac{S_{END}}{S_{EQK}} = \frac{EI}{EF}$

.

DAPAN

Câu	Đáp án	Điểm
Bài 5 **(3,0 điểm)**	Vẽ hình đúng cho câu a 	0,25
	a) **(1,0 điểm)**	
	Có $EK \perp AB$ tại K $\Rightarrow AKE = 90^0$ $EQ \perp xy$ tại Q $\Rightarrow AQE = 90^0$	0,25
	Ta có $AKE = AQE = 90^0$ nên A, Q, K, E thuộc đường tròn đường kính AE. $\Rightarrow$ Tứ giác $AQKE$ nội tiếp.	0,25
	$\Rightarrow KQE = KAE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KE)	0,25
	Có $BAE = BCE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE trong O)	0,25

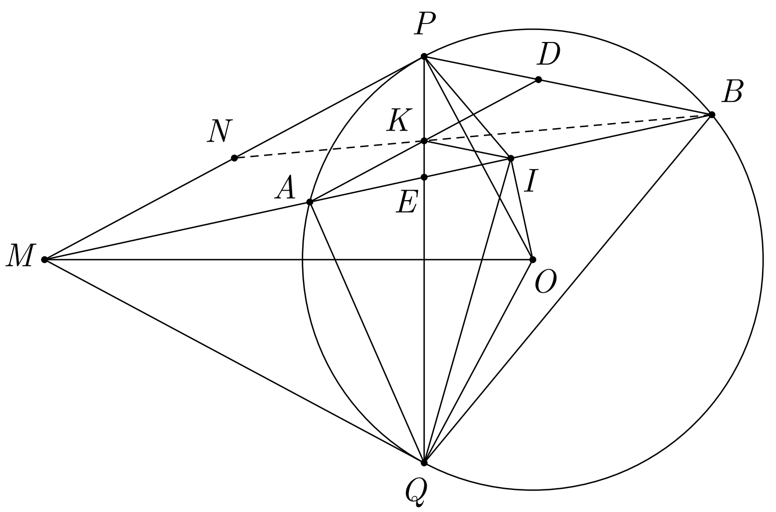
	Từ đó ta có $KQE = BCE$.	
	b. (1,0 điểm)	
	Có AD là đường cao của ΔABC nên $AD \perp BC$ $\Rightarrow AE \perp BC$ tại D $\Rightarrow BDE = 90^0$. Có $AK \perp KE$ $\Rightarrow BKE = 90^0$. Ta có $BDE = BKE = 90^0$ nên B, K, E, D thuộc đường tròn đường kính BE. $\Rightarrow$ Tứ giác $BKED$ nội tiếp. $\Rightarrow KBE = KDE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KE)(1)	0,25
	Lại có $ADN = EDK$ (hai góc đối đỉnh) (2) Có tứ giác $ABEC$ nội tiếp (A, B, E, C $\in$ O) $\Rightarrow EBK = ACE$ (cùng bù với ABE)(3) Từ (1),(2), (3) suy ra $ADN = NCE$ $\Rightarrow$ Tứ giác $DECN$ nội tiếp (DHNB tứ giác nội tiếp- tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong ở đỉnh đối diện)	0,25
	Có $DNE = DCE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung DE trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DNCE$) $BCE = BAE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BE trong đường tròn O) $KAE = KQE$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung KE trong đường tròn $AQKE$) Từ đó ta có $DNE = KQE$.	0,25
	Có $DEN = DCN$ (hai góc nội tiếp cùng chăn cung DN trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DECN$)	

	$BCA = BAQ$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn AB trong O) $\Rightarrow BCA = KAQ$. Mà $KAQ = KEQ$(hai góc nội tiếp cùng chắn cung QK trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AKQE$) Từ đó ta có $DEN = KEQ$. Xét ΔDEN và ΔKEQ có $\left.\begin{matrix} DNE = KQE \\ DEN = KEQ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta DEN \backsim \Delta KEQ$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EN}{EQ} = \dfrac{ND}{QK} \Rightarrow EN.QK = ND.EQ$.	0,25
	c. (0,75 điểm)	
	Có $\Delta DEN \backsim \Delta KEQ$ với tỉ số đồng dạng $\dfrac{ED}{EK}$ $\Rightarrow \dfrac{S_{END}}{S_{EQK}} = \left(\dfrac{ED}{EK}\right)^2 = \dfrac{ED^2}{EK^2}$ (4)	0,25
	Có $QAK = AEB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn AB trong O) Có $AEB = DKB$(hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BKED$) Từ đó suy ra $QAK = DKB$. Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $AQ//KD$(DHNB hai đường thẳng song song) Ta lại có $AQ \perp EQ$ nên $EQ \perp KD$ tại H.	0,25
	ΔIDE vuông tại D với đường cao DH $\Rightarrow ED^2 = EH.EI$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) ΔEKF vuông tại K với đường cao KH $\Rightarrow EK^2 = EH.EF$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)	0,25

	Từ đó suy ra $\dfrac{ED^2}{EK^2} = \dfrac{EI}{EF}$ (5). Từ (4) và (5) ta có $\dfrac{S_{END}}{S_{EQK}} = \dfrac{EI}{EF}$.	

Bài 19.Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến MP, MQ của đường tròn (P,Q là các tiếp điểm) và một cát tuyến MAB không đi qua tâm O ($MA < MB$).
Gọi I là trung điểm của AB.
a) Chứng minh năm điểm M,P,O,I,Q cùng thuộc một đường tròn.
b) Gọi E là giao điểm của PQ và AB. Chứng minh tam giác MPE đồng dạng với tam giác MIP, từ đó suy ra $MP^2 = ME.MI$.
c) Qua A kẻ đường thẳng song song với MP cắt PQ tại K. Gọi N là trung điểm của PM Chứng minh ba điểm B,N,K thẳng hàng.

DAPAN

Câu	Đáp án	Điểm
5 (3,0đ)	Hình vẽ cho câu a) 	0,25
	a) 1,0 điểm	
	Xét (O) có AB là dây không đi qua O và I là trung điểm của AB (giả thiết) $\Rightarrow OI \perp AB$ tại I (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) $\Rightarrow MIO = 90^0$	0,25
	Lại có MP, MQ là tiếp tuyến của đường tròn (O) với P,Q là các tiếp điểm $\Rightarrow MP \perp OP, MQ \perp OQ$ (tính chất tiếp tuyến). $\Rightarrow MPO = MQO = 90^0$.	0,25
	Ta có $MPO = MQO = MIO = 90^0$ nên P,Q,I nằm trên đường tròn đường kính MO.	0,25

	Hay năm điểm M, P, O, I, Q cùng thuộc một đường tròn đường kính MO.	0,25
	b) 1,0 điểm	
	Xét đường tròn đường kính MO Ta có $MQP = MIP$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MP). Lại có $MP = MQ$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \Delta MPQ$ cân tại M $\Rightarrow MPQ = MQP$ Từ đó $MPQ = MIP$ hay $MPE = MIP$ Xét ΔMPE và ΔMIP ta có: PMI là góc chung; $MPE = MIP$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \Delta MPE \backsim \Delta MIP$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MP}{MI} = \dfrac{ME}{MP} \Rightarrow MP^2 = ME.MI$.	0,25 0,25 0,25 0,25
	c) 0,75 điểm	
	Vì AK // MP (giả thiết) nên $AKQ = MPQ$ (hai góc đồng vị). Xét đường tròn đường kính MO ta có: $\Rightarrow MIQ = MPQ$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MQ) Từ đó $MIQ = AKQ$ hay $AIQ = AKQ$. Xét tứ giác $AKIQ$ có $AIQ = AKQ$. Mà I và K là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh AQ $\Rightarrow AKIQ$ là tứ giác nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow AQK = AIK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AK) Xét đường tròn (O) có $AQK = ABP$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AP). Mà $AQK = AIK$ (chứng minh trên) $\Rightarrow AIK = ABP$ Mà là hai góc trên ở vị trí đồng vị Do đó KI // BP. Gọi D là giao điểm của AK và PB. Theo tính chất đường trung bình của ΔADB ta suy ra K là trung điểm của AD. Gọi N' là giao điểm của BK PM. Theo hệ quả của định lý Thales ta có: $\dfrac{KD}{N'P} = \dfrac{KA}{N'M}\left(=\dfrac{BK}{BN'}\right)$ Vì $KD = KA$ nên $N'P = N'M$ hay N' là trung điểm của MP . Vậy N' trùng N hay ba điểm B, N, K thẳng hàng.	0,25 0,25 0,25

Theo câu a) ta có tứ giác $BFEC$ nội tiếp, suy ra $EFC = EBC$ Ta cũng chứng minh được tứ giác $BDHC$ nội tiếp, suy ra $HFD = HBD$ Từ trên suy ra $EFH = HFD$ Vậy ta có $AFE = DFB$ mà $AFE = SFB$ (đối đỉnh)	**0,25**
Suy ra $BFD = SFB$ 7 Do tam giác BFC vuông tại F, có FM là đường trung tuyến nên suy ra $FM = MB \Rightarrow MFB = MBF$ 8 Mà $MBF = S + SFB$ 9 (Góc ngoài tam giác) $MFB = BFD + DFM$ 10	**0,25**
Từ 7 , 8 , 9 và 10 suy ra $S = MFD$ Vậy ta có MF là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác SFD.	**0,25**

Bài 20. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn O, với $AB < AC$. Gọi BM và CN là các đường cao của tam giác ABC. Các tiếp tuyến với đường tròn tại B và C cắt nhau tại D, các đường thẳng BC và OD cắt nhau tại I.

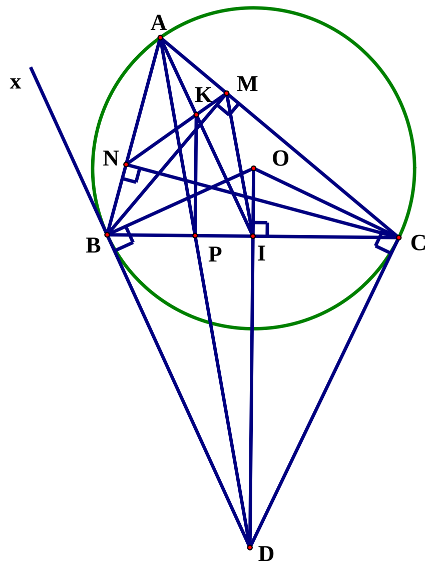
a) Chứng minh: Tứ giác $BCMN$ nội tiếp và $OD \perp BC$.

b) Chứng minh: $MA.DB = IB.AB$ và $\Delta AMI \backsim \Delta ABD$.

c) Gọi K là giao điểm của AI và MN, P là giao điểm của AD và BC.

Chứng minh rằng $KP \perp BC$.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 5 **(3,0 điểm)**	 	**0,25**

	Vẽ hình đúng hết phần a	
	a (1,0 điểm)	
	Có BM, CN là các đường cao của ΔABC. Suy ra $BMC = BNC = 90^0$.	**0,25**
	Xét tứ giác $BCMN$ có $BMC = BNC = 90°$ $\Rightarrow$ Suy ra bốn điểm B, C, M, N cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC. $\Rightarrow BCMN$ là tứ giác nội tiếp.	**0,25**
	Vì DB, DC là tiếp tuyến của đường tròn O với B, C là tiếp điểm. Suy ra $DB = DC \Rightarrow D$ thuộc trung trực của đoạn BC. Ta có $OB = OC \Rightarrow O$ thuộc trung trực của đoạn BC.	**0,25**
	Do đó DO là trung trực của đoạn $BC \Rightarrow DO \perp BC$ tại I.	**0,25**
	b (1,0 điểm)	
	Xét đường tròn (*O*) có $BAC = CBD$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BC). Hay $BAM = DBI$	**0,25**
	Xét ΔMAB và ΔIBD có: $BMA = DIB = 90^0$ ($BM \perp AC$ tại M, $OD \perp BC$ tại I). $BAM = DBI$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \Delta MAB \backsim \Delta IBD$ $g.g$ $\Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AM}{IB} \Rightarrow AB.IB = AM.BD$	**0,25**
	Vì bốn điểm B, C, M, N cùng nằm trên một đường tròn đường kính BC, I là trung điểm BC (OD là đường trung trực của BC). Suy ra $IB = IC = IM$, nên ΔICM cân tại I. Suy ra $ICM = IMC$. Gọi Bx là tia đối của tia BD. Suy ra $ICM = BCA = ABx$. Do đó $IMC = ABx$. Suy ra $180^0 - IMC = 180^0 - ABx \Rightarrow AMI = ABD$ (1)	**0,25**
	Mà $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AM}{IB} \Rightarrow \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{BD}{IM}$ ($IB = IM$) (2). Từ (1) và (2) suy ra $\Delta AMI \backsim \Delta ABD$(c.g.c).	**0,25**
	c (0,75 điểm)	
	Từ $\Delta AMI \backsim \Delta ABD$	**0,25**

	Suy ra $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AI}{AD}$; $MAK=PAB$ (3). Lại có $KMA=PBA$ (cùng bù với CMN).	
	Xét ΔAMK và ΔABP có: $MAK=PAB$; $KMA=PBA$. Suy ra $\Delta AMK \backsim \Delta ABP$ (g.g). Suy ra $\dfrac{AK}{AP}=\dfrac{AM}{AB}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{AK}{AP}=\dfrac{AI}{AD}\Rightarrow\dfrac{AK}{AI}=\dfrac{AP}{AD}$.	**0,25**
	Xét ΔAID có $\dfrac{AK}{AI}=\dfrac{AP}{AD}$ $\Rightarrow KP//\ ID$ (định lí Ta-lét đảo). Mà $ID\perp BC\Rightarrow KP\perp BC$ (đpcm).	**0,25**

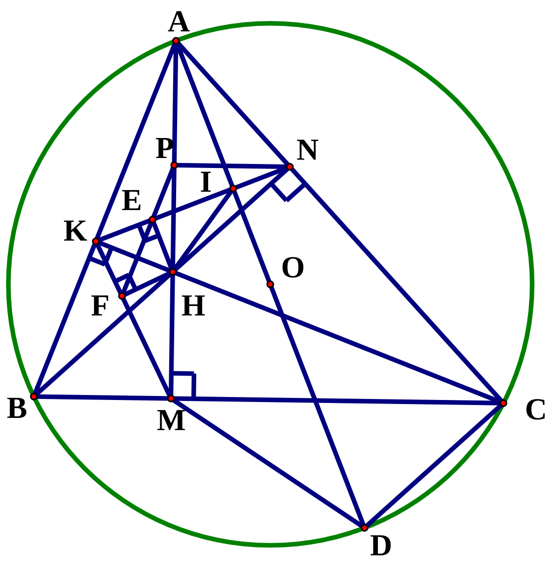
Bài 21. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp $O;R$ $AB<AC$. Ba đường cao AM, BN và CK cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AD của O . Gọi I là giao điểm của OA và NK.

a) Chứng minh tứ giác $BKNC$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AO\perp NK$ và $AHI=ADM$.

c) Gọi E và F lần lượt là hình chiếu của điểm H trên NK và MK, EF cắt AM tại điểm P. Chứng minh $PN // BC$.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 5 **(3,0 điểm)**	 Vẽ hình đúng hết phần a	**0,25**
	a (1,0 điểm)	
	Có $BKC=90^o$ $CK\perp AB$	**0,25**

	và $BNC = 90^o$ $BN \perp AC$	**0,25**
	Do đó $BKC = BNC = 90^o$ $\Rightarrow$bốn điểm B, C, N, K cùng thuộc đường tròn đường kính BC	**0,25**
	Vậy tứ giác $BKNC$ nội tiếp.	**0,25**
	b (1,0 điểm)	
	Ta có $ADC = ABC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) Tứ giác $BKNC$ nội tiếp nên $ANK = ABC$ Suy ra $ANI = ADC$. Do đó $\Delta AIN \backsim \Delta ACD$ (g.g)	**0,25**
	Xét O có $ACD = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AIN = ACD = 90^o \Rightarrow AO \perp NK$	**0,25**
	Ta có: $\Delta ANH \backsim \Delta AMC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AN}{AM} \Leftarrow AH.AM = AN.AC$ Vì $\Delta AIN \backsim \Delta ACD$ (cmt) nên: $\dfrac{AI}{AC} = \dfrac{AN}{AD} \Rightarrow AI.AD = AN.AC$ $\Rightarrow AH.AM = AN.AC = AI.AD \Rightarrow \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AI}{AM}$	**0,25**
	Xét ΔAHI và ΔADM có HAI chung; $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AI}{AM}$ Do đó $\Delta AHI \backsim \Delta ADM$ (c.g.c) $\Rightarrow AHI = ADM$ (hai góc tương ứng)	**0,25**
	c (0,75 điểm)	
	Có $PEN = KEF$ (hai góc đối đỉnh) . Vì tứ giác $KEHF$ nội tiếp nên $KEF = KHF$ $KHF = BKM$ (cùng phụ với HKM) Tứ giác $BMHK$ nội tiếp nên $BHM = BKM$ $BHM = PHN$ (hai góc đối đỉnh)$\Rightarrow PEN = PHN$ Xét tứ giác $PEHN$ ta có: $PEN = PHN$ (chứng minh trên) E, H là hai đỉnh kề nhau của tứ giác $PEHN$ Suy ra tứ giác $PEHN$ nội tiếp	**0,25**
	$\Rightarrow HEN = HPN = 90^o \Rightarrow NP \perp AM$	**0,25**
	Có $NP \perp AM$, $BC \perp AM(gt) \Rightarrow PN // BC$. (đpcm)	**0,25**

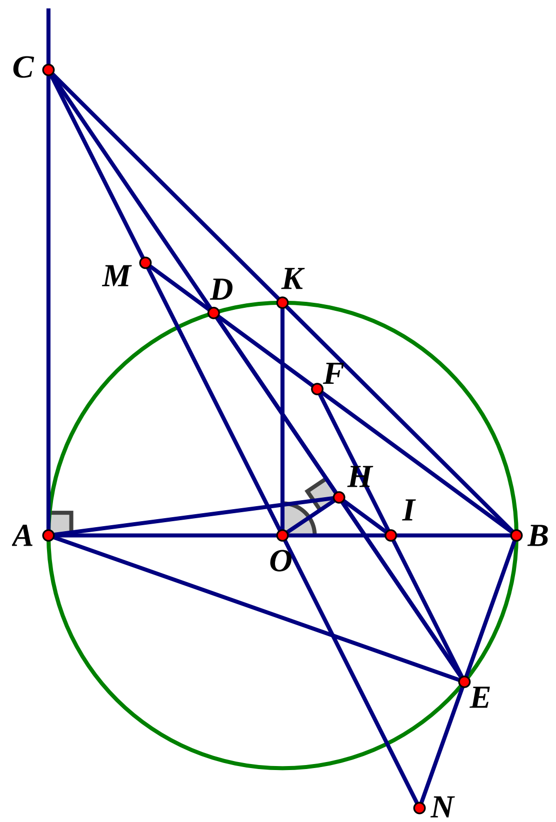
Bài 22. Cho đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Từ A vẽ tiếp tuyến Ax với (O) (A là tiếp điểm). Trên tia Ax lấy điểm C sao cho AC = 2R. Qua C vẽ đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa C và E; đường thẳng này cũng cắt đoạn thẳng OB). Gọi H là trung điểm đoạn thẳng DE.

a) Chứng minh: Tứ giác AOHC nội tiếp.

b) Chứng minh: $CA^2 = CD.CE$.

c) Đường thẳng CO cắt tia BD, tia BE lần lượt tại M và N. Chứng minh O là trung điểm đoạn thẳng MN.

DAPAN

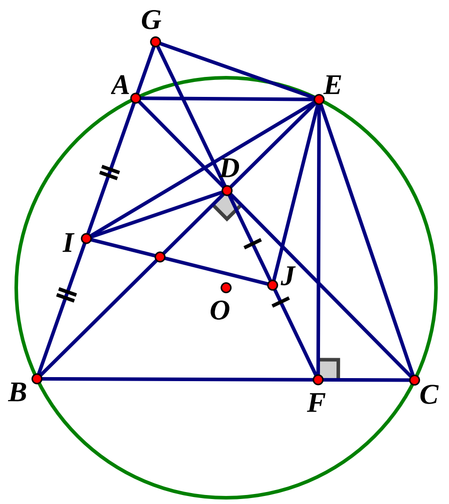
Nội dung	**Điểm**
Vẽ hình đúng cho câu a 	0,25
a. Chứng minh: Tứ giác AOHC nội tiếp.	**1,0đ**
Vì H là trung điểm của dây DE không qua tâm O (gt) $\Rightarrow OH \perp DE$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính dây) $\Rightarrow CHO = 90^0$	0,25
Ta có $CAO = 90^0$ (AC là tiếp tuyến của (O) tại A)	0,25
Xét tứ giác AOHC có: $CHO + CAO = 90^0 + 90^0 = 180^0$ mà hai góc này ở vị trí đối nhau	0,25
Nên tứ giác AOHC nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối diện bằng 180^0)	0,25

b. Chứng minh: $CA^2 = CD.CE$	**1,0đ**
Xét (O) có $CAD = AED$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, góc nội tiếp cùng chắn cung AD)	0,25
Xét ΔCDA và ΔCAE có: ACE chung $CAD = AED$ (cmt) $\Rightarrow \Delta CDA \backsim \Delta CAE$ (g.g)	0,25
Suy ra $\frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CE}$	0,25
$\Rightarrow CA^2 = CD.CE$	0,25
c. Chứng minh: O là trung điểm đoạn thẳng MN	**0,75đ**
Từ E vẽ đường thẳng song song với MN cắt cạnh AB tại I và cắt cạnh BD tại F Vì tứ giác AOHC nội tiếp (cmt) $\Rightarrow HAO = HCO$ (góc nội tiếp cùng chắn HO) Mà $HEI = HCO$ (So le trong do EF//MN) Do đó $HAO = HEI$ hay $IAH = IEH$ $\Rightarrow$ Tứ giác AHIE nội tiếp (2 đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh HI dưới góc bằng nhau) $\Rightarrow$ $IHE = IAE$ (góc nội tiếp cùng chắn HI)	0,25
Lại có $IAE = BDE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BE của (O)) $\Rightarrow IHE = BDE$ Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow$ HI // BD $\Rightarrow$ I là trung điểm EF (do H là trung điểm của DE)	0,25
Xét ΔBMO có IF // OM (EF//MM) $\Rightarrow \frac{IF}{OM} = \frac{BI}{BO}$ (1) (Hệ quả định lí Talet) Xét ΔBNO có IE // ON (EF//MM) $\Rightarrow \frac{IE}{ON} = \frac{BI}{BO}$ (2) (Hệ quả định lí Talet) Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{IF}{OM} = \frac{IE}{ON}$ Mà IE = IF (I là trung điểm EF) $\Rightarrow$ OM = ON. Mà $O \in MN$ $\Rightarrow$ O là trung điểm đoạn thẳng MN.	0,25

Bài 23. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$. Đường cao BD của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E (E khác B). Vẽ EF vuông góc với BC BC (F thuộc BC).

a) Chứng minh: Tứ giác $EDFC$ nội tiếp và $ABE = DFE$.
b) Gọi G là giao điểm của AB và DF. Chứng minh tam giác EAG là tam giác vuông và tam giác ABE đồng dạng với tam giác DFE.
c) Gọi I; J lần lượt là trung điểm của của AB và DF. Chứng minh của IJ vuông góc với JE.

DAPAN

Câu	Đáp án	Điểm
Bài 5 (3,0 điểm)	Hình vẽ (cho câu a) 	0,25
	a) 1,0 điểm	
	Có $EFC = 90^0$ (Do $EF \perp BC$)	0,25
	Ta có BD là đường cao của tam giác ABC nên $BD \perp AC \Rightarrow EDC = 90^0$	0,25
	Tứ giác $EDFC$ có $EFC = EDC = 90^0$ Suy ra tứ giác $EDFC$ nội tiếp $\Rightarrow DCE = DFE$	0,25
	Xét đường tròn O có $ABE = DCE$ Vậy $ABE = DFE$ (1).	0,25
	b) 1,0 điểm	
	Ta có $ABE = DFE$ hay $GBE = GFE$ Suy ra tứ giác $GBFE$ nội tiếp. Do đó $BGE + BFE = 180^0$	0,25
	mà $BFE = 90^0$ nên $BGE = 90^0$ hay tam giác AGE vuông tại G	0,25

	Có tứ giác ABCE nội tiếp (O) => $BAE + BCE = 180^0$ Mà tứ giác DFCE nội tiếp=> $EDF + BCE = 180^0$ Suy ra $BAE = EDF$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $\Delta ABE \backsim \Delta DFE$	0,25
	c) 0,75 điểm	
	Có $\Delta ABE \backsim \Delta DFE \Rightarrow \dfrac{AB}{DF} = \dfrac{AE}{DE} = \dfrac{2AI}{DJ}$ hay $\dfrac{AI}{DJ} = \dfrac{AE}{DE}$ - Xét ΔAIE và ΔDJE có : $IAE = EDJ\left(Do \quad BAE = EDF\right)$; $\dfrac{AI}{DJ} = \dfrac{AE}{DE}$ $\Rightarrow \Delta AIE \backsim \Delta DJE\left(c-g-c\right) \Rightarrow AIE = DJE$.	0,25
	$\Rightarrow$ Tứ giác $GIJE$ nội tiếp $\Rightarrow IGE + EIJ = 180^0$	0,25
	Mà $IGE = 90^0 \Rightarrow IJE = 90^0$ Vậy $IJ \perp JE$.	0,25

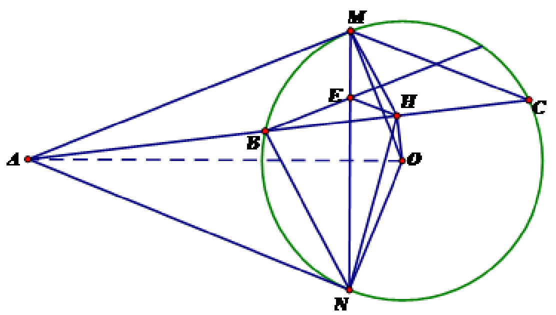
Bài 24. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn *(M, N là các tiếp điểm)*. Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt B,C *(O không thuộc (d); B nằm giữa A và C)* và gọi H là trung điểm của BC.

a) Chứng minh các điểm O, H, M, A, N cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đi qua 5 điểm O, H, M, A, N

b) Chứng minh AM. AN = AB. AC và HA là tia phân giác của MHN.

c) Lấy điểm E trên MN sao cho BE song song với AM. Chứng minh HE // CM.

DAPAN

5 *(3,0 điểm)*	(3.0 điểm)	
		0,25
	a) (1,0 điểm)	
	Xét (O) Ta có : $AMO = 90^0$ *(Vì AM là tiếp tuyến tại M của (O))* $ANO = 90^0$ *(Vì AN là tiếp tuyến tại N của (O))*	0,25
	Lại có BC là dây không đi qua O và H là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow OH \perp BC$ tại H $\Rightarrow AHO = 90^0$ *(quan hệ đường kính và dây cung)*	0,25

	$\Rightarrow$M, H, N thuộc đường tròn đường kính MO *(quỹ tích cung chứa góc)* $\Rightarrow$O, H, M, A, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO.	0,25
	Tâm của đường tròn đi qua 5 điểm O, H, M, A, N là trung điểm AO.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Xét ΔAMB và ΔACM Có MAC là góc chung và $AMB = MCB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung MB) $\Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta ACM$ (g-g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$ $\Rightarrow$AM.AM = AB. AC Mà AM = AN (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Suy ra : AM. AN = AB. AC	0,25
	Ta có các điểm O, H, M, A, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO (chứng minh trên) Mà AM = AN (chứng minh trên) $\Rightarrow$ $AM = AN$ (tính chất)	0,25
	$\Rightarrow MHA = NHA$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) Do đó HA là tia phân giác của MHN	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Theo giả thiết AM//BE nên $MAC = EBH$ (đồng vị) (1) Do 5 điểm A, M, H, O, N cùng thuộc một đường tròn nên: $MAH = MNH$ (hai góc nội tiếp chắn cung MH) (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $EBH = MNH$ hay $ENH = EBH$ $\Rightarrow$ tứ giác EBNH nội tiếp	0,25
	$\Rightarrow$ $EHB = ENB$(hai góc nội tiếp cùng chắn cung EB) Mà $ENB = MCB$ (góc nội tiếp chắn cung MB) $\Rightarrow$ $EHB = MCB$ mà hai góc ở vị trí đồng vị nên EH // CM.	0,25

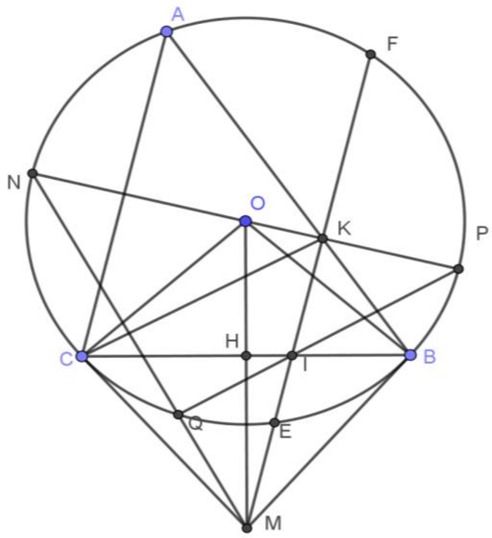
Bài 25. Cho tam giác ABC nhọn $(AB > AC)$, nội tiếp đường tròn $(O;\ R)$. Các tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại M. Gọi H là giao điểm của OM và BC. Từ M kẻ đường thẳng song song với AC, đường thẳng này cắt (O) tại E và F (E thuộc cung nhỏ BC), cắt BC tại I, cắt AB tại K.

a) Chứng minh: $MO \perp BC$ và $ME.MF = MH.MO$.

b) Chứng minh rằng tứ giác $MBKC$ là tứ giác nội tiếp. Từ đó suy ra năm điểm M, B, K, O, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Đường thẳng OK cắt (O) tại N và P (N thuộc cung nhỏ AC). Đường thẳng PI cắt (O) tại Q $(Q \neq P)$. Chứng minh ba điểm M, N, Q thẳng hàng.

DAPAN

5 (3,0 điểm)	 Vẽ đúng hình câu a	**0,25**
	a) +) Vì $MB = MC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $OB = OC$ (cùng bằng bán kính) Suy ra OM là đường trung trực của BC Nên $OM \perp BC$	**0,5**
	+) Xét ΔMEB và ΔMFB có: BME là góc chung $EBM = BFE$ (cùng chắn cung EB) Suy ra: $\Delta MEB \backsim \Delta MBF$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MB} = \dfrac{MB}{MF} \Rightarrow MB^2 = ME.MF$ (2) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OBM đường cao BH có: $MB^2 = MH.MO$ (1)	**0,5** **0,25**

	Từ (1) và (2) ta suy ra $MH.MO = ME.MF$	
	b) $\widehat{MKB} = \widehat{BAC}\left(do\ MF//AC\right); \widehat{MCB} = \widehat{BAC}$ (cùng chắn cung BC) $\Rightarrow \widehat{MKB} = \widehat{MCB}$ cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ chứa đường thẳng MB và cùng nhìn MB Suy ra tứ giác $MBKC$ là tứ giác nội tiếp Lại có, tứ giác $MBOC$ nội tiếp vì: $\widehat{MBO} = \widehat{MCO} = 90^0$ Vậy năm điểm M, B, K, O, C cùng thuộc một đường tròn.	0,75
	c) Xét ΔKIB và ΔCIM có: $\widehat{KIB} = \widehat{CIM}$ (đối đỉnh) $\widehat{BKI} = \widehat{ICM}$ (cùng chắn cung BM) Suy ra: $\Delta KIB \backsim \Delta CIM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IM}{IB} = \dfrac{IC}{IK} \Rightarrow IB.IC = IM.IK (*)$ Xét ΔIBP và ΔICQ có: $\widehat{PIB} = \widehat{CIQ}$ (đối đỉnh) $\widehat{IBP} = \widehat{QCB}$ (cùng chắn cung QB) Suy ra: $\Delta IBP \backsim \Delta IQC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{IP}{IC} = \dfrac{IB}{IQ} \Rightarrow IB.IC = IP.IQ (**)$	0,25
	Từ (*) và (**) ta có: $IM.IK = IP.IQ \Rightarrow \dfrac{IM}{IP} = \dfrac{IQ}{IK}$ Xét ΔIMQ và ΔIPK có $\dfrac{IM}{IP} = \dfrac{IQ}{IK}$ và $\widehat{MIQ} = \widehat{PIK}$ (đối đỉnh) Suy ra $\Delta IMQ \backsim \Delta IPK$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MKP} = \widehat{MQP}$ Mà $\widehat{MKP} = 90^0$ (kề bù với $\widehat{MKO}$) $\Rightarrow \widehat{MQP} = 90^0$	0,25
	Hơn nữa $\widehat{NQP} = 90^\circ$ $\Rightarrow \widehat{NQM} = 180^\circ$ Vậy N, Q, M thẳng hàng.	0,25

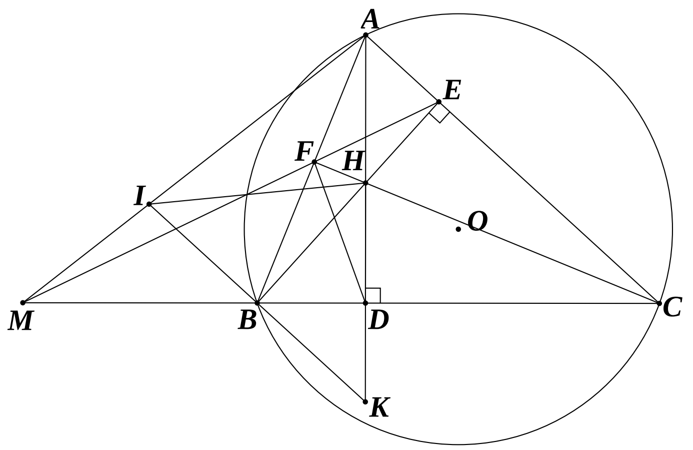
Bài 26. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BDHF$ và $BCEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh FC là tia phân giác của $\widehat{EFD}$.

c) Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại M. Đường thẳng qua B và song song với AC cắt AM tại I và cắt AH tại K. Chứng minh tam giác HIK là tam giác cân.

DAPAN

	(3.0 điểm)	
	 Vẽ hình đúng hết phần a) 0,25 điểm.	
	a) (1,0 điểm)	
	Có $BDH = 90^\circ$ (AD là đường cao của ΔABC); $BFH = 90^\circ$ (CF là đường cao của ΔABC)	**0,25**
	Do đó $BDH + BFH = 180^\circ$. Nên $BDHF$ là tứ giác nội tiếp.	**0,25**
	Có $BFC = 90^\circ$ (CF là đường cao của ΔABC) $BEC = 90^\circ$ (BE là đường cao của ΔABC)	**0,25**
5 (3,0 điểm)	Xét tứ giác $BCEF$ có $BEC = BFC = 90^\circ$ $\Rightarrow$ Suy ra bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn. $\Rightarrow BCEF$ là tứ giác nội tiếp.	**0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	Tứ giác $BDHF$ nội tiếp có $\Rightarrow CFD = EBC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HD).	**0,5**
	Tứ giác $BCEF$ nội tiếp có $\Rightarrow EFC = EBC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC).	**0,25**
	Do đó $CFD = EFC$ hay FC là tia phân giác của EFD.	**0,25**
	c) (0,75 điểm)	
	Xét ΔMAC có BI // AC nên $\dfrac{BI}{AC} = \dfrac{MB}{MC}$ (hệ quả định lý Talet). (1) Xét ΔBDK có BK // AC nên $\dfrac{BK}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$ (hệ quả định lý Talet). (2)	**0,25**
	Do FC là tia phân giác của EFD mà $FC \perp FB$ nên FB là tia phân giác của MFD Xét ΔMFD có FB là tia phân giác của MFD $\Rightarrow \dfrac{DF}{FM} = \dfrac{BD}{MB}$ (tính chất đường phân giác). Xét ΔMFD có FC là tia phân giác của EFD	**0,25**

	$\Rightarrow \dfrac{DF}{FM} = \dfrac{CD}{MC}$ (tính chất đường phân giác). Do đó $\dfrac{CD}{MC} = \dfrac{BD}{MB} \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{BD}{CD}$ (3)	
	Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{BI}{AC} = \dfrac{BK}{AC} \Leftrightarrow BI = BK$ Lại có $IK \,//\, AC$ mà $BE \perp AC$ nên $BE \perp IK$ hay $BH \perp IK$ Xét ΔHIK có $BH \perp IK$ và HB là đường trung tuyến nên ΔHIK cân tại H.	**0,25**

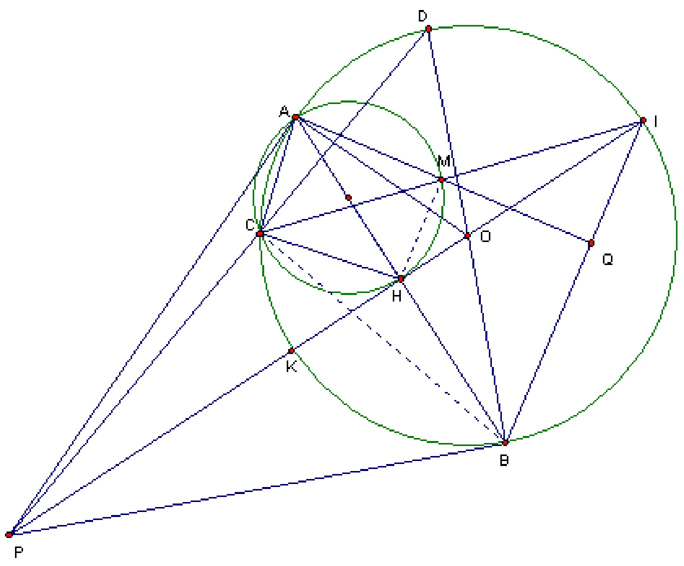
Bài 27. Cho đường tròn (O) và điểm P nằm ngoài đường tròn. Từ P vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A, B là hai tiếp điểm). PO cắt đường tròn (O) tại K, I (K nằm giữa P và O) và cắt AB tại H. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O, C là giao điểm của PD và đường tròn (O).

a) Chứng minh tứ giác BHCP nội tiếp được một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

b) Chứng minh $AC \perp CH$.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH cắt IC tại M, AM cắt IB tại Q. Chứng minh rằng M là trung điểm của AQ.

DAPAN

		0.25 điểm
1a	Ta có: $PCB = PHB = 90^0$ Suy ra tứ giác BHCP nội tiếp	0.5 điểm
	Tâm của đường tròn là trung điểm của đoạn thẳng PB.	0.5 điểm
1b	$HCB = HPB$ (Tứ giác HCPB nội tiếp). (1)	

	$ACD = ABD$. (2)	0.25 điểm
	Mà $HPB = ABD$ (cùng phụ với góc HBP) (3).	0.25 điểm
	Từ (1), (2), (3) suy ra $HCB = ACD$.	0.25 điểm
	Mà $HCB + DCH = 90^0 \Rightarrow ACD + DCH = 90^0$ Vậy $AC \perp CH$	0.25 điểm
1c	Có: $ACM = AHM$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung) $ACM = ABQ$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung)	0.25 điểm
	Suy ra $AHM = ABQ$ $\Rightarrow$HM//BQ.	0.25 điểm
	Xét tam giác ABQ có H là trung điểm của AB, HM//BQ Vậy M là trung điểm của AQ.	0.25 điểm

Bài 28. Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không nằm trên đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

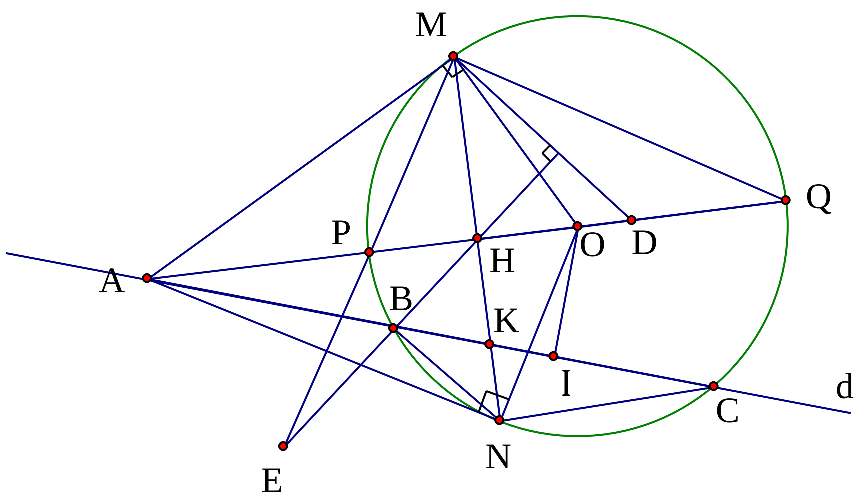
a. Chứng minh 5 điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh AB.AC = AH.AO và điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

c. Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm của ME.

DAPAN

Bài	**Nội dung**	**Điểm**

	1.Vẽ hình đúng để làm câu a 	0.25
	1.a) (1,0 đ) Chứng minh 5 điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn.	
	Ta có $AMO = 90^0$ (do AM là hai tiếp tuyến (O))	0,25
Bài 5: **(3 điểm)**	$ANO = 90^0$ (do AN là hai tiếp tuyến (O))	0,25
	I là trung điểm của BC (dây BC không đi qua O) $\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow OIA = 90^0$	0,25
	Suy ra 3 điểm M, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA Hay 5 điểm A, M, O, I, N cùng thuộc một đường tròn	0,25
	1.b) (1 điểm) Chứng minh AB.AC = AH.AO và điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.	
	Chứng minh $OA \perp MN$ tại H ΔANO vuông tại N đường cao NH nên ta có AH.AO = AN^2 (1) (hệ thức lượng trong tam giác vuông)	0,25
	Chứng minh ΔABN đồng dạng với ΔANC(g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AN}{AC} \Rightarrow AB.AC = AN^2$ (2) Từ (1) và (2) ta có AB.AC = AH.AO (3)	0,25
	Chứng minh $\Delta AHK \backsim \Delta AIO$ (g.g)	

	$\Rightarrow \frac{AH}{AI}=\frac{AK}{AO} \Rightarrow AI.AK=AH.AO(4)$ Từ (3) và (4) $\Rightarrow AI.AK=AB.AC$ $\Rightarrow AK=\frac{AB.AC}{AI}$	0,25
	Ta có A,B,C cố định nên I cố định suy ra AK không đổi, mà A cố định, K là giao điểm của dây BC và dây MN nên K thuộc tia AB cố định suy ra K cố định.	0,25
	1.c) (0,75đ) Chứng minh P là trung điểm của ME.	
	Ta có $PMQ=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Chứng minh $\Delta MHE \backsim \Delta QDM$ (g.g)(Vì có $MEH=DMQ$ (cùng phụ với DMP), $EMH=MQD$ (cùng phụ với MPO)) $\Rightarrow \frac{ME}{MQ}=\frac{MH}{DQ}(5)$	0,25
	Chứng minh $\Delta PMH \backsim \Delta MQH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MP}{MQ}=\frac{MH}{HQ}=\frac{MH}{2DQ}$ (6) (vì HQ = 2 DQ)	0,25
	Từ (5) và (6)$\Rightarrow \frac{MP}{MQ}=\frac{1}{2}\frac{ME}{MQ}$ $\Rightarrow$ ME = 2 MP $\Rightarrow$ P là trung điểm của ME.	0,25

Bài 29. Cho đường tròn (O) cố định ngoại tiếp tam giác nhọn ABC (trong đó cạnh BC không đổi). Các đường cao BD, CE của tam giác cắt nhau ở H và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai theo thứ tự ở N, M.

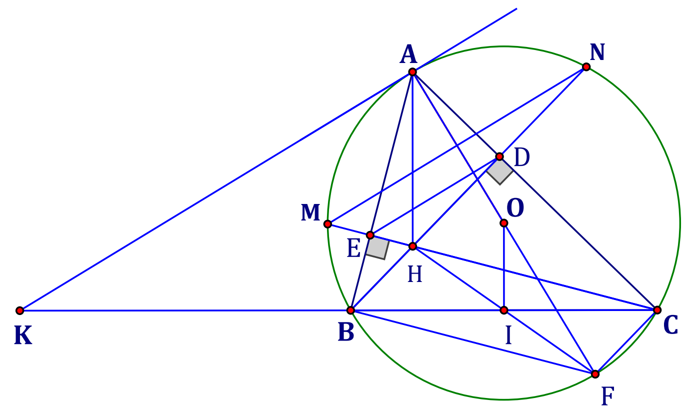
a) Chứng minh tứ giác BCDE nội tiếp và $ACM = ABN$

b) Qua A kẻ đường thẳng song song với MN cắt đường thẳng BC ở K. Chứng minh rằng $MN \perp OA$ và $KA^2 = KB.KC$

c) Chứng minh rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔADE không đổi.

DAPAN

Bài	**Đáp án**	**Điểm**

	Vẽ hình đúng cho câu a  	0,25
	1a.(1,0 điểm)	
	Xét tứ giác BCDE Ta có BD $\perp$ AC (gt) $\Rightarrow$ BDC $= 90^0$ và CE $\perp$ AB (gt) $\Rightarrow$ BEC $= 90^0$	0,25
	$\Rightarrow$ BDC = BEC $= 90^0$	0,25
	$\Rightarrow$ E; D cùng thuộc đường tròn đường kính BC (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow$ Tứ giác BCDE nội tiếp đường tròn đường kính BC (vì có 4 đỉnh cùng thuộc một đường tròn)	0,25
5 **(3,0 điểm)**	Có tứ giác BCDE nội tiếp (chứng minh trên) $\Rightarrow$ DCE = DBE (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ED) hay ACM = ABN	0,25
	1b.(1,0 điểm)	
	Xét (O) có ACM = ABN (chứng minh trên) $\Rightarrow$ AM = AN (hai cung chắn hai góc nội tiếp bằng nhau) $\Rightarrow$ AM = AN (liên hệ cung và dây) Mà OM = ON (bán kính đường tròn (O)) $\Rightarrow$ OA là đường trung trực của đoạn MN $\Rightarrow$ OA $\perp$ MN	0,25
	Có AK // MN (gt) ; mà MN $\perp$ OA (chứng minh trên) $\Rightarrow$ AK $\perp$ OA tại A, trong đó A $\in$ (O). $\Rightarrow$ AK là tiếp tuyến của (O)	0,25
	Xét ΔAKB và ΔCKA có *AKC* là góc chung KAB = ACB $= \frac{1}{2}$ sđAB (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \Delta AKB \sim \Delta CKA$ (g-g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KA}$ (tính chất) $\Rightarrow KA^2 = KB.KC$	0,25
	1c.(0,75 điểm)	

	Gọi F là giao điểm AO với (O) Ta có $ACF = ABF = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow$ FC $\perp$ AC và FB $\perp$ AB Lại có BH $\perp$ AC và CH $\perp$ AB (gt) $\Rightarrow$ BH // CF và CH // BF $\Rightarrow$ tứ giác BHCF là hình bình hành (dấu hiệu hận biết) Gọi I là giao điểm của BC và HF $\Rightarrow$ IH = IF và IB = IC (tính chất đường chéo hình bình hành)	0,25
	Xét ΔAHF có AO = OF; IH = IF $\Rightarrow$ OI là đường trung bình của ΔAHF $\Rightarrow$ AH = 2. OI (1) Xét (O) có I là trung điểm của dây BC không đi qua tâm O $\Rightarrow$ OI $\perp$ BC (tính chất) Mà BC không đổi và (O) cố định $\Rightarrow$ OI không đổi (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AH không đổi (3)	0,25
	Ta có $AEH = ADH = 90^0$ (gt) $\Rightarrow$ E; D cùng thuộc đường tròn đường kính AH (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow$ tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn đường kính AH (vì 4 đỉnh cùng thuộc đường tròn) $\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp ΔADE đi qua H và có AH là đường kính (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp ADE có bán kính không đổi.	0,25

Bài 30. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lấy M. Vẽ cát tuyến MCD không đi qua O (C nằm giữa M và D; CD và A nằm cùng 1 nửa mặt phẳng bờ MO). Gọi I là trung điểm của CD

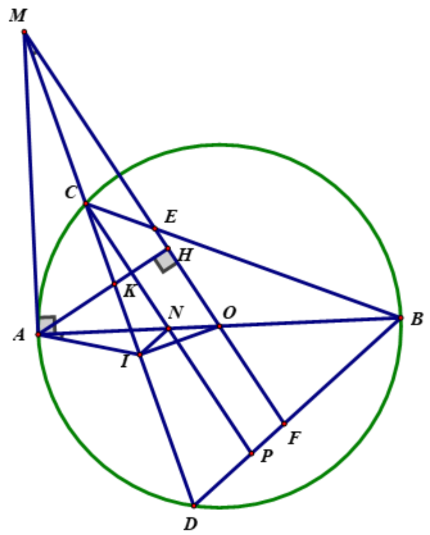
a) Chứng minh tứ giác MAIO nội tiếp đường tròn.

b) Kẻ AH vuông góc với MO tại H, AH cắt CD tại K. Chứng minh MA^2= MK.MI

c) Gọi E và F lần lượt là giao điểm của OM với BC và BD. Chứng minh O là trung điểm của EF.

