

CHƯƠNG

IV

VECTƠ

BÀI 11. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO



LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a} \cdot \vec{b}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Chú ý

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- Khi $\vec{a} = \vec{b}$ tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có: $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

2. Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng:

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (tính chất phân phối);
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$;
- $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Nhận xét. Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$;
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$.

3. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trên mặt phẳng tọa độ $(O; \vec{i}; \vec{j})$, cho hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$. Khi đó tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ là:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Nhận xét. Hai vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác vector $\vec{0}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

4. Ứng dụng

a) Độ dài của vector

Độ dài của vector $\vec{a} = (a_1; a_2)$ được tính theo công thức:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

b) Góc giữa hai vector

Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vector ta suy ra nếu $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác $\vec{0}$ thì ta có

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

c) Khoảng cách giữa hai điểm

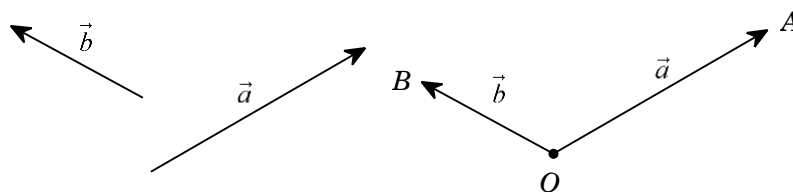
Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ được tính theo công thức:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

5. Góc giữa hai vector

a) Định nghĩa

Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vector $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\vec{OA} = \vec{a}$ và $\vec{OB} = \vec{b}$. Góc AOB với số đo từ 0° đến 180° được gọi là góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Ta kí hiệu góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $(\vec{a}, \vec{b})$. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$ hoặc $\vec{b} \perp \vec{a}$.



b) Chú ý. Từ định nghĩa ta có $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

4.21. Trong mặt phẳng Oxy, hãy tính góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{a} = (-3; 1), \vec{b} = (2; 6)$

b) $\vec{a} = (3; 1), \vec{b} = (2; 4)$

c) $\vec{a} = (-\sqrt{2}; 1), \vec{b} = (2; -\sqrt{2})$.

4.22. Tìm điều kiện của $\vec{u}, \vec{v}$ để:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

4.23. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1; 2), B(-4; 3)$. Gọi $M(t; 0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ theo t .

b) Tìm t để $\angle AMB = 90^\circ$.

4.24. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4; 1), B(2; 4), C(2; -2)$.

a) Giải tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

4.25. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$

4.26. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

II HỆ THỐNG BÀI TẬP.

DẠNG 1: XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI VECTO.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Sử dụng định nghĩa góc giữa 2 vector.
- Sử dụng tính chất của tam giác, hình vuông...

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác đều ABC. Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\hat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây sai?

A. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. **B.** $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$. **C.** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. **D.** $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 40^\circ$.

Câu 2: Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120° ?

A. $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$. **B.** $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$. **C.** $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$. **D.** $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.

Câu 3: Cho tam giác đều ABC. Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

A. $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. B. $P = \frac{3}{2}$. C. $P = -\frac{3}{2}$. D. $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Cho tam giác đều ABC có đường cao AH . Tính $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$.

A. 30° . B. 60° . C. 120° . D. 150° .

Câu 5: Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.

A. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$. B. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$.
C. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Cho tam giác ABC . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

A. 180° . B. 360° . C. 270° . D. 120° .

Câu 7: Cho tam giác ABC với $\hat{A} = 60^\circ$. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

A. 120° B. 360° C. 270° D. 240°

Câu 8: Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

A. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
C. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 0$. D. $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -1$.

Câu 9: Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC})$.

A. 45° B. 405° C. 315° D. 225°

Câu 10: Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trục tâm H . Tính tổng $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$.

A. 360° B. 180° C. 80° D. 160°

DẠNG 2: TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Dựa vào định nghĩa $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b})$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vector

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a$, $BC = 2a$ và G là trọng tâm.

- Tính các tích vô hướng: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$
- Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$
- Tính giá trị của biểu thức $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$

Câu 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . M là trung điểm của AB , G là trọng tâm tam giác ADM . Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$ b) $\overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM})$

Câu 3: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. M là trung điểm của BC , D là chân đường phân giác trong góc A .

a) Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, rồi suy ra $\cos A$.

b) Tính $\overrightarrow{AM}^2$ và $\overrightarrow{AD}^2$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vector cùng hướng và đều khác vector $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Câu 2: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^\circ$. B. $\alpha = 0^\circ$. C. $\alpha = 90^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Câu 3: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 120^\circ$.