DAPAN

Bài		**Đáp án**	**Điểm**

Bài 5 **(3 điểm)**		 Vẽ hình đúng cho phần a	0,25
	a	Xét (O) có I là trung điểm của dây CD, CD không đi qua O $\Rightarrow$OI vuông góc với CD tại I $\Rightarrow MIO = 90^0$ (1) Ta có AM là tiếp tuyến tại A của (O) nên AM $\perp$ AO$\Rightarrow$ $MAO = 90^0$ (2) Từ (1) và (2) $\Longrightarrow$ I và A thuộc đường tròn đường kính MO $\Rightarrow$tứ giác MAIO nội tiếp.	0,25 0,25 0,25 0,25
	b	Xét ΔMOI và ΔMKH có: + IMO là góc chung + $MIO = MHK = 90^0$ (Vì AH $\perp$ MO tại H và OI $\perp$ CD tại I $\Rightarrow \Delta MOI \backsim \Delta MKH$ (g-g) $\Rightarrow$MK.MI = MH.MO (3) Xét ΔAMO vuông tại A có AH là đường cao (gt) $\Rightarrow MA^2 = MH.MO$ (Hệ thức trong tam giác vuông) (4) Từ (3) và (4) suy ra $MA^2 = MK.MI$	0,25 0,25 0,25 0,25

	c	Qua C kẻ đường thẳng song song với MO cắt AB, BD lần lượt tại N và P Vì CP // MO (Cách vẽ) $\Rightarrow OMI = NCI$ (2 góc so le trong) Mà tứ giác MAIO nội tiếp (theo phần a) $\Rightarrow OMI = NAI$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OI) $\Rightarrow NCI = NAI$ Xét tứ giác AINC có $NCI = NAI$ (cmt) Mà C và A là 2 đỉnh kề nhau của tứ giác $\Rightarrow$AINC nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow CAN = CIN$ hay $CAB = CIN$ Xét (O) có $CAB = D$ $\Rightarrow CIN = D$ Mà là 2 góc đồng vị $\Rightarrow$IN // BD Xét tam giác CDP có: I là trung điểm của CD (gt) IN// DP (cmt) $\Rightarrow$N là trung điểm của CP $\Rightarrow$CN = NP (5) Xét tam giác BCN có EO// CN (cách vẽ) $\Rightarrow \dfrac{OE}{CN} = \dfrac{BO}{BN}$ (Hệ quả định lí Talet) Xét tam giác BNP có OF//NP (cách vẽ) $\Rightarrow \dfrac{OF}{NP} = \dfrac{BO}{BN}$ (Hệ quả định lí Talet) $\Rightarrow \dfrac{OE}{CN} = \dfrac{OF}{NP} (= \dfrac{BO}{BN})$ (6) Từ (5) và (6) suy ra OE = OF chứng tỏ O là trung điểm của EF.	0,25 0,25 0,25

Bài 31. Cho ΔABC là tam giác nhọn, đường cao AD. Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. Vẽ đường kính AK. Kẻ $BE \perp AK$ và $CF \perp AK$ (E, F thuộc AK).

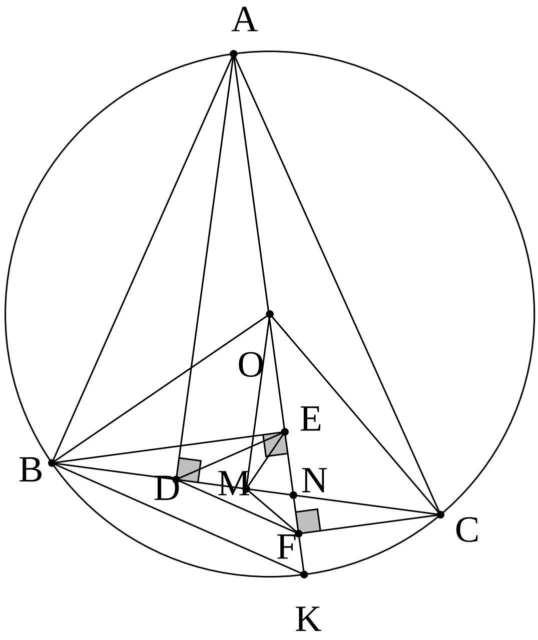
a) Chứng minh bốn điểm A, B, D, E cùng nằm trên một đường tròn. xác định tâm của đường tròn đi qua bốn điểm A, B, D, E.

b) Gọi N là giao điểm của AK và BC. Chứng minh NB.ND = NE.NA và ND.BK=NB.DF

c) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh điểm M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF

DAPAN

Bài	Nội dung đáp án	Điểm

	Vẽ hình đúng câu a  	0,25
5.a	Xét tứ giác $ABDE$ có : $ADB = 90^0$ (vì $AD \perp BC$); $AEB = 90^0$ (vì $BE \perp AK$) $\Rightarrow ADB = AEB\ (= 90^0)$, mà hai đỉnh D, E kề nhau $\Rightarrow$Tứ giác $ABDE$ là tứ giác nội tiếp Do đó bốn điểm A, B, D, E cùng nằm trên 1 đường tròn. Tâm của đường tròn đi qua bốn điểm A, B, D, E là trung điểm của AB	0,25 0,25 0,25 0,25
5.b	Xét tứ giác $ABDE$ nội tiếp có: $BAE = EDN$ (tính chất tứ giác nội tiếp) hay $BAN = EDN$ Xét ΔBAN và ΔEDN có: $BAN = EDN$, N chung $\Rightarrow \Delta BAN \backsim \Delta EDN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{NB}{NE} = \dfrac{AN}{DN}$ $\Rightarrow NB.DN = NE.AN$ Xét đường tròn (O) có: $CBK = CAK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn CK). Vì tứ giác $ACFD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow CDF = CAF$ (hai góc nội tiếp cùng chắn CF) $\Rightarrow CDF = CBK$ Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên: $DF \,//\, BK$ Xét ΔNBK có: $DF \,//\, BK$ và $D \in BN; F \in NK$ Áp dụng hệ quả của định lí Talet ta có: $\dfrac{ND}{NB} = \dfrac{DF}{BK} \Rightarrow ND.BK = NB.DF$ (đpcm)	0,25 0,25 0,25 0,25
5.c	Vì M là trung điểm của BC $\Rightarrow OM \perp BC$ (liên hệ giữa đường kính và dây cung) $\Rightarrow OMC = 90^0 \Rightarrow OMC = OFC\ (= 90^0)$	

	Do đó: Tứ giác $OMFC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow MFN = OCN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn OM) Xét ΔMFN và ΔOCN có: $MFN = OCN$ (cmt); $MFN = ONC$ (hai góc đối đỉnh) Do đó: $\Delta MFN \backsim \Delta OCN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MF}{OC} = \dfrac{MN}{ON} = \dfrac{FN}{CN}$ Lại có: $\Delta DNF \backsim \Delta ANC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{FN}{CN} = \dfrac{DN}{AN} = \dfrac{DF}{AC}$ Suy ra: $\dfrac{MF}{OC} = \dfrac{MN}{ON} = \dfrac{DN}{AN} = \dfrac{DF}{AC}\left(= \dfrac{FN}{CN}\right)$ Theo tính chất tỉ lệ thức suy ra: $\dfrac{MF}{OC} = \dfrac{DN - MN}{AN - ON} = \dfrac{DM}{AO}$ Mà $OA = OC \Rightarrow DM = MF$ Xét tứ giác $MEOB$ có: $OEB = OMB = 90^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác $MEOB$ nội tiếp $\Rightarrow OBC = MEN$ Mà $OBC = OCB$ (vì ΔOBC cân tại O) $\Rightarrow OCB = MEN$ $OCB = MFN$ (tứ giác $OMFC$ nội tiếp) $\Rightarrow MEN = MFN$ $\Rightarrow \Delta MEF$ cân tại $M \Rightarrow ME = MF$. Lại có: $MD = MF$ (cmt) $\Rightarrow MD = ME = MF$ $\Rightarrow M$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF	0,25 0,25 0,25

Bài 32. Cho đường tròn (O; R), hai điểm C và D thuộc đường tròn, B là điểm chính giữa của cung nhỏ CD. Kẻ đường kính BA. Trên tia đối của tia AB lấy điểm S. Nối SC cắt đường tròn (O) tại M; MD cắt AB tại E; MB cắt AC tại F. Chứng minh:

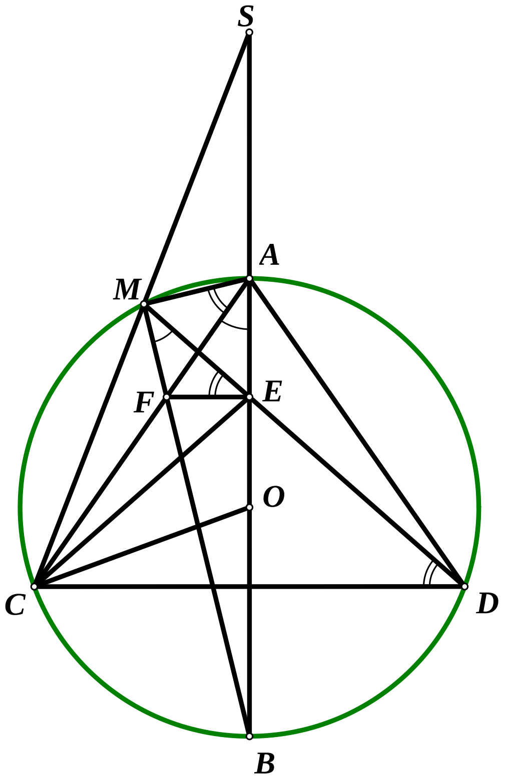
a) Tứ giác AMFE nội tiếp;

b) FE song song với CD;

c) OE. OS= R^2.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
	Vẽ hình đúng	0,25

		
a **(1,0đ)**	a) Chứng minh tứ giác AMFE nội tiếp Vì B là điểm chính giữa cung CD nên $sđBC = sđBD$.	0,25
	$\Rightarrow CAB = DMB$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau) Hay $FAE = EMF$.	0,25
	Tứ giác MAEF có hai đỉnh liền kề M và A nhìn cạnh FE dưới hai góc bằng nhau	0,25
	$\Rightarrow$ M, A, E,F đều thuộc một cung tròn Do đó MAEF là tứ giác nội tiếp(đpcm)	0,25
b **(1,0đ)**	b) Chứng minh: FE song song CD Vì tứ giác MAEF nội tiếp nên $MAF = MEF$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MF)	0,5
	Mặt khác $MAF = MDC$ (hai góc nội tiếp chắn cùng một cung MC của (O)).	0,25
	Do đó: $MEF = MDC$. Mà hai góc ở vị trí đồng vị	0, 25

	Nên FE // CD.	
c **(0,75đ)**	c) Chứng minh: OE. OS= R^2 Nối CE, CO. Chứng minh được AB là đường trung trực của CD, mà E nằm trên AB nên EC = ED. Từ đó chứng minh được: $CEO = DEO = \frac{1}{2}$ sđMA + sđBD $= \frac{1}{2}$ sđMA + sđBC	0,25
	Mặt khác: $SCO = SCA + ACO = SCA + CAO = \frac{1}{2}$ sđMA + sđBC . Vậy $SCO = CEO$.	0,25
	Xét ΔSCO và ΔCEO có O chung ; $SCO = CEO$ (chứng minh trên) Suy ra $\Delta SCO \backsim \Delta CEO$ (g.g). Do đó: $\frac{OS}{OC} = \frac{OC}{OE}$ hay OE.OS = $OC^2 = R^2$.	0,25

Bài 33. Cho đường tròn (O;R), hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau. E là điểm thuộc cung nhỏ BC (E không trùng với B và C), tiếp tuyến của đường tròn (O; R) tại E cắt đường thẳng AB tại I. Gọi F là giao điểm của DE và AB, K là điểm thuộc đường thẳng IE sao cho KF vuông góc với AB.

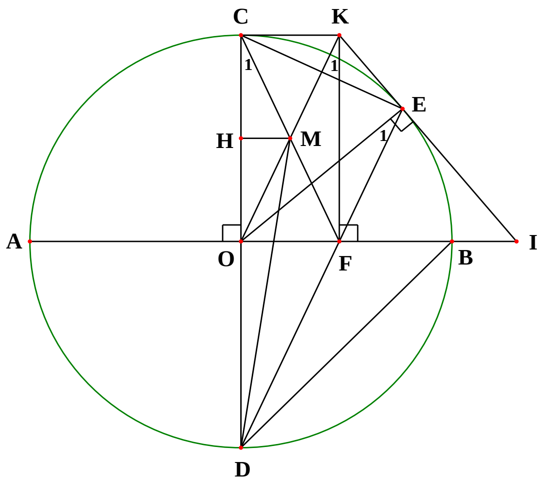
a. Chứng minh tứ giác OKEF nội tiếp.

b. Chứng minh $OKF = ODF$, và $DE.DF = 2R^2$.

c. Gọi M là giao điểm của OK với CF, tính tan MDC khi $EIB = 45^o$.

DAPAN

Bài 5		Vẽ hình đúng cho câu a	0.25

(3,0đ)			
	a	Tứ giác OKEF có: $OEK = 90^{o}$ (EK là tiếp tuyến của (O)) $OFK = 90^{o}$ ($KF \perp AB$)	0.25
		$\Rightarrow OEK = OEK = 90^{o}$	0,25
		$\Rightarrow$ OKEF là tứ giác nội tiếp.	0,25
	b	OKEF là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow K_1 = E_1$	0.25
		ΔODE cân tại O ($OD = OE = R$) $\Rightarrow ODF = E_1$ Do đó $K_1 = ODF$ (đpcm).	0,25
		Ta có $DEC = 90^{o}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) ΔDOF và ΔDEC có: ODF chung ; $DOF = DEC = 90^{o}$ $\Rightarrow \Delta DOF \backsim \Delta DEC$ (g-g)	0.25
		$\Rightarrow \dfrac{DO}{DE} = \dfrac{DF}{DC}$ $\Rightarrow DE.DF = DO.DC = R.2R = 2R^2$	0,25
	c	Ta có: $EIB = 45^{o} \Rightarrow EOB = 45^{o}$ $\Rightarrow$ E là điểm chính giữa của cung BC $\Rightarrow$ DF là tia phân giác của ODB	0,25

		Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác OBD, ta có: $\dfrac{OF}{FB}=\dfrac{OD}{BD}$ $\Rightarrow \dfrac{OF}{OD}=\dfrac{FB}{BD}=\dfrac{OF+FB}{OD+BD}=\dfrac{OB}{OD+BD}$ $\Rightarrow \dfrac{OF}{R}=\dfrac{R}{R+R\sqrt{2}}=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$ (Vì $\Delta\, OBD$ vuông cân tại O nên $BD=OB\sqrt{2}=R\sqrt{2}$) $\Rightarrow OF=R\left(\sqrt{2}-1\right)$	0.25
		Dễ thấy $C_1=K_1\ (=ODF)$ $\Rightarrow$ OCKF là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow CKF+COF=180^o \Rightarrow CKF=90^o$ $\Rightarrow$ OCKF là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông) $\Rightarrow$ M là trung điểm của CF Vẽ $MH\perp OC \Rightarrow$ H là trung điểm của OC	0,25
		$\Rightarrow$ HM là đường trung bình của $\Delta\, COF$ $\Rightarrow HM=\dfrac{1}{2}OF=\dfrac{R\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$ Lại có HD = OH + OD = $\dfrac{3}{2}R$ $\Rightarrow \tan MDC=\tan MDH=\dfrac{HM}{HD}=\dfrac{R\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}:\dfrac{3}{2}R=\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$	0,25

Bài 34. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD không đi qua O (C nằm giữa M và D) với đường tròn (O). Gọi E là trung điểm của CD. Đoạn thẳng MO cắt AB và (O) theo thứ tự tại H và I. Chứng minh rằng:

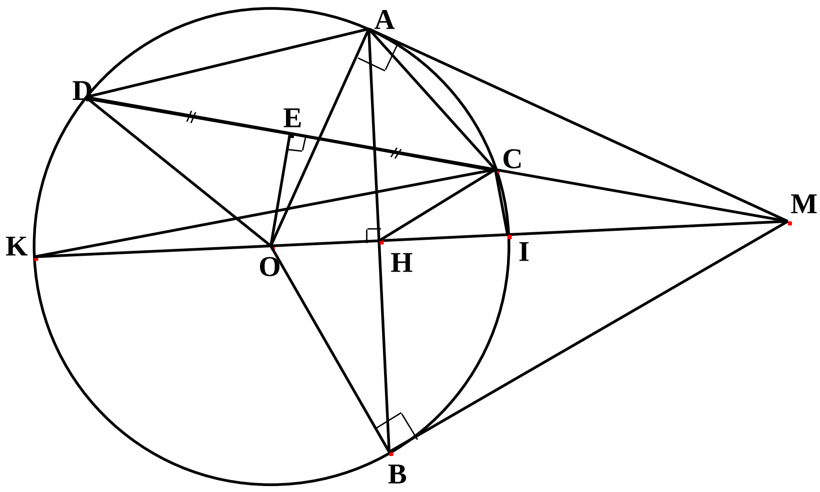
a) 5 điểm M; A; E; O; B cùng nằm trên một đường tròn.

b) OH. OM + MC. MD = MO^2.

c) CI là tia phân giác của góc MCH.

DAPAN

Bài	**Nội dung**	**Điểm**
5 (3,0đ)	Vẽ hình chính xác cho phần a	0,25

		
	1a. (1,0 điểm)	
	Ta có MA, MB là tiếp tuyến của (O) (gt) $\Rightarrow MAO = MBO = 90^0$ (tính chất tiếp tuyến)	0.25
	Lại có E là trung điểm của CD, mà CD không đi qua tâm O $\Rightarrow$ OE $\perp$ CD tại E $\Rightarrow MEO = 90^0$	0,25 0,25
	$\Rightarrow$ 5 điểm M; A; E; O; B cùng nằm trên một đường tròn	0.25
	1b. (1,0 điểm)	
	ΔMAC và ΔMDA có: M chung $MAC = MDA$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn AC) $\Rightarrow \Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.\,MD$	0,25 0,25
	Ta có MA = MB (t/c tiếp tuyến); OA = OB = R $\Rightarrow$ OM là trung trực của AB $\Rightarrow$ OM $\perp$ AB ΔMAO vuông tại A có AH đường cao $\Rightarrow OH.\,OM = AO^2$	0,25
	$\Rightarrow OH.\,OM + MC.\,MD = AO^2 + MA^2$ (1) ΔMAO vuông tại A, theo Pytago ta có $AO^2 + MA^2 = MO^2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $OH.\,OM + MC.\,MD = MO^2$	0,25
	1c. (0,75 điểm)	
	- Xét ΔMAO vuông tại A có AH đường cao, ta có : $MH.\,MO = MA^2$ Suy ra $MC.MD = MH.MO = MA^2 \Rightarrow \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}$ ΔMCH và ΔMOD có: $\frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}$, $\hat{M}$ chung Do đó ΔMCH ΔMOD(c.g.c) $\Rightarrow MCH = MOD$	0,25

	Gọi K là giao điểm của MO với (O), $K \neq I$ - Xét tứ giác CDOH có $MCH = MOD$ (chứng minh trên), $\Rightarrow$ CDOH nội tiếp $\Rightarrow DCH = DOK$ (cùng bù với HOD) (1); Mặt khác $DCK = \frac{1}{2}DOK = \frac{1}{2}sđ\,DK$ (2) - Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ $DCK = \frac{1}{2}DCH$ $\Rightarrow$CK là tia phân giác của góc DCH (3)	0,25
	Mà ICK $= 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) (4) - Từ (3) và (4) suy ra CI là tia phân giác của góc MCH.	0,25

Bài 35. Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

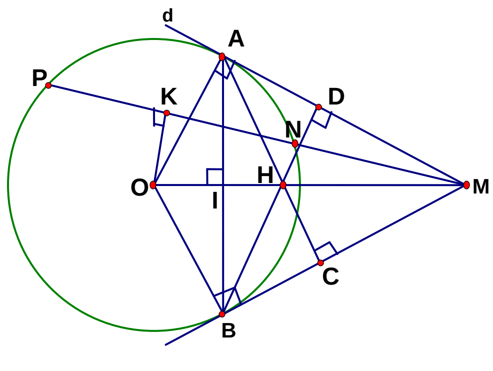
a) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .

b) Chứng minh $OI.OM = R^2$; $OI.\,IM = IA^2$.

c) Chứng minh OAHB là hình thoi.

d) Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

ĐAPAN

Bài	**Nội dung**	**Điểm**
Bài 5 **(3,0 điểm)**	Vẽ hình cho câu a 	0,25
	a) Vì K là trung điểm NP nên $OK \perp NP$ (quan hệ đường kính và dây cung) => $OKM = 90^0$.	0,25

	Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{OAM} = 90^0$; $\widehat{OBM} = 90^0$. như vậy K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM. Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.	0,25 0,25
	b) Ta có MA = MB (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R => OM là trung trực của AB => OM ⊥ AB tại I . Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{OAM} = 90^0$ nên tam giác OAM vuông tại A có AI là đường cao. Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => OI.OM = OA^2 hay OI.OM = R^2; và OI. IM = IA^2.	0,25 0,25 0,25 0,25
	c) Ta có OB ⊥ MB (tính chất tiếp tuyến) ; AC ⊥ MB (gt) => OB // AC hay OB // AH. OA ⊥ MA (tính chất tiếp tuyến) ; BD ⊥ MA (gt) => OA // BD hay OA // BH. => Tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có OA = OB (=R) => OAHB là hình thoi.	0,25 0,25
	d) Theo trên OAHB là hình thoi. => AH = AO = R. Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính AH = R	0,25 0,25

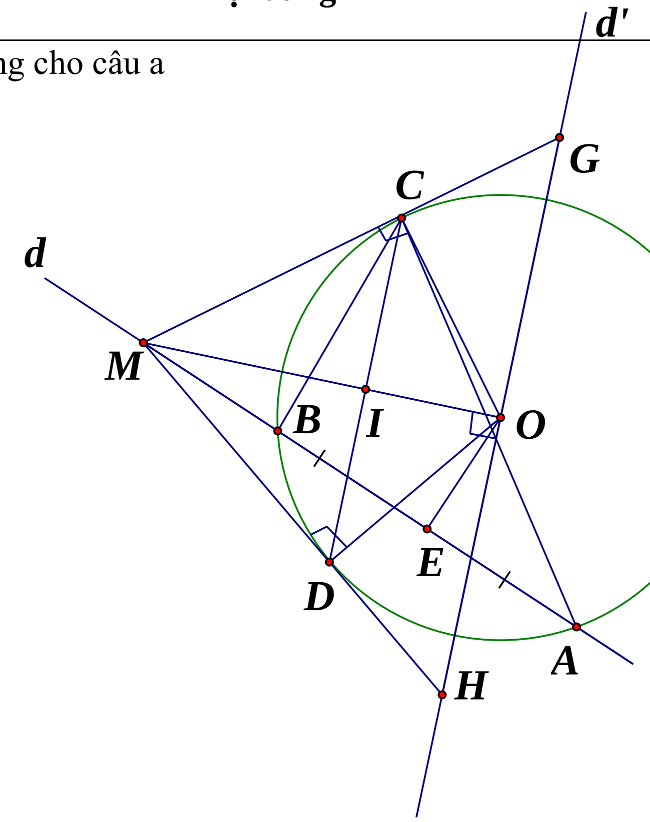
Bài 36. Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng d không đi qua O cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Lấy một điểm M trên tia đối của tia BA (M ≠ B), vẽ hai tiếp tuyến MC và MD với đường tròn (O), (C, D là các tiếp điểm). Gọi E là trung điểm của AB và I là giao điểm của CD và OM.

a. Chứng minh 5 điểm O, E, C, D, M cùng thuộc một đường tròn.

b. Chứng minh rằng: MC^2= MO.MI và MI . MO = MB . MA

c. Đường thẳng d’ đi qua O và vuông góc với OM cắt các tia MC, MD theo thứ tự tại G và H. Tìm vị trí của điểm M trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác MGH bé nhất.

ĐAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
5	1. - Vẽ hình đúng cho câu a 	0.25
	a. Chứng minh O, E, D, M, C cùng thuộc một đường tròn (1đ) Có $MCO = 90^0$ (MC là tiếp tuyến) => C thuộc đường tròn đường kính MO (1) (định lí) CM tương tự: D thuộc đường tròn đường kính MO. (2) Mặt khác: E là trung điểm AB (gt); AB là dây cung của (O) Suy ra: OE ⊥ AB (đ/l về đường kính và dây cung) Nên $OEM = 90^0$ => E thuộc đường tròn đường kính OM (3) Từ (1); (2) và (3) suy ra: O, E, D, M, C cùng thuộc một đường tròn đường kính OM.	0.25 0.25 0.25 0.25
1đ	**b. Chứng minh: MC^2=MO.MI và MO . MI = MB . MA**	

	Có MC; MD là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M nên MO là đường trung trực của OM (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) Suy ra: MO $\perp$ CD ΔMCO có $MCO = 90^0$; MO $\perp$ CD ⇨ $MC^2 = MO \cdot MI$ (1) (HTL trong tam giác vuông) Xét ΔMCA và ΔMBC: CMA chung $MCB = MAC$ (góc giữa tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BC) Suy ra: ΔMCA ∽ ΔMBC (g.g) => $\frac{MA}{MC} = \frac{MC}{MB}$ => $MC^2 = MA \cdot MB$ (2) Từ (1); (2) => MO . MI = MA . MB	0,25 0.25 0.25 0.25
	c. Tìm vị trí của điểm M trên đường thẳng d sao cho diện tích tam giác MGH bé nhất. (0,75) Ta có: ΔMOG = ΔMOH (c.g.c) => $S_{MGH} = 2S_{MOH} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot OD \cdot MH = OD \cdot MH = R \cdot MH$ Vì R không đổi nên S_{MGH} nhỏ nhất ⇔ MH nhỏ nhất Áp dụng bất đẳng thức Cosi cho hai số không âm: MH = MD + MH $\geq 2\sqrt{MD.DH} = 2\sqrt{OD^2} = 2R$ Dấu " = " xảy ra ⇔ MD = DH ⇔ ΔMOH vuông cân tại O ⇔ $OMD = 45^0$ ⇔ $OM = \frac{OD}{\sin OMD} = \frac{R}{\sin 45^0} = \sqrt{2}.R$ Nên giá trị nhỏ nhất của MH = 2R ⇔ OM = $\sqrt{2}.R$ Vậy S_{MGH} nhỏ nhất bằng R . $\sqrt{2}.R$ = $\sqrt{2}.R^2$ khi M cách O một khoảng bằng $\sqrt{2}$ R	0.25 0.25 0.25

Bài 37. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ cát tuyến MCD không đi qua tâm O và hai tiếp tuyến MA và MB đến đường tròn (O), ở đây A, B là các tiếp điểm và C nằm giữa M, D. Gọi I là trung điểm của CD.

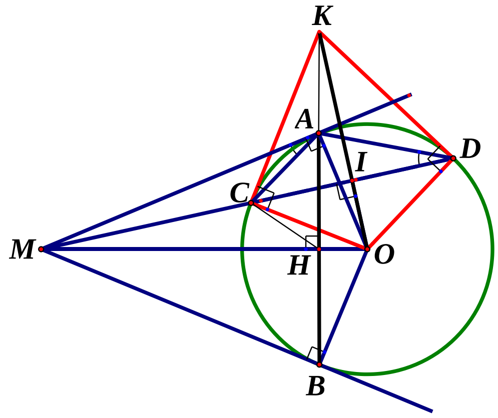
a. Chứng minh rằng: 5 điểm M, A, O, I, B cùng nằm trên một đường tròn và

$\Delta MAC \backsim \Delta MDA$

b. Gọi H là giao điểm của AB và MO. Chứng minh rằng: Tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn. Suy ra AB là phân giác của CHD.

c. Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O).Chứng minh rằng: ba điểm A, B, K thẳng hàng.

DAPAN

BÀI	NỘI DUNG	ĐIỂM
Bài 5 **(3,0đ)**	Vẽ hình đúng cho câu a  	**0,25**
	a. Chứng minh rằng: 5 điểm M, A, O, I, B cùng nằm trên một đường tròn và $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ + (O) có: I là trung điểm của dây CD $\Rightarrow OI \perp CD \Rightarrow OIM = 90^0$ nhìn đoạn OM (1) $MA \perp OA$ (T/c tiếp tuyến) $\Rightarrow OAM = 90^0$ nhìn đoạn OM(2) $MB \perp OB$ (T/c tiếp tuyến) $\Rightarrow OBM = 90^0$ nhìn đoạn OM (3) Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow$ 5 điểm M, A, I, O, B $\in$ đường tròn đường kính OM. + ΔMAC và ΔMDA có: $\left.\begin{array}{l} MDA: chung \\ MAC = MDA \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g)	 **0,25** **0,25** **0,25** **0,25**

	b) <u>CMR: Tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn. Suy ra AB là phân giác của CHD</u>: $\left.\begin{array}{l}+\ \Delta OAM \text{ vuông tại A } \Rightarrow MA^2 = MO.\ MH \\ \text{Mà: } \Delta MAC \backsim \Delta MDA \text{ (chứng minh a)=>} \quad MA^2 = MC.MD\end{array}\right\}$ $\Rightarrow MO.\ MH = MC.\ MD \Rightarrow \dfrac{MH}{MD} = \dfrac{MC}{MO}$ + và ΔMDO có: $\left.\begin{array}{l} DOM: chung \\ \dfrac{MH}{MD} = \dfrac{MC}{MO}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MHC \backsim \Delta MOD$ (c.g.c) $\left.\begin{array}{l}\Rightarrow MHC = MDO \Rightarrow MHC = CDO \\ MHC = CHO = 180^0\end{array}\right\} \Rightarrow CDO + CHO = 180^0$ Suy ra: Tứ giác CHOD nội tiếp được đường tròn (đpcm) *** <u>CMR: AB là phân giác của CHD</u>:** + ΔCOD có OC = OD = R $\Rightarrow \Delta COD$ cân tại O $\left.\begin{array}{l}\Rightarrow CDO = DCO \Rightarrow MDO = DCO \\ OHD = DCO\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l}\Rightarrow MDO = OHD \\ MDO = MHC\,(cmt)\end{array}\right\} \Rightarrow OHD = MHC \quad (1)$ + Mặc khác: $\left.\begin{array}{l}AHC = 90^0 - MHC \\ AHD = 90^0 - OHD\end{array}\right\} \quad (2)$ Từ (1) và (2) $\Rightarrow \left.\begin{array}{l}AHC = AHD \\ AHC + AHD = CHD\end{array}\right\}$ Suy ra: HA là tia phân giác của $CHD \Rightarrow$ AB là tia phân giác của góc CHD	 0,25 0,25 0,25 0,25
	c)<u>Gọi K là giao điểm của các tiếp tuyến tại C và D của đường tròn (O). CMR: Ba điểm A, B, K thẳng hàng</u>: + Gọi K là giao điểm của 2 tiếp tuyến tại C và D của (O) + $CK \perp OC$ (T/c tiếp tuyến) $\Rightarrow OCK = 90^0$ nhìn đoạn OK (1) + $DK \perp OD$ (T/c tiếp tuyến) $\Rightarrow ODK = 90^0$ nhìn đoạn OK (2) Từ (1), (2) $\Rightarrow$ Tứ giác OCK nội tiếp đường tròn đường kính OK	

	$\Rightarrow \widehat{OKC} = \widehat{ODC}$ (cùng chắn cungOC) $\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \widehat{OKC} = \widehat{MDO} \\ \widehat{MHC} = \widehat{MDO}(cmt)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\widehat{OKC} = \widehat{MHC} \\ \widehat{MHC} + \widehat{OHC} = 180^0\end{array}\right\}$ $\Rightarrow \widehat{OKC} + \widehat{OHC} = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác OKCH nội tiếp đường tròn đường kính OK $\Rightarrow \widehat{OHK} = \widehat{OCK} = 90^0$(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\left.\begin{array}{l}\Rightarrow HK \perp MO \\ AB \perp MO(cmt)\end{array}\right\} \Rightarrow HK \equiv AB \Rightarrow$ 3 điểm A, B, K thẳng hàng (đpcm)	**0,25** **0,25** **0,25**

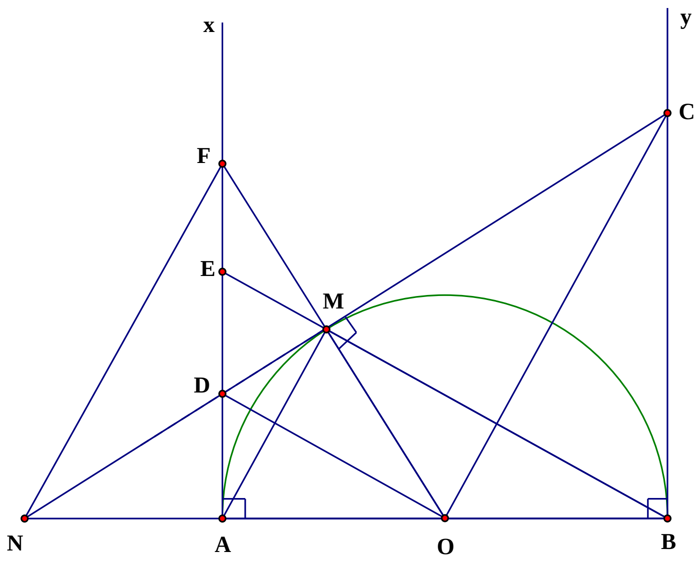
Bài 38. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Trên nửa đường tròn (O) lấy điểm M sao cho MA < MB. Tiếp tuyến với nửa đường tròn (O) tại M cắt cắt tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở D và C.

a) Chứng minh rằng tứ giác ADMO nội tiếp một đường tròn và AD.BC = R^2.

b) Đường thẳng DC cắt đường thẳng AB tại N; tia OM cắt tia Ax ở F; tia BM cắt tia Ax ở E. Chứng minh: tứ giác AMFN là hình thang cân.

c) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn (O) để DE = EF.

DAPAN

Câu	Nội dung	Điểm
	 Hình vẽ cho câu a)	**0,25**

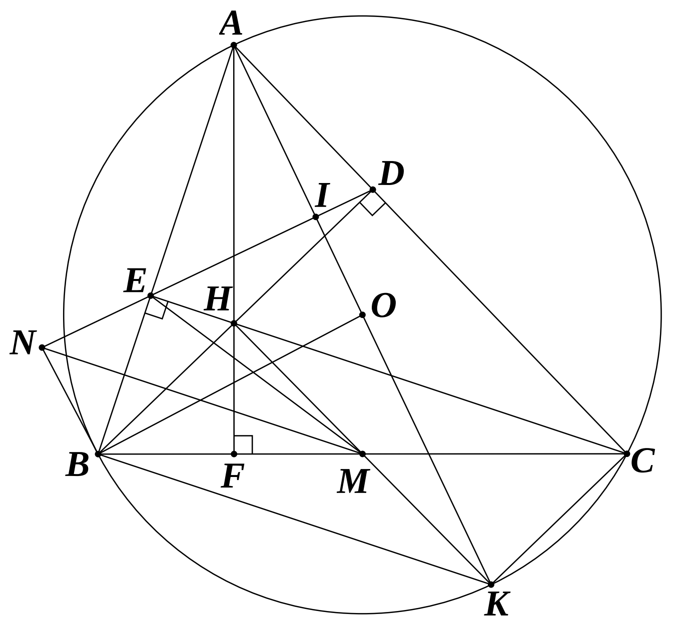
	a. (1,0 điểm).	
	- Tứ giác ADMO có DAO + DMO = 180^0, mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác ADMO nội tiếp đường tròn.	**0,50**
	- Dùng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau để chứng minh DOC = 90^0. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác DOC vuông tại O có OM là đường cao, ta có : DM.MC = OM^2. Mà DM = AD, MC = BC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và OM = R Do đó AD.BC = R^2	**0,50**
	b. (1,0 điểm)	
	Do AD = DM và OA = OM $\Rightarrow$ OD là đường trung trực của đoạn thẳng AM $\Rightarrow$ DO $\perp$ AM .	**0,25**
	Vì FA $\perp$ ON ; NM $\perp$ OF (tính chất tiếp tuyến) và FA cắt MN tại D. $\Rightarrow$ D là trực tâm của ΔFON $\Rightarrow$ DO $\perp$ FN. Vậy AM//FN. Vì ΔOAM cân ở O $\Rightarrow$ OAM = OMA .	**0,25**
	Do AM//FN $\Rightarrow$ FNO = MAO và AMO = NFO (hai góc đồng vị)	**0,25**
	$\Rightarrow$ FNO = NFO . Vậy tứ giác ANFM là hình thang cân.	**0,25**
	c. (0,75 điểm).	
	Do DE = EF nên EM là trung tuyến của tam giác vuông FDM. $\Rightarrow$ ED = EM (1)	**0,25**
	Vì DMA = DAM và DMA + EMD = 90^0 ; DAM + EMD = 90^0 $\Rightarrow$ EDM = DEM hay ΔEDM cân ở D hay DM = DE. (2)	**0,25**
	Từ (1) và (2) suy ra ΔEDM là tam giác đều. $\Rightarrow$ ODM = 60^0 $\Rightarrow$ AOM = 60^0. Vậy M nằm ở vị trí trên nửa đường tròn sao cho AOM = 60^0.	**0,25**

Bài 39: Cho tam giác ABC $AB < AC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn O . Các đường cao BD, CE, AF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp và ΔADE đồng dạng với $\Delta ABC.$

b) Vẽ đường kính AK của đường tròn O . Gọi giao điểm của AK và DE là I . Chứng minh $AK \perp DE$ và $DE.CF = EI.BC.$

c) Tiếp tuyến tại B của đường tròn O cắt DE tại N và giao điểm của HK với BC là M . Chứng minh CE song song với $MN.$

Bài	Đáp án	Điểm
5 **(3,0 điểm)**		
	 Vẽ hình đúng hết phần a) 0,25 điểm.	
	a) (1,0 điểm)	
	Có $BEC = 90^\circ$(CE là đường cao của ΔABC); và $BDC = 90^\circ$ (BD là đường cao của ΔABC).	**0,25**
	Vậy $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.	**0,25**
	Xét ΔADE và ΔABC có BAC chung; $AED = ACB$ ($BCDE$ là tứ giác nội tiếp)	**0,25**
	Do đó $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (g.g).	**0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	Do $AED = ACB$ ($BCDE$ là tứ giác nội tiếp) mà $AKB = ACB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB của O). nên $AED = AKB$ (1)	**0,25**

	Lại có $\widehat{ABK}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)). nên $\widehat{AKB}+\widehat{BAK}=90^\circ$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AED}+\widehat{BAK}=90^\circ \Rightarrow \widehat{AIE}=90^\circ \Rightarrow AK\perp DE.$	**0,25**
	Xét ΔAIE và ΔAFC có $\widehat{AIE}=\widehat{AFC}=90^\circ; \widehat{AED}=\widehat{ACB}$ ($BCDE$ là tứ giác nội tiếp) Do đó $\Delta AIE\backsim\Delta AFC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EI}{FC}=\frac{AE}{AC}$.(3)	**0,25**
	Do $\Delta ADE\backsim\Delta ABC\Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $\frac{DE}{BC}=\frac{EI}{FC}\Leftrightarrow DE.FC=EI.BC.$	**0,25**
	c) (0,75 điểm)	
	Có $\widehat{ABK}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow KB\perp AB$ mà $CE\perp AB$ (CE là đường cao của tam giác ABC) nên $BK//CE$ hay $BK//CH$	**0,25**
	Tương tự: $CK//BH$ Do đó $BHCK$ là hình bình hành suy ra M là trung điểm của BC. Lại có B,E,D,C thuộc đường tròn đường kính BC nên $MB=ME$ (5)	**0,25**
	Xét (O) có $\widehat{NBE}=\widehat{ACB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung). mà $\widehat{ACB}=\widehat{NEB}$ ($BCDE$ là tứ giác nội tiếp) suy ra $\widehat{NBE}=\widehat{NEB}\Rightarrow\Delta BNE$ cân tại $N\Rightarrow NB=NE$ (6) Từ (5) và (6) suy ra MN là đường trung trực của BE hay $MN\perp BE$. Vậy $MN//CE$.	**0,25**

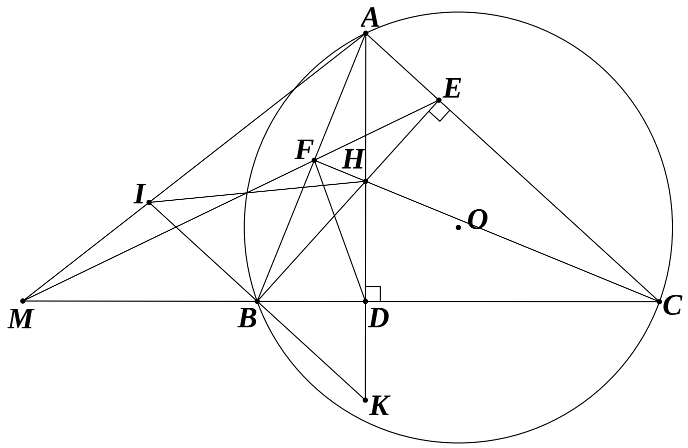
Bài 40. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn O, các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BDHF$ và $BCEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh FC là tia phân giác của góc EFD.

c) Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại M. Đường thẳng qua B và song song với AC cắt AM tại I và cắt AH tại K. Chứng minh tam giác HIK là tam giác cân.

DAPAN

Bài	(3.0 điểm)	
	 Vẽ hình đúng hết phần a) 0,25 điểm.	
	a) (1,0 điểm)	
	Có $BDH = 90^\circ$ (AD là đường cao của ΔABC) $BFH = 90^\circ$ (CF là đường cao của ΔABC)	0,25
	Do đó $BDH + BFH = 180^\circ$. Nên $BDHF$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
5 (3,0 điểm)	Có $BFC = 90^\circ$ (CF là đường cao của ΔABC) $BEC = 90^\circ$ (BE là đường cao của ΔABC)	0,25
	Xét tứ giác $BCEF$ có $BEC = BFC = 90^\circ$ Suy ra bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn. $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Tứ giác $BDHF$ nội tiếp có $\Rightarrow CFD = EBC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HD).	0,5
	Tứ giác $BCEF$ nội tiếp có $\Rightarrow EFC = EBC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC).	0,25
	Do đó $CFD = EFC$ Suy ra FC là tia phân giác của EFD.	0,25
	c) (0,75 điểm)	

	Xét ΔMAC có $BI \parallel AC$ nên $\dfrac{BI}{AC} = \dfrac{MB}{MC}$ (hệ quả định lý Talet) (1) Xét ΔBDK có $BK \parallel AC$ nên $\dfrac{BK}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$ (hệ quả định lý Talet) (2)	0,25
	Do FC là tia phân giác của EFD mà $FC \perp FB$ nên FB là tia phân giác của MFD Xét ΔMFD có FB là tia phân giác của MFD $\Rightarrow \dfrac{DF}{FM} = \dfrac{BD}{MB}$ (tính chất đường phân giác) Xét ΔMFD có FC là tia phân giác của EFD $\Rightarrow \dfrac{DF}{FM} = \dfrac{CD}{MC}$ (tính chất đường phân giác). Do đó $\dfrac{CD}{MC} = \dfrac{BD}{MB} \Leftrightarrow \dfrac{MB}{MC} = \dfrac{BD}{CD}$ (3)	0,25
	Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{BI}{AC} = \dfrac{BK}{AC} \Leftrightarrow BI = BK$ Lại có $IK \,//\, AC$ mà $BE \perp AC$ nên $BE \perp IK$ hay $BH \perp IK$ Xét ΔHIK có $BH \perp IK$ và HB là đường trung tuyến Suy ra ΔHIK cân tại H.	0,25

Bài 41. Cho đường tròn tâm (O) và dây AB. Trên tia AB lấy một điểm C nằm ngoài đường tròn. Từ điểm P nằm chính giữa cung lớn AB kẻ đường kính PQ, cắt dây AB tại D. Tia CP cắt đường tròn tại điểm thứ hai là I, các dây AB và QI cắt nhau tại K.

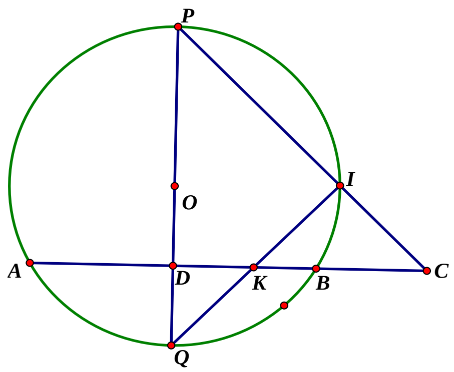
a) Chứng minh tứ giác PDKI nội tiếp một đường tròn CI. CP = CK. CD ?

b) Chứng minh IC là tia phân giác của góc ngoài đỉnh I của ΔAIB**?**

c) Cố định A, B, C. Chứng minh rằng khi đường tròn (O) thay đổi nhưng vẫn đi qua A và B thì đường thẳng QI luôn đi qua một điểm cố định ?

DAPAN

Bài	**Câu**	**Yêu cầu cần đạt**	**Điểm**
4		Vẽ đúng hình cho câu a	**0,5**

			
	1a)	Do điểm P nằm chính giữa cung lớn AB và PQ là đường kính $\Rightarrow PQ \perp AB \Rightarrow \angle PDK = 90^0$ Lại có: $\angle PIQ = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay $\angle PIK = 90^0$ Xét tứ giác PDKI có: $\angle PDK + \angle PIK = 90^0 + 90^0 = 180^0$ Vậy tứ giác PDKI nội tiếp đường tròn.	0,25 0.25
		Xét ΔDCP vuông tại D và ΔICK vuông tại I có: $\angle ICK$ là góc chung $\Rightarrow \Delta DCP \backsim \Delta ICK$ (Theo trường hợp góc nhọn) $\Rightarrow \frac{CD}{CI} = \frac{CP}{CK} \Rightarrow$ CI.CP = CK.CD (Điều phải chứng minh)	0,25 0,25
	1b)	Do PQ $\perp$ AB và điểm P nằm chính giữa cung lớn AB $\Rightarrow$ Điểm Q nằm chính giữa cung nhỏ AB. $\Rightarrow \overset{\frown}{AQ} = \overset{\frown}{BQ} \Rightarrow \angle AIQ = \angle BIQ \Rightarrow$ IK là phân giác trong tại đỉnh I của ΔAIB Mà IK $\perp$ IC $\Rightarrow$ IC là phân giác ngoài tại đỉnh I của ΔAIB.	0,25 0,25 0,25
	1c)	Xét ΔCIB và ΔCAP có: $\angle ICB$ là góc chung $\angle IBC = \angle APC$ (Cùng bù với $\angle ABI$) $\Rightarrow \Delta CIB \backsim \Delta CAP$ (g.g) $\Rightarrow \frac{CI}{CB} = \frac{CA}{CP} \Rightarrow$ CI.CP = CA.CB (1) Theo chứng minh câu b ta có: CI.CP = CK.CD (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ CK.CD = CA.CB $\Rightarrow CK = \frac{CA.CB}{CD}$	0,25 0,25

		Do các điểm A, B, C cố định nên D là trung điểm của AB cũng là điểm cố định $\Rightarrow$Các đoạn thẳng CA, CB, CD có độ dài không đổi $\Rightarrow$ CK có độ dài không đổi $\Rightarrow$ K là điểm cố định Vậy đường thẳng QI luôn đi qua điểm K cố định.	**0,25**

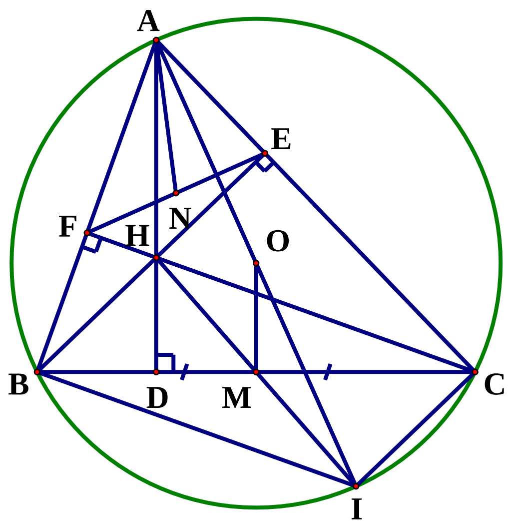
Bài 42. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác BCEF nội tiếp.

b) Gọi I là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của BC. Chứng minh: Tứ giác BHCI là hình bình hành và AH = 2MO

c) Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh: R.AN = AM. OM

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
	1) (3,0 điểm)	
	Vẽ đúng hình cho câu a 	0,25
	a) (0,75 điểm)	
	Xét tứ giác BCEF có: $BEC = BFC = 90^0$ (Vì BE ⊥ AC, CF ⊥ AB)	0,25
	$\Rightarrow$ 2 đỉnh E và F kề nhau cùng nhìn cạnh BC dưới 1 góc vuông .	0,25
4 (3,0 điểm)	Nên tứ giác BCEF nội tiếp (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Có $ACI = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow$ CI ⊥ AC Có BE ⊥ AC (gt) $\Rightarrow$ CI // BE (quan hệ vuông góc - song song) Có H $\in$ BE nên CI // BH	0,25
	Có $ABI = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow$ BI ⊥ AB Mà CF ⊥ AB (gt) $\Rightarrow$ BI //CF (quan hệ vuông góc - song song)	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	Có $H \in CF \Rightarrow BI$ // CH	
	Xét tứ giác BHCI có: CI // BH (cmt) BI // CH (cmt) $\Rightarrow$ tứ giác BHCI là hình bình hành (Dấu hiệu nhận biết hình bình hành - Tứ giác có các cạnh đối song song)	0,25
	Xét ΔAIH có: AO = OI (Bán kính của đường tròn (O)) BM = MC (gt) ; BHCI là hình bình hành (cmt) $\Rightarrow$ HM = MI (T/c hình bình hành) $\Rightarrow$ OM là đường trung bình của ΔAIH (Đ/n đường trung bình của tam giác) $\Rightarrow$ AH = 2OM (tính chất đường trung bình của tam giác)	0,25
	c) (1,0 điểm)	
	Có tứ giác BCEF nội tiếp (cmt) $\Rightarrow B_1 + FEC = 180^0$ (tính chất tứ giác nội tiếp) Mà $FEC + E_1 = 180^0$ (2 góc kề bù) suy ra $B_1 = E_1$ Xét ΔABC và ΔAEF có: A : chung $B_1 = E_1$ (cmt) Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta AEF$ (g.g) AM là trung tuyến của ΔABC (Vì M là trung điểm của BC) AN là trung tuyến của ΔAEF (Vì N là trung điểm của EF) $\Rightarrow k = \frac{AB}{AE} = \frac{AM}{AN}$ (T/c hai tam giác đồng dạng - Tỉ số trung tuyến bằng tỉ số đồng dạng) (1)	0,25
	Xét tứ giác AEHF có : $AEH = AFH = 90^0$ (Vì $BE \perp AC$, $CF \perp AB$, $H \in BE$, $H \in CF$) $\Rightarrow AEH + AFH = 180^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp) $\Rightarrow AFE = AHE$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AE của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHF) Có $AFE = ACB$ (Cùng bù với EFB do tứ giác BCEF nội tiếp) Mà $ACB = AIB$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AB của đường tròn (O;R)) Nên $AIB = AHE$	0,25
	Xét ΔABI và ΔAEH có: $AIB = AHE$ (cmt) $ABI = AEH = 90^0$ Suy ra $\Delta ABI \backsim \Delta AEH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AI}{AH}$ (Đ/n hai tam giác đồng dạng)	0,25
	Mà AI = 2AO = 2R ; AH = 2OM (cmt) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{R}{OM}$ (2)	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM}{AN} = \frac{R}{OM} \Rightarrow R.AN = AM.\ OM$	

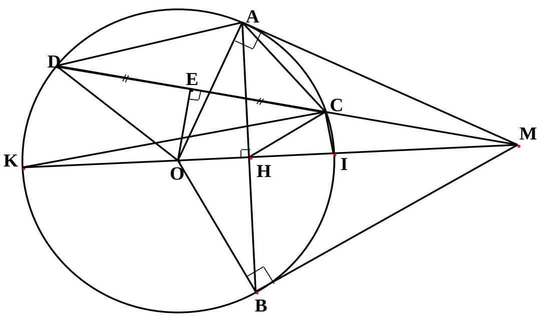
Bài 43. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD không đi qua O (C nằm giữa M và D) với đường tròn (O). Gọi E là trung điểm của CD. Đoạn thẳng MO cắt AB và (O) theo thứ tự tại H và I. Chứng minh rằng:

a) 5 điểm M; A; E; O; B cùng nằm trên một đường tròn

b) OH. OM + MC. MD = MO^2

c) CI là tia phân giác của góc MCH.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 5 (3,0 điểm)	Vẽ hình cho câu a)  	0,25
	a) (1,0 điểm)	
	Ta có MA, MB là tiếp tuyến của (O) (gt) $\Rightarrow MA \perp AO;\ MB \perp BO \Rightarrow MAO = MBO = 90^0$ $\Rightarrow$ A và B thuộc đường tròn đường kính MO (1) Lại có E là trung điểm của CD, mà CD không đi qua tâm O $\Rightarrow$ OE $\perp$ CD tại E $\Rightarrow MEO = 90^0 \Rightarrow$ E thuộc đường tròn đường kính MO (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ 5 điểm M; A; E; O; B cùng nằm trên một đường tròn	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) (1,0 điểm)	
	ΔMAC và ΔMDA có: AMC chung $MAC = MDA$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn AC) $\Rightarrow \Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{MD} = \frac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.\ MD$ Ta có MA = MB (t/c tiếp tuyến); OA = OB = R $\Rightarrow$ OM là trung trực của AB $\Rightarrow$ OM $\perp$ AB	 0,25 0,25

	ΔMAO vuông tại A có AH đường cao $\Rightarrow OH.\,OM = AO^2$ $\Rightarrow$ $OH.\,OM + MC.\,MD = AO^2 + MA^2$ (1) ΔMAO vuông tại A, theo Pytago ta có $AO^2 + MA^2 = MO^2$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $OH.\,OM + MC.\,MD = MO^2$	**0,25** **0,25**
	c) (0,75 điểm)	
	- Xét ΔMAO vuông tại A có AH đường cao, ta có: $MH.\,MO = MA^2$ Suy ra $MC.MD = MH.MO = MA^2 \Rightarrow \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}$ ΔMCH và ΔMOD có: $\frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}$, $\hat{M}$ chung Do đó ΔMCH ΔMOD (c.g.c) $\Rightarrow$ $MCH = MOD$ Gọi K là giao điểm của MO với (O), $K \neq I$ - Xét tứ giác CDOH có $MCH = MOD$ (chứng minh trên), CDOH nội tiếp $\Rightarrow DCH = DOK$ (cùng bù với HOD) (3) Mặt khác $DCK = \frac{1}{2} DOK = \frac{1}{2} sđ\, DK$ (4) - Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ $DCK = \frac{1}{2} DCH$ $\Rightarrow$CK là tia phân giác của góc DCH (5) Mà ICK $= 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) (6) - Từ (5) và (6) suy ra CI là tia phân giác của góc MCH.	**0,25** **0,25** **0,25**

Bài 44. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt B,C (O không thuộc (d); B nằm giữa A và C) và gọi H là trung điểm của BC.

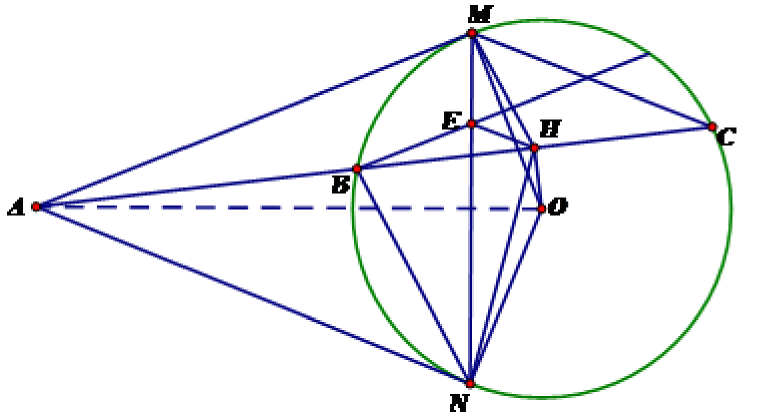
d) Chứng minh các điểm O, H, M, A, N cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đi qua 5 điểm O, H, M, A, N

e) Chứng minh AM. AN = AB. AC và HA là tia phân giác của MHN .

f) Lấy điểm E trên MN sao cho BE song song với AM. Chứng minh HE // CM.

DAPAN

Bài	**Đáp án**	**Điểm**
5	Vẽ hình đúng cho câu a	0,25

(3,0 điểm)		
	1a.(1,0 điểm)	
	Xét (O) Ta có : $AMO = 90^0$(Vì AM là tiếp tuyến tại M của (O)) $ANO = 90^0$ (Vì AN là tiếp tuyến tại N của (O))	0,25
	Lại có BC là dây không đi qua O và H là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow OH \perp BC$ tại H $\Rightarrow AHO = 90^0$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)	0,25
	$\Rightarrow$M, H, N thuộc đường tròn đường kính MO (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow$O, H, M, A, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO.	0,25
	Tâm của đường tròn đi qua 5 điểm O, H, M, A, N là trung điểm AO.	0,25
	1b.(1,0 điểm)	
	Xét ΔAMB và ΔACM Có MAC là góc chung và $AMB = MCB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung MB) $\Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta ACM$ (g-g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow$AM.AM = AB. AC Mà AM = AN (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). Suy ra : AM. AN = AB. AC	0,25
	Ta có các điểm O, H, M, A, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO (chứng minh trên) Mà AM = AN (chứng minh trên) $\Rightarrow$ AM = AN (tính chất)	0,25
	$\Rightarrow MHA = NHA$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) Do đó HA là tia phân giác của MHN	0,25
	1c.(0,75 điểm)	

	Theo giả thiết AM//BE nên $MAC = EBH$ (đồng vị) (1) Do 5 điểm A, M, H, O, N cùng thuộc một đường tròn nên: $MAH = MNH$ (hai góc nội tiếp chắn cung MH) (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $EBH = MNH$ hay $ENH = EBH \Rightarrow$ tứ giác EBNH nội tiếp	0,25
	$\Rightarrow EHB = ENB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EB) Mà $ENB = MCB$ (góc nội tiếp chắn cung MB) $\Rightarrow EHB = MCB$ mà hai góc ở vị trí đồng vị $\Rightarrow$ EH // MC.	0,25

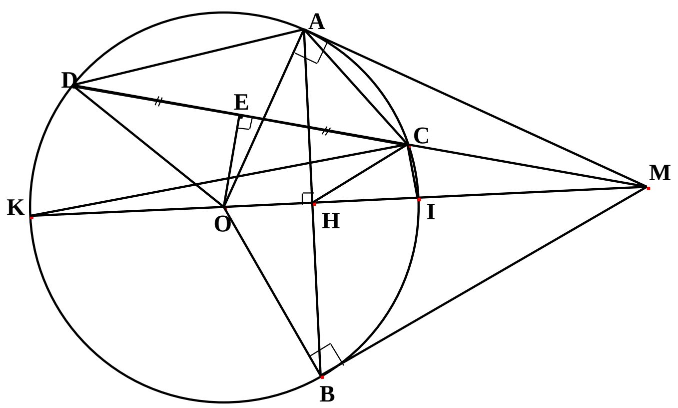
Bài 45. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD không đi qua O (C nằm giữa M và D) với đường tròn (O). Gọi E là trung điểm của CD. Đoạn thẳng MO cắt AB và (O) theo thứ tự tại H và I. Chứng minh rằng:

a) 5 điểm M; A; E; O; B cùng nằm trên một đường tròn.

b) OH. OM + MC. MD = MO^2

c) CI là tia phân giác của MCH.

DAPAN

Câu	Nội dung cần đạt	Điểm
Bài 5 **(3 điểm)**	Vẽ hình chính xác cho phần a 	0,25
	a) 1 điểm	
	Ta có MA, MB là tiếp tuyến của (O) tại A và B (gt) $\Rightarrow$ OA $\perp$ MA; OB $\perp$ MB (Tính chất tiếp tuyến của đường tròn) $\Rightarrow MAO = MBO = 90^0$ (1)	0,25
	Xét (O) có E là trung điểm của CD, mà CD không đi qua tâm O (gt) $\Rightarrow$ OE $\perp$ CD tại E (Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) $\Rightarrow MEO = 90^0$ (2)	0,25

	Từ (1) và (2) $\widehat{MEO}=90^0$ $\widehat{MAO}=\widehat{MBO}=90^0$ $\Rightarrow$5 điểm M; A; E; O; B cùng nằm trên một đường tròn đường kính OM	0,25 0,25
	b) 1,0 điểm	
	XétΔMAC vàΔMDA có: $\widehat{AMD}$ chung $\widehat{MAC}=\widehat{MDA}$ (Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng, góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$ của (O)) $\Rightarrow \Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{MD}=\dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.\,MD$ (1)	0,25 0,25
	Có MA và MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M của đường tròn (O) (gt) $\Rightarrow$ MA = MB (T/c 2 tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow$ M thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB (T/c đường trung trực của đoạn thẳng) Có OA = OB (Bán kính của đường tròn (O)) $\Rightarrow$ O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng AB (T/c đường trung trực của đoạn thẳng) Do đó OM là đường trung trực của đoạn thẳng AB $\Rightarrow$ OM $\perp$ AB tại H Có ΔMAO vuông tại A, đường cao AH (Vì $\widehat{MAO}=90^0$, OM $\perp$ AB tại H) $\Rightarrow$ OA^2 = OH.OM (Hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)	0,25
	Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH.\,OM + MC.\,MD = OA^2 + MA^2$ ΔMAO vuông tại A, ta có $AO^2+MA^2=MO^2$ (Đ//lý Pitago) Do đó $OH.\,OM + MC.\,MD = MO^2$	0,25
	c) 0,75 điểm	
	- Xét ΔMAO vuông tại A có AH là đường cao, ta có : $MA^2 = MH.\,MO$ Suy ra $MC.MD = MH.MO = MA^2 \Rightarrow \dfrac{MC}{MH}=\dfrac{MO}{MD}$ ΔMCH và ΔMOD có: $\dfrac{MC}{MH}=\dfrac{MO}{MD}$, $\widehat{M}$ chung Do đó $\Delta MCH \backsim \Delta MOD$(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{MCH}=\widehat{MOD}$	0,25
	Gọi K là giao điểm của MO với (O), K $\neq$ I Xét tứ giác CDOH có $\widehat{MCH}=\widehat{MOD}$ (chứng minh trên), $\Rightarrow$ Tứ giác CDOH nội tiếp (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp – Góc ngoài tại 1 đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện) $\Rightarrow$ $\widehat{DCH}=\widehat{DOK}$ (cùng bù với $\widehat{HOD}$)	0,25
	Mà $\widehat{DCK}=\frac{1}{2}\widehat{DOK}$ (Góc nội tiếp và góc ở tâm (O) cùngchắn $\overset{\frown}{DK}$) $\Rightarrow \widehat{DCK}=\dfrac{1}{2}\widehat{DCH}$ mà$\widehat{DCK}+\widehat{KCH}=\widehat{DCH} \Rightarrow \widehat{DCK}=\widehat{KCH}=\frac{1}{2}\widehat{DCH}$ $\Rightarrow$CK là tiaphângiáccủagóc $\widehat{DCH}$ (3)	0,25

	Mà $ICK = 90^o$ (Gócnộitiếpchắnnửađườngtròn (O)) $\Rightarrow CI \perp CK$ (4) Từ (3) và (4) suy ra CI là tia phân giác của MCH (T/c tia phân giác của 2 góc kề bù)	

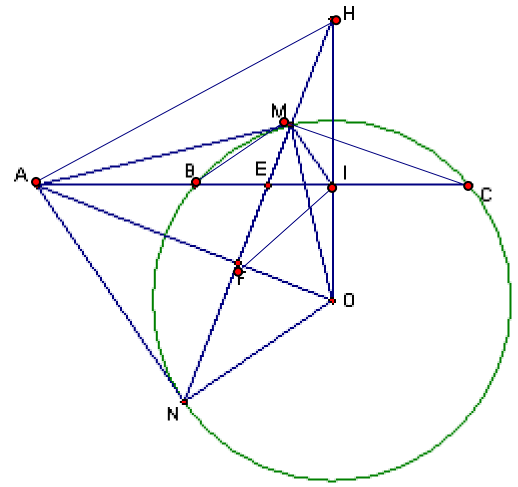
Bài 46. Cho ba điểm A, B, C cố định và thẳng hàng theo thứ tự đó. Đường tròn (O; R) thay đổi đi qua B và C sao cho O không thuộc BC. Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O). Gọi I là trung điểm của BC, E là giao điểm của MN và BC, H là giao điểm của đường thẳng OI và đường thẳng MN.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, O, I cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $OI.OH = R^2$.

c) Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

DAPAN

Bài	Câu	Nội dung	Điểm
		 Vẽ hình đúng câu a	0,25
Bài 4 3,0đ	a	Chứng minh bốn điểm M, N, O, I cùng thuộc một đường tròn	**1,0**
		I là trung điểm của BC suy ra $OI \perp BC \Rightarrow AIO = 90^0$	0,25
		AM, AN là tiếp tuyến $\Rightarrow AMO = ANO = 90^0$	0,25
		Suy ra A, M, N, I, O cùng thuộc một đường tròn	0,25
		Suy ra M, N, I, O cùng thuộc một đường tròn	0,25
	b	Chứng minh $OI.OH = R^2$.	**1,00**
		Gọi $\{F\} = MN \cap AO \Rightarrow AFH = AIH = 90^0 \Rightarrow$ AFIH là tứ giác nội tiếp	0,25
		$\Rightarrow OFI = OHA \Rightarrow \Delta OFI$ đồng dạng với ΔOHA	0,25

		$\Rightarrow \dfrac{OF}{OH} = \dfrac{OI}{OA} \Rightarrow OI.OH = OF.OA \quad (1)$	0,25
		Tam giác AMO vuông tại M có MF là đường cao nên $OF.OA = OM^2 = R^2$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $OI.OH = R^2$	0,25
	c	Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định	**0,75**
		Tam giác AMB đồng dạng với tam giác ACM $\Rightarrow AB.AC = AM^2$	0,25
		Tứ giác EFOI nội tiếp $\Rightarrow AE.AI = AF.AO = AM^2$	0,25
		Suy ra $AB.AC = AE.AI$; A, B, C, I cố định suy ra AE là hằng số.	
		Mặt khác E luôn thuộc đoạn thẳng BC cố định nên điểm E cố định. Vậy MN luôn đi qua điểm E cố định	0,25

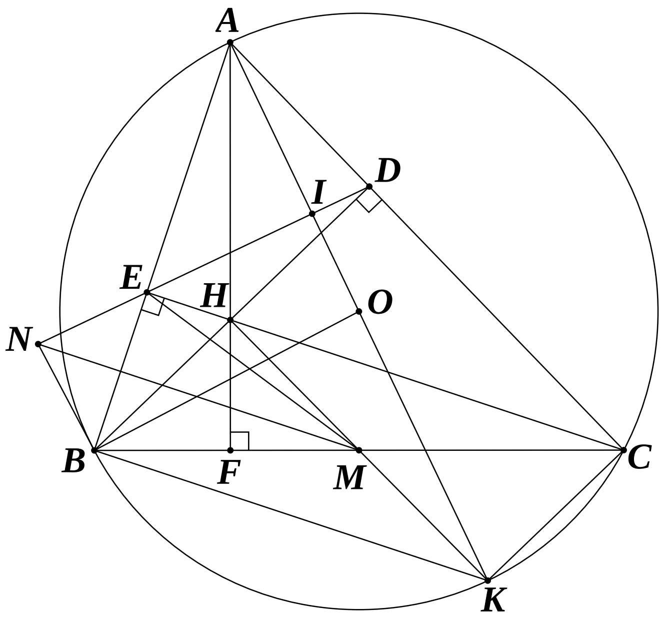
Bài 47. Cho tam giác ABC $AB < AC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn O. Các đường cao BD, CE, AF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp và ΔADE đồng dạng với ΔABC.

b) Vẽ đường kính AK của đường tròn O. Gọi giao điểm của AK và DE là I. Chứng minh $AK \perp DE$ và $DE.CF = EI.BC$.

c) Tiếp tuyến tại B của đường tròn O cắt DE tại N và giao điểm của HK với BC là M. Chứng minh CE song song với MN.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
5 (3,0 điểm)	 Vẽ hình đúng hết phần a) 0,25 điểm.	
	a) (1,0 điểm)	
	Có $BEC = 90^\circ$ (CE là đường cao của ΔABC); và $BDC = 90^\circ$ (BD là đường cao của ΔABC).	0,25
	Vậy $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	Xét ΔADE và ΔABC có BAC chung; $AED = ACB$ ($BCDE$ là tứ giác nội tiếp)	0,25
	Do đó $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (g.g).	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Do $AED = ACB$ ($BCDE$ là tứ giác nội tiếp) mà $AKB = ACB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB của O). nên $AED = AKB$ (1)	0,25
	Lại có $ABK = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn O).	0,25

	nên $\widehat{AKB}+\widehat{BAK}=90^\circ$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AED}+\widehat{BAK}=90^\circ \Rightarrow \widehat{AIE}=90^\circ \Rightarrow AK\perp DE.$	
	Xét ΔAIE và ΔAFC có $\widehat{AIE}=\widehat{AFC}=90^\circ; \widehat{AED}=\widehat{ACB}$ ($BCDE$ là tứ giác nội tiếp) Do đó $\Delta AIE\backsim\Delta AFC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EI}{FC}=\dfrac{AE}{AC}$.(3)	0,25
	Do $\Delta ADE\backsim\Delta ABC \Rightarrow \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{EI}{FC} \Leftrightarrow DE.FC=EI.BC.$	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Có $\widehat{ABK}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow KB\perp AB$ mà $CE\perp AB$ (CE là đường cao của tam giác ABC) nên $BK//CE$ hay $BK//CH$	0,25
	Tương tự: $CK//BH$ Do đó $BHCK$ là hình bình hành suy ra M là trung điểm của $BC.$ Lại có B,E,D,C thuộc đường tròn đường kính BC nên $MB=ME$ (5)	0,25
	Xét (O) có $\widehat{NBE}=\widehat{ACB}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung). mà $\widehat{ACB}=\widehat{NEB}$ ($BCDE$ là tứ giác nội tiếp) suy ra $\widehat{NBE}=\widehat{NEB} \Rightarrow \Delta BNE$ cân tại $N \Rightarrow NB=NE$ (6) Từ (5) và (6) suy ra MN là đường trung trực của BE hay $MN\perp BE.$ Vậy $MN//CE.$	0,25

Bài 48. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi F và K lần lượt là giao điểm của AH với BC, DE.

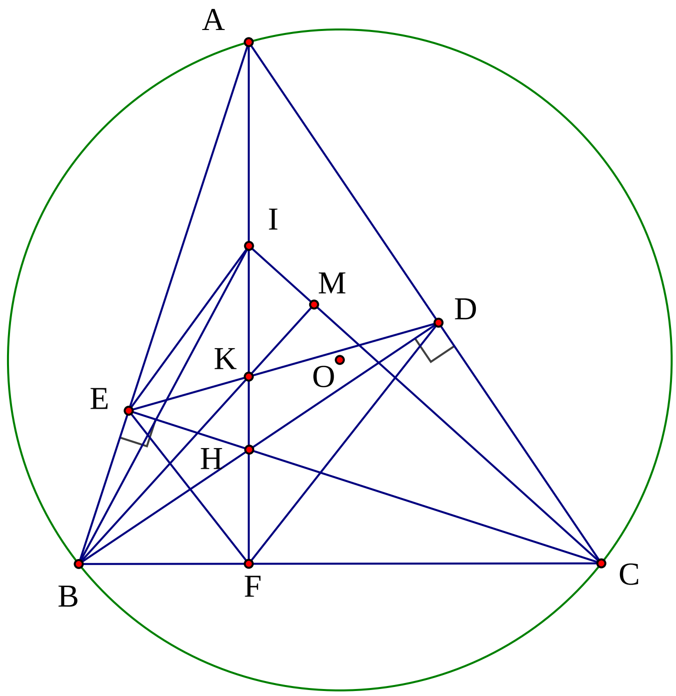
a) Chứng minh: Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn và xác định tâm I của đường tròn.

b) Chứng minh: DB là phân giác của góc EDF và $\dfrac{KH}{HF}=\dfrac{DK}{DF}$

c) Chứng minh: BK $\perp$ CI.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm

	 Vẽ hình đúng cho câu a	0,25
	a) 1,0 điểm	
	Ta có $AEH = ADH = 90^o$ (vì BD ⊥ AC; CE ⊥ AB)	0,25
	$\Rightarrow$ A, E, H, D cùng thuộc đường tròn đường kính AH	0,25
Bài 5 (3,0 điểm)	$\Rightarrow$ Tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn đường kính AH	0,25
	Tâm I là trung điểm của đường kính AH.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADHE có $EAH = EDH$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EH) Xét ΔABC có 2 đường cao BD và EC cắt nhau tại H $\Rightarrow$H là trực tâm ΔABC$\Rightarrow$ $AF \perp BC$	0,25
	Vì BD, AF là đường cao của △ ABC nên $AFB = BDA = 90^o$ $\Rightarrow$ A, D, F, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB $\Rightarrow$ Tứ giác ADFB là tứ giác nội tiếp (định nghĩa tứ giác nội tiếp)	0,25
	$\Rightarrow$ $BAF = BDF$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BF) $\Rightarrow$ $EDH = BDF \Rightarrow$ DH là tia phân giác của EDF	0,25
	DH là đường phân giác trong của ΔKDF $\Rightarrow \dfrac{HK}{HF} = \dfrac{DK}{DF}$ (1)	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Gọi M là giao điểm của đường thẳng BK và IC Xét đường tròn (I) có $EIH = 2EDH$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung EH) $2EDH = EDF$ (do DH là tia phân giác của EDF (cmt)) $\Rightarrow EIH = EDF$ Chứng minh tương tự như câu b ta có $EFI = KFD$ ΔEFI ∽ ΔKFD(g.g) vì $EIH = EDF$ và $EFI = KFD$	0,25

	$\Rightarrow \dfrac{FE}{FK} = \dfrac{FI}{FD} \Rightarrow$ FK . FI = FE . FD (3)	
	Chứng minh tương tự tứ giác AEFC nội tiếp $\Rightarrow BEF = ACF$ (góc trong của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) Chứng minh tương tự tứ giác ABFD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow FDC = ABC$ (góc trong của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) ΔBEF $\backsim$ ΔDCF(g.g) vì $BEF = ACF$ (CMT) và $FDC = ABC$ (CMT) $\Rightarrow \dfrac{FB}{FD} = \dfrac{FE}{FC} \Rightarrow$FB.FC = FD.FE (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ FK.FI = FB.FC $\Rightarrow \dfrac{FK}{FC} = \dfrac{FB}{FI}$	0,25
	Vì $\dfrac{FK}{FC} = \dfrac{FB}{FI}$ và $KFB = KFC = 90^o$ (do AF $\perp BC$) $\Rightarrow\Delta$FBK $\backsim$ ΔFIC(c.g.c) $\Rightarrow FKB = FCI$ $\Rightarrow$Tứ giác FKMC là tứ giác nội tiếp (góc trong của tứ giác bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) $\Rightarrow KMC + KFC = 180^o$ Mà $KFC = 90^o$(do AF $\perp BC$)$\Rightarrow$ $KMC = 90^o$ $\Rightarrow$BM $\perp IC$	0,25

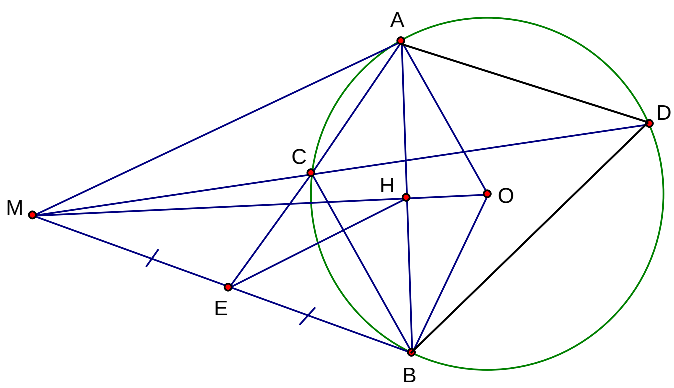
Bài 49. Cho điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm). Gọi E là trung điểm của MB, C là giao điểm của AE và đường tròn (O) (điểm C khác A). H là giao điểm của AB và MO.

a) Chứng minh tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh: EB^2 = EC . EA.

c) Gọi D là giao điểm của MC và (O) (điểm D khác điểm C). Chứng minh ΔABD cân.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
	Vẽ hình đúng cho câu a  	**0,25**
	4.1a (1,0 điểm)	

	+ Xét đường tròn (O) có MA, MB là tiếp tuyến $\Rightarrow$ $MAO = MBO = 90^0$	**0,25**
	+ Xét tứ giác MAOB có $MAO + MBO = 180^0$ Mà 2 góc này ở vị trí đối nhau	**0,25** **0,25**
	Suy ra tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.	**0,25**
	4.1b (1,0 điểm)	
	Xét (O) có $EBC = EAB$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cùng chắn cung BC)	**0,25** **0,25**
	Chứng minh được $\Delta ECB \backsim EBA(g.g)$	
	$\Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{EC}{EB}$	**0,25**
	$\Rightarrow EB^2 = EC.EA$	**0,25**
	4.1c (0,75 điểm)	
	Có $EB^2 = EC.EA$, E là trung điểm của MB $\Rightarrow EM^2 = EC.EA$ $\Rightarrow \Delta EMC \backsim \Delta EAM(c.g.c)$	**0,25**
	$\Rightarrow EMC = ADM \Rightarrow MB // AD$	**0,25**
	$\Rightarrow EBA = BAD$ Mà $EBA = ADB$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây	**0,25**
	cùng chắn cung BA của (O)) $\Rightarrow ADB = BAD$ $\Rightarrow \Delta ABD$ cân tại B.	

Bài 50.Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua điểm A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến (O) (B,C là các tiếp điểm). Kẻ tia Ax (nằm giữa hai tia AB, AO) cắt đường tròn tại E và F (E nằm giữa A và F) .

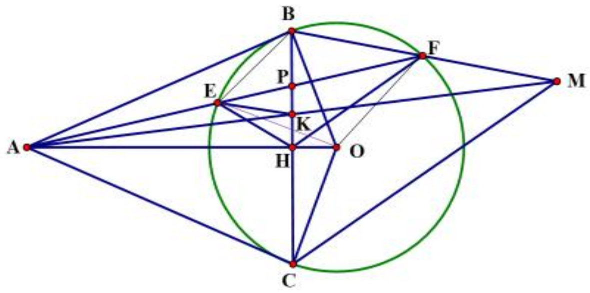
a) Chứng minh rằng tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn. Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$.

b) Chứng minh rằng $BA^2 = AE.AF$ và $OEF = OHF$, với H là giao điểm của AO và BC

c) Đường thẳng qua E song song với BF cắt đường thẳng BC tại K. Đường thẳng AK cắt đường thẳng BF tại M. Chứng minh rằng $MC = 2HF$.

DAP AN

Bài 5	Nội dung	Điểm

		0,25
	a) Chứng minh rằng các tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn. Vì AB, AC là các tiếp tuyến của (O) nên $ABO = ACO = 90^0$	0,25
	=> C, B thuộc đường tròn đường kính OA (quỹ tích cung chứa góc 90°)	0,25
	=> tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn.	0,25
	Tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ là trung điểm của OA	0,25
	b) Chứng minh rằng $BA^2 = AE.\text{AF}$ và $\text{OEF} = \text{OHF}$, với H là giao điểm của AO và BC. * Xét ΔABE và ΔAFB có: $ABE = \text{AFB}\left(=\frac{1}{2}sd\ EB\right)$ BAE - góc chung Do đó, $\Delta ABE \sim \Delta AFB(g.g)$ Suy ra, $\frac{AB}{\text{AF}} = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AB^2 = AE.\text{AF}\ (1)$	0,25 0,25
	* $\left.\begin{matrix} OB = OC\ (GT) \\ AB = AC\ (t/c) \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ AO là trung trực của BC $\Rightarrow AO \perp BH$ ΔABO vuông tại B, đường cao BH nên $AB^2 = AH.\text{AO}\ (2)$ Từ (1) và (2) ta có $AE.\text{AF} = AH.\text{AO} \Rightarrow \frac{AE}{AO} = \frac{AH}{\text{AF}}$ Suy ra $\Delta AEH \sim \Delta \text{AOF}(\text{c.g.c})$	0,25
	$\Rightarrow AHE = \text{AFO}$ $\Rightarrow EHOF$ nội tiếp $\Rightarrow OHF = \text{OEF}$	0,25

	c) Đường thẳng qua E song song với BF cắt đường thẳng BC tại K. Đường thẳng AK cắt đường thẳng BF tại M. Chứng minh rằng $MC = 2HF$. Gọi giao điểm của BC và AF là P $\mathrm{EK}//\mathrm{BM} \Rightarrow \frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{FM}} = \frac{AE}{\mathrm{AF}}, \frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{BF}} = \frac{EP}{\mathrm{FP}}$ (3)	**0,25**
	Lại có: $\mathrm{OHF} = \mathrm{OEF}$ (cmt) $\mathrm{OFE} = \mathrm{OEF}$ ($\Delta\mathrm{OEF}$ cân) $AHE = \mathrm{EFO}$ (cmt) Suy ra $AHE = \mathrm{FHO}$ Mà $AHE + EHB = \mathrm{FHO} + FHB = 90^0$ $\Rightarrow EHB = FHB \Rightarrow$ HB là tia phân giác EHF $\Rightarrow \frac{EP}{FP} = \frac{EH}{FH}$ (4)	**0,25**
	ΔEHF có HB là phân giác trong EHF, $HP \perp HA$ nên HA là đường phân giác góc ngoài của EHF $\Rightarrow \frac{EA}{FA} = \frac{EP}{FP}$ (5) Từ (3), (4) và (5) suy ra: $\frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{FM}} = \frac{\mathrm{EK}}{\mathrm{BF}} \Rightarrow BF = FM$ =>HF là đường trung bình $\Delta BCM \Rightarrow CM = 2HF$	**0,25**

Bài 51. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn (P và Q là hai tiếp điểm) và một cát tuyến MAB (A nằm giữa M và B). Gọi I là trung điểm của AB.

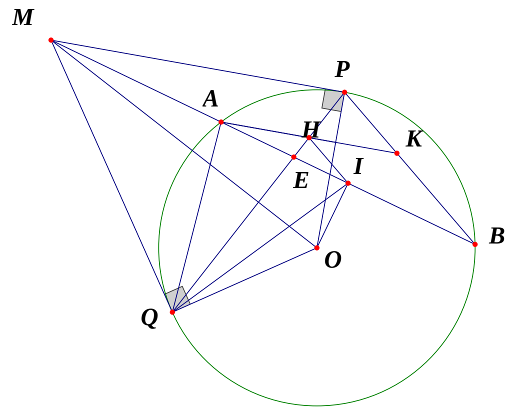
a) Chứng minh 5 điểm M, P, O, I, Q cùng thuộc 1 đường tròn.

b) PQ cắt AB tại E. Chứng minh MP^2 = ME. MI

c) Qua A kẻ đường thẳng song song với MP cắt PQ, PB lần lượt tại H, K. Chứng minh KB = 2. HI

DAPAN

Bài	**Đáp án**	**Điểm**
5	Hình vẽ đúng cho câu a)	0,25

(3,0 điểm)		
	1a. (1,0) điểm)	
	Xét (O) có AB là dây không đi qua O và I là trung điểm của AB(gt) $\Rightarrow$ $OI \perp AB$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) $\Rightarrow MIO = 90^0$	0,25
	Ta có: $MPO = 90^0$ (Vì MP là tiếp tuyến tại P của (O)) $MQO = 90^0$ (Vì MQ là tiếp tuyến tại Q của (O))	0,25
	$\Rightarrow$ I, P, Q thuộc đường tròn đ.kính MO (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow$ 5 điểm M, P, I, O, Q cùng thuộc đường tròn đường kính MO	0,25 0,25
	1b. (1,0điểm)	
	$\Rightarrow MQP = MIP$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MP của đường tròn đướng kính MO)	0,25
	Xét ΔMPQ có MP = MQ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau của (O)) $\Rightarrow$ ΔMPQ cân tại M$\Rightarrow MPQ = MQP \Rightarrow MPQ = MIP$ hay $MPE = MIP$	0,25
	Xét ΔMPE và ΔMIP có: PME là góc chung; $MPE = MIP$ (c/m trên) $\Rightarrow$ ΔMPE đồng dạng với ΔMIP (g.g)	0,25
	$\Rightarrow \dfrac{MP}{MI} = \dfrac{ME}{MP} \Rightarrow MP^2 = ME.MI$	0,25
	1c. (0,75) điểm)	
	Vì AH // MP(gt)$\Rightarrow$ AHQ = MPQ (2 góc đồng vị) Ta có: MPIQ nội tiếp đường tròn(c/m trên) $\Rightarrow$MIQ = MPQ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MQ) $\Rightarrow$MIQ = AHQ hay AIQ = AHQ	0,25
	Xét tứ giác AHIQ có AIQ = AHQ mà I và H thuộc cùng 1 nửa mặt phẳng bờ AQ nên tứ giác AHIQ nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow$AQH = AIH (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AH)	
	Xét (O) có AQH = ABP (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AP)	0,25

	⇒ AIH = ABP mà là 2 góc đồng vị ⇒HI // BP	
	Xét ΔABK có: HI// BK (c/mtrên) I là trung điểm của AB(gt) Suy ra H là trung điểm của AK(định lý đường trung bình của tam giác) Suy ra HI là đường trung bình của ΔABK Suy ra BK = 2HI (tính chất đường trung bình của tam giác)	0,25

Bài 52. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn O kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

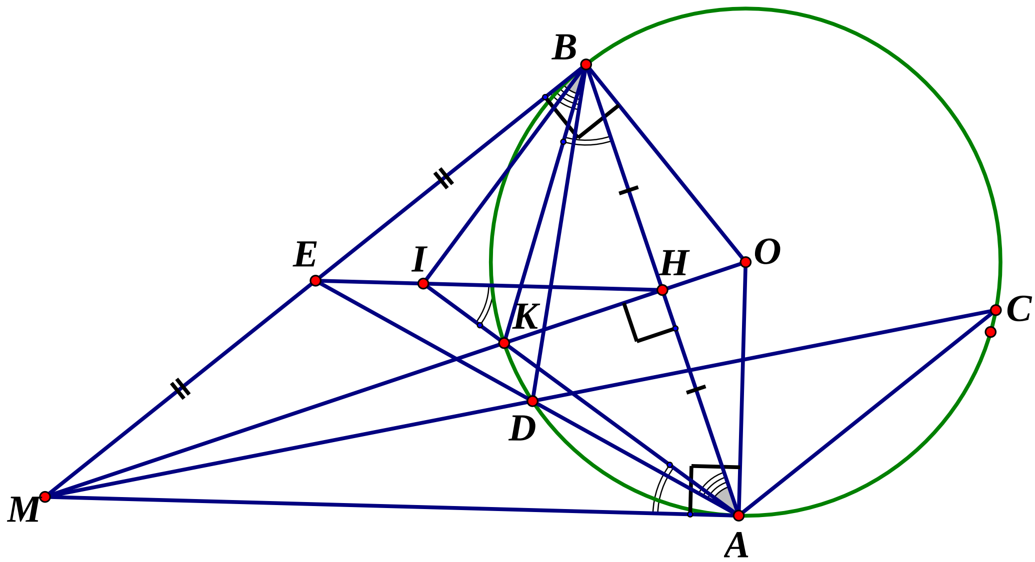
a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

b) Kẻ dây AC song song với BM. Đường thẳng MC cắt đường tròn O tại điểm thứ hai là D (D khác C). Gọi E là giao điểm của AD và MB.

Chứng minh $BE^2 = DE.AE$ và $BE = ME$.

c) Gọi H và K lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng MO với AB và đường tròn O (K nằm giữa M và H), HE cắt AK tại I. Chứng minh AK vuông góc với BI.

ĐÁP ÁN

5 (3,0 điểm)	**(3.0 điểm)**	
	**Vẽ hình đúng hết phần a)** $0,25$ **điểm.**	
	a) (1,0 điểm)	
	- Do MA là tiếp tuyến đường tròn (O) nên $\widehat{MAO} = 90°$.	**0,25**

	- Do MB là tiếp tuyến đường tròn (O) nên $MBO = 90^\circ$.	0,25
	Do đó $MAO + MAO = 180^\circ$ mà hai góc MAO ; MAO là hai góc đối diện.	0,25
	Do đó $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Xét ΔBED và ΔAEB có $EBD = BAE$ và AEB chung Do đó $\Delta BED \backsim \Delta AEB$ (g.g).	0,25
	Suy ra $\dfrac{BE}{AE} = \dfrac{DE}{BE} \Leftrightarrow BE^2 = AE.DE.$ (1)	0,25
	Có $EMD = ACD$ (hai góc so le trong của $AC//MB$) Xét O có $ACD = MAE$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) Suy ra $EMD = MAE$.	0,25
	Xét ΔEMD và ΔEAM có $EMD = MAE$ và AEM chung Do đó $\Delta EMD \backsim \Delta EAM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EM}{EA} = \dfrac{ED}{EM} \Leftrightarrow EM^2 = AE.DE.$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $BE^2 = EM^2 \Rightarrow BE = ME.$	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Xét ΔBAM có $BE = EM, BH = HA$ $\Rightarrow HE//AM$ $\Rightarrow HIA = IAM \ (So\ le)$	0,25
	Xét O có MA là tiếp tuyến $\Rightarrow IAM = KBA = \dfrac{1}{2}$sđ AK (Hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) $\Rightarrow AIH = KBA \Rightarrow KIH = KBH$ suy ra tứ giác KIBH nội tiếp.	0,25
	$\Rightarrow KIB + KHB = 180^0$ Lại có $OA = OB, MA = MB$ nên MO là trung trực của $AB \Rightarrow KHB = 90^\circ$ Do đó $KIB = 90^\circ \Rightarrow EI \perp AK$.	0,25

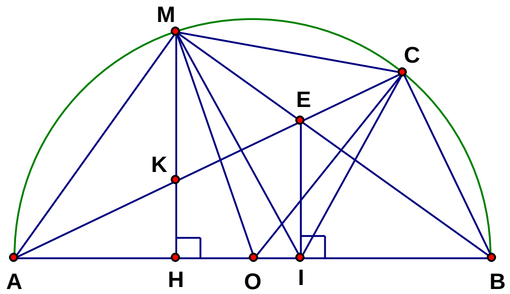
Bài 53. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Điểm C cố định trên nửa đường tròn. Điểm M thuộc cung AC (M ≠ A, C). Hạ $MH \perp AB$ tại H, tia MB cắt CA tại E, kẻ EI ⊥ AB tại I. Gọi K là giao điểm của AC và MH. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác BHKC là tứ giác nội tiếp và $AK.AC = AH.AB$

b) $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vị trí của điểm M trên cung AC.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔMIC luôn đi qua 2 điểm cố định

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
	- Vẽ hình đúng cho câu a 	0.25
5.a	**a.Chứng minh tứ giác BHKC là tứ giác nội tiếp và** AK.AC=AH.AB Ta có góc $ACB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Xét tứ giác $BHKC$, có: $KHB = 90^0$ (vì MH $\perp$ AB tại H); $KCB = 90^0$ (cm trên) $\Rightarrow KCB + KHB = 180^0$, mà hai góc này là hai góc đối nhau . $\Rightarrow$ tứ giác BHKC nội tiếp đường tròn Xét ΔAHK và ΔACB có $AHK = ACB = 90^0$ CAB chung $\Rightarrow \Delta AHK \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AK}{AB} = \frac{AH}{AC}$ Suy ra $AK.AC = AH.AB$	0.25 0.25 0.25 0.25
5.b	**b. Chứng minh** AE.AC+BE.BM **không phụ thuộc vị trí của điểm M trên cung AC.** Xét ΔAIE và ΔACB là hai tam giác vuông có A chung nên $\Delta AIE \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AI}{AC}$ ⇒AE.AC = AI.AB (1) Xét ΔBEI và ΔBAM là hai tam giác vuông có B chung nên ΔBEI ∽ ΔBAM (g.g) ⇒ BE.BM = BI.AB (2) Từ (1) và (2) suy ra : AE.AC + BE.BM = AB.AI + BI.AB = AB(AI + BI) = AB^2 = $4R^2$. Mà $4R^2$ không đổi . Vậy $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vị trí của điểm M trên cung AC.	 0.25 0.25 0.25 0.25

5.c	**c. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔMIC luôn đi qua 2 điểm cố định.** Xét tứ giác $AMEI$, có: $AME = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn); $AIE = 90°$ (EI $\perp$ AB tại I) $\Rightarrow AME + AIE = 180°$ Vậy tứ giác AMEI nội tiếp đường tròn . Suy ra $MAC = MIE$ (3) Xét tứ giác $ECBI$, có: $ECB = 90°$ (cmt) $EIB = 90°$ (EI $\perp$ AB tại I) $\Rightarrow ECB + EIB = 180°$ Vậy tứ giác ECBI nội tiếp đường tròn . Suy ra $EIC = MBC$ (4). Lại có: $MAC = MBC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC của đường tròn tâm O) (5) Từ (3), (4), (5) suy ra $EIC = MIE$. Do đó $MIC = 2MIE = 2MAC$ Mặt khác: $MOC = 2MAC$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung MC của đường tròn tâm O) Suy ra $MIC = MOC$ Nên tứ giác MOIC là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).Mà điểm O, C là hai điểm cố định Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác MIC luôn đi qua hai điểm cố định.	0.25 0.25 0.25

Bài 54. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn O kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

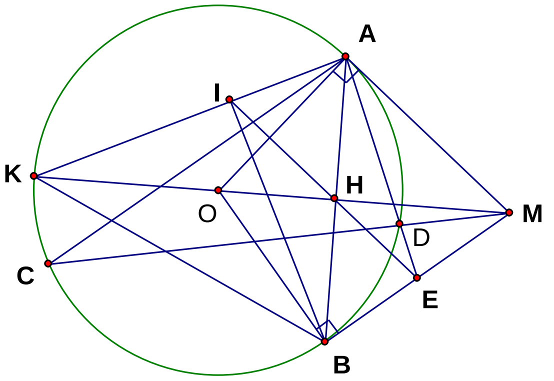
a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

b) Kẻ dây AC song song với BM. Đường thẳng MC cắt đường tròn O tại điểm thứ hai là D (D khác C). Gọi E là giao điểm của AD và MB. Chứng minh $BE^2 = DE.AE$ và $BE = ME$.

c) Gọi H và K lần lượt là giao điểm của MO với AB và đường tròn O (H nằm giữa M và K), HE cắt AK tại I. Chứng minh AK vuông góc với BI.

DAPAN

Bài 5	**(3.0 điểm)**
	Vẽ hình đúng hết phần a) 0,25 điểm.

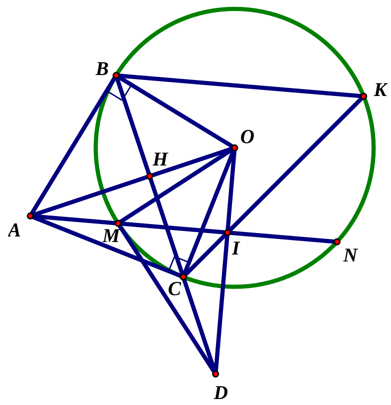
(3,0 điểm)		
	a) (1,0 điểm)	
	- Do MA là tiếp tuyến đường tròn (O) nên $MAO = 90°$.	0,25
	- Do MB là tiếp tuyến đường tròn (O) nên $MBO = 90°$.	0,25
	Do đó $MAO + MAO = 180°$ mà hai góc MAO ; MAO là hai góc đối diện.	0,25
	Do đó $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Xét ΔBED và ΔAEB có $EBD = BAE$ và AEB chung Do đó: $\Delta BED \backsim \Delta AEB$ (g.g).	0,25
	Suy ra: $\dfrac{BE}{AE} = \dfrac{DE}{BE} \Leftrightarrow BE^2 = AE.DE.$ (1)	0,25
	Có $EMD = ACD$ (hai góc so le trong của $AC//MB$) Xét O có $ACD = MAE$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) suy ra $EMD = MAE$.	0,25
	Xét ΔEMD và ΔEAM có $EMD = MAE$ và AEM chung Do đó: $\Delta EMD \backsim \Delta EAM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EM}{EA} = \dfrac{ED}{EM} \Leftrightarrow EM^2 = AE.DE.$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $BE^2 = EM^2 \Rightarrow BE = ME.$	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Xét ΔBAM có $BE = EM, BH = HA$ suy ra HE là đường trung bình của ΔBAM $\Rightarrow HE//AM \Rightarrow BHE = BAM$ (hai góc đồng vị).	0,25

	Xét O có $AKB = BAM$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) Do đó $AKB = BHE$ suy ra $KIHB$ là tứ giác nội tiếp.	**0,25**
	$\Rightarrow KIB = KHB$ (tính chất góc nội tiếp). Lại có $OA = OB, MA = MB$ nên MO là trung trực của AB $\Rightarrow KHB = 90°$ Do đó $KIB = 90° \Rightarrow EI \perp AK$.	**0,25**

Bài 55. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC và cát tuyến AMN không đi qua tâm với đường tròn (B, C, N thuộc đường tròn (O), M nằm giữa A và N). Gọi I là trung điểm của dây MN và K là giao điểm thứ hai của tia CI với đường tròn (O).

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp và $ABC = AIC$.
b) Chứng minh OI vuông góc với BK.
c) Đường thẳng OI và tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, chúng cắt nhau tại D. Chứng minh ba điểm B, C, D thẳng hàng.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
5 *(3,0 đ)*	4.1.Vẽ hình đúng để. làm câu a:  	0.25
	a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp và $ABC = AIC$. **(1,0điểm)**	
	Ta có: AB , AC là hai tiếp tuyến của (O) (gt) $\Rightarrow ABO = ACO = 90^0$	0,25
	Tứ giác ABOC có: $ABO + ACO = 90^0 + 90^0 = 180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn đường kính AO.	0,25
	Trong (O) có I là trung điểm của MN $\Rightarrow OI \perp MN \Rightarrow AIO = 90^0$ $\Rightarrow$ I thuộc đường tròn đường kính AO.	0,25
	Trong đường tròn đường kính AC suy ra $ABC = AIC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)	0,25
	b) Trong (O) suy ra $BKC = ABC$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây)	0,25

	mà $ABC = AIC$ (c/m câu a) suy ra $BKC = AIC$	0,25
	$\Rightarrow BK // AN$.	
	Lại có $OI \perp AN$ nên $OI \perp BK$	0,25
	c) Có AB = AC (t/c tiếp tuyến cắt nhau) và OA = OB (bán kính) $\Rightarrow$ OA là đường trung trực của BC $\Rightarrow BC \perp AO$.	0,25
	Áp dụng hệ thức lượng trong tam giá c OBA vuông tại B, BH là đường cao, ta có $OH.OA = OB^2 = R^2$ Tương tự tam giác OMD vuông tại M, MI là đường cao có $OI.OD = R^2$	0,25
	suy ra $OH.\ OA = OI\ .OD \Rightarrow \dfrac{OH}{OI} = \dfrac{OD}{OA}$ Suy ra $\Delta OHD \sim \Delta OIA \Rightarrow DHO = AIO = 90^0$ $\Rightarrow DH \perp AO$	0,25
	mà $BC \perp AO$ (cmt) nên B , C , D thẳng hàng.	0,25

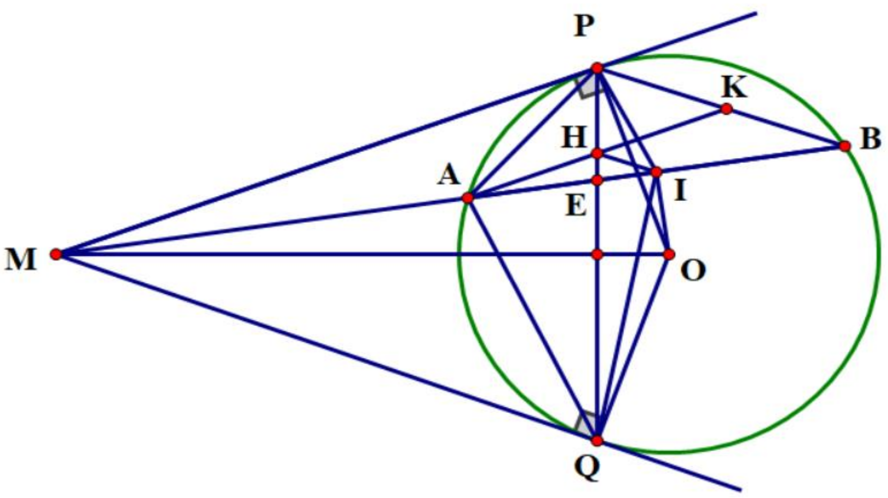
Bài 56. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn (P và Q là các tiếp điểm) và một cát tuyến MAB (A nằm giữa M và B), gọi I là trung điểm của AB.

a) Chứng minh 5 điểm M, P, O, I, Q cùng thuộc một đường tròn.

b) PQ cắt AB tại E. Chứng minh $MP^2 = ME.MI$.

c) Qua A kẻ đường thẳng song song với MP cắt PQ, PB lần lượt tại H, K. Chứng minh KB = 2HI.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
	 Hình vẽ đúng cho câu a	0,25
a (1,0đ)	Xét đường tròn (O) có AB là dây không đi qua tâm O và I là trung điểm của AB (gt) $\Rightarrow OI \perp AB$ tại I $\Rightarrow MIO = 90^0$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) (1)	0,25

	Ta có: $MPO = 90^0$ (Vì MP là tiếp tuyến tại P của đường tròn (O)) (2) $MQO = 90^0$ (Vì MQ là tiếp tuyến tại Q của đường tròn (O)) (3)	0,25
	Từ (1); (2) và (3) $\Rightarrow$ I, P, Q thuộc đường tròn đường kính MO (quỹ tích cung chứa góc)	0,25
	$\Rightarrow$ Năm điểm M, P, I, O, Q cùng thuộc đường tròn đường kính MO	0,25
b **(1,0đ)**	Xét đường tròn đường kính MO, có: $MQP = MIP$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MP)	0,25
	Có MP và MQ là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M của đường tròn (O) với P và Q là tiếp điểm $\Rightarrow$ MP = MQ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Xét ΔMPQ có MP = MQ (cmt) $\Rightarrow$ ΔMPQ cân tại M $\Rightarrow MPQ = MQP \Rightarrow MPQ = MIP$ hay $MPE = MIP$	0,25
	Xét ΔMPE và ΔMIP có: PME chung; $MPE = MIP$ (c/m trên) $\Rightarrow \Delta MPE \backsim \Delta MIP$ (g.g)	0,25
	$\Rightarrow \dfrac{MP}{MI} = \dfrac{ME}{MP} \Rightarrow MP^2 = ME.MI$	0,25
c **(0,75đ)**	Vì AH // MP(gt) $\Rightarrow$ AHQ = MPQ (hai góc đồng vị) Xét đường tròn đường kính MO, có: MIQ = MPQ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MQ) $\Rightarrow$ MIQ = AHQ hay AIQ = AHQ	0,25
	Xét tứ giác AHIQ, có AIQ = AHQ (cmt) mà I và H thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AQ nên tứ giác AHIQ nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow$ AQH = AIH (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AH)	0,25
	Lại có AQH = ABP (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AP của đường tròn (O)) $\Rightarrow$ AIH = ABP mà AIH và ABP ở vị trí đồng vị $\Rightarrow$ HI // BP Xét ΔABK có: HI // BK (do HI // BP) I là trung điểm của AB (gt) $\Rightarrow$ H là trung điểm của AK $\Rightarrow$ HI là đường trung bình của ΔABK $\Rightarrow$ BK = 2HI (tính chất đường trung bình của tam giác)	0,25

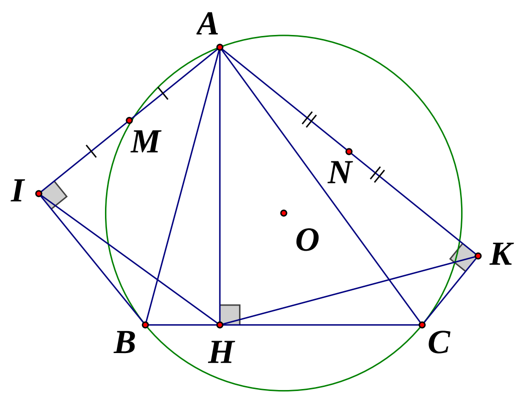
Bài 57. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O), kẻ AH vuông góc với BC tại H. Gọi I và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O).

a) Chứng minh tứ giác AHCK nội tiếp đường tròn, chỉ rõ tâm của đường tròn đó.

b) Chứng minh $AHK = ABC$ và $AH^2 = AI.AK$.

c) Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AI và AK. Chứng minh rằng:
Nếu AH = AM + AN thì ba điểm A, O, H thẳng hàng.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
	Vẽ đúng hình cho phần a 	0.25
	a (1.0 điểm)	
	- Ta có AH $\perp$ BC (gt) $\Rightarrow AHC = 90^0$ $\Rightarrow$ điểm H thuộc đường tròn đường kính AC (1)	0.25
	- Ta có AK $\perp$ CK (gt) $\Rightarrow AKC = 90^0$ $\Rightarrow$ điểm K thuộc đường tròn đường kính AC (2)	0.25
	Từ (1) và (2) suy ra tứ giác AHCK nội tiếp đường tròn đường kính AC.	0.25
	$\Rightarrow$Tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AHCK là trung điểm của AC.(đpcm)	0.25
	b (1.0 điểm)	
	Xét đường tròn (O), có CK là tiếp tuyến tại C$\Rightarrow ACK = ABC$ (3)	0.25
	Mặt khác: Tứ giác AHCK nội tiếp đường tròn $\Rightarrow ACK = AHK$ (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow AHK = ABC$ (5)	0.25
	Do AI $\perp$ BI (gt) $\Rightarrow AIB = 90^0 \Rightarrow AIB + AHB = 180^0$ Suy ra tứ giác AHBI nội tiếp $\Rightarrow$ $AIH = ABH$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AH) (6) Từ (5) và (6) $\Rightarrow AHK = AIH$ Chứng minh tương tự ta được: $AHI = AKH$	0.25

	- Xét ΔAIH và ΔAHK có: $\begin{cases} AHI = AKH\ (cmt) \\ AIH = AHK\ (cmt) \end{cases}$ Suy ra: $\Delta AIH \sim \Delta AHK\,(g.g)$ $\Rightarrow \dfrac{AI}{AH} = \dfrac{AH}{AK} \Rightarrow AH^2 = AI.AK$ (đpcm).	0.25
	c (0,75 điểm)	
	- Vì AH = AM + AN. Mà M, N theo thứ tự là trung điểm của AI và AK $\Rightarrow AH = \dfrac{1}{2}(AI + AK) \Rightarrow 4AH^2 = (AI + AK)^2$ $\Rightarrow 4AH^2 = AI^2 + AK^2 + 2AI.AK$ Mà $AH^2 = AI.AK \Rightarrow 4AH^2 = 4AI.AK$ Do đó $4AI.AK = AI^2 + AK^2 + 2AI.AK$ $\Leftrightarrow (AI - AK)^2 = 0 \Leftrightarrow AI = AK$	0.25
	Nên AI = AK = AH Suy ra ΔAHK cân tại A $\Rightarrow AKH = AHK$ Mà $AKH = ACH = AHI; AHK = AIH = ABC \Rightarrow ACH = ABC$	0.25
	$\Rightarrow \Delta ABC$ cân ở A Lại có AH là đường cao. Suy ra AH là đường trung trực của BC. Do đó A, O, H thẳng hàng.(đpcm)	0.25

Bài 58. Cho tam giác ABC $AB < AC$ có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn O. Các đường cao BD, CE, AF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

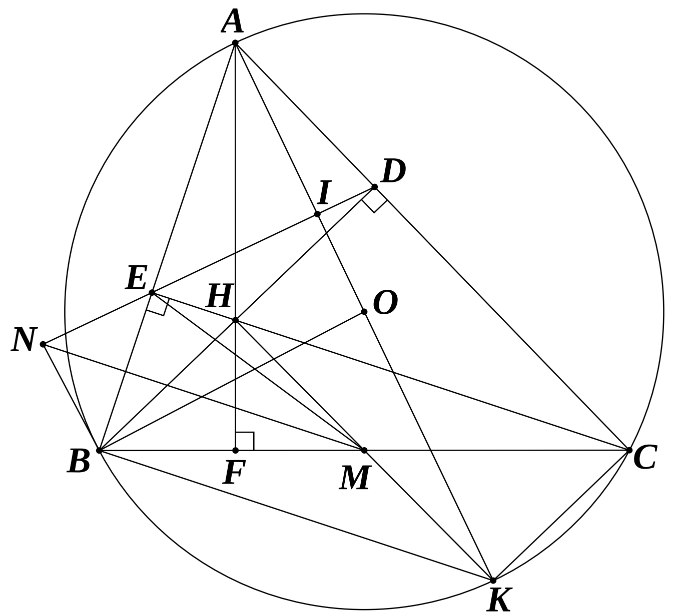
a) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp và ΔADE đồng dạng với ΔABC.

b) Vẽ đường kính AK của đường tròn O. Gọi giao điểm của AK và DE là I. Chứng minh $AK \perp DE$ và $DE.CF = EI.BC$.

c) Tiếp tuyến tại B của đường tròn O cắt DE tại N và giao điểm của HK với BC là M. Chứng minh CE song song với MN.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm

5 (3,0 điểm)	 Vẽ hình đúng hết phần a) 0,25 điểm.	
	a) (1,0 điểm)	
	Có $BEC = 90^\circ$ (CE là đường cao của ΔABC); và $BDC = 90^\circ$ (BD là đường cao của ΔABC).	0,25
	Vậy $BCDE$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	Xét ΔADE và ΔABC có BAC chung; $AED = ACB$ ($BCDE$ là tứ giác nội tiếp)	0,25
	Do đó $\Delta ADE \backsim \Delta ABC$ (g.g).	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Do $AED = ACB$ ($BCDE$ là tứ giác nội tiếp) mà $AKB = ACB$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB của O). nên $AED = AKB$ (1)	0,25
	Lại có $ABK = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn O). nên $AKB + BAK = 90^\circ$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $AED + BAK = 90^\circ \Rightarrow AIE = 90^\circ \Rightarrow AK \perp DE.$	0,25
	Xét ΔAIE và ΔAFC có $AIE = AFC = 90^\circ; AED = ACB$ ($BCDE$ là tứ giác nội tiếp) Do đó $\Delta AIE \backsim \Delta AFC$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EI}{FC} = \dfrac{AE}{AC}$.(3)	0,25
	Do $\Delta ADE \backsim \Delta ABC \Rightarrow \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AE}{AC}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $\dfrac{DE}{BC} = \dfrac{EI}{FC} \Leftrightarrow DE.FC = EI.BC.$	0,25

	c) (0,75 điểm)	
	Có $ABK = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn O) $\Rightarrow KB \perp AB$ mà $CE \perp AB$ (CE là đường cao của tam giác ABC) nên $BK // CE$ hay $BK // CH$	0,25
	Tương tự: $CK // BH$ Do đó $BHCK$ là hình bình hành suy ra M là trung điểm của BC. Lại có B, E, D, C thuộc đường tròn đường kính BC nên $MB = ME$ (5)	0,25
	Xét O có $NBE = ACB$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung). mà $ACB = NEB$ ($BCDE$ là tứ giác nội tiếp) suy ra $NBE = NEB \Rightarrow \Delta BNE$ cân tại $N \Rightarrow NB = NE$ (6) Từ (5) và (6) suy ra MN là đường trung trực của BE hay $MN \perp BE$. Vậy $MN // CE$.	0,25

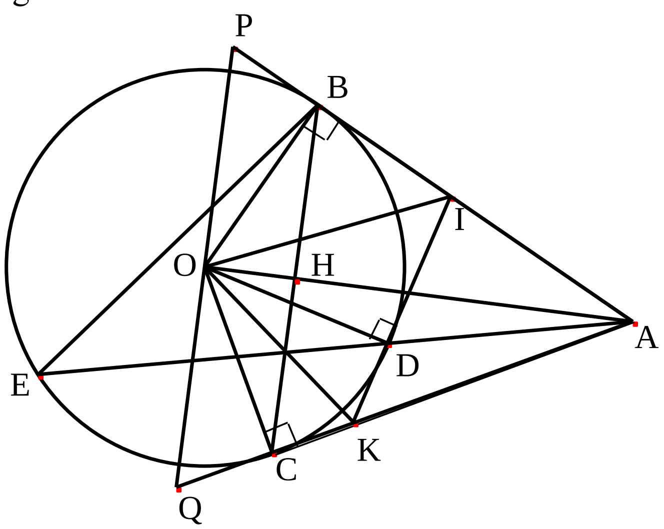
Bài 59. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Đường thẳng đi qua A không qua O cắt đường tròn (O) lần lượt tại hai điểm D và E ($AD < AE$).

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ nội tiếp và ΔABC cân

b) Gọi H là giao điểm của AO và BC.Chứng minh: AH.AO = AD.AE.

c) Tiếp tuyến tại D của đường tròn (O) cắt AB, AC theo thứ tự tại I, K. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB tại P và cắt AC tại Q.

Chứng minh rằng IP + KQ $\geq$ PQ

Bài	Đáp án	Điểm
5 **(3,0 điểm)**	Vẽ hình đúng cho câu a 	0,25
	1a.(1,0 điểm)	
	Xét (O) Ta có : $ABO = 90^0$ (Vì AB là tiếp tuyến tại M của (O))	0,25

	$ACO = 90^0$ (Vì AN là tiếp tuyến tại N của (O))	
	$\Rightarrow ABO + ACO = 180^0$ mà hai góc ABO, ACO ở vị trí đối nhau	0,25
	$\Rightarrow$Tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn	0,25
	Xét (O): có AB và AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A của (O) nên OA = OB (tính chất) $\Rightarrow$ ΔABC cân tại A	0,25
	1b.(1,0 điểm)	
	Xét ΔOBC có OB = OC (là bán kính (O)) $\Rightarrow$ ΔOBC cân tại O Lại có OA là tia phân giác của BOC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow$ OA là đường trung trực của BC $\Rightarrow$ OA $\perp$ BC tại H	0,25
	ΔOAB vuông tại B, BH là đường cao (c/m trên) $\Rightarrow$ AH.AO = AB ^{2} (hệ thức cạnh và góc trong tam giác vuông) (1)	0,25
	Xét ΔABD và ΔAEB có: BAE là góc chung $ABD = DEB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BD) hay $ABD = AEB$ $\Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta AEB$(g.g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow$ AB^2 = AD.AE. (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AH.AO = AD.AE.	0,25
	1c.(0,75 điểm)	
	ΔAPQ có AO vừa là đường cao vừa là đường phân giác $\Rightarrow$ ΔAPQ cân tại A $\Rightarrow OPI = PQK = \frac{180^0 - PAQ}{2}$ (1) Mặt khác: $BOC = 180^0 - BAC$ (tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn) Theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có OI, OK lần lượt là tia phân giác của BOD , DOC $\Rightarrow$ $IOD = \frac{1}{2}BOD; DOK = \frac{1}{2}DOC$ $\Rightarrow IOK = \frac{1}{2}\left(BOD + DOC\right) = \frac{1}{2}BOC = \frac{180^0 - BAC}{2}$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) có $OPI = IOK$ Mà $IOQ = OPI + OIP$ (góc ngoài ΔOIP); $IOQ = KOI + KOQ$ $\Rightarrow KOQ = OIP$ Xét ΔOPI và ΔKQO có $KOQ = OIP$; $OPI = PQK$ (cmt) $\Rightarrow \Delta OPI \sim \Delta KQO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{OP}{KQ} = \frac{IP}{OQ} \Rightarrow$ IP.KQ = OP.OQ.	0,25
	Áp dụng BĐT Cô - si cho hai số dương, ta có : $IP + KQ \geq 2\sqrt{IP.KQ} \Rightarrow IP + KQ \geq 2\sqrt{OP.OQ}$ Mặt khác ΔAPQ cân tại A, AO là đường cao nên AO đồng thời là đường trung tuyến $\Rightarrow$ OP = OQ = $\frac{1}{2}$ PQ. Do đó $IP + KQ \geq PQ$	0,25

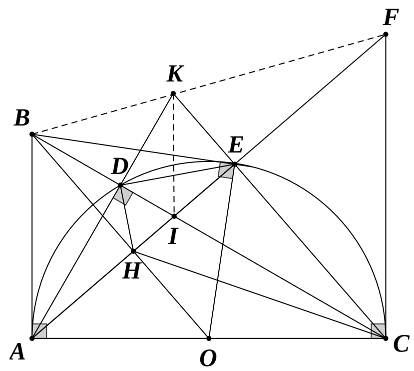
Bài 60 . Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AC chứa điểm B vẽ nửa đường tròn (O) đường kính AC, nửa đường tròn này cắt BC tại D. Vẽ tiếp tuyến BE của nửa đường tròn (O) (với E là tiếp điểm, E khác A). BO cắt AE tại điểm H.

a) Chứng minh $BAOE$ nội tiếp và $BH.BO = BD.BC$.

b) Chứng minh $DHOC$ là tứ giác nội tiếp và $BHD = OHC$.

c) Tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn (O) cắt AE tại F, AD cắt CE tại K. Chứng minh ba điểm B, K, F thẳng hàng.

DAP AN

Bài	Đáp án	Điểm
	Vẽ hình đúng cho câu a 	0,25
	a)1,0 điểm	
Bài 5 (3,0 điểm)	$BAO = 90^0$ (ΔABC vuông tại A) $BEO = 90^0$ (BE là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O)) Tứ giác $ABEO$ có: $BAO + BEO = 90^0 + 90^0 = 180^0$ $\Rightarrow ABEO$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)	0,25 0,25
	Ta có $BA = BE \Rightarrow B$ thuộc trung trực của đoạn AE. Ta có $OA = OE \Rightarrow O$ thuộc trung trực của đoạn AE. Suy ra BO là trung trực của đoạn $AE \Rightarrow BO \perp AE$ tại H. + Chứng minh được $BH.BO = BE^2$	0,25
	+ Chứng minh $BD.BC = BE^2$ Suy ra $BH.BO = BD.BC$.	0,25
	b) 1,0 điểm	
	+ Xét ΔBHD và ΔBCO có: OBC góc chung, $\dfrac{BH}{BD} = \dfrac{BC}{BO}$ (câu a) Suy ra $\Delta BHD \sim \Delta BCO$ (c.g.c)	0,25

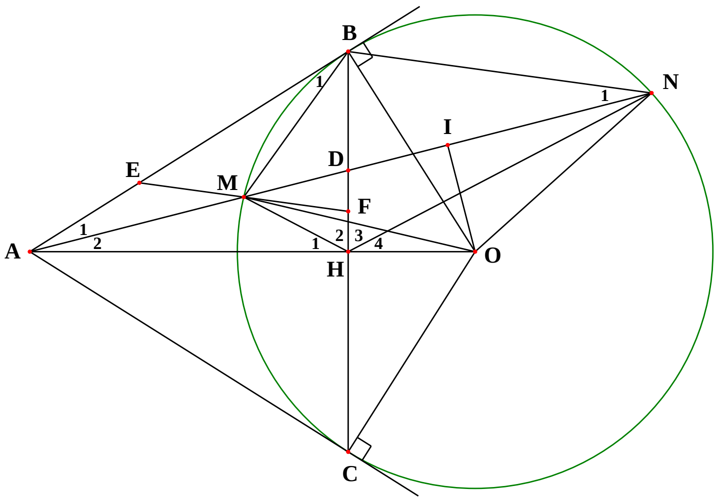
	$\Rightarrow BHD = BCO \Rightarrow DHOC$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	+ Vì $DHOC$ là tứ giác nội tiếp nên $OCD = BHD, ODC = OHC.$ Ta có ΔOCD cân tại $O\,(OC = OD) \Rightarrow OCD = ODC.$	0,25
	Từ hai điều trên suy ra $\Rightarrow DHB = CHO.$	0,25
	c) 0,75 điểm	
	+ Từ câu b suy ra HI là phân giác của CHD, mà $HI \perp HB$ suy ra HB là phân giác ngoài tại đỉnh H của $\Delta DHC \Rightarrow \frac{ID}{BD} = \frac{IC}{BC}$ (1) + Chỉ ra được I là trực tâm của $\Delta AKC \Rightarrow KI \perp AC \Rightarrow KI\,//\,AB$ $\Rightarrow \frac{KI}{AB} = \frac{ID}{BD}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\Rightarrow \frac{KI}{AB} = \frac{IC}{BC}$ (3)	0,25
	Ta có $AB\,//\,CF \Rightarrow \frac{IC}{IB} = \frac{IF}{IA} \Rightarrow \frac{IC}{BC} = \frac{IF}{AF}$ (4)	0,25
	Từ (3) và (4) $\Rightarrow \frac{KI}{AB} = \frac{IF}{AF}$ mà $FIK = FAB$ (đồng vị) Suy ra $\Delta FIK \sim \Delta FAB \Rightarrow AFK = AFB$ $\Rightarrow$ hai tia FK và FB trùng nhau $\Rightarrow$ đpcm	0,25

Bài 61. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AO chứa điểm B vẽ cát tuyến AMN với đường tròn (O) ($AM < AN, MN$ không đi qua O) . Gọi I là trung điểm của MN .

a) Chứng minh: Tứ giác $AIOC$ nội tiếp.
b) Gọi H là giao điểm của AO và BC. Chứng minh: $AH.AO = AM.AN$ và tứ giác $MNOH$ là tứ giác nội tiếp.
c) Qua M kẻ đường thẳng song song với BN, cắt AB và BC theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng M là trung điểm của EF .

DAPAN

Bài	**Đáp án**	**Điểm**

	Vẽ đúng hình cho phần a 	0,25
	a) 1,0 điểm	
	Đường tròn (O) có $ACO = 90^0$ (AC là tiếp tuyến) Mà I là trung điểm của MN (gt) $\Rightarrow OI \perp MN$ (liên hệ đường kính và dây) $\Rightarrow AIO = 90^o$ Tứ giác $AIOC$ có: $AIO + ACO = 90^o + 90^o = 180^o$ $\Rightarrow AIOC$ là tứ giác nội tiếp.	0,25 0,25 0,25 0,25
Bài 5 (3,0 điểm)	**b) 1,0 điểm**	
	Đường tròn (O) có: ABM là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung MB ANB là góc nội tiếp chắn cung MB $\Rightarrow ABM = ANB$ $\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta ANB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow AB^2 = AM.AN$ (1) Ta có: $AB = AC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) $OB = OC$ $\Rightarrow AO$ là đường trung trực của BC $\Rightarrow BH \perp AO$ ΔABO vuông tại B, có BH là đường cao $\Rightarrow AB^2 = AH.AO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH.AO = AM.AN$ $\Rightarrow \frac{AH}{AN} = \frac{AM}{AO}$ $\Rightarrow \Delta AHM \sim \Delta ANO$(c.g.c) $\Rightarrow AHM = ANO$ Tứ giác $MNOH$ có $AHM = ANO$ $\Rightarrow MNOH$ là tứ giác nội tiếp(dhnb).	0,25 0,25 0,25 0,25
	c) 0,75 điểm	
	Gọi D là giao điểm của AN và BC	

	Vì $MNOH$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \text{OMN} = \text{OHN}$ ΔOMN cân tại O $\Rightarrow \text{OMN} = \text{ONM} \Rightarrow \text{OHN} = \text{ONM}$ Mà $\text{AHM} = \text{ONM}$ (theo phần b) $\Rightarrow \text{AHM} = \text{OHN}$ Mặt khác: $\text{AHM} + \text{MHD} = \text{DHN} + \text{NHO} = 90^{\text{o}}$ $\Rightarrow \text{MHD} = \text{DHN}$ $\Rightarrow HD$ là đường phân giác trong của ΔHMN Lại có $\text{HA} \perp \text{HD}$ $\Rightarrow HA$ là đường phân giác ngoài của ΔHMN Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác, ta có: $\dfrac{\text{DM}}{\text{DN}} = \dfrac{\text{HM}}{\text{HN}}$ và $\dfrac{\text{AM}}{\text{AN}} = \dfrac{\text{HM}}{\text{HN}} \Rightarrow \dfrac{\text{DM}}{\text{DN}} = \dfrac{\text{AM}}{\text{AN}}$ (3)	0,25

	Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét, ta có:
	ΔABN có $\text{ME}//\text{BN} \Rightarrow \dfrac{\text{ME}}{\text{BN}} = \dfrac{\text{AM}}{\text{AN}}$ (4)
	ΔDBN có $\text{MF}//\text{BN} \Rightarrow \dfrac{\text{MF}}{\text{BN}} = \dfrac{\text{DM}}{\text{DN}}$ (5)
		0,25

	Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \dfrac{\text{ME}}{\text{BN}} = \dfrac{\text{MF}}{\text{BN}} \Rightarrow \text{ME} = \text{MF}$ Vậy M là trung điểm của EF.	0,25

Bài 62. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Trên nửa đường tròn (O) lấy điểm M sao cho MA < MB. Tiếp tuyến với nửa đường tròn (O) tại M cắt cắt tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở D và C.

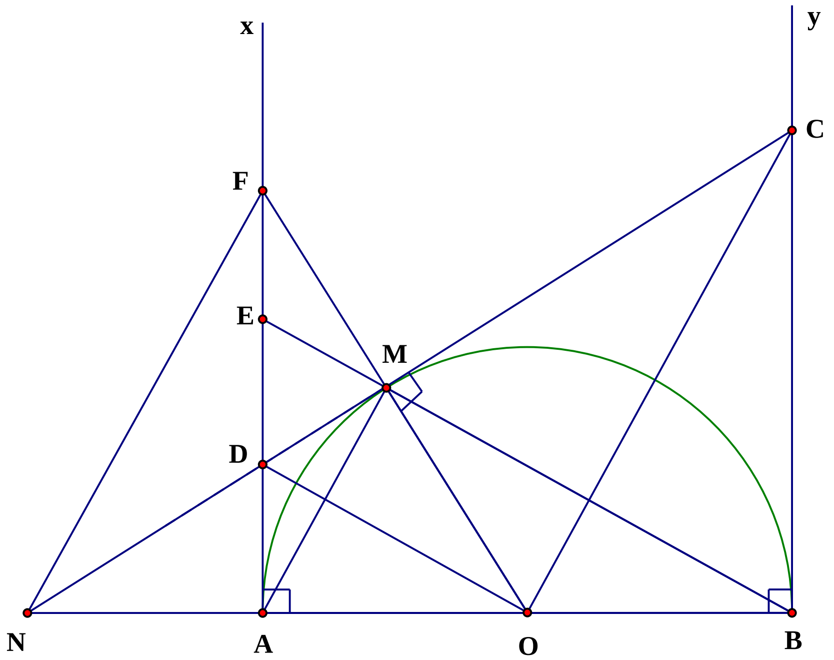
a) Chứng minh rằng tứ giác ADMO nội tiếp một đường tròn và AD.BC = R^2.

b) Đường thẳng DC cắt đường thẳng AB tại N; tia OM cắt tia Ax ở F; tia BM cắt tia Ax ở E. Chứng minh: tứ giác AMFN là hình thang cân.

c) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn (O) để DE = EF.

DAPAN

Nội dung	Điểm

Hình vẽ đúng cho phần a) được 0,25 điểm  	0,25
a) 1,0 điểm	
- Tứ giác ADMO có $DAO + DMO = 180^0$, mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác ADMO nội tiếp đường tròn. - Dùng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau để chứng minh $DOC = 90^0$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác DOC vuông tại O có OM là đường cao, ta có : $DM.MC = OM^2$. Mà DM = AD, MC = BC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và OM = R Do đó $AD.BC = R^2$	0,25 0,25 0,25 0,25
b) 1,0 điểm	
Do AD = DM và OA = OM $\Rightarrow$ OD là đường trung trực của đoạn thẳng AM $\Rightarrow DO \perp AM$. Vì $FA \perp ON$; $NM \perp OF$ (tính chất tiếp tuyến) và FA cắt MN tại D. $\Rightarrow$ D là trực tâm của $\Delta FON \Rightarrow DO \perp FN$. Vậy AM//FN. Vì ΔOAM cân ở O $\Rightarrow OAM = OMA$. Do AM//FN $\Rightarrow FNO = MAO$ và $AMO = NFO$ (hai góc đồng vị) $\Rightarrow FNO = NFO$. Vậy tứ giác ANFM là hình thang cân.	0,25 0,25 0,25 0,25

c) 0,75 điểm	
Do DE = EF nên EM là trung tuyến của tam giác vuông FDM. $\Rightarrow$ ED = EM (1)	0,25
Vì $DMA = DAM$ và $DMA + EMD = 90^0$; $DAM + EMD = 90^0$ $\Rightarrow EDM = DEM$ hay ΔEDM cân ở D hay $DM = DE$. (2) Từ (1) và (2) suy ra ΔEDM là tam giác đều. $\Rightarrow$ ODM = $60^0 \Rightarrow$ AOM = 60^0.	0,25
Vậy M nằm ở vị trí trên nửa đường tròn sao cho AOM = 60^0.	0,25

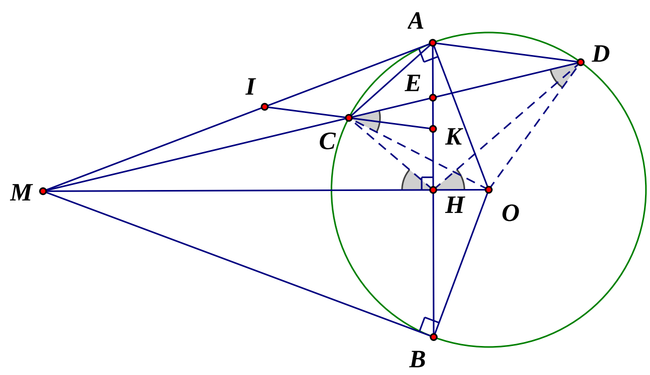
Bài 63. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm)

a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

b) Từ M kẻ cát tuyến MCD với đường tròn (C nằm giữa M và D), tia MD nằm giữa hai tia MA và MO. Tia MO cắt AB tại H. Chứng minh: $MC.MD = MH.MO$

c) Qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt AM tại I, cắt AB tại K. Chứng minh C là trung điểm của IK.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
	Vẽ hình đúng cho câu a 	0,25
	a) Chứng minh tứ giác MAOB nội tiếp.	
	MA là tiếp tuyến của (O) tại A nên $MA \perp OA \Rightarrow MAO = 90^0$ MB là tiếp tuyến của (O) tại B nên $MB \perp OB \Rightarrow MBO = 90^0$	0,25 0,25

Bài 5 **(3,0 điểm)**	Xét tứ giác $MAOB$ ta có: $MAO + MBO = 180^0$ Mà MAO và MBO đối nhau Suy ra $MAOB$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).	 0,25 0,25
	b) Chứng minh $MC.MD = MH.MO$	
	Xét ΔMDA và ΔMAC có: AMD chung $MDA = MAC$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn AC của (O)) $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ $(g.g)$	0,25
	Suy ra được $MC.MD = MA^2$ (1)	0,25
	Có MA, MB là hai tiếp tuyến của (O) cắt nhau tại M nên $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Lại có $OA = OB$ (bán kính (O)) Suy ra MO là đường trung trực của AB nên $MO \perp AB$ hay $AH \perp MO$ tại H Xét ΔMAO có $MAO = 90°$; $AH \perp MO$ tại H Suy ra $MA^2 = MH.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $MC.MD = MH.MO$	0,25
	c) Chứng minh C là trung điểm của IK.	
	Gọi E là giao điểm của MD và AB, theo hệ quả của định lí Talet ta có: IC // AD $\Rightarrow \dfrac{IC}{AD} = \dfrac{MC}{MD}$ (1) CK // AD $\Rightarrow \dfrac{CK}{AD} = \dfrac{CE}{ED}$ (2) Theo câu b, có MC. MD = MH. MO $\Rightarrow \dfrac{MC}{MO} = \dfrac{MH}{MD}$. Xét ΔMCH và ΔMOD có: CMH chung $\dfrac{MC}{MO} = \dfrac{MH}{MD}$ (cmt) $\Delta MCH \backsim \Delta MOD (c.g.c)$	0,25

	$\Rightarrow MHC = MDO$ (3)	
	$\Rightarrow$Tứ giác $OHCD$ nội tiếp (một góc trong của tứ giác bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $OHCD$ có $OHD = OCD$ (4) (2 góc nội tiếp cùng chắn OD của đường tròn) Mặt khác: $OCD = ODC$ (do ΔCOD cân tại O) (5) Từ (3), (4), (5) suy ra $MHC = OHD \Rightarrow CHE = EHD$ (vì $OM \perp AB$) => HE là tia phân giác của góc $CHD \Rightarrow \frac{CH}{HD} = \frac{EC}{ED}$ (6)	0,25
	+ Lại có $MH \perp HE \Rightarrow HM$ là tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh H của tam giác $\Delta CHD \Rightarrow \frac{CH}{HD} = \frac{MC}{MD}$ (7) + Từ (6) và (7) suy ra $\frac{EC}{ED} = \frac{MC}{MD}$ (8) + Từ (1), (2), (8) suy ra $\frac{IC}{AD} = \frac{CK}{AD} \Rightarrow IC = CK$ => C là trung điểm của IK (đpcm).	0,25

Bài 64. Cho đường tròn (O) từ điểm P nằm ngoài đường tròn,kẻ hai tiếp tuyến PA và PB với đường tròn. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm M, qua M dựng đường thẳng vuông góc với OM đường thẳng này cắt PA, PB lần lượt ở C và D.

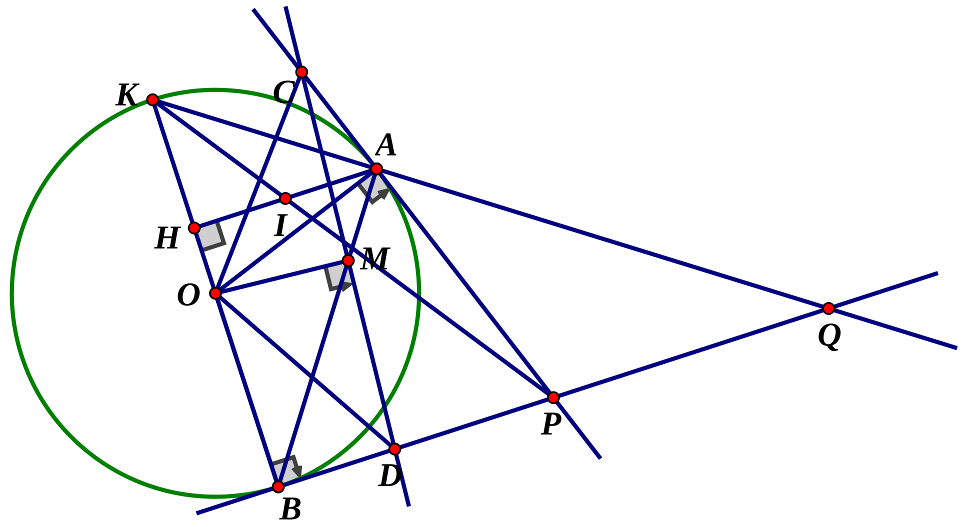
a) Chứng minh tứ giác $ACOM$ nội tiếp.

b) Chứng minh: $COD = AOB$

c) Vẽ đường kính BK của đường tròn (O), hạ $AH \perp BK$. Gọi I là giao điểm của AH với PK. Chứng minh $AI = AH$.

DAPAN

Bài	**Nội dung**	**Điểm**
	Vẽ hình đúng cho câu a	0,25

		
Bài 5 **(3,0 điểm)**	**a) Chứng minh tứ giác ACOM nội tiếp**	
	PA là tiếp tuyến của (O) tại A nên $PA \perp OA \Rightarrow PAO = 90^0$ hay $CAO = 90^{\circ}$ $OM \perp CD(gt) \Rightarrow OMC = 90^0$	0,25 0,25
	Xét tứ giác $ACOM$ ta có: $CAO = COM = 90^{\circ}$ Suy ra hai đỉnh A và M cùng nhìn cạnh CO dưới một góc không đổi bằng 90°. Vậy $ACOM$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).	0,25 0,25
	b) Chứng minh: $COD = AOB$	
	Xét tứ giác ACOM nội tiếp có: $OCM = OAM$ (1) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OM)	0,25
	PB là tiếp tuyến của (O) tại B nên $PB \perp OB \Rightarrow PBO = 90^0$ hay $OPD = 90^{\circ}$ $OM \perp CD(gt) \Rightarrow OMD = 90^0$ Xét tứ giác $BDMO$ ta có: $OPD + OMD = 90^{\circ} + 90^{\circ} = 180^{\circ}$ Mà OPD và OMD là hai góc đối của tứ giác $BDMO$. Vậy $BDMO$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp). $\Rightarrow ODM = OBM$ (2) (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OM)	0,25
	Xét ΔAOB có:	0,25

	$AOB+OAB+OBA=180^\circ$ (3) (tổng ba góc trong một tam giác) Xét ΔCOD có: $COD+OCD+ODC=180^\circ$ (4) (tổng ba góc trong một tam giác)	
	Từ (1), (2), (3) suy ra $AOB=COD$	0,25
	c) Chứng minh AI=IH.	
	Kéo dài KA cắt PB tại Q Có $PA=PB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow \Delta PAB$ cân tại P $\Rightarrow PBA=PAB$ (4) $BAK=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BAQ=90^\circ$ $\Rightarrow PAB+PAQ=90^\circ$ (5)	0,25
	Xét ΔBAQ vuông tại A có: $PBA+AQP=90^\circ$ (6) Từ (4), (5), (6) suy ra $AQP=PAQ \Rightarrow \Delta PAQ$ cân tại P $\Rightarrow PA=PQ$ Mà $PA=PB$ (cmt) suy ra $PA=PB=PQ$ Có $\left.\begin{matrix} AH\perp BK \\ QB\perp BK \end{matrix}\right\} \Rightarrow AH//QB$ (quan hệ từ vuông góc đến song song) $\Rightarrow IH//PB; AI//PQ$	0,25
	Xét ΔKBP có $IH//PB$ ta có: $\dfrac{KI}{KP}=\dfrac{IH}{PB}$ (hệ quả định lý Talet) Xét ΔKPQ có $AI//PQ$ ta có: $\dfrac{KI}{KP}=\dfrac{AI}{PQ}$ (hệ quả định lý Talet) Suy ra $\dfrac{IH}{PB}=\dfrac{AI}{PQ}$ mà $PB=PQ$ nên $IH=AI$	0,25

Bài 65. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt B,C (O không thuộc (d); B nằm giữa A và C) và gọi H là trung điểm của BC.

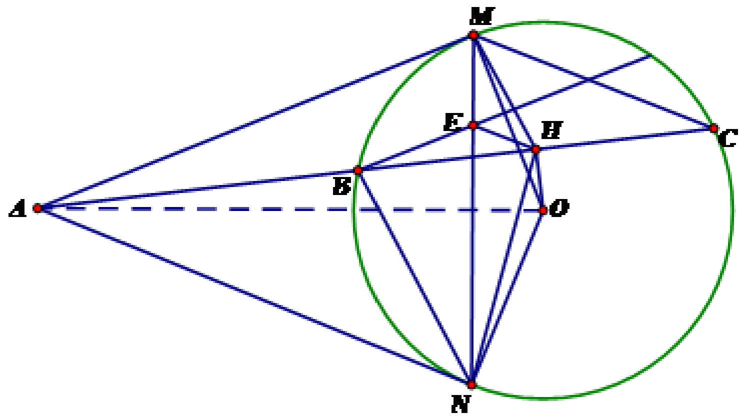
a) Chứng minh các điểm O, H, M, A, N cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đi qua 5 điểm O, H, M, A, N

b) Chứng minh AM. AN = AB. AC và HA là tia phân giác của MHN.

c) Lấy điểm E trên MN sao cho BE song song với AM. Chứng minh HE // CM.

DAPAN

Bài	**Đáp án**	**Điểm**
5	Vẽ hình đúng cho câu a	0,25

(3,0 điểm)		
	1a.(1,0 điểm)	
	Xét (O) Ta có : $AMO = 90^0$ (Vì AM là tiếp tuyến tại M của (O)) $ANO = 90^0$ (Vì AN là tiếp tuyến tại N của (O))	0,25
	Lại có BC là dây không đi qua O và H là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow OH \perp BC$ tại H $\Rightarrow AHO = 90^0$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)	0,25
	$\Rightarrow$M, H, N thuộc đường tròn đường kính MO (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow$O, H, M, A, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO.	0,25
	Tâm của đường tròn đi qua 5 điểm O, H, M, A, N là trung điểm AO.	0,25
	1b.(1,0 điểm)	
	Xét ΔAMB và ΔACM Có MAC là góc chung và $AMB = MCB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung MB) $\Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta ACM$ (g-g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$ $\Rightarrow$AM.AM = AB. AC Mà AM = AN (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Suy ra : AM. AN = AB. AC	0,25
	Ta có các điểm O, H, M, A, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO (chứng minh trên) Mà AM = AN (chứng minh trên)	0,25

	$\Rightarrow$ AM = AN (tính chất)	
	$\Rightarrow MHA = NHA$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) Do đó HA là tia phân giác của MHN	0,25
	1c.(0,75 điểm)	
	Theo giả thiết AM//BE nên $MAC = EBH$ (đồng vị) (1) Do 5 điểm A, M, H, O, N cùng thuộc một đường tròn nên: $MAH = MNH$ (hai góc nội tiếp chắn cung MH) (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $EBH = MNH$ hay $ENH = EBH$ $\Rightarrow$ tứ giác EBNH nội tiếp	0,25
	$\Rightarrow EHB = ENB$(hai góc nội tiếp cùng chắn cung EB) Mà $ENB = MCB$(góc nội tiếp chắn cung MB) $\Rightarrow EHB = MCB$ mà hai góc ở vị trí đồng vị $\Rightarrow$ EH // MC.	0,25

Bài 66. Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn O , các đường cao AD, BE và CF cắt nhau tại H.

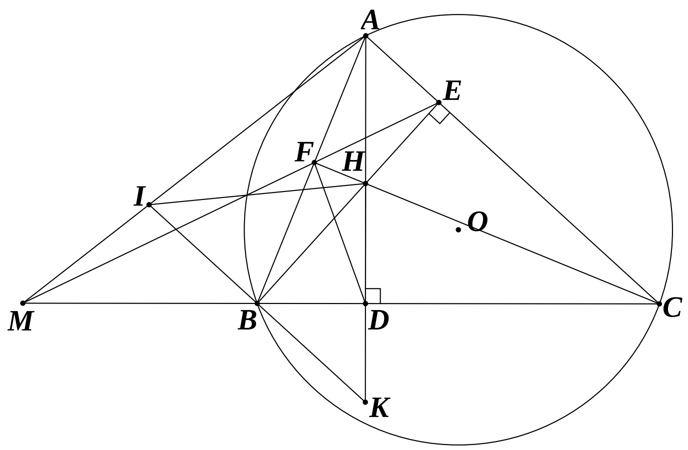
a) Chứng minh tứ giác $BDHF$ và $BCEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh FC là tia phân giác của EFD.

c) Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại M. Đường thẳng qua B và song song với AC cắt AM tại I và cắt AH tại K. Chứng minh tam giác HIK là tam giác cân.

DAPAN

5	**(3.0 điểm)**

(3,0 điểm)	 Vẽ hình đúng hết phần a) 0,25 điểm.	
	a) (1,0 điểm)	
	Có $BDH = 90^\circ$ (AD là đường cao của ΔABC); $BFH = 90^\circ$ (CF là đường cao của ΔABC)	**0,25**
	Do đó $BDH + BFH = 180^\circ$. Nên $BDHF$ là tứ giác nội tiếp.	**0,25**
	Có $BFC = 90^\circ$ (CF là đường cao của ΔABC) $BEC = 90^\circ$ (BE là đường cao của ΔABC)	**0,25**
	Xét tứ giác $BCEF$ có $BEC = BFC = 90^\circ$ $\Rightarrow$ Suy ra bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn. $\Rightarrow BCEF$ là tứ giác nội tiếp.	**0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	Tứ giác $BDHF$ nội tiếp có $\Rightarrow CFD = EBC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung HD).	**0,5**
	Tứ giác $BCEF$ nội tiếp có $\Rightarrow EFC = EBC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung EC).	**0,25**
	Do đó $CFD = EFC$ hay FC là tia phân giác của EFD.	**0,25**
	c) (0,75 điểm)	
	Xét ΔMAC có $BI \mathbin{//} AC$ nên $\dfrac{BI}{AC} = \dfrac{MB}{MC}$ (hệ quả định lý Talet). (1) Xét ΔBDK có $BK \mathbin{//} AC$ nên $\dfrac{BK}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$ (hệ quả định lý Talet). (2)	**0,25**
	Do FC là tia phân giác của EFD mà $FC \perp FB$ nên FB là tia phân giác của MFD	**0,25**

	Xét ΔMFD có FB là tia phân giác của MFD $\Rightarrow \dfrac{DF}{FM}=\dfrac{BD}{MB}$ (tính chất đường phân giác). Xét ΔMFD có FC là tia phân giác của EFD $\Rightarrow \dfrac{DF}{FM}=\dfrac{CD}{MC}$ (tính chất đường phân giác). Do đó $\dfrac{CD}{MC}=\dfrac{BD}{MB}\Leftrightarrow\dfrac{MB}{MC}=\dfrac{BD}{CD}$ (3)	
	Từ (1), (2) và (3) suy ra $\dfrac{BI}{AC}=\dfrac{BK}{AC}\Leftrightarrow BI=BK$ Lại có $IK\,//\,AC$ mà $BE\perp AC$ nên $BE\perp IK$ hay $BH\perp IK$ Xét ΔHIK có $BH\perp IK$ và HB là đường trung tuyến nên ΔHIK cân tại H.	**0,25**

Bài 67. Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không nằm trên đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

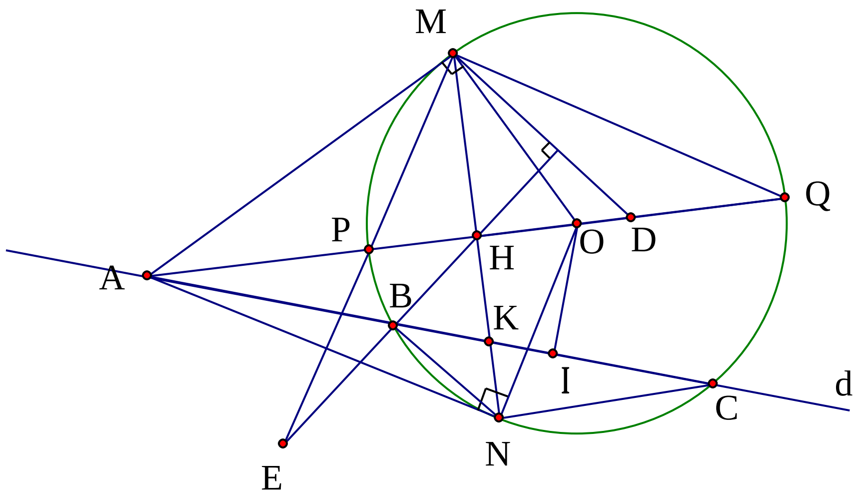
a. Chứng minh 5 điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn.

b. Chứng minh AB.AC = AH.AO và điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.

c. Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm của ME.

DAPAN

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 5: **(3 điểm)**	1.Vẽ hình đúng để làm câu a	0.25



	1.a) (1,0 đ) Chứng minh 5 điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn.	
	Ta có $\widehat{AMO} = 90^0$ (do AM là hai tiếp tuyến (O))	0,25
	$\widehat{ANO} = 90^0$ (do AN là hai tiếp tuyến (O))	0,25
	I là trung điểm của BC (dây BC không đi qua O) $\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow \widehat{OIA} = 90^0$	0,25
	Suy ra 3 điểm M, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA Hay 5 điểm A, M, O, I, N cùng thuộc một đường tròn	0,25
	1.b) (0,75 điểm) Chứng minh AB.AC = AH.AO và điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.	
	Chứng minh $OA \perp MN$ tại H ΔANO vuông tại N đường cao NH nên ta có AH.AO = AN^2 (1) (hệ thức lượng trong tam giác vuông)	0,25
	Chứng minh ΔABN đồng dạng với ΔANC(g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AB.AC = AN^2$ (2)	0,25

	Từ (1) và (2) ta có AB.AC = AH.AO (3)	
	Chứng minh $\Delta AHK \backsim \Delta AIO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AH}{AI}=\frac{AK}{AO} \Rightarrow AI.AK=AH.AO(4)$ Từ (3) và (4) $\Rightarrow AI.AK=AB.AC$ $\Rightarrow AK=\frac{AB.AC}{AI}$	0,25
	Ta có A,B,C cố định nên I cố định suy ra AK không đổi, mà A cố định, K là giao điểm của dây BC và dây MN nên K thuộc tia AB cố định suy ra K cố định.	0,25
	1.c) (0,75đ) Chứng minh P là trung điểm của ME.	
	Ta có $PMQ=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Chứng minh $\Delta MHE \backsim \Delta QDM$ (g.g)(Vì có $MEH=DMQ$ (cùng phụ với DMP), $EMH=MQD$ (cùng phụ với MPO)) $\Rightarrow \frac{ME}{MQ}=\frac{MH}{DQ}$ (5)	0,25
	Chứng minh $\Delta PMH \backsim \Delta MQH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MP}{MQ}=\frac{MH}{HQ}=\frac{MH}{2DQ}$ (6) (vì HQ = 2 DQ)	0,25
	Từ (5) và (6) $\Rightarrow \frac{MP}{MQ}=\frac{1}{2}\frac{ME}{MQ}$ $\Rightarrow$ ME = 2 MP $\Rightarrow$ P là trung điểm của ME.	0,25

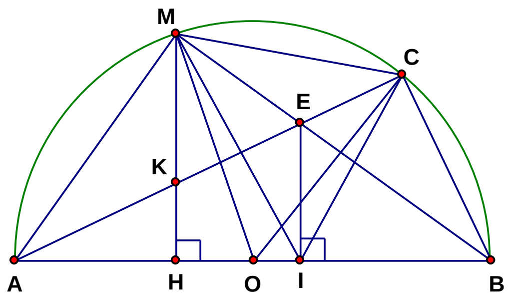
Bài 68. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Điểm C cố định trên nửa đường tròn. Điểm M thuộc cung AC (M ≠ A, C). Hạ $MH \perp AB$ tại H, tia MB cắt CA tại E, kẻ EI ⊥ AB tại I. Gọi K là giao điểm của AC và MH. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác BHKC là tứ giác nội tiếp và $AK.AC = AH.AB$

b) $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vị trí của điểm M trên cung AC.

c) Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔMIC luôn đi qua 2 điểm cố định

DAPAN

<table>
<tr><th>Thứ tự</th><th>Nội dung</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td>Bài 5</td><td>Vẽ hình đúng cho câu a

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="3">a</td><td>Chứng minh tứ giác BHKC là tứ giác nội tiếp và $AK.AC = AH.AB$</td><td></td></tr>
<tr><td>Ta có góc $ACB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)
Hay $KCB = 90^0$ ($K \in AC$)
Xét tứ giác $BHKC$, có:
$KHB = 90^0$ (vì MH ⊥ AB tại H)
$KCB = 90^0$ (cm trên)
$\Rightarrow$ $KCB + KHB = 180^0$, mà hai góc này là hai góc đối nhau .
Vậy tứ giác BHKC nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).</td><td>0,25

0,25</td></tr>
<tr><td>Xét ΔAHK và ΔACB là hai tam giác vuông có
A chung
$\Rightarrow$ $\Delta AHK \backsim \Delta ACB$ (g.g)
$\Rightarrow \dfrac{AK}{AB} = \dfrac{AH}{AC}$</td><td>0,25

0,25</td></tr>
</table>

	Suy ra $AK.AC = AH.AB$	
b	**Chứng minh $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vị trí của điểm M trên cung AC**	
	Xét ΔAIE và ΔACB là hai tam giác vuông có $\hat{A}$ chung nên $\Delta AIE \backsim \Delta ACB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AI}{AC}$ $\Rightarrow$AE.AC = AI.AB (1) Xét ΔBEI và ΔBAM là hai tam giác vuông có $\hat{B}$ chung nên ΔBEI ∽ ΔBAM (g.g) $\Rightarrow$ BE.BM = BI.AB (2) Từ (1) và (2) suy ra : $AE.AC + BE.BM = AB.AI + BI.AB = AB(AI + BI) = AB^2 = 4R^2$. Vậy $AE.AC + BE.BM$ không phụ thuộc vị trí của điểm M trên cung AC.	0,25 0,25 0,25 0,25
c	**Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔMIC luôn đi qua 2 điểm cố định**	
	Ta có $\widehat{AMB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Hay $\widehat{AME} = 90°$ ($E \in MB$) Xét tứ giác $AMEI$, có: $\widehat{AME} = 90°$(cmt); $\widehat{AIE} = 90°$(EI ⊥ AB tại I) $\Rightarrow \widehat{AME} + \widehat{AIE} = 180°$ mà hai góc này là hai góc đối nhau . Vậy tứ giác AMEI nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp). Suy ra $\widehat{MAE} = \widehat{MIE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ME của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AMEI) hay $\widehat{MAC} = \widehat{MIE}$ (3)	0,25
	Ta có $\widehat{ACB} = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Hay $\widehat{ECB} = 90°$ ($E \in AC$) Xét tứ giác $ECBI$, có: $\widehat{ECB} = 90°$ (cmt)	

	$\widehat{EIB} = 90°$ (EI ⊥ AB tại I) $\Rightarrow \widehat{ECB} + \widehat{EIB} = 180°$ mà hai góc này là hai góc đối nhau . Vậy tứ giác ECBI nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp). Suy ra $\widehat{EIC} = \widehat{EBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC của đường tròn ngoại tiếp tứ giác ECBI) hay $\widehat{EIC} = \widehat{MBC}$ (4)	0,25
	Lại có: $\widehat{MAC} = \widehat{MBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC của đường tròn tâm O) (5) Từ (3), (4), (5) suy ra $\widehat{EIC} = \widehat{MIE}$. Do đó $\widehat{MIC} = 2\widehat{MIE} = 2\widehat{MAC}$ Mặt khác: $\widehat{MOC} = 2\widehat{MAC}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung MC của đường tròn tâm O) Suy ra $\widehat{MIC} = \widehat{MOC}$ Xét tứ giác MOIC có $\widehat{MIC} = \widehat{MOC}$ Hai đỉnh I, O liên tiếp cùng nhìn đoạn thẳng MC dưới hai góc bằng nhau Nên tứ giác MOIC là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp) Mà điểm O, C là hai điểm cố định Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác MIC luôn đi qua hai điểm cố định.	0,25

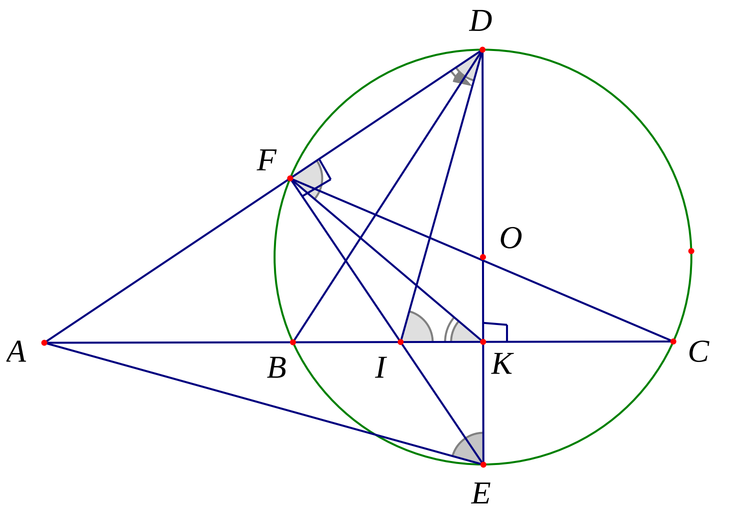
Bài 69. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng (điểm B nằm giữa A và C). Đường tròn (O) đi qua B và C, đường kính DE vuông góc với BC tại K. AD cắt (O) tại F; EF cắt AC tại I. Chứng minh

a) Tứ giác DFIK nội tiếp. Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác DFIK

b) $\widehat{DEA} = \widehat{DIK}$.

c) AI . KE . KD = KI . AB . AE

DAPAN

5			0,25
	a(1đ)	Ta có : $ED \perp BC \Rightarrow IKD = 90^0$ EFD là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow$ $EFD = 90^0$ Xét tứ giác DFIK có: $IKD + EFD = 180^0$, mà hai góc ở vị trí đối nhau Nên tứ giác DFIK nội tiếp Tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác DFIK là trung điểm của DI	0,25 0,25 0,25 0,25
	b(1đ)	Tứ giác DFIK nội tiếp $\Rightarrow$ $DFK = DIK$ (cùng chắn cung DK) Xét tứ giác AFKE có : $EKA = AFE = 90^0$ $\Rightarrow$ AFKE nội tiếp Nên $DEA = DFK$ Suy ra: $DEA = DIK$ (cùng bằng DFK)	0,25 0,25 0,25 0,25
	c(0,75đ)	- Tứ giác DFIK nội tiếp $\Rightarrow IKF = IDF$ (cùng chắn cung IF) $\Rightarrow \Delta AID \backsim \Delta AFK$ $\Rightarrow \dfrac{IA}{FA} = \dfrac{DA}{KA}$ $\Rightarrow IA.KA = DA.FA$ (1) - Trong (O) có $ACF = ADB$ $\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta ACF$ $\Rightarrow \dfrac{BA}{FA} = \dfrac{DA}{CA}$ $\Rightarrow BA.CA = DA.FA$ (2)	0,25 0,25

		Mặt khác: $DEA = DIK \Rightarrow \Delta AEK \sim \Delta DIK$ Nên: KE . KD = KA . KI (3) Từ (1); (2); (3) suy ra AI. KE. KD = AI . KA . KI = DA . FA . KI = AB . AC . KI	0,25

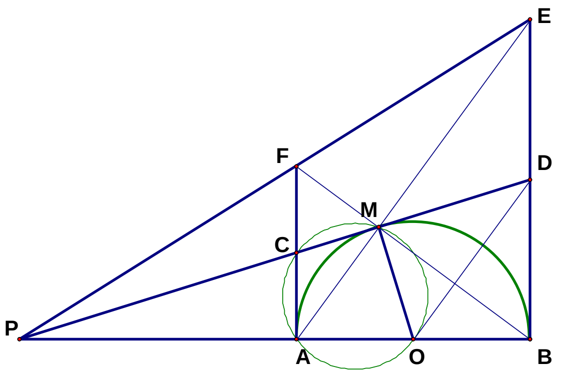
Bài 70. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Điểm M nằm trên nửa đường tròn (M ≠ A; B). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh rằng: tứ giác ACMO nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $CAM = ODM$

c) Gọi E là giao điểm của AM và BD; F là giao điểm của AC và BM. P là giao điểm của BA và DC. Chứng minh: E; F; P thẳng hàng.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
	1. Vẽ hình đúng cho phần a  	0,25
a **1,0 đ**	Vì AC và DB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) lần lượt tại A và B nên ta có: $CAO = CMO = 90^0$ (t/c tt)	0,5
	Xét tứ giác ACMO có: $CAO + CMO = 90^0 + 90^0 = 180^0$ Mặt khác: $CAO; CMO$ là hai góc đối nhau Suy ra: tứ giác ACMO nội tiếp	0,5
b **1 đ**	Xét đường tròn (O) có: $CAM = ABM\,(=\frac{1}{2}sđ\,AM)(1)$	0,25
	Chứng minh tứ giác BDMO nội tiếp	0,5

	$\Rightarrow ABM = ODM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OM) (2)	
	Từ (1) và (2) Suy ra $CAM = ODM$	0,25
c **0,75 đ**	Chứng minh được CA = CM = CF; DB = DM = DE	0,25
	Gọi G là giao điểm của PF và BD Vì AC//BD Áp dụng định lý Ta let và hệ quả chứng minh được $\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{DG}} = \frac{PC}{PD}; \frac{PC}{PD} = \frac{AC}{BD}; \frac{AC}{BD} = \frac{CF}{DE}$ Suy ra DE = DG hay G trùng E. Suy ra E; F; P thẳng hàng	0,5

Bài 71. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Trên đường tròn tâm O lấy điểm C (C không trùng với A, B và $CA > CB$). Các tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại A và C cắt nhau ở điểm D. Kẻ CH vuông góc với AB (H thuộc AB). Gọi E là giao điểm của AC và DO.

a) Chứng minh tứ giác $OECH$ nội tiếp.

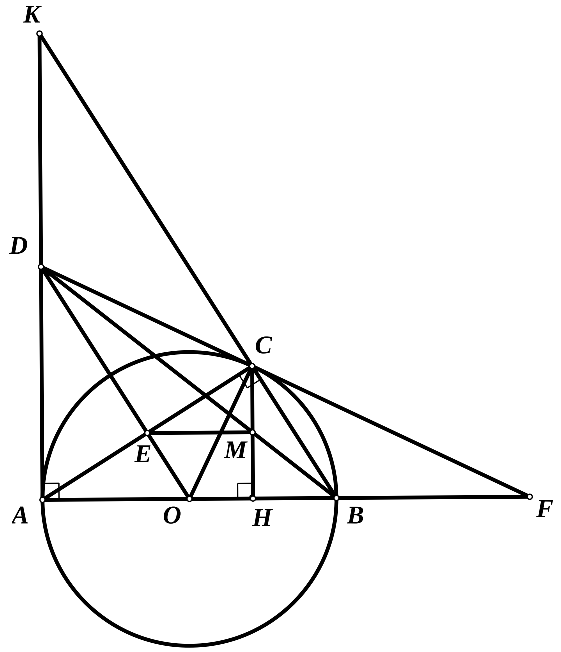
b) Đường thẳng CD cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh:

$2BCF + CFB = 90^0$.

c) BD cắt CH tại M. Chứng minh: EM//AB.

DAPAN

	Nội dung	Điểm
	Hình vẽ cho câu a)	0,25

Bài 5 **(3 điểm)**		
	a) 1,0 điểm	
	Vì DA và DC là các tiếp tuyến của đường tròn O nên $DA = DC$ Lại có $OA = OC$ nên OD là đường trung trực của đoạn AC. Suy ra $AC \perp DO$ tại E hay $CEO = 90^0$ Mặt khác $CHO = 90^0$ (vì $CH \perp AB$) Xét tứ giác $OECH$, ta có: CHO và CEO là hai góc đối nhau. Mặt khác $CHO + CEO = 90^o + 90^o = 180^o$. Do vậy tứ giác $OECH$ nội tiếp.	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) 1,0 điểm	
	Xét đường tròn O . Ta có BCF là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung BC. Suy ra $BCF = \frac{1}{2}$sđ BC hay $2BCF =$ sđ BC Lại có CFB là góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn chắn các cung AC và CB nên ta có: $CFB = \frac{1}{2}$(sđ $AC - \frac{1}{2}$sđ BC)	0,25 0,25
	Do đó $2BCF + CFB =$ sđ $BC + \frac{1}{2}$sđ $AC - \frac{1}{2}$sđ BC $= \frac{1}{2}$sđ $AC + \frac{1}{2}$sđ $BC = \frac{1}{2}$sđ $AB = 90^0$	0,25

	Vậy: $2BCF + CFB = 90^0$	0,25
	c) 0,75 điểm	
	Gọi K là giao điểm của các đường thẳng AD và BC Ta có $\triangle DCA$ cân tại A (vì $DA = DC$) nên $DAC = DCA$. Lại có $K + DAC = 90^0$, $DCK + DCA = 90^0$ Suy ra $K = DCK$. Vậy $\triangle DCK$ cân tại D. Từ đó $DK = DC = DA$	0,25
	Ta có $CH // AD \Rightarrow \dfrac{CM}{DK} = \dfrac{BM}{BD} = \dfrac{MH}{DA}$ Mà $DK = DA$ nên $CM = HM$ Lại có DO là đường trung trực của AC nên $EA = EC$. Từ đó suy ra ME là đường trung bình của $\triangle ACH$ Vậy $ME // AB$.	0,25 0,25

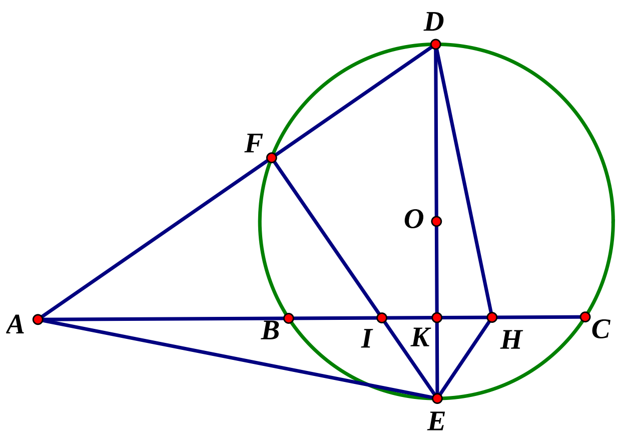
Bài 72. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ cát tuyến ABC (AB < AC) với đường tròn. Kẻ đường kính DE vuông góc với BC tại điểm K (E thuộc cung nhỏ BC), AD cắt đường tròn (O) tại điểm F, EF cắt BC tại điểm I.

a) Chứng minh rằng: Tứ giác DFIK nội tiếp.

b) Gọi H là điểm đối xứng của I qua K. Chứng minh rằng: $DHA = DEA$

c) Chứng minh hệ thức: $AI.KE.KD = KI.AB.AC$

DAPAN

Bài 5	**Đáp án**	**Điểm**
	Hình vẽ cho phần a) 	**0,25**
	Ta có: $DFI = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))	**0,25**
	$DKI = 90^0$ ($DE \perp BC$)	**0,25**

a) (1,0 điểm)	$\Rightarrow$ F và K cùng thuộc đường tròn đường kính DI $\Rightarrow$Tứ giác DFIK nội tiếp.	**0,25** **0,25**
b) (1,0 điểm)	Ta có $DE \perp BC$ tại K (gt) K là trung điểm của HI (tính chất đối xứng)	**0,25**
	Suy ra: I và H đối xứng nhau qua DE $\Rightarrow EHI = EIH$	**0,25**
	Tứ giác DFIK nội tiếp $\Rightarrow$ $EIH = ADK$ (cùng bù với góc FIK) Do đó: $ADK = IHE$	**0,25**
	Mặt khác: D và H cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AE Suy ra: Tứ giác ADHE nội tiếp $\Rightarrow$ $DHA = DEA$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DA)	**0,25**
c) (0.75 điểm)	**1c.** C/m: ΔEIK đồng dạng ΔADK (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EK}{AK} = \dfrac{IK}{DK} \Rightarrow EK.DK = IK.AK\ (1)$	**0,25**
	C/m: ΔAFI đồng dạng ΔAKD (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AF}{AK} = \dfrac{AI}{AD} \Rightarrow AF.AD = AI.AK$ (2)	
	C/m: ΔABD đồng dạng ΔAFC (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AF} = \dfrac{AD}{AC} \Rightarrow AB.AC = AD.AF\ (3)$	
	Từ (2) và (3) ta có: AB.AC = AI.AK $\Rightarrow$ IK.AB.AC = IK.AI.AK (4)	**0,25**
	Từ (1) và (4) ta có: IK.AB.AC = EK.DK.AI (đpcm)	**0,25**

Bài 73. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Trên nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AO chứa điểm B vẽ cát tuyến AMN với đường tròn (O) (AM < AN, MN không đi qua O). Gọi I là trung điểm của MN.

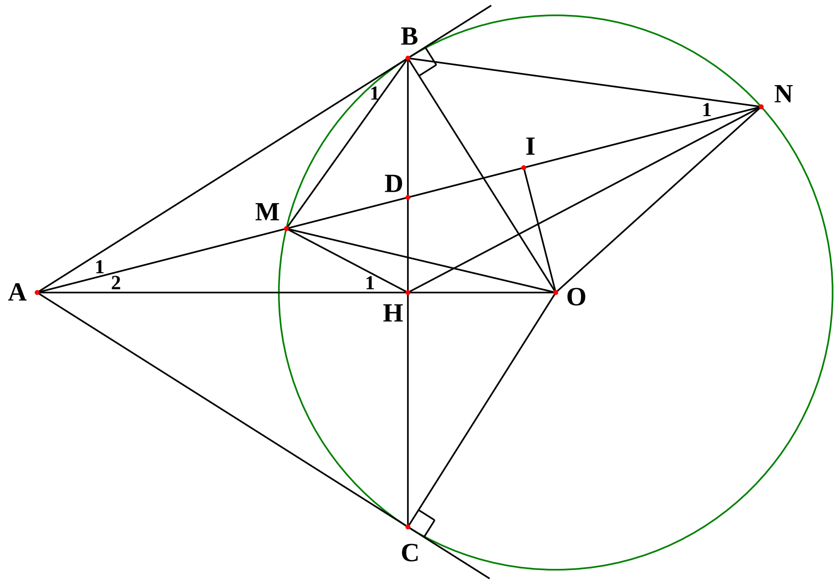
a) Chứng minh: Tứ giác AIOC là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi H là giao điểm của AO và BC. Chứng minh: AH.AO = AM.AN và tứ giác MNOH là tứ giác nội tiếp.

c) Qua M kẻ đường thẳng song song với BN, cắt AB và BC theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng M là trung điểm của EF.

DAPAN

Câu	Đáp án	Điểm
Bài 5 (2,75 điểm)	Vẽ đúng hình cho phần a	0,25



1a. (0,75 điểm)

Vì IM = IN (GT)

$\Rightarrow OI \perp MN$ (liên hệ đường kính và dây) — 0,25

$\Rightarrow AIO = 90^o$

Lại có $ACO = 90^o$ (AC là tiếp tuyến của (O)) — 0,25

Tứ giác AIOC có:

$$AIO + ACO = 90^o + 90^o = 180^o$$

$\Rightarrow$AIOC là tứ giác nội tiếp. — 0,25

1b. (1 điểm)

(O) có: B_1 là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung MB

N_1 là góc nội tiếp chắn cung MB — 0,25

$\Rightarrow B_1 = N_1$

ΔABM và ΔANB có: A_1 chung ; $B_1 = N_1$ — 0,25

$\Rightarrow \Delta ABM \backsim \Delta ANB$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AM}{AB} \Rightarrow AB^2 = AM.AN$ (1)

Ta có: AB = AC (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

OB = OC (= R)

$\Rightarrow$AO là đường trung trực của BC

$\Rightarrow BH \perp AO$

ΔABO vuông tại B (vì AB là tiếp tuyến của (O)), có BH là đường cao

$\Rightarrow AB^2 = AH.AO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (2) — 0,25

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AH.AO = AM.AN

$AH.AO = AM.AN \Rightarrow \dfrac{AH}{AN} = \dfrac{AM}{AO}$

ΔAHM và ΔANO có: A_2 chung ; $\dfrac{AH}{AN} = \dfrac{AM}{AO}$

<table>
<tr><td></td><td>

$\Rightarrow \Delta AHM \backsim \Delta ANO$ (c-g-c)

$\Rightarrow H_1 = ANO$

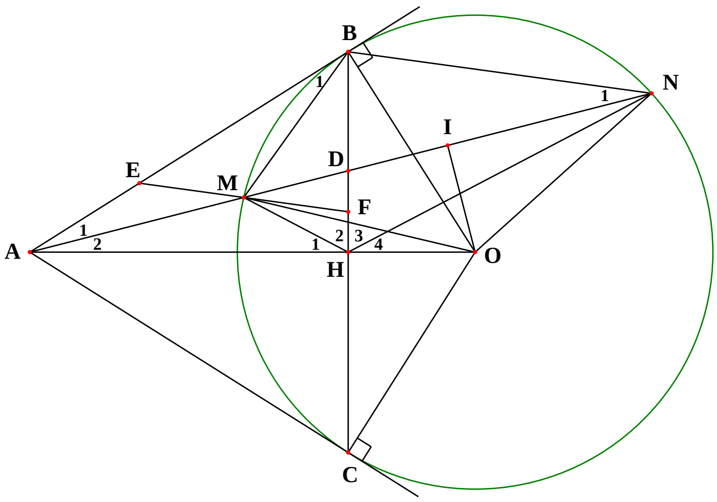
Tứ giác MNOH có $H_1 = ANO$

$\Rightarrow$MNOH là tứ giác nội tiếp.

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">

1c. (0,75 điểm)

</td></tr>
<tr><td></td><td>



Gọi D là giao điểm của AN và BC

MNOH là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow OMN = H_4$

ΔOMN cân tại O (vì OM = ON = R)

$\Rightarrow OMN = ONM \Rightarrow H_4 = ONM$

Mà $H_1 = ONM$ (theo phần 2)

$\Rightarrow H_1 = H_4$

Mặt khác: $H_1 + H_2 = H_3 + H_4 = 90^o$

$\Rightarrow H_2 = H_3$

$\Rightarrow$HD là đường phân giác trong của ΔHMN

Lại có HA $\perp$ HD

$\Rightarrow$HA là đường phân giác ngoài của ΔHMN

Áp dụng tính chất đường phân giác của tam giác, ta có:

$\frac{DM}{DN} = \frac{HM}{HN}$ và $\frac{AM}{AN} = \frac{HM}{HN} \Rightarrow \frac{DM}{DN} = \frac{AM}{AN}$ (3)

Áp dụng hệ quả của định lí Ta-lét, ta có:

ΔABN có ME // BN $\Rightarrow \frac{ME}{BN} = \frac{AM}{AN}$ (4)

ΔDBN có MF // BN $\Rightarrow \frac{MF}{BN} = \frac{DM}{DN}$ (5)

Từ (3), (4), (5) $\Rightarrow \frac{ME}{BN} = \frac{MF}{BN} \Rightarrow ME = MF$

Vậy M là trung điểm của EF.

</td><td>

0,25

0,25

0,25

</td></tr>
</table>

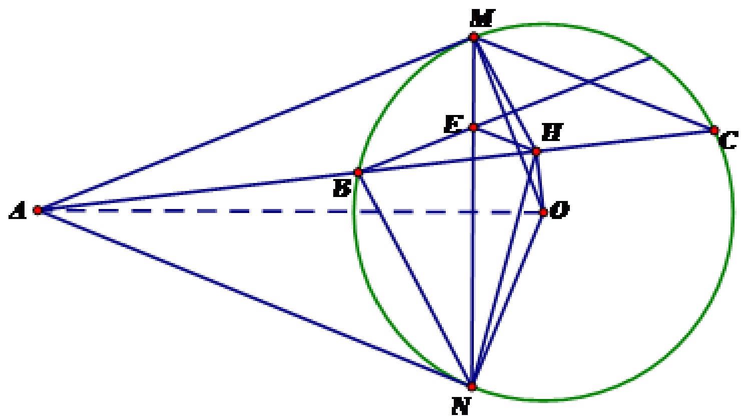
Bài 74. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt B,C (O không thuộc (d); B nằm giữa A và C) và gọi H là trung điểm của BC.

g) Chứng minh các điểm O, H, M, A, N cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đi qua 5 điểm O, H, M, A, N

h) Chứng minh AM. AN = AB. AC và HA là tia phân giác của MHN .

i) Lấy điểm E trên MN sao cho BE song song với AM. Chứng minh HE // CM.

DAPAN

Bài	Yêu cầu cần đạt	Điểm
	Vẽ hình đúng cho câu a 	0,25
	a.(1,0 điểm)	
	Xét (O) có : $AMO = 90^0$ (Vì AM là tiếp tuyến tại M của (O)) $ANO = 90^0$ (Vì AN là tiếp tuyến tại N của (O))	0,25
5 **(3,0 điểm)**	Lại có BC là dây không đi qua O và H là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow OH \perp BC$ tại H $\Rightarrow AHO = 90^0$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)	0,25
	$\Rightarrow$M, H, N thuộc đường tròn đường kính MO (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow$O, H, M, A, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO.	0,25
	Tâm của đường tròn đi qua 5 điểm O, H, M, A, N là trung điểm AO.	0,25
	b.(1,0 điểm)	
	Xét ΔAMB và ΔACM Có MAC là góc chung và $AMB = MCB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung MB)	0,25

	$\Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta ACM$ (g-g)	
	$\Rightarrow \dfrac{AM}{AC} = \dfrac{AB}{AM}$ $\Rightarrow$AM.AM = AB. AC Mà AM = AN (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Suy ra : AM. AN = AB. AC	**0,25**
	Ta có các điểm O, H, M, A, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO (chứng minh trên) Mà AM = AN (chứng minh trên) $\Rightarrow$ AM = AN (tính chất)	**0,25**
	$\Rightarrow MHA = NHA$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) Do đó HA là tia phân giác của MHN	**0,25**
	c.(0,75 điểm)	
	Theo giả thiết AM//BE nên $MAC = EBH$ (đồng vị) (1) Do 5 điểm A, M, H, O, N cùng thuộc một đường tròn nên: $MAH = MNH$ (hai góc nội tiếp chắn cung MH) (2)	**0,25**
	Từ (1) và (2) suy ra $EBH = MNH$ hay $ENH = EBH$ $\Rightarrow$ tứ giác EBNH nội tiếp	**0,25**
	$\Rightarrow EHB = ENB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EB) Mà $ENB = MCB$ (góc nội tiếp chắn cung MB) $\Rightarrow EHB = MCB$ mà hai góc ở vị trí đồng vị $\Rightarrow$ EH // MC.	**0,25**

Bài 75. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn(O), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi F và K lần lượt là giao điểm của AH với BC, DE.

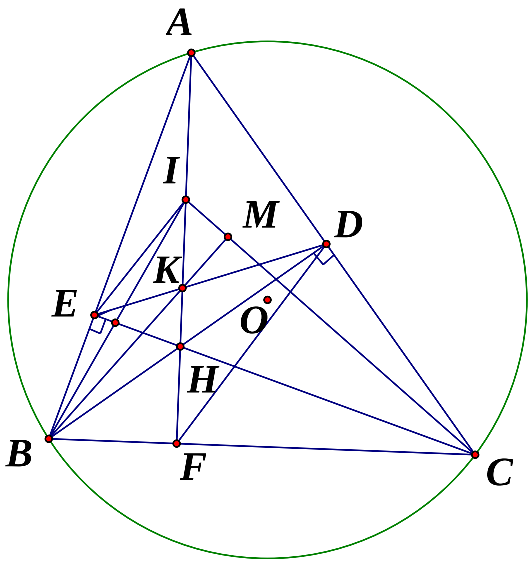
a) Chứng minh: Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn và xác định tâm I của đường tròn.

b) Chứng minh : DB là phân giác của góc EDF và $\dfrac{KH}{HF} = \dfrac{DK}{DF}$

c) Chứng minh BK $\perp$ CI.

DAP AN

Bài	Đáp án	Điểm

	 Vẽ hình đúng cho câu a	0,25
	a) (1,0 điểm) Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^0$ (vì BD ⊥ AC; CE ⊥ AB) $\Rightarrow$ A, E, H, D cùng thuộc đường tròn đường kính AH $\Rightarrow$ Tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn đường kính AH có tâm I là trung điểm của đường kính AH.	0,25 0,25 0,5
5 (3,0 Điểm)	**b) (1,0 điểm)** Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADHE có $\widehat{EAH} = \widehat{EDH}$(2 góc nội tiếp cùng chắn cung EH) Xét $\triangle$ ABC có 2 đường cao BD và EC cắt nhau tại H $\Rightarrow$H là trực tâm $\triangle$ ABC$\Rightarrow$ AF $\perp BC$ Vì BD, AF là đường cao của $\triangle$ ABC nên $\widehat{AFB} = \widehat{BDA} = 90^0$ $\Rightarrow$ A, D, F, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB $\Rightarrow$ Tứ giác ADFB là tứ giác nội tiếp (định nghĩa tứ giác nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{BDF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$) $\Rightarrow \widehat{EDH} = \widehat{BDF} \Rightarrow$DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$ DH là đường phân giác trong của $\triangle$ KDF $\Rightarrow \frac{HK}{HF} = \frac{DK}{DF}$(1)	0,25 0,25 0,25 0,25
	c) (0,75 điểm) Gọi M là giao điểm của đường thẳng BK và IC Xét đường tròn (I) có $\widehat{EIH} = 2\widehat{EDH}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung EH) $2\widehat{EDH} = \widehat{EDF}$ (do DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$ (cmt)) $\Rightarrow \widehat{EIH} = \widehat{EDF}$ Chứng minh tương tự như câu b ta có $\widehat{EFI} = \widehat{KFD}$ $\triangle$ EFI$\backsim\triangle$ KFD(g.g) vì $\widehat{EIH} = \widehat{EDF}$ và $\widehat{EFI} = \widehat{KFD}$	

	$\Rightarrow \dfrac{FE}{FK} = \dfrac{FI}{FD} \Rightarrow$ FK . FI = FE . FD (3) Chứng minh tương tự tứ giác AEFC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{ACF}$ (góc trong của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) Chứng minh tương tự tứ giác ABFD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDC} = \widehat{ABC}$ (góc trong của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) $\triangle$ BEF $\backsim$ $\triangle$ DCF(g.g) vì $\widehat{BEF} = \widehat{ACF}$ (cmt) và $\widehat{FDC} = \widehat{ABC}$ (cmt) $\Rightarrow \dfrac{FB}{FD} = \dfrac{FE}{FC} \Rightarrow$ FB.FC = FD.FE (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ FK.FI = FB.FC $\Rightarrow \dfrac{FK}{FC} = \dfrac{FB}{FI}$ Vì $\dfrac{FK}{FC} = \dfrac{FB}{FI}$ và $\widehat{KFB} = \widehat{KFC} = 90^0$ (do $AF \perp BC$) $\Rightarrow \triangle$ FBK $\backsim$ $\triangle$ FIC(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FKB} = \widehat{FCI} \Rightarrow$ Tứ giác FKMC là tứ giác nội tiếp (góc trong của tứ giác bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) $\Rightarrow \widehat{KMC} + \widehat{KFC} = 180^0$ Mà $\widehat{KFC} = 90^0$ (do $AF \perp BC$) $\Rightarrow \widehat{KMC} = 90^0 \Rightarrow BM \perp IC$	0,25 0,25 0,25

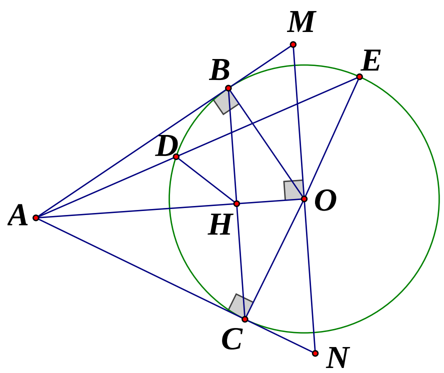
Câu 76. Cho (O; R) cố định và điểm A thay đổi nằm ngoài đường tròn. Kẻ các tiếp tuyến AB, AC với (O) (với B, C là các tiếp điểm). Vẽ cát tuyến ADE với (O) (D nằm giữa A và E; DE không đi qua O). Gọi H là giao điểm của AO và BC.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng AH.AO = AD.AE và tứ giác DEOH là tứ giác nội tiếp.

c) Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với AO cắt các tia AB, AC lần lượt tại M, N. Tìm vị trí của điểm A ở ngoài (O) để diện tích tam giác AMN đạt giá trị nhỏ nhất.

DAPAN

Bài 5	Yêu cầu cần đạt	Biểu điểm
	 Vẽ hình đúng cho câu 1a	0,25
a	**a. 1 điểm** Ta có AB, AC là các tiếp tuyến của (O), tiếp điểm B, C $\Rightarrow$ AB $\perp$ BO, AC $\perp$ CO $\Rightarrow$ $ABO = ACO = 90^0$ $\Rightarrow$ Hai điểm B ;C thuộc đường tròn đường kính AO $\Rightarrow$ Tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn đường kính AO (đpcm)	0,25 0,25 0,25 0,25

b	**b. 1 điểm** *) Vì AB = AC (AB, AC là các tiếp tuyến của (O) và OB = OC) $\Rightarrow$ AO là đường trung trực của BC $\Rightarrow$ AO $\perp$ BC Xét ΔABO vuông tại B, đường cao BH $\Rightarrow AB^2 = AH.AO$ **(1)** *) Xét ΔABD và ΔAEB có $\begin{cases} BAD \text{ chung} \\ ABD = AEB \left(=\frac{1}{2}sdBD\right) \end{cases}$ $\Rightarrow \Delta ABD$ đồng dạng ΔAEB (g – g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow AH.AO = AD.AE \Rightarrow \frac{AH}{AE} = \frac{AD}{AO}$ *) Xét ΔAHD và ΔAEO có $\begin{cases} DAH \text{ chung} \\ \frac{AH}{AE} = \frac{AD}{AO} \end{cases}$ $\Rightarrow \Delta AHD$ đồng dạng ΔAEO (c-g-c) $\Rightarrow AHD = AEO \Rightarrow DHO + AEO = 180^0 \Rightarrow$ tứ giác DEOH nội tiếp (đpcm)	0,25 0,25 0,25 0,25
c	**b. 0,75 điểm** Ta có ΔAMN cân tại A vì AO vừa là đường cao vừa là đường phân giác $\Rightarrow S_{AMN} = 2S_{AOM} = OB.AM$ $= R.(AB + BM) \geq 2R.\sqrt{AB.BM} = 2R.\sqrt{OB^2} = 2R^2$ (Áp dụng BĐT Cô – si và hệ thức lượng trong ΔOAM vuông tại O) Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ AB = BM = OB $\Leftrightarrow \Delta AOB$ vuông cân tại B $\Leftrightarrow AO = R\sqrt{2}$	0,25 0,25

	Vậy min $S_{AMN} = 2R^2 \Leftrightarrow AO = R\sqrt{2}$	0,25

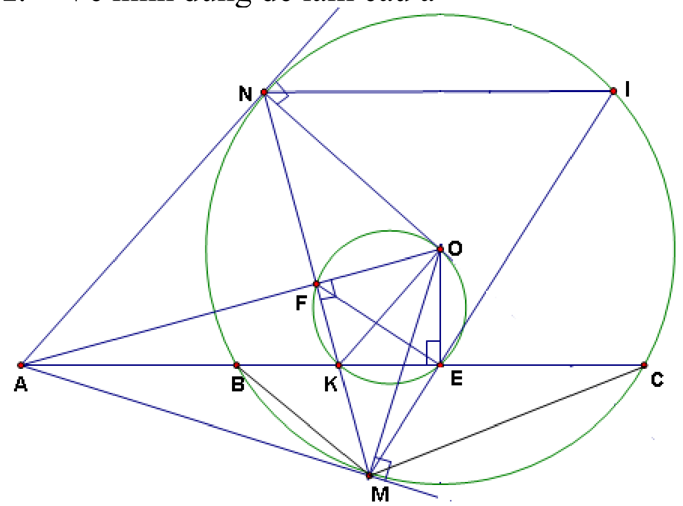
Bài 77. Cho ba điểm A, B,C nằm trên đường thẳng *xy* theo thứ tự đó .Vẽ đường tròn (O) đi qua B và C .Từ điểm A vẽ hai tiếp tuyến AM, AN (M, N là tiếp điểm) với (O) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và MN.

a. Chứng minh $AM^2 = AN^2 = AB.AC$

b. Đường thẳng ME cắt đường tròn (O) tại I . Chứng minh IN // AB.

c. Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF nằm trên một đường thẳng cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

DAPAN

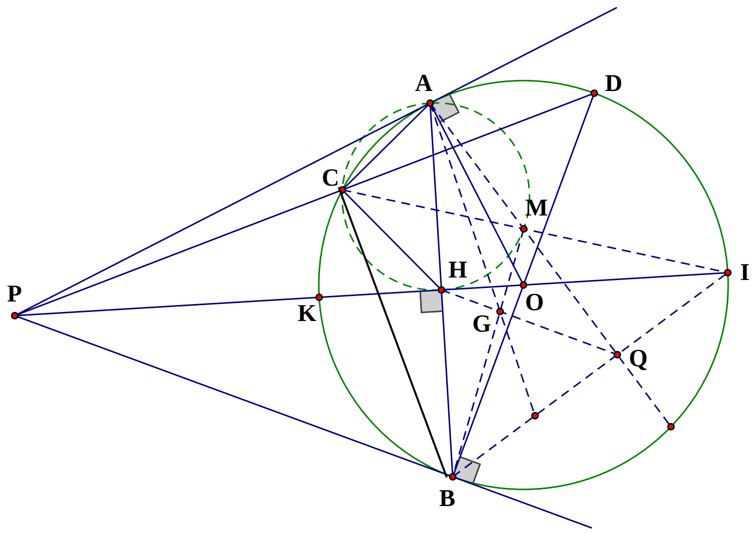
	1. + Vẽ hình đúng để làm câu a 	0,25đ
	a) C/ m $\Delta AMB \sim \Delta ACM$ ($g.g$) Vì MAC là góc chung; $AMB = ACM (= \frac{1}{2} MB)$ $=> \Rightarrow AM^2 = AB.AC$ Lại có: AM = AN (Tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) $\Rightarrow AM^2 = AB.AC = AN^2$	0,25đ 0,25đ 0,25đ
Bài 5: *(3,0đ)*	b) $AMO = ANO = AEO = 90^0 \Rightarrow$ Năm điểm A, M, E, O, N cùng nằm trên một đường tròn đường kính AO $\Rightarrow AEM = ANM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AM) $ANM = NIM$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và góc nội tiếp cùng chắn cung MN) $\Rightarrow AEM = NIM \Rightarrow NI // AB$	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
	c) Gọi K là giao điểm của BC với MN . Ta có tứ giác OFKE nội tiếp trong đường tròn đường kính OK $\Delta AKO \sim \Delta AFE \Rightarrow AK.AE = AF.AO$ mà $AF.AO = AM^2 = AB.AC$ $\Rightarrow AK.AE = AB.AC$ không đổi $\Rightarrow AK$ không đổi $\Rightarrow K$ cố định	0,25đ 0,25đ

	O thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC cố định Do đó tâm của đường tròn (OEF) thuộc đường trung trực của đoạn thẳng KE cố định Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OEF là trung điểm của OK cố định.	0,25đ 0,25đ

Bài 78. Cho (O) và điểm P nằm ngoài đường tròn. Từ P vẽ hai tiếp tuyến PA và PB với đường tròn tâm O (A, B là 2 tiếp điểm), PO cắt đường tròn tâm O tại K và I (K nằm giữa P và O) và cắt AB tại H. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O, C là giao điểm của PD và (O).

a) Chứng minh tứ giác BHCP nội tiếp
b) Chứng minh: AC $\perp$ CH
c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH cắt IC tại M; AM cắt IB tại Q, BM cắt HQ tại G. Chứng minh đường thẳng AG đi qua trung điểm BQ

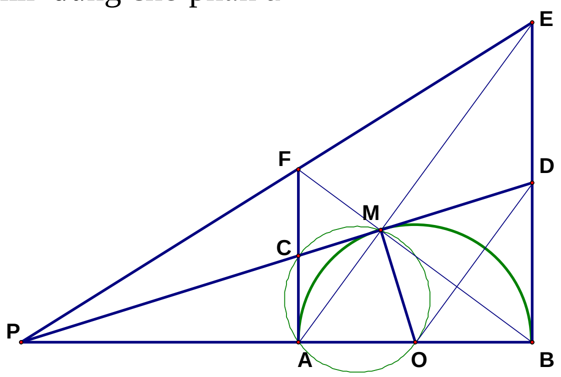
DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
Hình vẽ		0,25
a	Có D đối xứng với B qua O $\Rightarrow$ OB = OD = R $\widehat{DCB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow \widehat{PCB} = 90^0$ (kề bù) -Chỉ ra PH là trung trực của AB $\Rightarrow \widehat{PHB} = 90^0$ Do đó $\widehat{PCB} = \widehat{PHB} = 90^0$	 0,25 0,25 0,25

	Vậy tứ giác BHCP nội tiếp.	0,25
b	b)Vì tứ giác BHCP nội tiếp $\Rightarrow HCB = HPB$ mà $HPB = ABD$ (cùng phụ với góc HBP) $ABD = ACD$ (Do tứ giác ABCD nội tiếp) $\Rightarrow HCB = ACD$, lại có $DCB = 90^0$ $\Rightarrow ACH = 90^0 \Rightarrow AC \perp$ CH	0,25 0,25 0,25 0,25
c	Có $ACM = AHM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AM) $ACM = ABQ$ (2 góc nội tiếp chắn cung AI) $\Rightarrow AHM = ABQ$; lại ở vị trí đồng vị $\Rightarrow$ HM //BQ Lại có H là trung điểm AB $\Rightarrow$ M là trung điểm của AQ $\Rightarrow$ BM và QH là trung truyến của tam giác ABQ $\Rightarrow$ G là trọng tâm của tam giác ABQ $\Rightarrow$ AG đi qua trung điểm của BQ	0,25 0,25 0,25

Bài 79. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Điểm M nằm trên nửa đường tròn (M $\neq$ A; B). Tiếp tuyến tại M cắt tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại C và D.
a) Chứng minh rằng: tứ giác ACMO nội tiếp.
b) Chứng minh rằng: $CAM = ODM$
c) Gọi E là giao điểm của AM và BD; F là giao điểm của AC và BM. P là giao điểm của BA và DC. Chứng minh: E; F; P thẳng hàng.

DAPAN

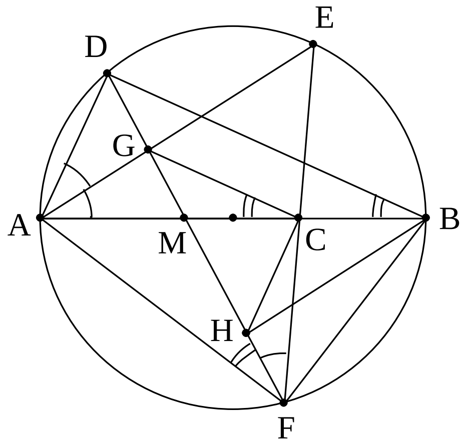
Đáp án	**Điểm**
Vẽ hình đúng cho phần a 	0,25
a,Tứ giác ACMO nội tiếp.	

Vì AC và CD là các tiếp tuyến của đường tròn (O) lần lượt tại A và M nên ta có: $CAO = CMO = 90^0$ (t/c tt) Xét tứ giác ACMO có: $CAO + CMO = 90^0 + 90^0 = 180^0$ Suy ra: Tứ giác ACMO nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^0)	0,5 0,25 0,25
b,Chứng minh rằng: $CAM = ODM$	
- Xét đường tròn (O) có: $CAM = ABM\,(= \frac{1}{2} sđ\, AM)$ (1) Vì CD và DB là các tiếp tuyến của đường tròn (O) lần lượt tại M và B nên ta có: $DBO = DMO = 90^0$ (t/c tt) Xét tứ giác ACMO có: $CAO + CMO = 90^0 + 90^0 = 180^0$ Suy ra: Tứ giác BDMO nội tiếp (tổng hai góc đối bằng 180^0) $\Rightarrow ABM = ODM$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OM) (2) Từ (1) và (2) suy ra: $CAM = ODM$	0,25 0,25 0,25 0,25
c, Chứng minh E; F; P thẳng hàng.	
(O) có: $CAM = CMA$(2 góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn cung AM) => ΔCAM cân tại C => CA = CM Lại có $CFM = CMF$ (cùng phụ với hai góc bằng nhau $CAM = CMA$) => ΔFCM cân tại C => CF = CM Do đó CA = CM = CF; Tương tự chứng minh được DB = DM = DE Gọi G là giao điểm của PF và BD Vì AC//BD Áp dụng định lý Ta let và hệ quả chứng minh được $\frac{FC}{DG} = \frac{PC}{PD}; \frac{PC}{PD} = \frac{AC}{BD}; \frac{AC}{BD} = \frac{CF}{DE}$ Suy ra DE = DG hay G trùng E. Suy ra E; F; P thẳng hàng	0,25 0,25 0,25

Bài 80. Cho đường tròn đường kính AB, điểm C nằm giữa A và B. Trên đường tròn lấy điểm D (D khác A và B). Gọi E là điểm chính giữa cung nhỏ BD. Đường thẳng EC cắt đường tròn tại điểm thứ hai F. Gọi G là giao điểm của DF và AE.

a) Chứng minh BAE = DFE và AGCF là tứ giác nội tiếp.
b) Chứng minh CG vuông góc với AD.
c)Kẻ đường thẳng đi qua C song song với AD cắt DF tại H. Chứng minh $CH = CB$.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
	Vẽ hình đúng để làm câu a).  	0,25
	a) (1,0 điểm) Xét đường tròn đường kính AB Có E là điểm chính giữa cung nhỏ BD nên $EB = ED$. Có $BAE = \frac{1}{2}$ sđ EB, $DFE = \frac{1}{2}$ sđ ED. (các góc nội tiếp) Do đó $BAE = DFE$. Suy ra $CAG = CFG$. Mà A và F là hai đỉnh kề nhau của tứ giác AGCF Do đó tứ giác AGCF nội tiếp (dấu hiệu quỹ tích cung chứa góc).	0,25 0,25 0,25 0,25
Bài 5 **(3,0 điểm)**	**b) (1,0 điểm)** Xét tứ giác AGCF nội tiếp, có $ACG = AFG$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AG). (1) Xét đường tròn đường kính AB có $AFG = ABD$ (2 góc nội tiếp cùng chắn AD). (2) Từ (1), (2) suy ra $ACG = ABD$ nên CG // BD (hai gócở vị trí đồng vị). Có $ADB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB) nên $BD \perp AD$ suy ra $CG \perp AD$.	0,25 0,25 0,25 0,25
	c) (0,75 điểm) Gọi M là giao điểm của DF và AB. ΔMAD có $CH // AD$ nên $\frac{CH}{CM} = \frac{AD}{AM}$. (3) (Hệ quả định lí Talet) ΔMAD có AG là phân giác của góc MAD nên $\frac{AD}{AM} = \frac{GD}{GM}$. (4) Do CG // BD nên $\frac{GD}{GM} = \frac{CB}{CM}$. (5) (Hệ quả định lí Talet) Từ (3), (4), (5) ta có $\frac{CH}{CM} = \frac{CB}{CM} \Leftrightarrow CH = CB$.	0,25 0,25 0,25

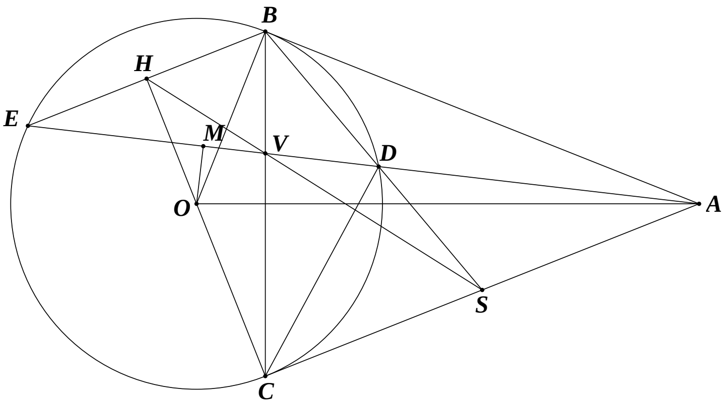
Bài 81. Cho đường tròn O,R và điểm A nằm ngoài đường tròn với $OA > 2R$. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn O (B,C là các tiếp điểm). Vẽ dây BE của đường tròn O song song với AC; AE cắt đường tròn O tại D (D khác E); BD cắt AC tại S. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DE.

a) Chứng minh năm điểm A, B, C, O, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $SC^2 = SB.SD$ và $SA = SC$.

c) Hai đường thẳng DE và BC cắt nhau tại V; đường thẳng SV cắt BE tại H. Chứng minh ba điểm H, O, C thẳng hàng.

DAPAN

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 5 (3,0 điểm)	Hình vẽ đúng cho câu a) 	0,25
	a) (1,0 điểm)	
	Xét (O) có AB là dây không đi qua O và I là trung điểm của AB(gt) $\Rightarrow$ OI $\perp AB$ tại I $\Rightarrow MIO = 90^0$ (q.hệ vuông góc giữa đ.kính và dây)	0,25
	Ta có: $MPO = 90^0$ (Vì MP là tiếp tuyến tại P của (O))	0,25
	$MQO = 90^0$ (Vì MQ là tiếp tuyến tại Q của (O))	0,25
	$\Rightarrow$ M, P, I, O, Q cùng thuộc đường tròn đường kính MO	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Xét O có DCS góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung CD. CBS là góc nội tiếp chắn cung CD nên $DCS = BCS$	0,25

	Xét ΔSCD và ΔSBC có BSC chung; $DCS = BCS$ (cmt). Do đó $\Delta SCD \backsim \Delta SBC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{SC}{SB} = \frac{SD}{SC} \Leftrightarrow SC^2 = SD.SB$ (1)	0,25
	Có $SAE = AEB$ (hai góc so le trong của $BE//AC$) Xét O có $ABS = AEB$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung). Suy ra $SAE = ABS$	0,25
	Xét ΔASD và ΔBSA có BSA chung; $SAE = ABS$ (cmt). Do đó $\Delta ASD \backsim \Delta BSA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{SA}{SB} = \frac{SD}{SA} \Leftrightarrow SA^2 = SD.SB$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $SA = SC$ (3)	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Xét ΔEHV có $EH // SA$ nên $\frac{EH}{SA} = \frac{EV}{VA}$ (hệ quả định lý Talets). Tương tự $\frac{HB}{SC} = \frac{BV}{VC}$.	0,25
	lại có $\frac{EV}{VA} = \frac{BV}{VC}$ ($BE // AC$). Do đó $\frac{HB}{SC} = \frac{HE}{SA}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra $HB = HE$	0,25
	suy ra $OH \perp BE$ (qua hệ giữa đường kính và dây cung trong đường tròn O). Lại có $OC \perp AC$ (AC là tiếp tuyến của đường tròn) mà $BE // AC$ suy ra $OC \perp BE$ Vậy ba điểm H, O, C thẳng hàng.	0,25

Bài 82. Cho đường tròn (O) với dây BC cố định (BC < 2R), điểm A trên cung lớn BC (A không trùng với B, C và A không là điểm chính giữa cung). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC, E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C trên đường kính AA’.

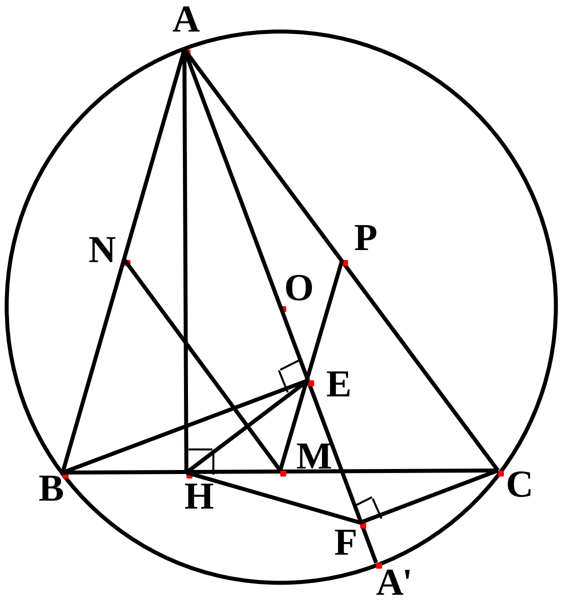
a) Chứng minh rằng tứ giác BHEA nội tiếp và HE $\perp$ AC.

b) Chứng minh HE.AC = HF. AB.

c) Khi A di động, chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF cố định.

DAPAN

Bài 5	***a) (1,25 điểm)***

	Vẽ hình đúng cho phần a  	0,25
	Ta có $BHA = BEA = 90^0$ (gt)	0,25
	⇒ BHEA nội tiếp đường tròn đường kính AB (theo quỹ tích cung chứa góc 90°)	0,25
	Ta có $A'AB = A'CB$ (góc nội tiếp chắn cung A'B) và $A'AB = CHE$ (cùng bù với BHE) ⇒ $A'CB = CHE$	0,25
	⇒ A'C // HE mà A'C ⊥ AC ⇒ HE ⊥ AC	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	C/m tứ giác AHFC nội tiếp ⇒ $EFH = ACB$ (1)	0,25
	Có tứ giác ABHE nội tiếp ⇒ $FEH = ABC$ (cùng bù với AEH) (2)	0,25
	Từ (1), (2) ⇒ ΔHEF đồng dạng với ΔABC (g.g) ⇒ $\frac{HE}{AB} = \frac{HF}{AC} \Rightarrow HE.AC = HF.AB$	0,25 0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC. Vì MN // AC và HE ⊥ AC nên HE ⊥ MN. - NE = NH (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền) - Chứng minh được MN là đường trung trực của HE - Chứng minh tương tự PM là đường trung trực của HF - Từ đó suy ra M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHEF, mà M là trung điểm của BC nêm M cố định	0,25 0,25 0,25

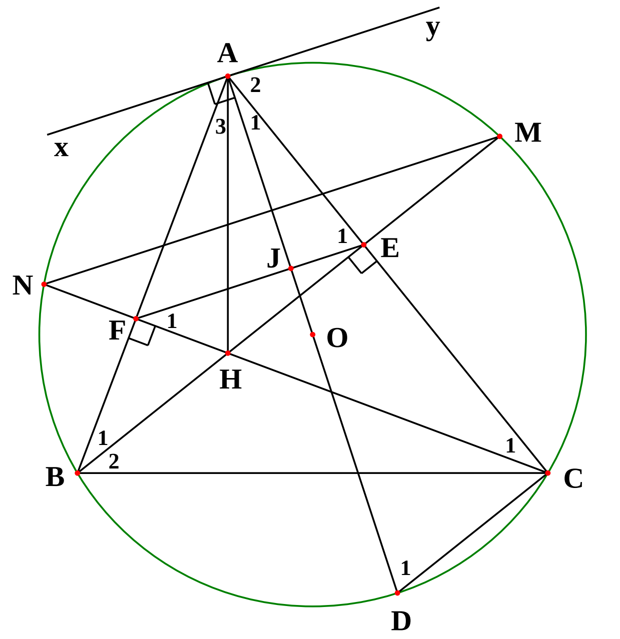
Bài 83. Cho tam giác *ABC* có ba góc nhọn (*AB*<*AC*) nội tiếp đường tròn (*O*). Hai đường cao *BE* và *CF* của tam giác *ABC* cắt nhau tại điểm *H*.

a) Chứng minh bốn điểm *B, C, E, F* cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh đường thẳng *OA* vuông góc với đường thẳng *EF*.

c) Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm I, đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại điểm P. Chứng minh tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB và đường thẳng KH song song với đường thẳng IP.

DAPAN

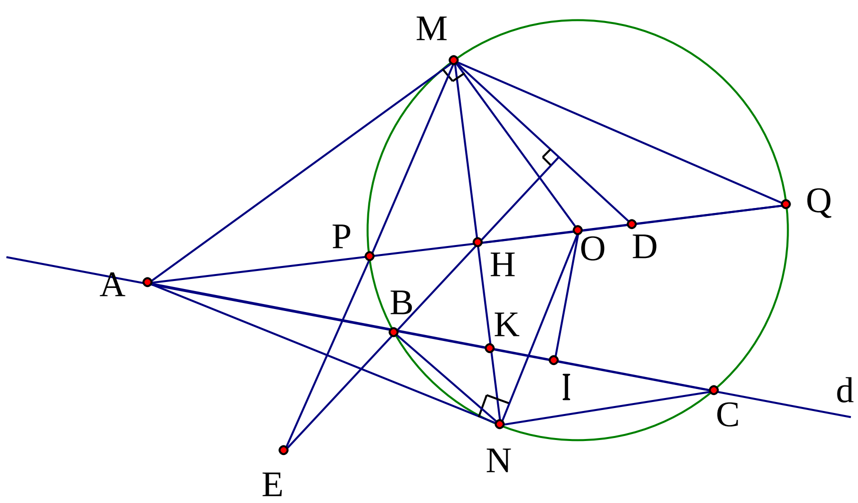
Bài	Đáp án	Điểm
	 Vẽ hình đúng để làm câu a).	0,25
a	Vì BE, CF là các đường cao của ΔABC nên: $BEC = BFC = 90^o$ $\Rightarrow$ E, F thuộc đường tròn đường kính BC $\Rightarrow$Bốn điểm *B, C, E, F* cùng thuộc một đường tròn.	0,25 0,25 0,25 0,25
b	Vẽ đường kính AD của (O), AD cắt EF tại J. Vì BCEF là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow E_1 = ABC\ (=180^o - CEF)$ Mà $ABC = D_1 \left(=\frac{1}{2}\text{sđ}AC\right) \Rightarrow E_1 = D_1$ Ta có $ACD = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow A_1 + D_1 = 90^o \Rightarrow A_1 + E_1 = 90^o \Rightarrow AJE = 90^o$ $\Rightarrow OA \perp EF$ tại J	0,25 0,25 0,25 0,25
c	Dễ thấy $A_3 + ABC = 90^o$ Mà $A_1 + D_1 = 90^o$ và $ABC = D_1$ $\Rightarrow A_3 = A_1 \Rightarrow BAI = PAE$ ΔAPE và ΔAIB có: $PAE = BAI$; $E_1 = ABC$ $\Rightarrow \Delta APE \backsim \Delta AIB$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AP}{AI} = \frac{AE}{AB}$ (1)	0,25

	Dễ chứng minh $\Delta AEH \backsim \Delta ABD$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AH}{AD}$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{AP}{AI} = \frac{AH}{AD}$ $\Rightarrow$ PI // HD (định lí Ta-lét đảo) Chứng minh được BHCD là hình bình hành $\Rightarrow$ H, K, D thẳng hàng $\Rightarrow$ KH // IP (đpcm).	0,25 0,25

Bài 84. Cho 3 điểm A, B, C cố định nằm trên một đường thẳng d (B nằm giữa A và C). Vẽ đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn đi qua B và C (O không nằm trên đường thẳng d). Kẻ AM và AN là các tiếp tuyến với đường tròn tâm O tại M và N. Gọi I là trung điểm của BC, AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K.

a) Chứng minh 5 điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn.
b) Chứng minh AB.AC = AH.AO và điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.
c) Gọi D là trung điểm HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm của ME.

ĐAPAN

	1.Vẽ hình đúng để làm câu a 	0.25
	a)(1 đ) Chứng minh 5 điểm A, M, O, I, N cùng nằm trên một đường tròn.	
	Ta có $AMO = 90^0$ (do AM là hai tiếp tuyến (O))	0,25
	$ANO = 90^0$ (do AN là hai tiếp tuyến (O))	0,25
	I là trung điểm của BC (dây BC không đi qua O)	0,25

	$\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow \widehat{OIA} = 90^0$	
	Suy ra 3 điểm M, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA Hay 5 điểm A, M, O, I, N cùng thuộc một đường tròn	0,25
	b) (1,0 điểm) Chứng minh AB.AC = AH.AO và điểm K cố định khi đường tròn tâm O thay đổi.	
	Chứng minh $OA \perp MN$ tại H ΔANO vuông tại N đường cao NH nên ta có AH.AO = AN^2 (1) (hệ thức lượng trong tam giác vuông)	0,25
	Chứng minh ΔABN đồng dạng với ΔANC(g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AN} = \dfrac{AN}{AC} \Rightarrow AB.AC = AN^2$ (2) Từ (1) và (2) ta có AB.AC = AH.AO (3)	0,25 0,25
	Chứng minh $\Delta AHK \backsim \Delta AIO$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AH}{AI} = \dfrac{AK}{AO} \Rightarrow AI.AK = AH.AO(4)$ Từ (3) và (4) $\Rightarrow AI.AK = AB.AC$ $\Rightarrow AK = \dfrac{AB.AC}{AI}$ Ta có A,B,C cố định nên I cố định suy ra AK không đổi, mà A cố định, K là giao điểm của dây BC và dây MN nên K thuộc tia AB cố định suy ra K cố định	0,25
	c) (0,75đ) Chứng minh P là trung điểm của ME.	
	Ta có $\widehat{PMQ} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Chứng minh $\Delta MHE \backsim \Delta QDM$ (g.g)(Vì có $\widehat{MEH} = \widehat{DMQ}$ (cùng phụ với $\widehat{DMP}$), $\widehat{EMH} = \widehat{MQD}$ (cùng phụ với $\widehat{MPO}$)) $\Rightarrow \dfrac{ME}{MQ} = \dfrac{MH}{DQ}$ (5)	0,25
	Chứng minh $\Delta PMH \backsim \Delta MQH$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{MH}{HQ} = \dfrac{MH}{2DQ}$ (6) (vì HQ = 2 DQ)	0,25

	Từ (5) và (6) $\Rightarrow \dfrac{MP}{MQ} = \dfrac{1}{2}\dfrac{ME}{MQ}$ $\Rightarrow$ ME = 2 MP $\Rightarrow$ P là trung điểm của ME.	0,25

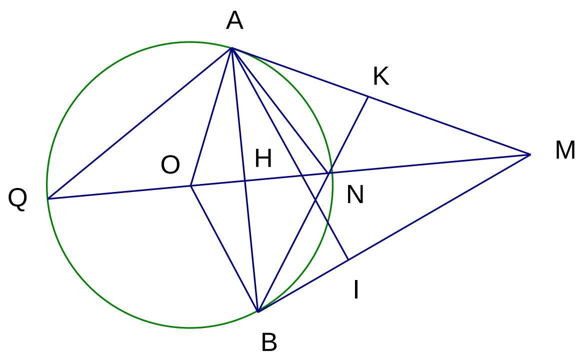
Bài 85. Cho điểm M nằm ngoài (O). Kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (A và B là tiếp điểm). Đường thẳng MO cắt (O) tại hai điểm N và Q (N nằm giữa M và Q). Gọi H là giao điểm của AB và MO, K là giao điểm của BN và AM; I là hình chiếu của A trên BM.

a/ Chứng minh rằng các tứ giác AOBM, AHIM nội tiếp.

b/ Chứng minh rằng $MA^2 = MN \cdot MQ$

c/ Khi K là trung điểm của AM, chứng minh ba điểm A, N, I thẳng hàng.

DAPAN

Vẽ hình đúng để làm câu a/ 	0,25
a/ Có MA và MB là hai tiếp tuyến của (O) (gt) $\rightarrow OAM = OBM = 90^0$ $\rightarrow OAM + OBM = 180^0$ $\rightarrow$Tứ giác AOBM nội tiếp đường tròn đường kính OM (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0) + MA và MB là hai tiếp tuyến cắt nhau tại M của (O) (gt) $\rightarrow$ OM là đường trung trực của AB $\rightarrow$ OM $\perp$ AB tại H => $AHM = 90^0$ mà $AIM = 90^0$(gt) suy ra H,I nhìn đoạn AM cố định dưới một góc không đổi bằng 90^0. nên tứ giác AHIM nội tiếp đường tròn đường kính AM (quỹ tích cung chứa góc)	0,25 0,25 0,25 0,25
b/ Xét ΔAMN và ΔQMA có: $MAN = AQN$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn AN của (O)) AMN chung $\rightarrow$ΔAMN đồng dạng với ΔQMA(g - g)	0,25 0,25

$\rightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{MQ}{MA}$ => $MA^2 = MN . MQ$	0,25 0,25
c/ OM là đường trung trực của AB, N thuộc OM =>ΔABN cân ở N $\rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{ABN}$ (1) Xét (O) có: $\widehat{BAN} = \widehat{MBN}$ (2) (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung) Từ (1) và (2) $\rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{MBN} \rightarrow$ BN là đường phân giác của $\widehat{ABM}$ $\rightarrow$ BK là đường phân giác của $\widehat{ABM}$ Chứng minh tương tự có AN là phân giác của $\widehat{BAM}$ Mà K là trung điểm của AM(gt) $\rightarrow$ BK là đường trung tuyến của ΔAMB Do đó ΔAMB cân tại B Lại có ΔAMB cân tại M (do MA = MB) Vậy ΔAMB đều $\rightarrow$ AN là đường phân giác đồng thời là đường cao mà I là hình chiếu của A trên BM nên ba điểm A, N, I thẳng hàng.	0,25 0,25 0,25

Bài 86. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Trên đường tròn tâm O lấy điểm C (C không trùng với A, B và $CA > CB$). Các tiếp tuyến của đường tròn tâm O tại A và C cắt nhau ở điểm D. Kẻ CH vuông góc với AB (H thuộc AB). Gọi E là giao điểm của AC và DO.

a) Chứng minh tứ giác $OECH$ nội tiếp.

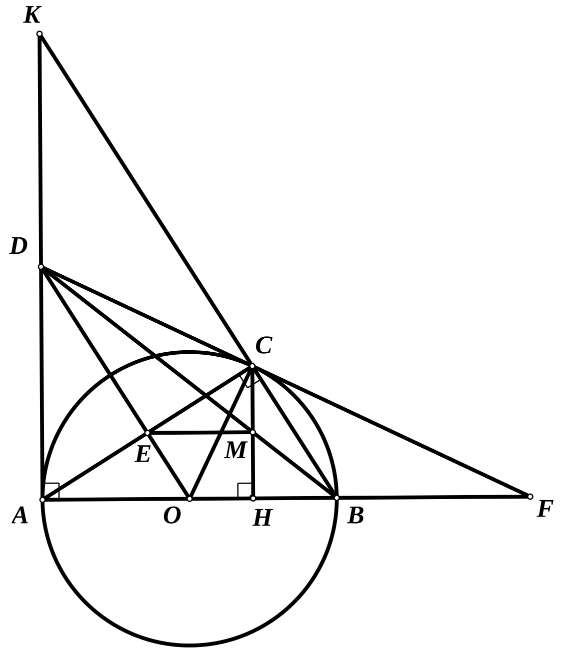
b) Đường thẳng CD cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh:

$2\widehat{BCF} + \widehat{CFB} = 90^0$.

c) BD cắt CH tại M . Chứng minh: EM//AB.

DAPAN

	Nội dung	Điểm
	Hình vẽ cho câu a)	0,25

Bài 4.1 **(3 điểm)**		
	a) 1,0	
	Vì DA và DC là các tiếp tuyến của đường tròn O nên $DA = DC$ Lại có $OA = OC$ nên OD là đường trung trực của đoạn AC. Suy ra $AC \perp DO$ tại E hay $CEO = 90^0$ Mặt khác $CHO = 90^0$ (vì $CH \perp AB$) Xét tứ giác $OECH$, ta có: CHO và CEO là hai góc đối nhau. Mặt khác $CHO + CEO = 90^o + 90^o = 180^o$. Do vậy tứ giác $OECH$ nội tiếp.	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) 1,0đ	
	Xét đường tròn O . Ta có BCF là góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung BC Suy ra $BCF = \frac{1}{2}$ sđ BC hay $2BCF =$ sđ BC Lại có CFB là góc có đỉnh nằm ngoài đường tròn chắn các cung AC và CB nên ta có: $CFB = \frac{1}{2}$(sđ $AC - \frac{1}{2}$ sđ BC)	0,5
	Do đó $2BCF + CFB =$ sđ BC $+ \frac{1}{2}$ sđ AC $- \frac{1}{2}$ sđ BC $= \frac{1}{2}$ sđ AC $+ \frac{1}{2}$ sđ BC $= \frac{1}{2}$ sđ $AB = 90^0$	0,5

	Vậy: $2BCF\ + CFB = 90^0$	
	c) 0,75đ	
	Gọi K là giao điểm của các đường thẳng AD và BC Ta có $\triangle DCA$ cân tại A (vì $DA = DC$) nên $DAC = DCA$. Lại có $K + DAC = 90^0$, $DCK + DCA = 90^0$ Suy ra $K = DCK$. Vậy $\triangle DCK$ cân tại D. Từ đó $DK = DC = DA$	0,25
	Ta có $CH // AD \Rightarrow \dfrac{CM}{DK} = \dfrac{BM}{BD} = \dfrac{MH}{DA}$ Mà $DK = DA$ nên $CM = CH$ Lại có DO là đường trung trực của AC nên $EA = EC$. Từ đó suy ra ME là đường trung bình của $\triangle ACH$ Vậy $ME\ //\ AB$.	0,25 0,25

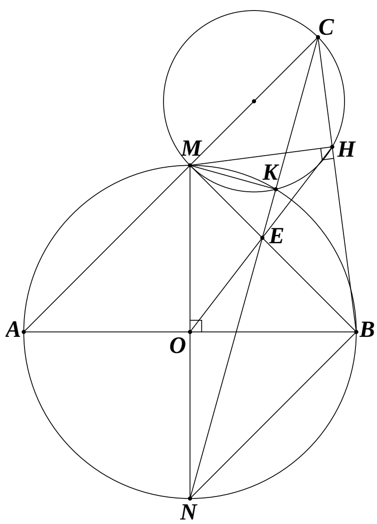
Bài 87. Cho đường tròn (O) có hai đường kính AB và MN vuông góc với nhau. Trên tia đối của tia MA lấy điểm C khác điểm M. Kẻ MH vuông góc với BC ($H \in BC$).

a) Chứng minh tứ giác $BHMO$ nội tiếp.

b) Gọi E là giao điểm của MB và OH. Chứng minh HO là tia phân giác của MHB và $ME.HM = BE.HC$.

c) Gọi giao điểm của đường tròn (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC là K (K khác M). Chứng minh ba điểm C, K, E thẳng hàng.

DAPAN

Bài	**Đáp án**	**Điểm**
5 **(3 điểm)**	**(3.0 điểm)**	
		.

	Vẽ hình đúng hết phần a) 0,25 điểm	
	a) (1,0 điểm)	
	Có $MOB = 90°(AB \perp MN)$	**0,25**
	$MHB = 90°(MH \perp BC)$	**0,25**
	Xét tứ giác BHMO có $MOB + MHB = 90^0 + 90^0 = 180°$ mà MHB và MOB ở vị trí đối nhau nên tứ giác $BHMO$ nội tiếp	**0,25** **0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	Xét tứ giác $BHMO$ nội tiếp có MHO là góc nội tiếp chắn cung MO và BHO là góc nội tiếp chắn cung BO mà $MO = BO$ (quan hệ giữa dây và cung) nên $MHO = BHO$. Do đó HO là tia phân giác của MHB.	**0,25**
	Xét ΔMHB có HO là tia phân giác của $MHB \Rightarrow \dfrac{EM}{EB} = \dfrac{HM}{HB}$ (1)	**0,25**
	Xét (O) có $AMB = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow BMC = 90°$ (kề bù với $AMB = 90°$). Xét ΔBMC vuông tại M và $MH \perp BC$ nên $MH^2 = HC.HB \Leftrightarrow \dfrac{HM}{HB} = \dfrac{HC}{HM}$ (2)	**0,25**
	Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{EM}{EB} = \dfrac{HC}{HM} \Leftrightarrow ME.HM = BE.HC$ (đpcm)	**0,25**
	c) (0,75 điểm)	
	Xét (O) có $MKN = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Xét đường tròn ngoại tiếp ΔMHC có $MKC = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Suy ra $MKC + MKN = 180°$ nên ba điểm C, K, N thẳng hàng. (3)	**0,25**
	Xét (O) có $MBN = 90°$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) Xét ΔBHM và ΔBMC có MBC chung; $BHM = BMC = 90°$ Do đó ΔBHM và ΔBMC đồng dạng (g.g) $\Rightarrow \dfrac{BH}{BM} = \dfrac{HM}{MC} \Leftrightarrow \dfrac{MC}{BM} = \dfrac{HM}{BH} \Rightarrow \dfrac{MC}{BN} = \dfrac{HM}{BH}$ Lại có $\dfrac{ME}{EB} = \dfrac{HM}{BH}$. Suy ra $\dfrac{ME}{BE} = \dfrac{MC}{BN}$	**0,25**

	Xét ΔMEC và ΔBEN có $EMC = EBN = 90°$; $\dfrac{ME}{BE} = \dfrac{MC}{BN}$ Do đó ΔMEC và ΔBEN đồng dạng (c.g.c) $\Rightarrow MEC = BEN$ (hai góc tương ứng) Mà $MEC + CEB = 180°$ nên $NEB + CEB = 180°$ Do đó ba điểm C, E, N thẳng hàng. (4) Từ (3) và (4) suy ra bốn điểm C, K, E, N thẳng hàng hay ba điểm C, K, E thẳng hàng.	**0,25**

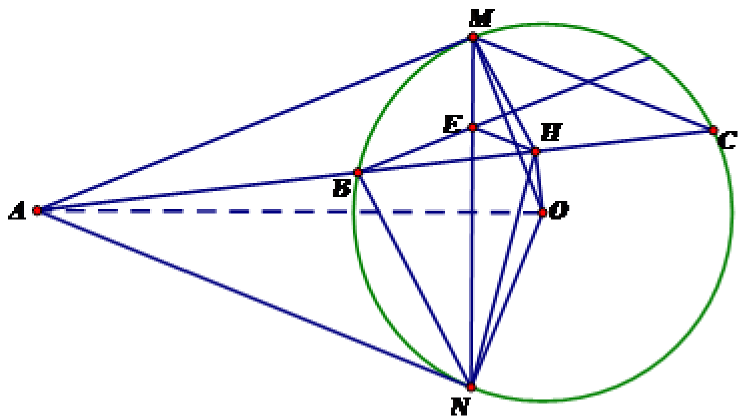
Bài 88. Từ điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng d đi qua A cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt B,C (O không thuộc (d); B nằm giữa A và C) và gọi H là trung điểm của BC.

a) Chứng minh các điểm O, H, M, A, N cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đi qua 5 điểm O, H, M, A, N

b) Chứng minh AM. AN = AB. AC và HA là tia phân giác của MHN .

c) Lấy điểm E trên MN sao cho BE song song với AM. Chứng minh HE // CM.

DAPAN

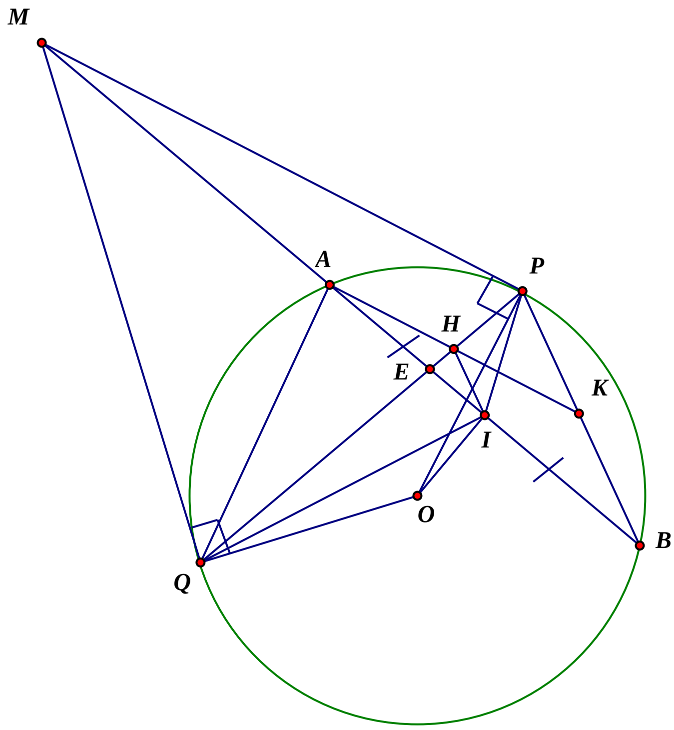
Bài	Đáp án	Điểm
5 **(3,0 điểm)**	Vẽ hình đúng cho câu a 	0,25
	1a.(1,0 điểm)	
	Xét (O) Ta có : $AMO = 90^0$ (Vì AM là tiếp tuyến tại M của (O)) $ANO = 90^0$ (Vì AN là tiếp tuyến tại N của (O))	0,25
	Lại có BC là dây không đi qua O và H là trung điểm của BC (gt) $\Rightarrow OH \perp BC$ tại H $\Rightarrow AHO = 90^0$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây cung)	0,25

	$\Rightarrow$M, H, N thuộc đường tròn đường kính MO (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow$O, H, M, A, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO.	0,25
	Tâm của đường tròn đi qua 5 điểm O, H, M, A, N là trung điểm AO.	0,25
	1b.(1,0 điểm)	
	Xét ΔAMB và ΔACM Có MAC là góc chung và $AMB = MCB$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung MB) $\Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta ACM$ (g-g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AB}{AM}$ $\Rightarrow$AM.AM = AB. AC Mà AM = AN (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) Suy ra : AM. AN = AB. AC	0,25
	Ta có các điểm O, H, M, A, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO (chứng minh trên) Mà AM = AN (chứng minh trên) $\Rightarrow$ AM = AN (tính chất)	0,25
	$\Rightarrow MHA = NHA$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) Do đó HA là tia phân giác của MHN	0,25
	1c.(0,75 điểm)	
	Theo giả thiết AM//BE nên $MAC = EBH$ (đồng vị) (1) Do 5 điểm A, M, H, O, N cùng thuộc một đường tròn nên: $MAH = MNH$ (hai góc nội tiếp chắn cung MH) (2)	0,25
	Từ (1) và (2) suy ra $EBH = MNH$ hay $ENH = EBH$ $\Rightarrow$ tứ giác EBNH nội tiếp	0,25
	$\Rightarrow EHB = ENB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EB) Mà $ENB = MCB$ (góc nội tiếp chắn cung MB) $\Rightarrow EHB = MCB$ mà hai góc ở vị trí đồng vị $\Rightarrow$ EH // MC.	0,25

Bài 89. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ 2 tiếp tuyến MP và MQ với đường tròn (P và Q là 2 tiếp điểm) và một cát tuyến MAB (A nằm giữa M và B), gọi I là trung điểm của AB.

a) Chứng minh 5 điểm M, P, O, I, Q cùng thuộc một đường tròn.
b) PQ cắt AB tại E. Chứng minh rằng MP^2 = ME. MI
c) Qua A kẻ đường thẳng song song với MP cắt PQ, PB lần lượt tại H và K. Chứng minh rằng KB = 2.HI

DAPAN

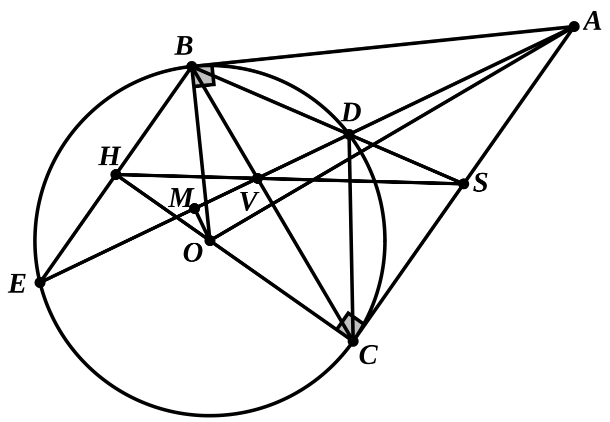
Bài	Nội dung	Điểm
	Vẽ hình đúng để làm câu a 	0,25
5a (1,0đ)	a/ Xét (O) có I là trung điểm của dây AB không đi qua O (gt) $\Rightarrow$ OI $\perp AB$ tại I $\Rightarrow \widehat{MIO} = 90^0$ (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây) Ta có: $\widehat{MPO} = 90^0$ (Vì MP là tiếp tuyến của (O) tại P) $\widehat{MQO} = 90^0$ (Vì MQ là tiếp tuyến của (O) tại Q) $\Rightarrow$ I, P, Q thuộc đường tròn đường kính MO (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow$ M, P, I, O, Q cùng thuộc đường tròn đường kính MO.	0,25 0,25 0,25 0,25
5b (1,0đ)	b/ Ta có: M, P, I, O, Q cùng thuộc đường tròn đường kính MO (c/mcâu a) $\Rightarrow \widehat{MQP} = \widehat{MIP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MP của đường tròn đường kính MO) Xét ΔMPQ có MP = MQ (Tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau của (O))	0,25

	$\Rightarrow$ ΔMPQ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MQP} = \widehat{MPQ} \Rightarrow \widehat{MPQ} = \widehat{MIP}$ hay $\widehat{MPE} = \widehat{MIP}$ Xét ΔMPE và ΔMIP có: $\widehat{PME}$ là góc chung; $\widehat{MPE} = \widehat{MIP}$ (c/m trên) $\Rightarrow$ ΔMPE ∽ ΔMIP (g.g) $\Rightarrow \frac{MP}{MI} = \frac{ME}{MP} \Rightarrow MP^2 = ME.MI$	0,25 0,25 0,25
5c (0,75đ)	c/ Vì AH // MP (gt) $\Rightarrow \widehat{AHQ} = \widehat{MPQ}$ (2 góc đồng vị) Ta có: tứ giác MPIQ nội tiếp đường tròn đường kính OM (c/m câu a) $\Rightarrow \widehat{MIQ} = \widehat{MPQ}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MQ) $\Rightarrow \widehat{AHQ} = \widehat{MIQ}$ hay $\widehat{AHQ} = \widehat{AIQ}$ Xét tứ giác AHIQ có $\widehat{AHQ} = \widehat{AIQ}$ mà I và H thuộc cùng 1 nửa mặt phẳng bờ AQ nên tứ giác AHIQ nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow \widehat{AQH} = \widehat{AIH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AH) Xét (O) có $\widehat{AQH} = \widehat{ABP}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AP) $\Rightarrow \widehat{AIH} = \widehat{ABP}$ mà là 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow$ HI // BP Xét ΔABK có: HI // BK (c/m trên) I là trung điểm của AB (gt) $\Rightarrow$H là trung điểm của AK $\Rightarrow$ HI là đường trung bình của ΔABK $\Rightarrow$ BK = 2HI (Tính chất đường trung bình của tam giác)	0,25 0,25 0,25

Bài 90. Cho (O; R) và điểm A nằm ngoài đường tròn với OA > 2R. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) (B, C là tiếp điểm). Vẽ dây BE của đường tròn (O) song song với AC; AE cắt (O) tại D khác E; BD cắt AC tại S. Gọi M là trung điểm của đoạn DE.

a) Chứng minh năm điểm A, B, C, O, M cùng thuộc một đường tròn
b) Chứng minh $SC^2 = SB.SD$
c) Hai đường thẳng DE và BC cắt nhau tại V; đường thẳng SV cắt BE tại H. Chứng minh ba điểm H, O, C thẳng hàng.

DAPAN

Câu	Nội dung	Điểm
		0,25

4.1a	**Chứng minh A, B, C, O, M cùng thuộc một đường tròn** Xét (O) có DE là dây cung; M là trung điểm của DE suy ra $OM \perp DE$ Ta có $OBA = 90^0$ (AB là tiếp tuyến của (O) tại B) $OCA = 90^0$ (AB là tiếp tuyến của (O) tại C) $OMA = 90^0$ ($OM \perp DE$) Do đó A, B, M, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính OA	0,25 0,25 0,25 0,25
4.1b	**Chứng minh và SC^2 = SB.SD** Xét ΔSCD và ΔSBC có BSC chung; $DCS = CBS$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung DC) Do đó $\Delta SCD \backsim \Delta SBC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{SC}{SB} = \frac{SD}{SC} \Leftrightarrow SC^2 = SD.SB$ (1)	0,25 0,25 0,25 0,25
4.1c)	**Chứng minh ba điểm H, O, C thẳng hàng.** Có $SAE = AEB$ (hai góc so le trong của BE // AC) Xét (O) có $ABS = AEB$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung BD) Suy ra $SAE = ABS$ Xét ΔASD và ΔBSA có BSA chung; $SAE = ABS$ (cm trên) Do đó $\Delta ASD \backsim \Delta BSA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{SA}{SB} = \frac{SD}{SA} \Leftrightarrow SA^2 = SD.SB$ (2) Từ (1) và (2) suy ra SA = SB (3) Xét ΔEHV có EH // SA nên $\frac{EH}{SA} = \frac{EV}{VA}$ (hệ quả định lý Talets) Tương tự: $\frac{HB}{SC} = \frac{BV}{VC}$ lại có $\frac{EV}{VA} = \frac{BV}{VC}$ (BE //AC) Do đó $\frac{HB}{SC} = \frac{HE}{SA}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra HB = HE suy ra $OH \perp BE$ (qua hệ giữa đường kính và dây cung) Lại có $OC \perp AC$ (AC là tiếp tuyến của đường tròn) Và BE // AC	0,25 0,25 0,25

	Vậy H, O, C thẳng hàng.	

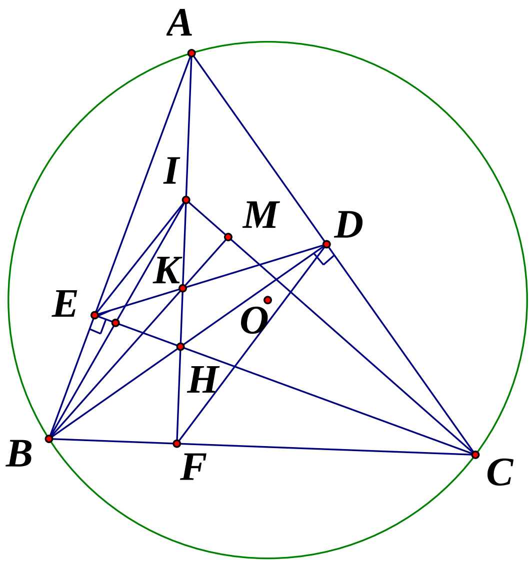
Bài 91. Cho tam giác nhọn ABC(AB<AC) nội tiếp đường tròn(O), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi F và K lần lượt là giao điểm của AH với BC, DE.

a) Chứng minh: Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn và xác định tâm I của đường tròn.

b) Chứng minh : DB là phân giác của góc EDF và $\frac{KH}{HF}=\frac{DK}{DF}$

c) Chứng minh BK $\perp$ CI.

DAPAN

Bài 5	Đáp án	Điểm
	 Vẽ hình đúng cho câu a	0,25
(3,0 đ)	**a) 1,0 điểm** Ta có $\widehat{AEH}=\widehat{ADH}=90^0$ (vì BD $\perp$ AC; CE $\perp$ AB) $\Rightarrow$ A, E, H, D cùng thuộc đường tròn đường kính AH $\Rightarrow$ Tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn đường kính AH có tâm I là trung điểm của đường kính AH.	0,5 0,25 0,25
	b) (1,0 điểm) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADHE có $\widehat{EAH}=\widehat{EDH}$(2 góc nội tiếp cùng chắn cung EH) Xét $\triangle$ ABC có 2 đường cao BD và EC cắt nhau tại H $\Rightarrow$H là trực tâm $\triangle$ ABC$\Rightarrow$ AF$\perp BC$ Vì BD, AF là đường cao của $\triangle$ ABC nên $\widehat{AFB}=\widehat{BDA}=90^0$ $\Rightarrow$ A, D, F, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB $\Rightarrow$ Tứ giác ADFB là tứ giác nội tiếp (định nghĩa tứ giác nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{BAF}=\widehat{BDF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$) $\Rightarrow \widehat{EDH}=\widehat{BDF}\Rightarrow$DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$	 0,25 0,25 0,25

	DH là đường phân giác trong của $\triangle$ KDF $\Rightarrow \frac{HK}{HF}=\frac{DK}{DF}$ (1)	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Gọi M là giao điểm của đường thẳng BK và IC Xét đường tròn (I) có $\widehat{EIH} = 2\widehat{EDH}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung EH) $2\widehat{EDH} = \widehat{EDF}$ (do DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$ (cmt)) $\Rightarrow \widehat{EIH} = \widehat{EDF}$ Chứng minh tương tự như câu b ta có $\widehat{EFI} = \widehat{KFD}$ $\triangle$ EFI∽$\triangle$ KFD(g.g) vì $\widehat{EIH} = \widehat{EDF}$ và $\widehat{EFI} = \widehat{KFD}$ $\Rightarrow \frac{FE}{FK}=\frac{FI}{FD} \Rightarrow$ FK . FI = FE . FD (3) Chứng minh tương tự tứ giác AEFC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{ACF}$ (góc trong của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) Chứng minh tương tự tứ giác ABFD là tứ giác nội tiếp$\Rightarrow \widehat{FDC} = \widehat{ABC}$ (góc trong của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) $\triangle$ BEF∽$\triangle$ DCF(g.g) vì$\widehat{BEF} = \widehat{ACF}$ (cmt) và $\widehat{FDC} = \widehat{ABC}$ (cmt) $\Rightarrow \frac{FB}{FD}=\frac{FE}{FC} \Rightarrow$FB.FC = FD.FE (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow$FK.FI =FB.FC $\Rightarrow \frac{FK}{FC}=\frac{FB}{FI}$ Vì $\frac{FK}{FC}=\frac{FB}{FI}$ và $\widehat{KFB} = \widehat{KFC} = 90^0$ (do AF$\perp BC$) $\Rightarrow \triangle$ FBK∽$\triangle$ FIC(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FKB} = \widehat{FCI} \Rightarrow$Tứ giác FKMC là tứ giác nội tiếp (góc trong của tứ giác bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) $\Rightarrow \widehat{KMC} + \widehat{KFC} = 180^0$ Mà $\widehat{KFC} = 90^0$ (do AF$\perp BC$)$\Rightarrow \widehat{KMC} = 90^0 \Rightarrow$ BM$\perp IC$	0,25 0,25 0,25

Bài 92. Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác cắt nhau tại H.

a) Chứng minh: Tứ giác BCEF nội tiếp.

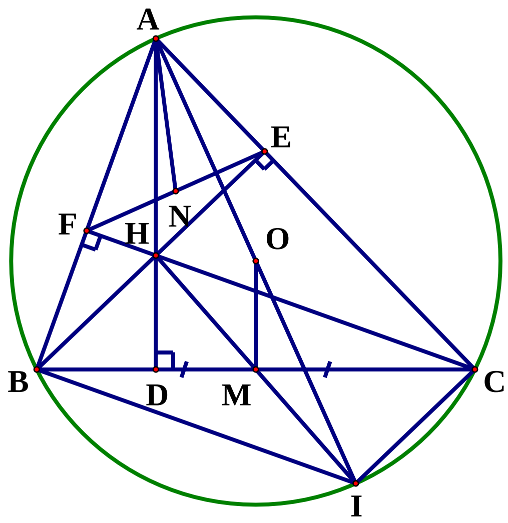
b) Gọi I là điểm đối xứng của A qua O và M là trung điểm của BC.

Chứng minh: Tứ giác BHCI là hình bình hành và AH = 2MO

c) Gọi N là trung điểm của EF. Chứng minh: R.AN = AM. OM

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
	Vẽ đúng hình cho câu a (0,25 điểm)	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
Bài 5 (3,0 điểm)		
	a) (1,0 điểm)	
	Xét tứ giác BCEF có: $BEC = BFC = 90^0$ (Vì $BE \perp AC$, $CF \perp AB$)	0,5
	$\Rightarrow$ 2 đỉnh E và F kề nhau cùng nhìn cạnh BC dưới 1 góc vuông .	0,25
	Nên tứ giác BCEF nội tiếp (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp)	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Có $ACI = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow CI \perp AC$ Có $BE \perp AC$ (gt) $\Rightarrow$ CI // BE (quan hệ vuông góc - song song) Có $H \in BE$ nên CI // BH	0,25
	Có $ABI = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))$\Rightarrow BI \perp AB$ Mà $CF \perp AB$ (gt) $\Rightarrow$ BI //CF (quan hệ vuông góc - song song) Có $H \in CF \Rightarrow$ BI // CH	0,25
	Xét tứ giác BHCI có: CI // BH (cmt) BI // CH (cmt) $\Rightarrow$ tứ giác BHCI là hình bình hành (Dấu hiệu nhận biết hình bình hành - Tứ giác có các cạnh đối song song)	0,25
	Xét ΔAIH có: AO = OI (Bán kính của đường tròn (O)) BM = MC (gt) ; BHCI là hình bình hành (cmt) $\Rightarrow$ HM = MI (T/c hình bình hành) $\Rightarrow$ OM là đường trung bình của ΔAIH (Đ/n đường trung bình của tam giác) $\Rightarrow$ AH = 2OM (tính chất đường trung bình của tam giác)	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Có tứ giác BCEF nội tiếp (cmt) $\Rightarrow B_1 + FEC = 180^0$ (tính chất tứ giác nội tiếp) Mà $FEC + E_1 = 180^0$ (2 góc kề bù) suy ra $B_1 = E_1$ Xét ΔABC và ΔAEF có:	0,25

Bài	Đáp án	Điểm
	$\hat{A}$: chung $\hat{B_1} = \hat{E_1}$ (cmt) Do đó $\Delta ABC \backsim \Delta AEF$ (g.g) AM là trung tuyến của ΔABC (Vì M là trung điểm của BC) AN là trung tuyến của ΔAEF (Vì N là trung điểm của EF) $\Rightarrow k = \frac{AB}{AE} = \frac{AM}{AN}$ (T/c hai tam giác đồng dạng - Tỉ số trung tuyến bằng tỉ số đồng dạng) (1)	
	Xét tứ giác AEHF có : $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0$ (Vì BE $\perp$AC, CF $\perp$ AB, H $\in$BE, H $\in$CF) $\Rightarrow \widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác AEHF nội tiếp (Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{AHE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác AEHF) Có $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (Cùng bù với $\widehat{EFB}$ do tứ giác BCEF nội tiếp) Mà $\widehat{ACB} = \widehat{AIB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn (O;R)) Nên $\widehat{AIB} = \widehat{AHE}$	0,25
	Xét ΔABI và ΔAEH có: $\widehat{AIB} = \widehat{AHE}$ (cmt) $\widehat{ABI} = \widehat{AEH} = 90^0$ Suy ra $\Delta ABI \backsim \Delta AEH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AI}{AH}$ (Đ/n hai tam giác đồng dạng)	
	Mà AI = 2AO = 2R ; AH = 2OM (cmt) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{R}{OM}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AM}{AN} = \frac{R}{OM} \Rightarrow$ R.AN = AM. OM	0,25

Bài 93: Cho đường tròn (O) với dây BC cố định (BC < 2R), điểm A trên cung lớn BC (A không trùng với B, C và A không là điểm chính giữa cung). Gọi H là hình chiếu của A trên BC, E và F lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường kính AA'.

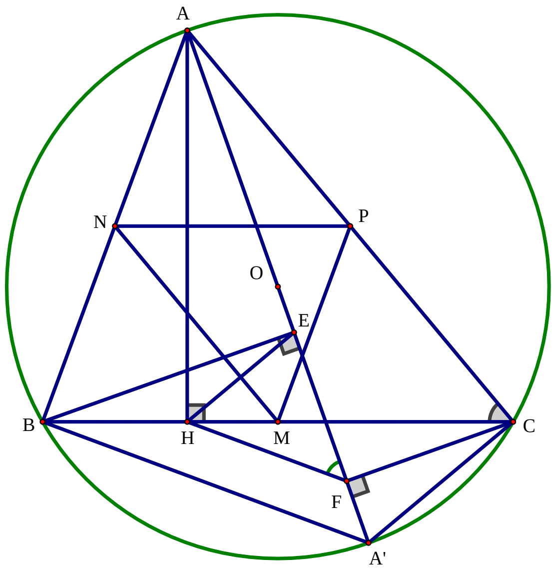
a) Chứng minh rằng tứ giác BHEA nội tiếp và HE $\perp$ AC.

b) Chứng minh HE.AC = HF. AB.

c) Khi A di động, chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF cố định.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm

	Vẽ hình đúng cho phần a 	0,25
	a) (1,0 điểm)	
	Xét tứ giác BHEAcó BHA = BEA = 90^0 (gt)	0,25
	$\Rightarrow$ BHEA nội tiếp đường tròn đường kính AB(2 đỉnh H, E cùng nhìn cạnh AB dưới 1 góc vuông)	0,25
5 **(2,75 điểm)**	Ta có A'AB = A'CB (2 góc nội tiếp chắn cung A'B) và A'AB = CHE (cùng bù với BHE) $\Rightarrow$ A'CB = CHE	0,25
	$\Rightarrow$ A'C // HE mà A'C $\perp$ AC (góc ACA' = 90^0 góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow$ HE $\perp$ AC	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Có: AFC = AHC (= 90^0) mà đỉnh F và H kề nhau cùng nhìn cạnh AC $\Rightarrow$ AHFC nội tiếp. $\Rightarrow$ EFH = ACB (góc nội tiếp cùng chắn AH) (1)	0,25 0,25
	Có tứ giác ABHE nội tiếp $\Rightarrow$ FEH = ABC (cùng bù với AEH) (2) Từ (1), (2) $\Rightarrow$ ΔHEF đồng dạng với ΔABC (g.g)	0,25
	$\Rightarrow \dfrac{HE}{AB} = \dfrac{HF}{AC} \Rightarrow HE.AC = HF.AB$	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AB, AC. Vì MN // AC và HE $\perp$ AC nên HE $\perp$ MN.	0,25

	Mặt khác N cách đều 2 điểm H, E $\Rightarrow$ MN là đường trung trực của đoạn thẳng HE.	
	Chứng minh tương tự MP là đường trung trực của đoạn thẳng HF. Vậy M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHEF. (3)	0,25
	Có BC cố định mà M là trung điểm BC. $\Rightarrow$ M cố định khi A di chuyển trên cung BC lớn. Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ đpcm	0,25

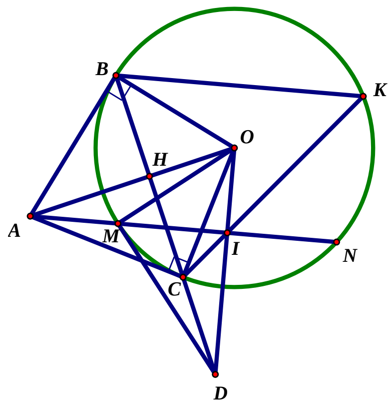
Bài 94. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC và cát tuyến AMN không đi qua tâm với đường tròn (B, C, , N thuộc đường tròn (O) , M nằm giữa A và N). Gọi I là trung điểm của dây MN và K là giao điểm thứ hai của tia CI với đường tròn (O).

a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp và $ABC = AIC$.

b) Chứng minh OI vuông góc với BK .

c) Đường thẳng OI và tiếp tuyến của đường tròn (O) tại M, chúng cắt nhau tại D. Chứng minh ba điểm B , C , D thẳng hàng.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
5 *(3,0 đ)*	4.1.Vẽ hình đúng để. làm câu a:  	0.25
	a) Chứng minh tứ giác ABOC nội tiếp và $ABC = AIC$. (1,0điểm)	
	Ta có: AB , AC là hai tiếp tuyến của (O) (gt) $\Rightarrow ABO = ACO = 90^0$	0,25
	Tứ giác ABOC có: $ABO + ACO = 90^0 + 90^0 = 180^0$ $\Rightarrow$ tứ giác ABOC nội tiếp đường tròn đường kính AO.	0,25
	Trong (O) có I là trung điểm của MN $\Rightarrow OI \perp MN \Rightarrow AIO = 90^0$ $\Rightarrow$ I thuộc đường tròn đường kính AO.	0,25

	Trong đường tròn đường kính AC suy ra $ABC = AIC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)	0,25
	b) Trong (O) suy ra $BKC = ABC$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây)	0,25
	mà $ABC = AIC$ (c/m câu a) suy ra $BKC = AIC$	0,25
	$\Rightarrow$ BK // AN.	
	Lại có $OI \perp AN$ nên $OI \perp BK$	0,25
	c) Có AB = AC (t/c tiếp tuyến cắt nhau) và OA = OB (bán kính) $\Rightarrow$ OA là đường trung trực của BC $\Rightarrow BC \perp AO$.	0,25
	Áp dụng hệ thức lượng trong tam giá c vuông ta có $OH.OA = OB^2 = R^2$ Tương tự có $OI.OD = R^2$	0,25
	suy ra $OH.\ OA = OI\ .OD \Rightarrow \frac{OH}{OI} = \frac{OD}{OA}$ Suy ra $\Delta OHD \sim \Delta OIA \Rightarrow DHO = AIO = 90^0$ $\Rightarrow DH \perp AO$	0,25
	mà $BC \perp AO$ (cmt) nên B , C , D thẳng hàng.	0,25

Bài 95. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn O , vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn O (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD không đi qua O (điểm C nằm giữa M và D).

a) Chứng minh rằng tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

b) Gọi giao điểm của MO và AB là H . Chứng minh $MO \perp AB$ và $\Delta MCH \backsim \Delta MOD$

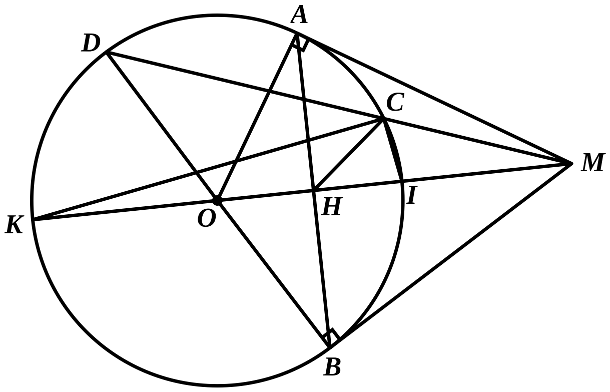
c) Đường thẳng MO cắt O tại I và K (I nằm giữa M và K).

Chứng minh $MK.HI = MI.HK$.

DAPAN

DAPAN

Câu	Đáp án	Điểm
1	**Hình vẽ đúng: 0,25 điểm**	

	 	
	a) (1,0 điểm)	
	Có $MAO = 90^0$ (MA là tiếp tuyến của (O) tại A) Có $MBO = 90^0$ (MB là tiếp tuyến của (O) tại B)	**0,5**
	Xét tứ giác MAOB có $MBO + MAO = 180^0$	**0,25**
	Mà hai góc MBO ; MAO ở vị trí đối nhau Do đó tứ giác MAOB nội tiếp.	**0,25**
	b) (1,0 điểm)	
	Có MA = MB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nha của (O)) OA = OB = R Suy ra MO là đường trung trực của AB $\Rightarrow AH \perp MO$	**0,25**
	Xét (O) có $ADC = MAC$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn AC) Xét ΔMAC và ΔMDA có $ADC = MAC$ (cm trên) DMA chung Do đó $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g)	**0,25**
	$\Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{MD}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$	**0,25**

	Xét ΔMAO có $MAO = 90^0$, $AH \perp MO$ suy ra $MA^2 = MH.MO$ Lại có $MA^2 = MC.MD$ Nên $MH.MO = MC.MD \Rightarrow \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD}$	
	Xét ΔMCH và ΔMOD có $\begin{cases} DMO \text{ chung} \\ \frac{MC}{MH} = \frac{MO}{MD} \end{cases}$ Do đó $\Delta MCH \backsim \Delta MOD$ (c.g.c)	**0,25**
	c) (0,75 điểm)	
	Do đó $\Delta MCH \backsim \Delta MOD$ (c.g.c) $\Rightarrow MCH = MOD$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow HCD = DOK$ (kề bù với $MCH = MOD$)	**0,25**
	Xét (O) có $DCK = \frac{1}{2}DOK$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn DK) Do đó $DCK = \frac{1}{2}HCD$ suy ra CK là tia phân giác của DCH. Xét (O) có $KCI = 90^0 \Rightarrow CK \perp CI$ Suy ra CI là tia phân giác của HCM	**0,25**
	Xét ΔHCM có CI là tia phân giác của $HCM \Rightarrow \frac{CH}{CM} = \frac{HI}{IM}$ Có CK là tia phân giác ngoài của $\Delta HCM \Rightarrow \frac{CH}{CM} = \frac{KH}{KM}$ Do đó $\Rightarrow \frac{IH}{IM} = \frac{KH}{KM} \Leftrightarrow HK.IM = HI.MK$ (đpcm)	**0,25**

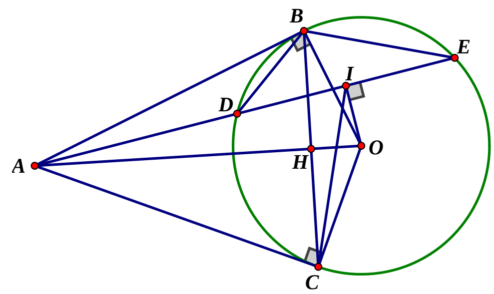
Bài 96. Từ điểm A cố định nằm ngoài đường tròn (O; R), kẻ các tiếp tuyến AB ; AC và cát tuyến ADE với đường tròn (B; C thuộc (O); D nằm giữa A và E; O không thuộc DE). Gọi I là trung điểm của DE; H là giao của AO và BC.

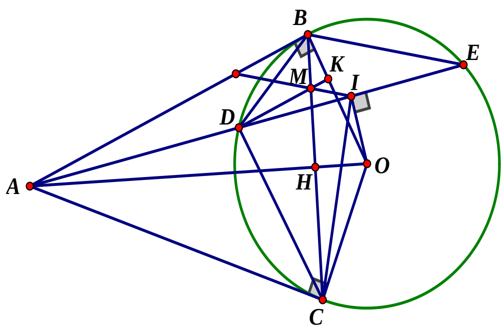
a)Chứng minh: 5 điểm A, B, I, O, C cùng thuộc 1 đường tròn. Xác định tâm của đường tròn đó.

b)Chứng minh: AD. AE = AH. AO

c)Qua I kẻ đường thẳng song song BE cắt BC tại M. Chứng minh: MD $\perp$ BO

DAP AN

Bài	Đáp án	Điểm
Bài 5 (3,0 điểm)	Vẽ hình đúng câu a  	0,25
	a) Xét (O) có OI thuộc đường kính dây DE không qua tâm I là trung điểm của DE $\Rightarrow OI \perp DE$ (ĐL liên hệ vuông góc giữa đường kính và dây) Có $ABO = 90^0$ (vì AB là tiếp tuyến) $OIA = 90^0$ (vì $OI \perp DE$) $OCA = 90^0$ (vì AC là tiếp tuyến) $\Rightarrow ABO = AIO = ACO = 90^0$ $\Rightarrow$ 3 điểm B, I, C cùng thuộc đường tròn đường kính AO $\Rightarrow$ 5 điểm A, B, I, O, C cùng thuộc 1 đường tròn	0,25 0,25 0,25 0,25
	b)Xét Δ ABD và Δ AEB có A chung $ABD = AEB$ (cùng = $\frac{1}{2}$ sđ BD) $\Rightarrow \Delta$ ABD đồng dạng Δ AEB (g- g) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.\ AE$ (1) Xét (O) có AB = AC (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) OB = OC = R $\Rightarrow$ AO là đường trung trực của BC $\Rightarrow AO \perp BC$ tại H Xét Δ ABO vuông tại B, có BH là đường cao $\Rightarrow AB^2 = AH.\ AO$ (2) Từ (1) và (2) suy ra AD. AE = AH. AO	0,25 0,25 0,25 0,25

	c)  Xét đường tròn đi qua 5 điểm có ABC = AIC (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AC) Có MI // BE nên BED = MID (đ vị) Lại có BED = BCD (2 góc nội tiếp cùng chắn cung BD của (O)) Khi dó MID = MCD Xét tứ giác DMIC có MID = MCD; mà 2 đỉnh I và C kề nhau cùng nhìn đoạn DM dưới 1 góc không đổi $\Rightarrow$ tứ giác DMIC nội tiếp $\Rightarrow$ DIC = DMC (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DC) Mà ABC = AIC (cmt) Do đó ABC = DMC ; lại đồng vị $\Rightarrow$ DM // AB ; mà AB $\perp$ BO Vậy DM $\perp$ BO	0,25 0,25 0,25

Bài 97. Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi F và K lần lượt là giao điểm của AH với BC, DE.

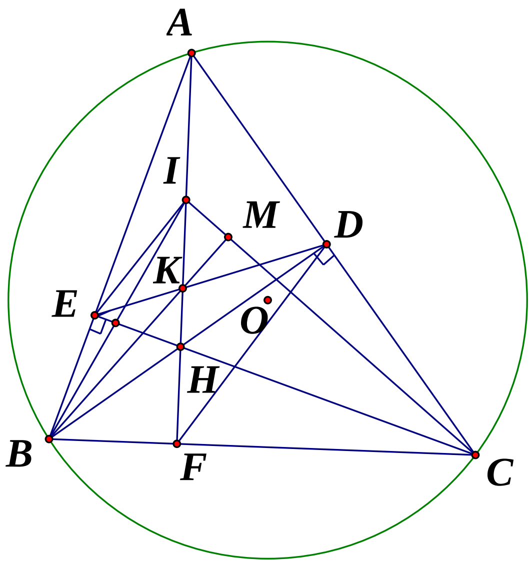
a) Chứng minh: Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn và xác định tâm I của đường tròn.

b) Chứng minh : DB là phân giác của góc EDF và $\frac{KH}{HF} = \frac{DK}{DF}$

c) Chứng minh BK $\perp$ CI.

DAPAN

Bài	**Nội dung cần đạt**	**Điểm**

Câu 5 **(3,0 đ)**	 Vẽ hình đúng cho câu a	0,25
	a) 1,0 điểm Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^0$ (vì BD ⊥ AC; CE ⊥ AB) ⇒ A, E, H, D cùng thuộc đường tròn đường kính AH ⇒ Tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn đường kính AH có tâm I là trung điểm của đường kính AH.	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) (1,0 điểm) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADHE có $\widehat{EAH} = \widehat{EDH}$(2 góc nội tiếp cùng chắn cung EH) Xét △ ABC có 2 đường cao BD và EC cắt nhau tại H ⇒H là trực tâm △ ABC⇒ AF ⊥ BC Vì BD, AF là đường cao của △ ABC nên $\widehat{AFB} = \widehat{BDA} = 90^0$ ⇒ A, D, F, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB ⇒ Tứ giác ADFB là tứ giác nội tiếp (định nghĩa tứ giác nội tiếp) ⇒ $\widehat{BAF} = \widehat{BDF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BF) ⇒ $\widehat{EDH} = \widehat{BDF}$ ⇒DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$ DH là đường phân giác trong của △ KDF ⇒ $\frac{HK}{HF} = \frac{DK}{DF}$ (1)	 0,25 0,25 0,25
	c) (0,75 điểm) Gọi M là giao điểm của đường thẳng BK và IC Xét đường tròn (I) có $\widehat{EIH} = 2\widehat{EDH}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung EH) $2\widehat{EDH} = \widehat{EDF}$ (do DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$ (cmt)) ⇒$\widehat{EIH} = \widehat{EDF}$ Chứng minh tương tự như câu b ta có $\widehat{EFI} = \widehat{KFD}$ △ EFI∽△ KFD(g.g) vì $\widehat{EIH} = \widehat{EDF}$ và $\widehat{EFI} = \widehat{KFD}$	

	$\Rightarrow \frac{FE}{FK} = \frac{FI}{FD} \Rightarrow$ FK . FI = FE . FD (3) Chứng minh tương tự tứ giác AEFC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{ACF}$ (góc trong của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) Chứng minh tương tự tứ giác ABFD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDC} = \widehat{ABC}$ (góc trong của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) $\triangle$ BEF $\backsim \triangle$ DCF(g.g) vì $\widehat{BEF} = \widehat{ACF}$ (cmt) và $\widehat{FDC} = \widehat{ABC}$ (cmt) $\Rightarrow \frac{FB}{FD} = \frac{FE}{FC} \Rightarrow$ FB.FC = FD.FE (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ FK.FI = FB.FC $\Rightarrow \frac{FK}{FC} = \frac{FB}{FI}$ Vì $\frac{FK}{FC} = \frac{FB}{FI}$ và $\widehat{KFB} = \widehat{KFC} = 90^0$ (do AF $\perp BC$) $\Rightarrow \triangle$ FBK $\backsim \triangle$ FIC(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FKB} = \widehat{FCI} \Rightarrow$ Tứ giác FKMC là tứ giác nội tiếp (góc trong của tứ giác bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) $\Rightarrow \widehat{KMC} + \widehat{KFC} = 180^0$ Mà $\widehat{KFC} = 90^0$ (do AF $\perp BC$) $\Rightarrow \widehat{KMC} = 90^0 \Rightarrow$ BM $\perp IC$	0,25 0,25 0,25

Bài 98. Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB, điểm C trên cung AB (C khác A, B). M là điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M khác A, C), BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu vuông góc của H trên AB.

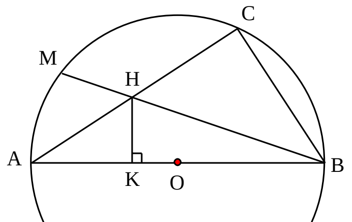
a) Chứng minh tứ giác BCHK nội tiếp

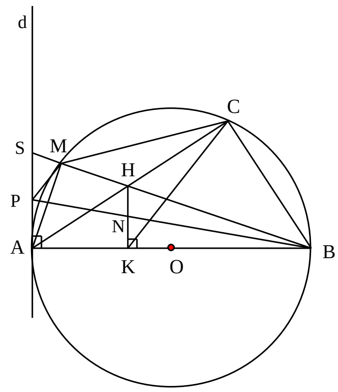
b) Chứng minh $ACM = ACK$, từ đó suy ra MC. HI = MH. CI với I là giao điểm của CK với MB.

c) Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại điểm A , kéo dài BM cắt d tại S, P nằm giữa A và S sao cho $\frac{AM}{AP} = \frac{BM}{R}$. Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

DAPAN

	Nội dung	Điểm
0,25	Vẽ hình đúng để làm được câu a	0,25



a) 1,0 đ	Ta có: $ACB = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) hay $HCB = 90^0$ $HKB = 90^0$ (K là hình chiếu của H trên AB) Xét tứ giác BKHC có: HCB + HKB = 180^0, mà chúng là 2 góc đối nhau $\Rightarrow$ Tứ giác BKHC nội tiếp.	0,25 0,25 0,25 0,25
b) 1,0 đ	Ta có tứ giác BKHC nội tiếp $\Rightarrow HCK = HBK$ (cùng chắn cung HK) hay $ACK = MBA$ Mà $MCA = MBA$ (cùng chắn cung AM của đường tròn (O)) $\Rightarrow ACM = ACK$ $\Rightarrow$CH là phân giác của góc MCK $\Rightarrow \frac{MC}{CI} = \frac{MH}{HI}$ (Tính chất đường phân giác trong tam giác) $\Rightarrow MC.HI = MH.CI$	0,25 0,25 0,25 0,25
	c) Gọi N là giao của BP và HK. Ta có: $\frac{AM}{AP} = \frac{BM}{R} \Rightarrow \frac{AM}{AP} = \frac{BM}{OB}$ (OB = R) $\Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{AP}{OB}$ Xét ΔPAM và Δ OBM có: $\frac{AM}{BM} = \frac{AP}{OB}$ (cm ở trên) $PAM = MBA$ (cùng chắn cung AM của (O))  	

c) 0,75 đ	$\Rightarrow \Delta PAM \sim \Delta\ OBM$ (c.g.c) $\Rightarrow \dfrac{AP}{OB} = \dfrac{PM}{OM}$ $\Rightarrow AP = PM$ (vì OB = OM = R) (1) $\Rightarrow \Delta APM$ cân tại P $\Rightarrow PAM = PMA$ Vì $AMB = 90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow AMS = 90^0$ (Hai góc kề bù) $\Rightarrow \Delta AMS$ vuông tại M $\Rightarrow MAS + ASM = 90^0$ Mà $PMA + PMS = 90^0 \Rightarrow PMS = PSM$ $\Rightarrow \Delta PSM$ cân tại P $\Rightarrow PM = PS$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow PA = PS$	0,25 0,25
	Lại có: HK // AS (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \dfrac{NH}{PS} = \dfrac{NK}{PA}$ (cùng bằng $\dfrac{BN}{BP}$ theo hệ quả của định lí ta lét) $\Rightarrow NH = NK$ $\Rightarrow$ PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK	
	Lại có: HK // AS (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \dfrac{NH}{PS} = \dfrac{NK}{PA}$ (cùng bằng $\dfrac{BN}{BP}$ theo hệ quả của định lí ta lét) $\Rightarrow NH = NK$ $\Rightarrow$ PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK	0,25

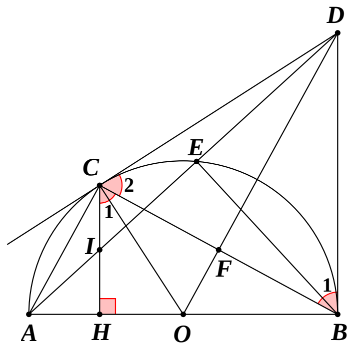
Bài 99. Cho nửa đường tròn (*O*) đường kính *AB*. Trên nửa đường tròn (*O*) lấy điểm *C* sao cho $AC < BC$ (*C* khác *A*). Các tiếp tuyến tại *B* và *C* của (*O*) cắt nhau ở *D*, *AD* cắt (*O*) tại điểm *E* (*E* khác *A*).

1) Chứng minh rằng tứ giác *BDCO* nội tiếp đường tròn và $BE^2 = AE.\ DE$.

2) Qua C kẻ đường thẳng song song với BD cắt AB tại H, DO cắt BC tại F. Chứng minh rằng tứ giác $CHOF$ nội tiếp đường tròn.

3) Gọi I là giao điểm của AD và CH. Chứng minh rằng I là trung điểm của CH.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
5 (3 điểm)	 Vẽ hình đúng hết phần a) **0,25 điểm.**	
	a) (1,0 điểm)	
	Xét tứ giác BDOC có: $DBO = 90^0$ (BD là tiếp tuyến (O) tại B)	**0,25**
	$DCO = 90^0$ (CD là tiếp tuyến (O) tại C)	
	$\Rightarrow$2 điểm C và B thuộc đường tròn đường kính OD (quỹ tích cung chứa góc)	**0,25**
	$\Rightarrow$ tứ giác *BDCO nội tiếp đường tròn đường kính OD (tứ giác có 4 đỉnh thuộc đường tròn)*	
	Xét (O) có $AEB = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)	**0,25**
	$\Rightarrow AE \perp EB$	
	Xét ΔABD vuông tại B (BD là tiếp tuyến (O) tại B, có $AE \perp EB$	**0,25**
	Nên BE^2 = AE.ED (hệ thức cạnh và đường cao trong tam giac vuông)	
	b) (1,0 điểm)	
	Ta có: CH // BD (gt) ; AB $\perp$ BD (cm ý 1a) $\Rightarrow$ AB $\perp$ CH $\Rightarrow \widehat{CHO} = 90^0$	**0,25**
	Xét (O): DC = DB (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau) OC = OB (=R) $\Rightarrow$ DO là trung trực của CB	**0,25**

	$\Rightarrow$ DO $\perp$ CB $\Rightarrow \widehat{CFO} = 90$	
	Xét tứ giác CHOF, ta có: $\widehat{CHO} + \widehat{CFO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ $\widehat{CHO}, \widehat{CFO}$ là 2 góc đối nhau Suy ra tứ giác CHOF nội (đpcm).	**0,5**
	c) (0,75 điểm)	
	Ta có: $CH \,//\, BD$ (gt) $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{B_1}$ (slt) (1) Vì $DC = DB$ nên ΔDCB cân tại D, suy ra: $\widehat{C_2} = \widehat{B_1}$ (tính chất) (2) Từ (1), (2) $\Rightarrow \widehat{C_1} = \widehat{C_2} \Rightarrow CB$ là p/g $\widehat{CHD}$ Xét (O): $\widehat{ACB} = 90^0 \Rightarrow AC \perp CB$ $\Rightarrow CA$ là p/ ngoài tại C của ΔICD $\Rightarrow \dfrac{AI}{AD} = \dfrac{CI}{CD}$ (3)	**0,25**
	Xét ΔABD có $HI \,//\, BD$, suy ra: $\dfrac{AI}{AD} = \dfrac{HI}{BD}$ (4) Từ (3), (4) $\Rightarrow \dfrac{CI}{CD} = \dfrac{HI}{BD}$	**0,25**
	Mà $CD = BD$ nên, suy ra $CI = IH$. Do đó I là trung điểm của CH	**0,25**

Bài 100. Cho đường tròn tâm O, bán kính R. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn, kẻ hai tiếp tuyến MA và MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm). Qua A, kẻ đường thẳng song song với MO cắt đường tròn tại E (E khác A), đường thẳng ME cắt đường tròn tại F (F khác E), đường thẳng AF cắt MO tại N, H là giao điểm của MO và AB.

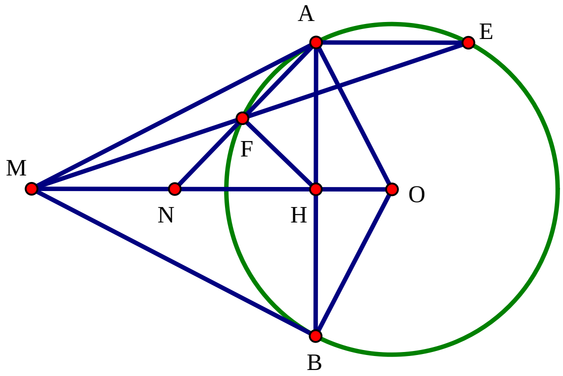
a) Chứng minh: Tứ giác MAOB nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh: $MN^2 = NF.NA$ và $MN = NH$.

c) Chứng minh: $\dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = 1$.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
Hình vẽ (0,25điểm)	Vẽ hình đúng câu a	0,25

		
Câu a (1,0 điểm)	*Chứng minh tứ giác MAOB nội tiếp* Xét đường tròn (O) có MA, MB là hai tiếp tuyến (A, B lần lượt là hai tiếp điểm) $\Rightarrow MAO = MBO = 90^0$ Xét tứ giác MAOB ta có: $MAO + MBO = 90^0 + 90^0 = 180^0$ Mà hai góc MAO, MBO đối nhau nên tứ giác MAOB nội tiếp. (Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0)	0,5 0,5
Câu b (1,0 điểm)	*Chứng minh: $MN^2 = NF.NA$ và $MN = NH$* Có $AEF = FAM$ (Góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cùng chắn cung AF của đường tròn (O)) $FMN = AEF$ (Hai góc so le trong của AE//MO) $\Rightarrow FMN = FAM$ Xét ΔMNA và ΔFNM có: MNF chung; $FMN = FAM$ $\Rightarrow \Delta MNA \sim \Delta FMN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MN}{FN} = \dfrac{NA}{MN} \Rightarrow MN^2 = NF.NA$ **(1)**	0,25 0,25
	Có MA = MB (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) và OA = OB = R $\Rightarrow$ MO là đường trung trực của AB $\Rightarrow$AH $\perp$ MO và HA = HB Xét ΔMAF và ΔMEA có: AME chung; MAF = AEF $\Rightarrow \Delta MAF \sim \Delta MEA$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{MA}{ME} = \dfrac{MF}{MA} \Rightarrow MA^2 = MF.ME$ Áp dụng hệ thức lượng vào ΔMAO vuông tại A, đường cao AH có: $MA^2 = MH.MO \Rightarrow ME.MF = MH.MO \Rightarrow \dfrac{ME}{MH} = \dfrac{MO}{MF}$ $\Rightarrow \Delta MFH \sim \Delta MOE \Rightarrow MHF = MEO$ **(hai góc tương ứng)** Vì BAE là góc vuông nội tiếp (O) nên E, O, B thẳng hàng $\Rightarrow FEB = FAB\left(= \dfrac{1}{2} \text{sđ} FB\right) \Rightarrow MHF = FAB$ $\Rightarrow ANH + NHF = ANH + FAB = 90^0 \Rightarrow HF \perp NA$ Áp dụng hệ thức lượng vào ΔNHA vuông tại H, đường cao HF có: $NH^2 = NF.NA$ (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow NM^2 = NH^2 \Rightarrow NM = NH$	0,25 0,25

Câu c (0,75 điểm)	Áp dụng hệ thức lượng vào ΔNHA vuông tại H, đường cao HF có: $HA^2 = FA.NA$ và $HF^2 = FA.FN$ Mà HA = HB $\Rightarrow \dfrac{HB^2}{HF^2} = \dfrac{HA^2}{HF^2} = \dfrac{FA.NA}{FA.FN} = \dfrac{NA}{NF}$ Vì AE // MN nên $\dfrac{EF}{MF} = \dfrac{FA}{NF}$ (hệ quả của định lí Ta-lét) $\Rightarrow \dfrac{HB^2}{HF^2} - \dfrac{EF}{MF} = \dfrac{NA}{NF} - \dfrac{FA}{NF} = \dfrac{NF}{NF} = 1$	0,25 0,25 0,25

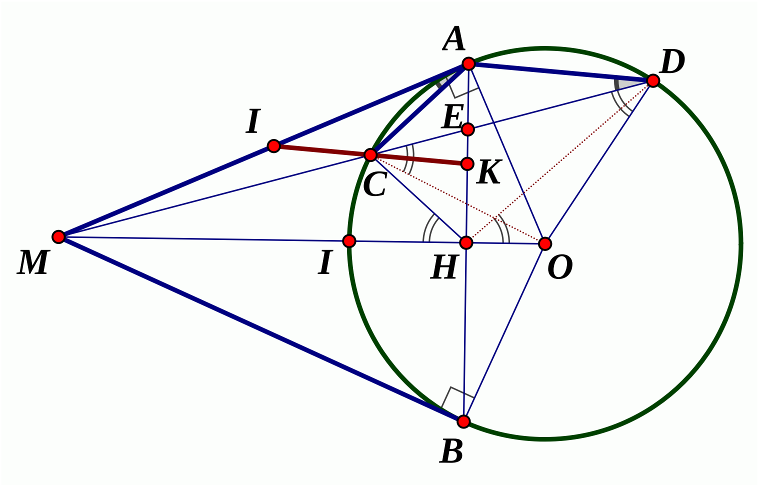
Bài 101. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A và B là hai tiếp điểm)

a) Chứng minh tứ giác MAOB nội tiếp

b) Từ M kẻ cát tuyến MCD với đường tròn (C nằm giữa M và D), tia MD nằm giữa hai tia MA và MO. Tia MO cắt AB tại H. Chứng minh: MC. MD = MH. MO

c) Qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt AM tại I, cắt AB tại K. Chứng minh C là trung điểm của IK.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
5	Hình vẽ 	0,25
	a) Chứng minh tứ giác MAOB nội tiếp Xét đường tròn (O) ta có: MA là tiếp tuyến tại A $\Rightarrow \widehat{MAO} = 90^0$ MB là tiếp tuyến tại B $\Rightarrow \widehat{MBO} = 90^0$ Xét tứ giác AMBO có: $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 180^0$ Mà hai góc này ở vị trí đối nhau	0.25 0,25 0,25 0,25

	Suy ra tứ giác AMBO nội tiếp đường tròn	
	b) Chứng minh: MC. MD = MH. MO Xét ΔMAC và ΔMDA có: *AMD là góc chung* $MAC = MDA$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AC của đường tròn (O)) => ΔMAC ∽ ΔMDA (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA}$ => MC. MD = MA^2 (1) Ta có: AM = MB (tính chất hai tt cắt nhau); OA = OB (vì A; B $\in$ (O)) Suy ra: OM là đường trung trực của AB => OM $\perp$ AB ΔAMO có $MAO = 90^0$ (gt) và AH $\perp$ OM (cmt) Nên MA^2 = MH. MO (2) (HTL trong tam giác vuông) Từ (1) và (2) suy ra: MC. MD = MH. MO	0,25 0,25 0,25 0,25

	c) Chứng minh C là trung điểm của IK. Gọi E là giao điểm của MD và AB Theo hệ quả của định lí Talet ta có: IC // AD $\Rightarrow \frac{IC}{AD}=\frac{MC}{MD}$ (1) CK // AD $\Rightarrow \frac{CK}{AD}=\frac{CE}{ED}$ (2) Lại có MC. MD = MH. MO $\Rightarrow \frac{MC}{MO}=\frac{MH}{MD}$. Khi đó ΔMHC$\backsim\Delta$MDO (c.g.c) $\Rightarrow MHC=MDO$ (3) $\Rightarrow$Tứ giác OHCD nội tiếp $\Rightarrow OHD=OCD$ (4) (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OD) Mặt khác: $OCD=ODC$ (5) (Do tam giác OCD cân tại O) + Từ (3), (4), (5) suy ra $MHC=OHD\Rightarrow CHE=EHD\,(\text{vì}\,OM\perp AB)$ => HE là tia phân giác của góc CHD $\Rightarrow \frac{CH}{HD}=\frac{EC}{ED}$(7) + Lại có $MH\perp HE\Rightarrow HM$ là tia phân giác của góc ngoài tại đỉnh H của tam giác CHD $\Rightarrow \frac{CH}{HD}=\frac{MC}{MD}$ (8) + Từ (7) và (8) suy ra $\frac{EC}{ED}=\frac{MC}{MD}$(9) + Từ (1), (2), (9) suy ra $\frac{IC}{AD}=\frac{CK}{AD}\Rightarrow IC=CK$ => C là trung điểm của IK	0,25 0,25 0,25

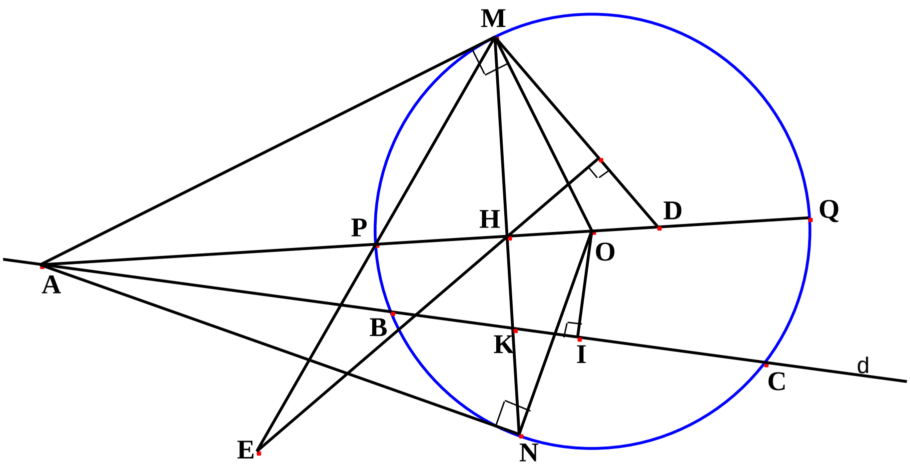
Bài 102. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O, kẻ 2 tiếp tuyến AM; AN với đường tròn (M; N là các tiếp điểm). Qua A kẻ đường thẳng d không đi qua tâm O và cắt đường tròn tâm O tại B và C (B nằm giữa A và C). Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh 5 điểm A, M, O, N, I cùng nằm trên một đường tròn. Cho biết vị trí tâm của đường tròn đó.

b) AO cắt MN tại H và cắt đường tròn tâm O tại các điểm P và Q (P nằm giữa A và O), BC cắt MN tại K. Chứng minh $AK=\frac{AB.AC}{AI}$.

c) Gọi D là trung điểm của HQ, từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm ME.

DAPAN

Bài	Nội dung làm được	Điểm
Bài 5 (3,0 điểm)	Vẽ hình chính xác cho phần a 	0,25
	a. (1,0 điểm)	
	Xét (O) có I là trung điểm của BC (dây BC không đi qua O) $\Rightarrow OI \perp BC \Rightarrow OIA = 90^0$	0,25
	$AMO = ANO = 90^0$ (do AM, AN là tiếp tuyến của (O))	0,25
	$\Rightarrow$ 5 điểm A, M, O, N, I cùng thuộc đường tròn đường kính OA	0,25
	Tâm của đường tròn là trung điểm của OA	0,25
	b. (1,0 điểm)	
	AM, AN là hai tiếp tuyến (O) cắt nhau tại A nên OA là tia phân giác MON mà ΔOMN cân tại O nên $OA \perp MN$ ΔANO vuông tại N đường cao NH nên ta có $AH.AO = AN^2$ (1)	0,25
	ΔABN đồng dạng với ΔANC (vì $ANB = ACN = \frac{1}{2}$ sđ NB và CAN chung) suy ra $\frac{AB}{AN} = \frac{AN}{AC} \Rightarrow AB.AC = AN^2$ (2) $\Rightarrow AB.AC = AH.AO$	0,25
	ΔAHK đồng dạng với ΔAIO (vì $AHK = AIO = 90^0$ và OAI chung) $\Rightarrow \frac{AH}{AI} = \frac{AK}{AO} \Rightarrow AI.AK = AH.AO$ (3)	0,25
	Từ (1) (2) và (3) $\Rightarrow AI.AK = AB.AC \Rightarrow AK = \frac{AB.AC}{AI}$	0,25
	c. (0,75 điểm)	
	Ta có $PMQ = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn). Xét ΔMHE và ΔQDM có $MEH = DMQ$ (cùng phụ với DMP), $EMH = MQD$ (cùng phụ với MPO) $\Rightarrow \frac{ME}{MQ} = \frac{MH}{DQ}$	0,25
	ΔPMH đồng dạng với ΔMQH $\Rightarrow \frac{MP}{MQ} = \frac{MH}{HQ}$	0,25

	Mà D là trung điểm của HQ nên $\frac{MH}{HQ}=\frac{MH}{2DQ}=\frac{1}{2}.\frac{MH}{DQ}$ $\Rightarrow \frac{MP}{MQ}=\frac{1}{2}.\frac{ME}{MQ} \Rightarrow$ ME = 2 MP $\Rightarrow$ P là trung điểm ME.	0,25

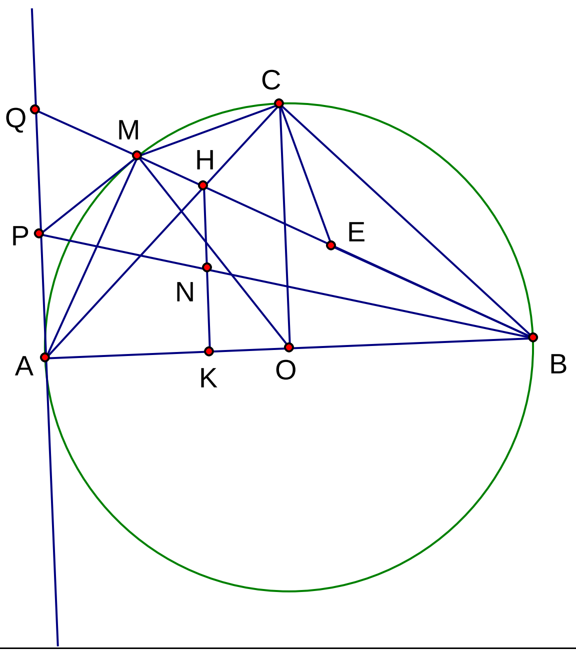
Bài 103. Cho đường tròn (O; R) có đường kính AB. Bán kính CO vuông góc với AB, M là một điểm bất kỳ trên cung nhỏ AC (M khác A, C); BM cắt AC tại H. Gọi K là hình chiếu của H trên AB.

a) Chứng minh CBKH là tứ giác nội tiếp.

b) Trên đoạn thẳng BM lấy điểm E sao cho BE = AM. Chứng minh tam giác ECM là tam giác vuông cân tại C

c) Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại điểm A; cho P là điểm nằm trên d sao cho hai điểm P, C nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và $\frac{AP.MB}{MA}=R$. Chứng minh đường thẳng PB đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK

DAPAN

Bài 5	Nội dung	Điểm
3,0 đ	Vẽ hình đúng để làm câu a/ 	0,25
	a) Ta có: $HCB=ACB=90^0$ (Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $HKB=90^0$ (gt) $\Rightarrow HCB+HKB=180^0$, mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác CBKH nội tiếp.	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) Vì $CO\perp AB$ tại O nên C là điểm chính giữa của cung AB, suy ra CA=CB.	0,25

	Mà $MAC = MBC$ (hệ quả), AM=BE(gt)$\Rightarrow \Delta MAC = \Delta EBC$ (c.g.c) $\Rightarrow CM = CE$ hay ΔCME cân tại C (1) Lại có C là điểm chính giữa của cung AB nên $sdCB = \frac{1}{2} sdAB = 90^0$ $\Rightarrow BMC = \frac{1}{2} sdCB = \frac{1}{2}.90^0 = 45^0$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: ΔCME vuông cân tại C.	0,25 0,25 0,25
	c) Từ giả thiết $\frac{AP.MB}{MA} = R \Rightarrow \frac{AP}{AM} = \frac{R}{MB} = \frac{BO}{BM}$ Ta có : $\frac{AP}{AM} = \frac{BO}{BM}$, $PAM = OBM$ (hệ quả) $\Rightarrow \Delta APM \sim \Delta BOM$ (c.g.c) $\Rightarrow \frac{AP}{PM} = \frac{OB}{OM} = 1 \Rightarrow PA = PM$. -Kéo dài BM cắt đường thẳng (d) tại Q. Vì $AMB = 90^0 \Rightarrow AMQ = 90^0$ hay tam giác AMQ vuông tại M. Mà PM=PA nên $PAM = PMA \Rightarrow PMQ = PQM \Rightarrow PQ = PM \Rightarrow$ PA=PQ hay P là trung điểm của AQ. -Gọi N là giao điểm của BP với HK. Vì HK//AQ (cùng vuông góc AB) nên theo hệ quả định lí Ta-lét, ta có: $\frac{NK}{PA} = \frac{BN}{BP} = \frac{HN}{PQ}$ mà PA=PQ$\Rightarrow NH = NK$ hay BP đi qua trung điểm N của HK	0,25 0,25 0,25

Bài 104. Cho (O; R) và điểm A nằm ngoài đường tròn với OA > 2R. Từ A vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn (O) (B, C là tiếp điểm). Vẽ dây BE của đường tròn (O) song song với AC; AE cắt (O) tại D khác E; BD cắt AC tại S. Gọi M là trung điểm của đoạn DE.

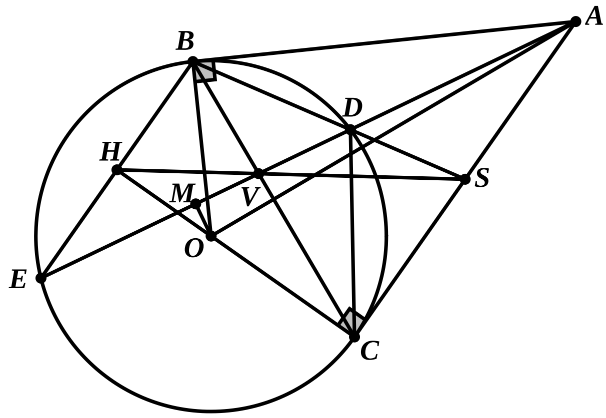
a) Chứng minh năm điểm A, B, C, O, M cùng thuộc một đường tròn

b) Chứng minh $SC^2 = SB.SD$

c) Hai đường thẳng DE và BC cắt nhau tại V; đường thẳng SV cắt BE tại H. Chứng minh ba điểm H, O, C thẳng hàng.

DAPAN

Câu	Nội dung	Điểm
	Vẽ hình chính xác cho phần a	0,25

	 	
a	**Chứng minh A, B, C, O, M cùng thuộc một đường tròn** Xét (O) có DE là dây cung không qua tâm O; M là trung điểm của DE Suy ra $OM \perp DE$ Ta có $OBA = 90^0$ (AB là tiếp tuyến của (O) tại B) $OCA = 90^0$ (AC là tiếp tuyến của (O) tại C) $OMA = 90^0$ ($OM \perp DE$) Do đó A, B, M, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính OA	0,25 0,25 0,25 0,25
b	**Chứng minh: $SC^2 = SB.SD$** Xét ΔSCD và ΔSBC có BSC chung; $DCS = CBS$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung DC) Do đó ΔSCD ∽ ΔSBC (g.g) $\Rightarrow \dfrac{SC}{SB} = \dfrac{SD}{SC} \Leftrightarrow SC^2 = SD.SB$ (1)	0,25 0,25 0,25 0,25
c	**Chứng minh ba điểm H, O, C thẳng hàng.** Có BE // AC Suy ra $SAE = AEB$ (Hai góc so le trong) Xét (O) có $ABS = AEB$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn cung BD) Suy ra $SAE = ABS$ Xét ΔASD và ΔBSA có BSA chung; $SAE = ABS$ (cm trên) Do đó ΔASD ∽ΔBSA (g.g) $\Rightarrow \dfrac{SA}{SB} = \dfrac{SD}{SA} \Leftrightarrow SA^2 = SD.SB$ (2) Từ (1) và (2) suy ra SA = SC (3) Xét ΔEHV có EH // SA nên $\dfrac{EH}{SA} = \dfrac{EV}{VA}$ (hệ quả định lý Talets) Tương tự: $\dfrac{HB}{SC} = \dfrac{BV}{VC}$ lại có $\dfrac{EV}{VA} = \dfrac{BV}{VC}$ (BE //AC) Do đó $\dfrac{HB}{SC} = \dfrac{HE}{SA}$ (4) Từ (3) và (4) suy ra HB = HE	 0,25 0,25 0,25

	suy ra OH $\perp$ BE (qua hệ giữa đường kính và dây cung) Lại có OC $\perp$ AC (AC là tiếp tuyến của đường tròn) Và BE // AC Vậy H, O, C thẳng hàng.	

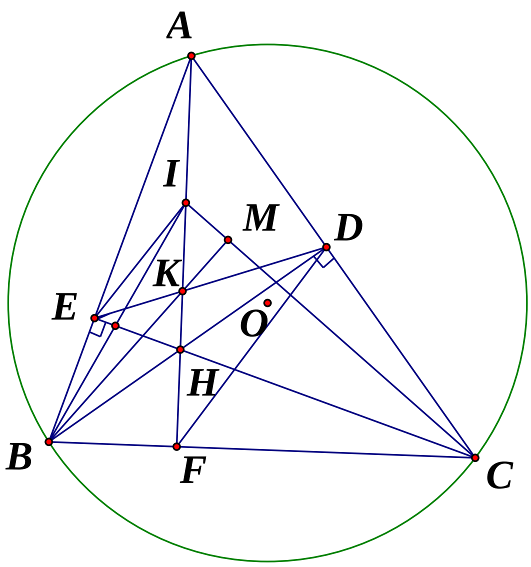
Bài 105. Cho tam giác nhọn ABC(AB<AC) nội tiếp đường tròn(O), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi F và K lần lượt là giao điểm của AH với BC, DE.

a) Chứng minh: Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn và xác định tâm I của đường tròn.

b) Chứng minh : DB là phân giác của góc EDF và $\frac{KH}{HF} = \frac{DK}{DF}$

c) Chứng minh BK $\perp$ CI.

DAPAN

Bài 5	Đáp án	Điểm
	 Vẽ hình đúng cho câu a	0,25
Câu a	**a) 1,0 điểm** Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^0$ (vì BD $\perp$ AC; CE $\perp$ AB) $\Rightarrow$ A, E, H, D cùng thuộc đường tròn đường kính AH $\Rightarrow$ Tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn đường kính AH có tâm I là trung điểm của đường kính AH.	0,5 0,5
Câu b	**b) (1,0 điểm)** Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADHE có $\widehat{EAH} = \widehat{EDH}$(2 góc nội tiếp cùng chắn cung EH) Xét $\triangle$ ABC có 2 đường cao BD và EC cắt nhau tại H $\Rightarrow$H là trực tâm $\triangle$ ABC$\Rightarrow$ AF$\perp BC$ Vì BD, AF là đường cao của $\triangle$ ABC nên $\widehat{AFB} = \widehat{BDA} = 90^0$	0,25 0,25

	$\Rightarrow$ A, D, F, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB $\Rightarrow$ Tứ giác ADFB là tứ giác nội tiếp (định nghĩa tứ giác nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{BDF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BF) $\Rightarrow \widehat{EDH} = \widehat{BDF} \Rightarrow$ DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$ DH là đường phân giác trong của $\triangle$ KDF $\Rightarrow \frac{HK}{HF} = \frac{DK}{DF}$ (1)	0,25 0,25
Câu c	c) (0,75 điểm) Gọi M là giao điểm của đường thẳng BK và IC Xét đường tròn (I) có $\widehat{EIH} = 2\widehat{EDH}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung EH) $2\widehat{EDH} = \widehat{EDF}$ (do DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$ (cmt)) $\Rightarrow \widehat{EIH} = \widehat{EDF}$ Chứng minh tương tự như câu b, ta có $\widehat{EFI} = \widehat{KFD}$ $\triangle$ EFI $\backsim$ $\triangle$ KFD(g.g) vì $\widehat{EIH} = \widehat{EDF}$ và $\widehat{EFI} = \widehat{KFD}$ $\Rightarrow \frac{FE}{FK} = \frac{FI}{FD} \Rightarrow$ FK . FI = FE . FD (3) Chứng minh tương tự tứ giác AEFC nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BEF} = \widehat{ACF}$ (góc trong của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) Chứng minh tương tự tứ giác ABFD là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FDC} = \widehat{ABC}$ (góc trong của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) $\triangle$ BEF $\backsim$ $\triangle$ DCF(g.g) vì $\widehat{BEF} = \widehat{ACF}$ (cmt) và $\widehat{FDC} = \widehat{ABC}$ (cmt) $\Rightarrow \frac{FB}{FD} = \frac{FE}{FC} \Rightarrow$ FB.FC = FD.FE (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ FK.FI =FB.FC $\Rightarrow \frac{FK}{FC} = \frac{FB}{FI}$ Vì $\frac{FK}{FC} = \frac{FB}{FI}$ và $\widehat{KFB} = \widehat{KFC} = 90^0$ (do AF $\perp BC$) $\Rightarrow \triangle$ FBK $\backsim$ $\triangle$ FIC(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FKB} = \widehat{FCI} \Rightarrow$ Tứ giác FKMC là tứ giác nội tiếp (góc trong của tứ giác bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) $\Rightarrow \widehat{KMC} + \widehat{KFC} = 180^0$ Mà $\widehat{KFC} = 90^0$ (do AF $\perp BC$) $\Rightarrow \widehat{KMC} = 90^0 \Rightarrow$ BM $\perp IC$	0,25 0,25 0,25

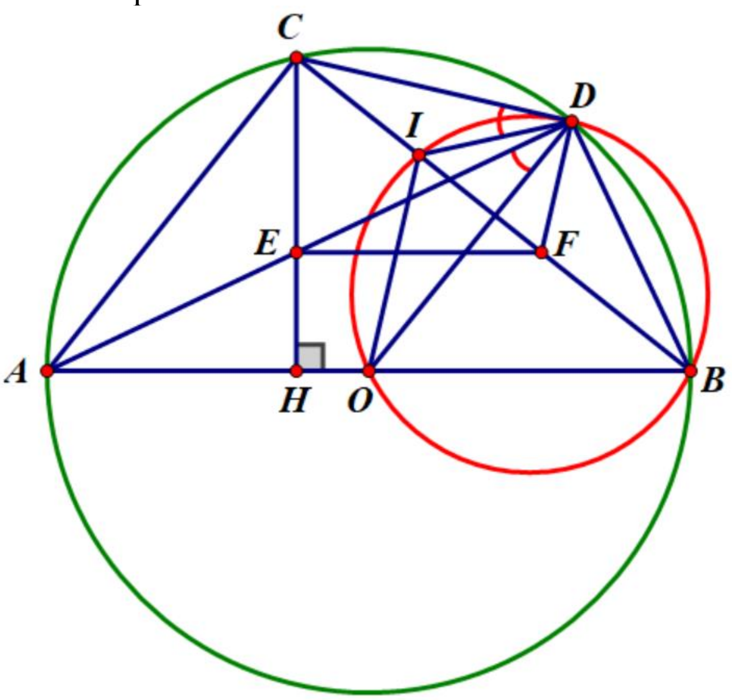
Bài 106. Cho tam giác ABC vuông tại C nội tiếp đường tròn tâm O. Trên cung nhỏ BC lấy điểm D(D không trùng với B và C). Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ C đến AB(H thuộc AB) và E là giao điểm của CH với AD.

a) Chứng minh tứ giác BDEH là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\boldsymbol{AE.AD = AH.AB}$, từ đó suy ra $\boldsymbol{AB^2 = AE.AD + BH.AB}$.

c) Đường thẳng qua E song song với AB, cắt BC tại F. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OBD đi qua trung điểm của CF.

DAPAN

Câu	Đáp án	Điểm
	Vẽ đúng hình cho phần a 	0,25
	a) Chứng minh tứ giác BDEH là tứ giác nội tiếp. **(1,0 điểm)**	
	Ta có: $\widehat{ADB} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB) $\Rightarrow \widehat{EDB} = 90^0$ Mà $\widehat{EHB} = 90^0$ (Vì $CH \perp AB$) Xét tứ giác BDEH có: $\widehat{EDB} + \widehat{EHB} = 180^0$ Mà hai góc $\widehat{EDB}$ và $\widehat{EHB}$ ở vị trí đối nhau nên tứ giác BDEH nội tiếp	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) Chứng minh $\boldsymbol{AE.AD = AH.AB}$, từ đó suy ra $\boldsymbol{AB^2 = AE.AD + BH.AB}$. **(1 điểm)**	
	Xét $\triangle AHE$ và $\triangle ADB$ có: $\hat{A}$ (góc chung) $\widehat{AHE} = \widehat{ADB} = 90^0$ $\Rightarrow \triangle AHE \sim \triangle ADB (g.g)$	0,25 0,25

	$\Rightarrow \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AE}{AB} \Rightarrow AH.AB = AE.AD(đpcm)$ Mà $AE.AD + BH.AB = AH.AB + BH.AB =$ $AB(AH + BH) = AB^2$	0,25 0.25
	c) Đường thẳng qua E song song với AB, cắt BC tại F. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác OBD đi qua trung điểm của CF. **(0,75 điểm)**	
	Ta có: $\widehat{CDA} = \widehat{CBA} = \widehat{CFE}$ ⇒ tứ giác ECDF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDF} = \widehat{CEF} = 90^0$ Gọi I là trung điểm của CF. Ta có: IC = ID =IF(tính chất đường trung tuyến của tam giác vuông)	0,25
	$\Rightarrow \widehat{ICD} = \widehat{IDC}$ mà $\widehat{ICD} = \widehat{DAB} = \widehat{ADO} \Rightarrow \widehat{IDC} = \widehat{ADO}$	0,25
	Ta có: $\widehat{ADC} + \widehat{ADI} = \widehat{ADI} + \widehat{IDO} \Rightarrow \widehat{ADC} = \widehat{IDO}$ Mà $\widehat{ADC} = \widehat{CBA}$ nên $\widehat{IDO} = \widehat{IBO}$	
	⇒ tứ giác ODBI nội tiếp ⇒ đường tròn ngoại tiếp tam giác OBD đi qua trung điểm I của CF.	0,25

Bài 107. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn O kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm).

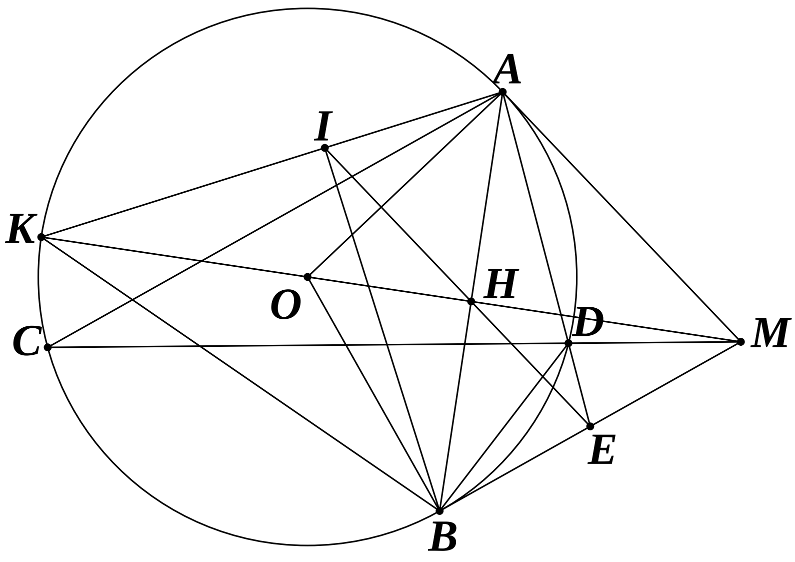
a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ nội tiếp.

b) Kẻ dây AC song song với BM. Đường thẳng MC cắt đường tròn O tại điểm thứ hai là D (D khác C). Gọi E là giao điểm của AD và MB. Chứng minh $BE^2 = DE.AE$ và $BE = ME$.

c) Gọi H và K lần lượt là giao điểm của MO với AB và đường tròn O (H nằm giữa M và K), HE cắt AK tại I. Chứng minh AK vuông góc với BI.

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
Bài 5 (3,0 điểm)	Vẽ hình đúng hết phần a) 0,25 điểm.	

	 	
	a) (1,0 điểm)	
	- Do MA là tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) nên $MAO = 90^\circ$.	0,25
	- Do MB là tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) nên $MBO = 90^\circ$.	0,25
	Ta có $\widehat{MAO} + \widehat{MBO} = 90^0 + 90^0 = 180^0$mà hai góc $\widehat{MAO}$; $\widehat{MBO}$ là hai góc đối diện.	0,25
	Do đó $MAOB$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	b) (1,0 điểm)	
	Xét ΔBED và ΔAEB có $EBD = BAE$ và AEB chung Do đó: $\Delta BED \backsim \Delta AEB$ (g.g).	0,25
	Suy ra: $\dfrac{BE}{AE} = \dfrac{DE}{BE} \Leftrightarrow BE^2 = AE.DE.$ (1)	0,25
	Có $EMD = ACD$ (hai góc so le trong của $AC//MB$) Xét O có $ACD = MAE$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) suy ra $EMD = MAE$.	0,25
	Xét ΔEMD và ΔEAM có $EMD = MAE$ và AEM chung Do đó: $\Delta EMD \backsim \Delta EAM$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{EM}{EA} = \dfrac{ED}{EM} \Leftrightarrow EM^2 = AE.DE.$(2) Từ (1) và (2) suy ra $BE^2 = EM^2 \Rightarrow BE = ME.$	0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Xét ΔBAM có $BE = EM, BH = HA$ suy ra HE là đường trung bình của ΔBAM $\Rightarrow HE//AM \Rightarrow BHE = BAM$ (hai góc đồng vị).	0,25

	Xét O có $AKB = BAM$ (tính chất góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung) Do đó $AKB = BHE$ suy ra $KIHB$ là tứ giác nội tiếp.	0,25
	$\Rightarrow KIB = KHB$ (tính chất góc nội tiếp). Lại có $OA = OB, MA = MB$ nên MO là trung trực của AB $\Rightarrow KHB = 90°$ Do đó $KIB = 90° \Rightarrow EI \perp AK$.	0,25

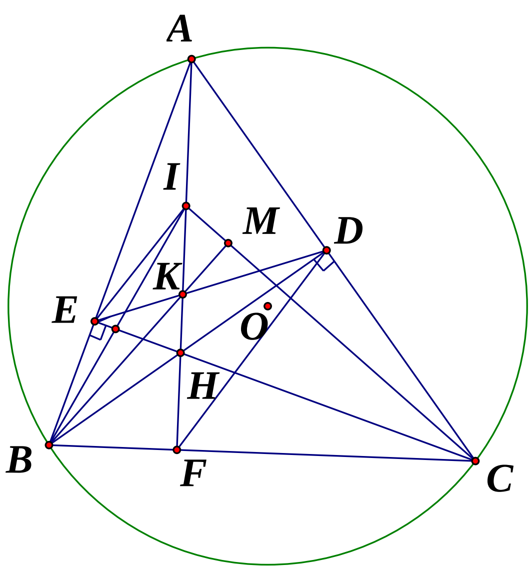
Bài 108. Cho tam giác nhọn ABC(AB<AC) nội tiếp đường tròn(O), các đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi F và K lần lượt là giao điểm của AH với BC, DE.

a) Chứng minh: Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn và xác định tâm I của đường tròn.

b) Chứng minh : DB là phân giác của góc EDF và $\frac{KH}{HF} = \frac{DK}{DF}$

c) Chứng minh BK $\perp$ CI.

DAP AN

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 5 (3,0 đ)	 Vẽ hình đúng cho câu a	0,25
	a) 1,0 điểm Ta có $\widehat{AEH} = \widehat{ADH} = 90^0$ (vì BD $\perp$ AC; CE $\perp$ AB) $\Rightarrow$ A, E, H, D cùng thuộc đường tròn đường kính AH $\Rightarrow$ Tứ giác AEHD nội tiếp đường tròn đường kính AH có tâm I là trung điểm của đường kính AH.	0,5 0,5
	b) (1,0 điểm) Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác ADHE có $\widehat{EAH} = \widehat{EDH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung EH) Xét $\triangle$ ABC có 2 đường cao BD và EC cắt nhau tại H	0,25

	$\Rightarrow$H là trực tâm Δ ABC$\Rightarrow$ AF$\perp BC$ Vì BD, AF là đường cao của Δ ABC nên $\widehat{AFB} = \widehat{BDA} = 90^0$ $\Rightarrow$ A, D, F, B cùng thuộc đường tròn đường kính AB $\Rightarrow$ Tứ giác ADFB là tứ giác nội tiếp (định nghĩa tứ giác nội tiếp) $\Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{BDF}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn BF) $\Rightarrow \widehat{EDH} = \widehat{BDF} \Rightarrow$DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$ DH là đường phân giác trong của Δ KDF $\Rightarrow \frac{HK}{HF} = \frac{DK}{DF}$(1)	0,25 0,25 0,25
	c) (0,75 điểm)	
	Gọi M là giao điểm của đường thẳng BK và IC Xét đường tròn (I) có $\widehat{EIH} = 2\widehat{EDH}$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung EH) $2\widehat{EDH} = \widehat{EDF}$ (do DH là tia phân giác của $\widehat{EDF}$ (cmt)) $\Rightarrow\widehat{EIH} = \widehat{EDF}$ Chứng minh tương tự như câu b ta có $\widehat{EFI} = \widehat{KFD}$ Δ EFI$\backsim\Delta$ KFD(g.g) vì $\widehat{EIH} = \widehat{EDF}$ và $\widehat{EFI} = \widehat{KFD}$ $\Rightarrow \frac{FE}{FK} = \frac{FI}{FD} \Rightarrow$ FK . FI = FE . FD (3) Chứng minh tương tự tứ giác AEFC nội tiếp $\Rightarrow\widehat{BEF} = \widehat{ACF}$ (góc trong của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) Chứng minh tương tự tứ giác ABFD là tứ giác nội tiếp$\Rightarrow\widehat{FDC} = \widehat{ABC}$ (góc trong của tứ giác nội tiếp bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) Δ BEF$\backsim\Delta$ DCF(g.g) vì$\widehat{BEF} = \widehat{ACF}$ (cmt) và $\widehat{FDC} = \widehat{ABC}$ (cmt) $\Rightarrow \frac{FB}{FD} = \frac{FE}{FC} \Rightarrow$FB.FC = FD.FE (4) Từ (3) và (4) $\Rightarrow$FK.FI =FB.FC $\Rightarrow \frac{FK}{FC} = \frac{FB}{FI}$ Vì $\frac{FK}{FC} = \frac{FB}{FI}$ và $\widehat{KFB} = \widehat{KFC} = 90^0$ (do AF$\perp BC$) $\Rightarrow \Delta$ FBK$\backsim\Delta$ FIC(c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FKB} = \widehat{FCI} \Rightarrow$Tứ giác FKMC là tứ giác nội tiếp (góc trong của tứ giác bằng góc ngoài tại đỉnh đối diện) $\Rightarrow\widehat{KMC} + \widehat{KFC} = 180^0$ Mà $\widehat{KFC} = 90^0$ (do AF$\perp BC$)$\Rightarrow\widehat{KMC} = 90^0 \Rightarrow$ BM$\perp IC$	0,25 0,25 0,25

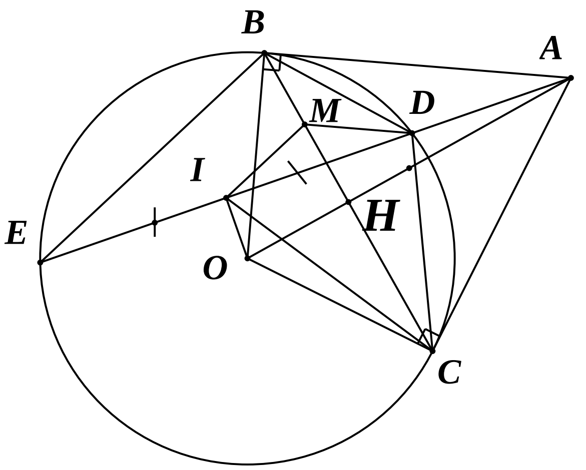
Bài 109. Từ điểm A cố định nằm ngoài đường tròn $(O;R)$, dựng các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn ($B, C \in (O)$, D nằm giữa A và E). Gọi I là trung điểm của DE, H là giao điểm của AO và BC.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, I, O cùng thuộc một đường tròn, xác định tâm của đường tròn đó

b) Chứng minh rằng $AC^2 = AD.AE = AH.AO$

c) Qua I kẻ đường thẳng song song với BE, cắt BC tại M. Chứng minh rằng $DM \perp BO$.

DAPAN

Câu	Đáp án	Điểm
5 **(3,0 điểm)**	Vẽ hình đúng cho câu a 	0,25
	1a.(1,0 điểm)	
	Có : AB, AC lần lượt là các tiếp tuyến tại B và C của (O) (gt) $\Rightarrow AB \perp OB;\ AC \perp OC$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow ABO = 90^0; ACO = 90^0$ (1)	0,25
	Xét (O) có: I là trung điểm của dây DE, $I \in DE$ (gt) $\Rightarrow OI \perp DE$ tại I (quan hệ đường kính và dây) $\Rightarrow DIO = 90^0 \Rightarrow AIO = 90^0$ (2) Từ (1), (2) $\Rightarrow$ 4 điểm A, B, I, O cùng thuộc đường tròn đường kính AO(Quỹ tích cung chứa góc) Tâm của đường tròn chính là trung điểm của AO	0,25 0,25 0,25
	1b.(1 điểm)	

	Ta có: AB, AC là 2 tiếp tuyến cắt nhau của (O) (gt) $\Rightarrow AB = AC$ (2) Có $B; C \in (O)$ (gt) $\Rightarrow OB = OC$ $\Rightarrow AO$ là trung trực của đoạn BC Mà $\{H\} = AO \cap BC$ (gt) $\Rightarrow AO \perp BC$ tại H Xét ΔABO vuông tại B có $BH \perp OA$ tại H (cmt) nên: $AB^2 = AH.AO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông) (3)	0,25 0,25
	Có AB là tia tiếp tuyến tại B của (O) $\Rightarrow ABD = BED$ (góc giữa tiếp tuyến với dây cung và góc nội tiếp cùng chắn BD) hay $\Rightarrow ABD = BEA$ Xét ΔABD và ΔAEB có: $ABD = BEA$ (cmt), A chung $\Rightarrow \Delta ABD \backsim \Delta AEB$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow AB^2 = AD.AE$ (4) Từ (2), (3) và (4) suy ra: $AC^2 = AD.AE = AH.AO$	0,25 0,25
	1c.(0,75 điểm)	
	Có $ACO = 90^0$ (cmt) $\Rightarrow C$ thuộc đường tròn đường kính AO (cung chứa góc 90^0) Xét đường tròn đường kính AO có: $ABC = AIC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) Có $MI \,//\, BE$ (gt) $\Rightarrow BED = MID$ (2 góc đồng vị) Xét (O) có: $BED = BCD$ (góc nội tiếp cùng chắn cung BD) mà $BED = MID$ (cmt) $\Rightarrow MID = BCD$ hay $MID = MCD$ Xét tứ giác $MICD$ có: $MID = MCD$, mà hai đỉnh I, C kề nhau cùng nhìn cung MD $\Rightarrow MICD$ là tứ giác nội tiếp (dhnb)	0,25
	Xét đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MICD$ có : $DIC = DMC$ (góc nội tiếp cùng chắn cung DC) hay $AIC = DMC$ mà $ABC = AIC$ (cmt) $\Rightarrow ABC = DMC \Rightarrow AB \,//\, MD$ (t.c hai góc đồng vị bằng nhau)	0,25

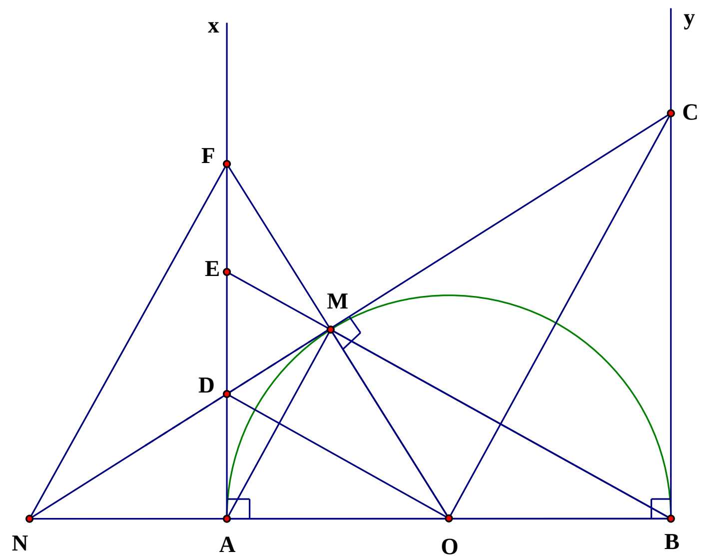
Bài 110. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB = 2R. Trên nửa đường tròn (O) lấy điểm M sao cho MA < MB. Tiếp tuyến với nửa đường tròn (O) tại M cắt cắt tiếp tuyến Ax và By lần lượt ở D và C.

a) Chứng minh rằng tứ giác ADMO nội tiếp một đường tròn và AD.BC = R^2.

b) Đường thẳng DC cắt đường thẳng AB tại N; tia OM cắt tia Ax ở F; tia BM cắt tia Ax ở E. Chứng minh: tứ giác AMFN là hình thang cân.

c) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn (O) để DE = EF.

DAPAN

Câu	Nội dung	Điểm
	 Hình vẽ cho câu a)	**0,25**
	a. (1,0 điểm).	
	- Tứ giác ADMO có $DAO + DMO = 180^0$, mà hai góc này ở vị trí đối nhau nên tứ giác ADMO nội tiếp đường tròn.	**0,50**
	- Dùng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau để chứng minh $DOC = 90^0$. Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác DOC vuông tại O có OM là đường cao, ta có : $DM.MC = OM^2$. Mà DM = AD, MC = BC (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) và OM = R Do đó $AD.BC = R^2$	**0,50**
	b. (1,0 điểm)	
	Do AD = DM và OA = OM $\Rightarrow$ OD là đường trung trực của đoạn thẳng AM $\Rightarrow DO \perp AM$.	**0,25**
	Vì $FA \perp ON$; $NM \perp OF$ (tính chất tiếp tuyến) và FA cắt MN tại D. $\Rightarrow$ D là trực tâm của $\Delta FON \Rightarrow DO \perp FN$. Vậy AM//FN. Vì ΔOAM cân ở O $\Rightarrow OAM = OMA$.	**0,25**
	Do AM//FN $\Rightarrow FNO = MAO$ và $AMO = NFO$ (hai góc đồng vị)	**0,25**
	$\Rightarrow FNO = NFO$. Vậy tứ giác ANFM là hình thang cân.	**0,25**
	c. (0,75 điểm).	
	Do DE = EF nên EM là trung tuyến của tam giác vuông FDM. $\Rightarrow ED = EM$ (1)	**0,25**
	Vì $DMA = DAM$ và $DMA + EMD = 90^0$; $DAM + EMD = 90^0$ $\Rightarrow EDM = DEM$ hay ΔEDM cân ở D hay DM = DE. (2)	**0,25**

	Từ (1) và (2) suy ra ΔEDM là tam giác đều. $\Rightarrow$ ODM = 60^0 $\Rightarrow$ AOM = 60^0. Vậy M nằm ở vị trí trên nửa đường tròn sao cho AOM = 60^0.	**0,25**

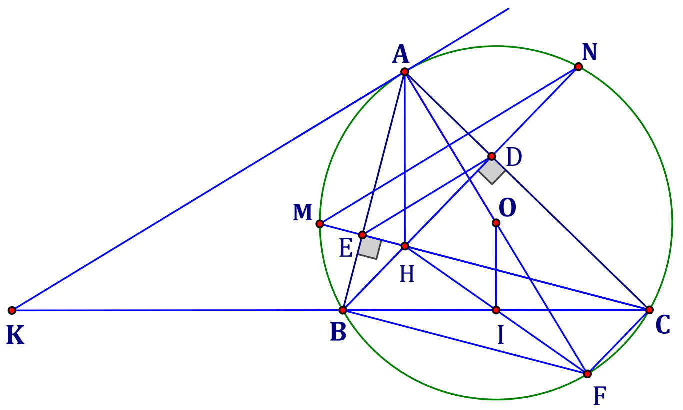
Bài 111. Cho đường tròn (O) cố định ngoại tiếp tam giác nhọn ABC (trong đó cạnh BC không đổi). Các đường cao BD, CE của tam giác cắt nhau ở H và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai theo thứ tự ở N, M.

a) Chứng minh tứ giác BCDE nội tiếp và ACM = ABN

b) Qua A kẻ đường thẳng song song với MN cắt đường thẳng BC ở K. Chứng minh rằng MN $\perp$ OA và KA^2 = KB.KC

c) Chứng minh rằng AH có độ dài không đổi.

DAPAN

Bài	**Nội dung**	**Điểm**
	Vẽ hình đúng cho câu a 	0,25
	1a.(1,0 điểm)	
Bài 5 (3điểm)	Xét tứ giác BCDE Ta có BD $\perp$ AC (gt) $\Rightarrow$ BDC $= 90^o$ và CE $\perp$ AB (gt) $\Rightarrow$ BEC $= 90^0$	0,25
	$\Rightarrow$ BDC = BEC $= 90^0$	0,25
	$\Rightarrow$ E; D cùng thuộc đường tròn đường kính BC (quỹ tích cung chứa góc) $\Rightarrow$ Tứ giác BCDE nội tiếp đường tròn đường kính BC (vì có 4 đỉnh cùng thuộc một đường tròn)	0,25
	Có tứ giác BCDE nội tiếp (chứng minh trên) $\Rightarrow$ DCE = DBE (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ED) hay ACM = ABN	0,25
	1b.(1 điểm)	

	Xét (O) có $\widehat{ACM} = \widehat{ABN}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow$ $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AN}$ (hai cung chắn hai góc nội tiếp bằng nhau) $\Rightarrow$ AM = AN (liên hệ cung và dây) Mà OM = ON (bán kính đường tròn (O)) $\Rightarrow$ OA là đường trung trực của đoạn MN $\Rightarrow OA \perp MN$	0,25
	Có AK // MN (gt) ; mà MN $\perp$ OA (chứng minh trên) $\Rightarrow$ AK $\perp$ OA tại A, trong đó A $\in$ (O). $\Rightarrow$ AK là tiếp tuyến của (O)	0,25
	Xét ΔAKB và ΔCKA có $\widehat{AKC}$ là góc chung $\widehat{KAB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AB}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB) $\Rightarrow \Delta AKB \sim \Delta CKA$ (g-g)	0,25
	$\Rightarrow \frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KA}$ (tính chất) $\Rightarrow KA^2 = KB.KC$	0,25
	1c.(0,75 điểm)	
	Gọi F là giao điểm AO với (O) Ta có $\widehat{ACF} = \widehat{ABF} = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) $\Rightarrow$ FC $\perp$ AC và FB $\perp$ AB Lại có BH $\perp$ AC và CH $\perp$ AB (gt) $\Rightarrow$ BH // CF và CH // BF $\Rightarrow$ tứ giác BHCF là hình bình hành (dấu hiệu hận biết) Gọi I là giao điểm của BC và HF $\Rightarrow$ IH = IF và IB = IC (tính chất đường chéo hình bình hành)	0,25 0,25
	Xét ΔAHF có AO = OF; IH = IF $\Rightarrow$ OI là đường trung bình của ΔAHF $\Rightarrow$ AH = 2. OI (1) Xét (O) có I là trung điểm của dây BC không đi qua tâm O $\Rightarrow$ OI $\perp$ BC (tính chất) Mà BC không đổi và (O) cố định $\Rightarrow$ OI không đổi (2) Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ AH không đổi (đpcm)	0,25

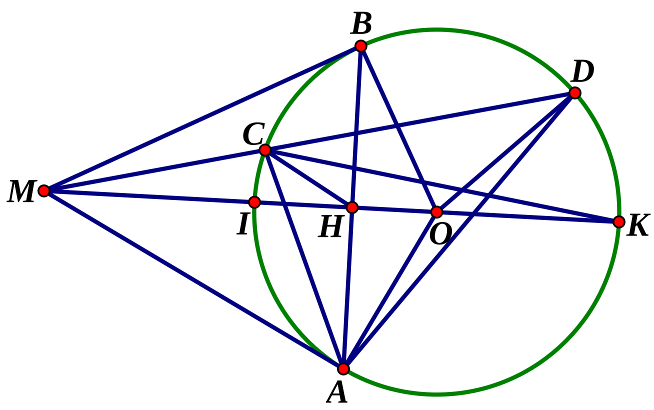
Bài 112. Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Vẽ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là các tiếp điểm) và cát tuyến MCD không đi qua O (C nằm giữa M và D) với đường tròn (O).

a) Chứng minh rằng tứ giác MAOB nội tiếp.

b) Chứng minh MA^2 = MC.MD

c) Đường thẳng MO cắt AB tại H và cắt (O) tại I và K (I nằm giữa M và K). Chứng minh CK là tia phân giác của $\widehat{DCH}$.

Đáp án:

Các ý	Yêu cầu cần đạt	Biểu điểm
	Vẽ hình đúng cho phần a  	0,25
1.a (1điểm)	Có $MAO = 90^0$ (MA là tiếp tuyến của (O) tại A) Có $MBO = 90^0$ (MB là tiếp tuyến của (O) tại B) Xét tứ giác OICH có $MBO + MAO = 180^0$ Mà hai góc MBO ; MAO ở vị trí đối nhau Do đó tứ giác MAOB nội tiếp.	0,25 0,25 0,25 0,25
1.b (1điểm)	Xét (O) có $ADC = MAC$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn AC) Xét ΔMAC và ΔMDA có $ADC = MAC$ (cm trên) DMA chung Do đó $\Delta MAC \backsim \Delta MDA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA} \Leftrightarrow MA^2 = MC.MD$	0,25 0,25 0,25 0,25
1.c (0,75 đ)	Có MA = MB (tính chất hai tiếp tuyến cắt nha của (O)) OA = OB = R Suy ra MO là đường trung trực của AB $\Rightarrow AH \perp MO$	 0,25

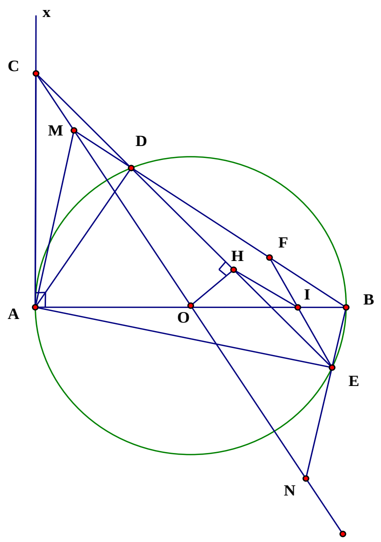
	Xét ΔMAO có $MAO = 90^0$, $AH \perp MO$ suy ra $MA^2 = MH.MO$	
	Lại có $MA^2 = MC.MD$	
	Nên $MH.MO = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MC}{MH} = \dfrac{MO}{MD}$	
	Xét ΔMCH và ΔMOD có $\begin{cases} DMO \text{ chung} \\ \dfrac{MC}{MH} = \dfrac{MO}{MD} \end{cases}$	
	Do đó $\Delta MCH \backsim \Delta MOD$ (c.g.c)	0,25
	$\Rightarrow MCH = MOD$ (hai góc tương ứng)	
	$\Rightarrow HCD = DOK$ (kề bù với $MCH = MOD$)	
	Xét (O) có $DCK = \dfrac{1}{2}DOK$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn DK)	
	Do đó $DCK = \dfrac{1}{2}HCD$ suy ra CK là tia phân giác của DCH.	0,25

Bài 113. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ tiếp tuyến Ax của đường tròn (O)với A là tiếp điểm. Qua điểm C thuộc tia Ax, vẽ đường thẳng cắt đường tròn (O) tại hai điểm D và E(D nằm giữa C và E; D và E nằm về hai phía của đường thẳng AB). Từ O vẽ OH vuông góc với đoạn thẳng DE tại H.

a) Chứng minh tứ giác AOHC nội tiếp.
b) Chứng minh AC.AE = AD.CE
c) Đường thẳng CO cắt tia BD, tia BE lần lượt tại M và N. Chứng minh: AM//BN.

DAP AN

Bài 5	Đáp án	Điểm

Hình vẽ (0,25đ)	 Vẽ hình cho phần a	0,25đ
5.a (1điểm)	a) Chứng minh tứ giác AOHC nội tiếp. Xét tứ giác AOHC có: $AOC = OHC = 90^0 (gt)$ $\Rightarrow AOC + OHC = 90^0 + 90^0 = 180^0$ $\Rightarrow$AOHC nội tiếp	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25 đ
5.b (1,0đ)	b) Chứng minh AC.AE = AD.CE Xét ΔCAD và ΔCEA có: + C là góc chung $+ CAD = CEA$ (cùng bằng nửa số đo cung AD) $\Rightarrow \Delta CAD \backsim \Delta CEA (g-g)$ $\Rightarrow \dfrac{AC}{CE} = \dfrac{AD}{AE}$ $\Rightarrow$AC.CE = AD.CE	0,25đ 0,25đ 0,25đ 0,25đ
5.c (0,75đ)	c) Đường thẳng CO cắt tia BD, tia BE lần lượt tại M và N. Chứng minh: AM//BN. - Qua E kẻ đường thẳng song song với OC cắt BA, BD lần lượt tại I và F Ta có $IEH = HCO$ (2 góc so le trong) mà tứ giác AOHC nội tiếp (theo phần a) $\Rightarrow HCO = HAO$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung OH) $\Rightarrow IEH = HAO$ $\Rightarrow$HAEI nội tiếp $\Rightarrow IAE = IHE$, mà $IAE = BDE$ Suy ra $IHE = BDE$ mà hai góc này ở vị trí so le trong nên suy ra IH//DF	0,25đ

	- Xét tam giác EFD có IH//DF và H là trung điểm của DE nên IH là đường trung bình của tam giác EDF suy ra I là trung điểm của EF - Áp dụng ĐL Talet cho các tam giác BOM và BON có: $\begin{cases} \dfrac{IF}{OM} = \dfrac{BI}{BO} \\ \dfrac{IE}{ON} = \dfrac{BI}{BO} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{IF}{OM} = \dfrac{IE}{ON}$ mà IE = IF nên OM = ON - Xét tứ giác AMBN có OA = OB nên AMBN là hình bình hành Suy ra AM//BN	0,25đ 0,25đ
	Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn được điểm tối đa	

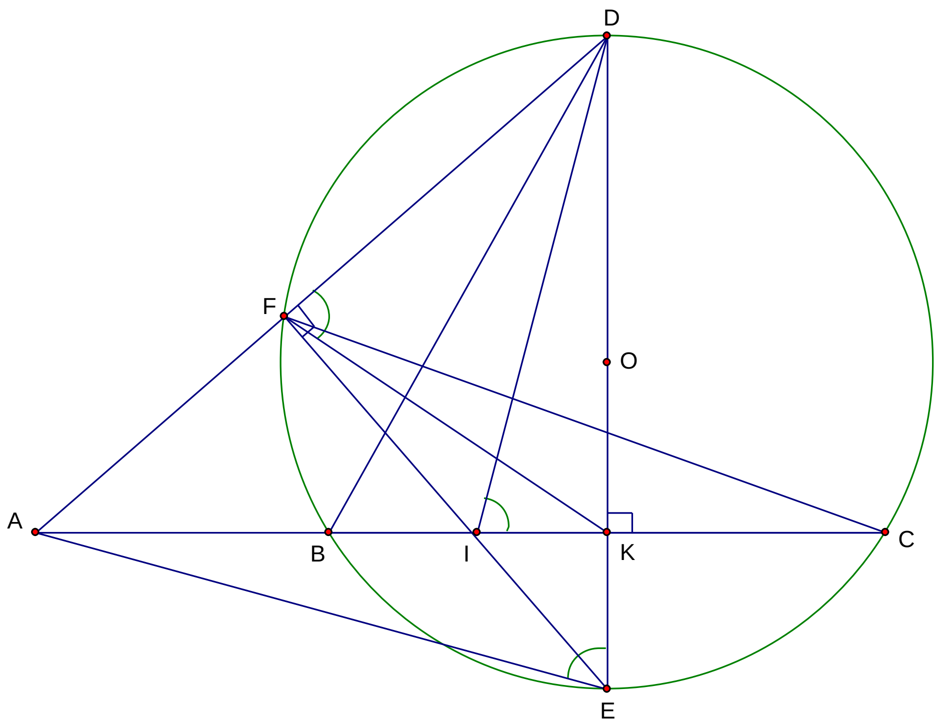
Bài 114. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng (điểm B nằm giữa A và C). Đường tròn (O) đi qua B và C, kẻ đường kính DE vuông góc với BC tại K. AD cắt (O) tại F; EF cắt AC tại I. Chứng minh

a) Tứ giác DFIK nội tiếp.Xác định tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác DFIK

b) $DEA = DIK$.

c) AI . KE . KD = KI . AB . AC

DAPAN

Bài	Đáp án	Điểm
5 (3 điểm)	Hình vẽ đúng cho câu a 	**0,25**
	a) Ta có : $ED \perp BC$ (gt) $\Rightarrow IKD = 90^{o}$	**0,25**

	EFD là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow$ $EFD = 90^o$	**0,25**
	Xét tứ giác DFIK có: $IKD + EFD = 180^o$ => DFIK là tg nội tiếp	**0,25**
	-Tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác DFIK là trung điểm của DI	**0,25**
	b) Tứ giác DFIK nội tiếp $\Rightarrow$ $DFK = DIK$ (cùng chắn cung DK)	**0,25**
	Xét tứ giác AFKE có : $EKA = AFE = 90^o$ $\Rightarrow$ AFKE nội tiếp	**0,25**
	=> $DEA = DFK$ (góc trong tại một đỉnh bằng góc ngoài tại đỉnh đối)	**0,25**
	Suy ra: $DEA = DIK$ (cùng bằng DFK)	**0,25**
	c) Tứ giác DFIK nội tiếp $\Rightarrow IKF = IDF$ (cùng chắn cung IF) KAD chung $\Rightarrow \Delta AID \backsim \Delta AFK \Rightarrow \dfrac{IA}{FA} = \dfrac{DA}{KA} \Rightarrow IA.KA = DA.FA$ (1)	**0,25**
	- Trong (O) có $ACF = ADB$; CAD chung $\Rightarrow \Delta ADB \backsim \Delta ACF \Rightarrow \dfrac{BA}{FA} = \dfrac{DA}{CA} \Rightarrow BA.CA = DA.FA$ (2)	**0,25**
	- Mặt khác: $DEA = DIK$;; $AKD = IKD = 90^0$ $\Rightarrow \Delta AEK \sim \Delta DIK$ => KE . KD = KA . KI (3) Từ (1); (2); (3) suy ra AI. KE. KD = AI . KA . KI = DA . FA . KI = AB . AC . KI	**0,25**

Bài 115. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A lấy điểm M (M khác A). Từ M vẽ tiếp tuyến thứ hai MC với (O) (C là tiếp điểm). Kẻ CH vuông góc với AB ($H \in AB$), MB cắt (O) tại điểm thứ hai là K và cắt CH tại N.

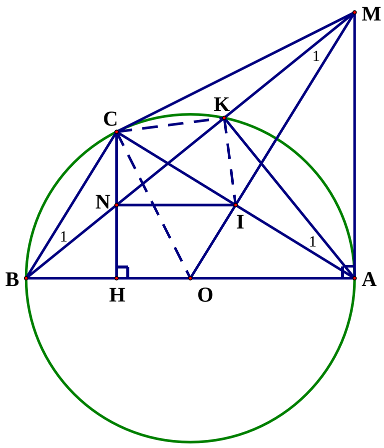
Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AKNH là tứ giác nội tiếp

b) KAC = OMB

c) N là trung điểm của CH.

DAPAN

Bài 5 (3,0 điểm)		
	Hình vẽ đúng cho câu a) 	0,25
	a) Chứng minh tứ giác AKNH là tứ giác nội tiếp	
	Có $AKN = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)	0,25
	$AHN = 90^0$ (vì $CH \perp AB$: gt)	0,25
	$\Rightarrow AKN + AHN = 90^0 + 90^0 = 180^0$. Vậy tứ giác AKNH nội tiếp được (vì có tổng hai góc đối bằng 180^0)	0,25 0,25
	b) Chứng minh $KAC = OMB$	
	Vì MA; MC là các tiếp tuyến của (O) nên theo t/c hai tiếp tuyến cắt nhau ta có $MA = MC \Rightarrow \Delta MAC$ cân tại M	0,25
	Lại có MO là tia phân giác AMC nên MO đồng thời là đường cao $\Rightarrow MO \perp AC$ tại I.	0,25
	Mặt khác $BC \perp AC$ (vì $ACB = 90^0$: góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow MO \parallel BC \Rightarrow B_1 = M_1$ (hai góc so le trong)	0,25
	Mặt khác xét (O) có $B_1 = A_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn CK) $\Rightarrow A_1 = M_1$ hay $KAC = OMB$ (đpcm)	0,25
	c) Chứng minh N là trung điểm của CH.	
	Gọi I là giao điểm của AC và MO. Vì $A_1 = M_1$ nên tứ giác AIKM nội tiếp được $\Rightarrow IKN = MAI$ Mà $CH \parallel MA$ (cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow NCI = MAI$ (so le trong)	0,25

	Vậy $NCI = IKN$. Mà C và K cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ NI $\Rightarrow$ C, K cùng thuộc cung chứa góc dựng qua đoạn NI $\Rightarrow$ tứ giác CKIN nội tiếp được (vì có 4 đỉnh cùng thuộc một đường tròn) $\Rightarrow CIN = CKN$ hay $CIN = CKB$	
	Mà $CAB = CKB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BC) $\Rightarrow CIN = CAB \Rightarrow NI//AB$	0,25
	- Xét ΔCAH có I là trung điểm của AC (câu a); IN // AB (c/m trên) $\Rightarrow$ N là trung điểm của CH (đpcm)	0,25

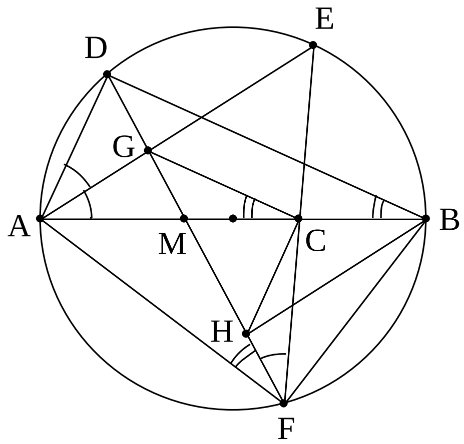
Bài 116. Cho đường tròn đường kính AB, điểm C nằm giữa A và B. Trên đường tròn lấy điểm D (D khác A và B). Gọi E là điểm chính giữa cung nhỏ BD. Đường thẳng EC cắt đường tròn tại điểm thứ hai F. Gọi G là giao điểm của DF và AE.

a) Chứng minh $BAE = DFE$ và AGCF là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh CG vuông góc với AD.

c)Kẻ đường thẳng đi qua C song song với AD cắt DF tại H. Chứng minh $CH = CB$.

Đáp án

Bài	Đáp án	Điểm
Bài 5 **(3,0 điểm)**	Vẽ hình đúng để làm câu a). 	0,25
	a) (1,0 điểm) Có E là điểm chính giữa cung nhỏ BDnên $EB = ED$. Có $BAE = \frac{1}{2}$sđEB, $DFE = \frac{1}{2}$sđED. Do đó $BAE = DFE$. Suy ra $CAG = CFG$. Do đó tứ giác AGCF nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).	0,25 0,25 0,25 0,25
	b) (1,0 điểm) Xét tứ giác AGCF nội tiếp, có $ACG = AFG$ (góc nội tiếp cùng chắn AG). (1) Xét đường tròn đường kính AB có $AFG = ABD$ (góc nội tiếp cùng chắn AD). (2) Từ (1), (2) suy ra $ACG = ABD$ nên CG // BD (hai gócở vị trí đồng vị).	0,25 0,25 0,25

	Có $\widehat{ADB}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $BD\perp AD$ suy ra $CG\perp AD$.	0,25
	c) (0,75 điểm) Gọi M là giao điểm của DF và AB. Do CH // AD nên $\frac{CH}{CM}=\frac{AD}{AM}\cdot$ (3) Do AG là phân giác của góc $\widehat{MAD}$ nên $\frac{AD}{AM}=\frac{GD}{GM}\cdot$ (4) Do CG // BD nên $\frac{GD}{GM}=\frac{CB}{CM}\cdot$ (5) Từ (3), (4), (5) ta có $\frac{CH}{CM}=\frac{CB}{CM}\Leftrightarrow CH=CB$.	0,25 0,25 0,25