Câu 4: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vector $\vec{u} = \frac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$. B. $\alpha = 180^\circ$. C. $\alpha = 60^\circ$. D. $\alpha = 45^\circ$.

Câu 5: Cho hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$ D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

Câu 6: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

Câu 7: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

Câu 8: Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$ B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2$ C. $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}a^2$

Câu 9: Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ B. $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$ D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

Câu 10: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB = AC = a$. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

Câu 11: Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB = c$, $AC = b$. Tính $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

A. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$ B. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$ C. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$ D. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

Câu 12: Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CA = 5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

A. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$ B. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$ C. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$ D. $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

Câu 13: Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tính $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

A. $P = b^2 - c^2$ B. $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$ C. $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$ D. $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

Câu 14: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Tính $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

A. $P = -1$ B. $P = 3a^2$ C. $P = -3a^2$ D. $P = 2a^2$

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(3; -1)$, $B(2; 10)$, $C(-4; 2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -40$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -26$

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$

A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$ B. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$ D. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-3; 2)$ và $\vec{b} = (-1; -7)$. Tìm tọa độ vector $\vec{c}$ biết $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ và $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$

A. $\vec{c} = (-1; -3)$ B. $\vec{c} = (-1; 3)$ C. $\vec{c} = (1; -3)$ D. $\vec{c} = (1; 3)$

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vector $\vec{a} = (1; 2)$, $\vec{b} = (4; 3)$ và $\vec{c} = (2; 3)$.

Tính $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

A. $P = 0$ B. $P = 18$ C. $P = 20$ D. $P = 28$

Câu 19: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-1; 1)$ và $\vec{b} = (2; 0)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (-2; -1)$ và $\vec{b} = (4; -3)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Tính góc α giữa hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$ B. $\alpha = 60^\circ$ C. $\alpha = 45^\circ$ D. $\alpha = 30^\circ$

Câu 22: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{x} = (1; 2)$ và $\vec{y} = (-3; -1)$. Tính góc α giữa hai vector $\vec{x}$ và $\vec{y}$

A. $\alpha = 45^\circ$

B. $\alpha = 60^\circ$

C. $\alpha = 90^\circ$

D. $\alpha = 135^\circ$

Câu 23: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vector $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$

A. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{1}{2}$

B. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{2}{5}$

D. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 24: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

A. 15°

B. 60°

C. 120°

D. 135°

Câu 25: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hai góc BAD và BCD phụ nhau.

B. Góc BCD là góc nhọn.

C. $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \cos(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$

D. Hai góc BAD và BCD bù nhau.

DẠNG 3: CHỨNG MINH CÁC ĐẲNG THỨC VỀ TÍCH VÔ HƯỚNG HOẶC ĐỘ DÀI.

1 PHƯƠNG PHÁP.

- Nếu trong đẳng thức chứa bình phương độ dài của đoạn thẳng thì ta chuyển về vector nhờ đẳng thức $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2$
- Sử dụng các tính chất của tích vô hướng, các quy tắc phép toán vector
- Sử dụng hằng đẳng thức vector về tích vô hướng.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB và M là điểm tùy ý.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$

Câu 2. Cho bốn điểm A, B, C, D bất kì. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ (*).

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí: "Ba đường cao trong tam giác đồng qui".

Câu 3. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Có AC và BD là hai dây thuộc nửa đường tròn cắt nhau tại E. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = AB^2$

Câu 4. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh rằng $aIA^2 + bIB^2 + cIC^2 = abc$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi M là trung điểm cạnh BC . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{b^2 - c^2}{2}$. B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2}{2}$.
 C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$. D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$.
- Câu 2:** Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ là
- A. tam giác OAB đều. B. tam giác OAB cân tại O .
 C. tam giác OAB vuông tại O . D. tam giác OAB vuông cân tại O .
- Câu 3:** Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?
- A. $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ}$. B. $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$.
 C. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN}$. D. $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.
- Câu 4:** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2$ B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$ C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2$ D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} a^2$
- Câu 5:** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Gọi E là điểm đối xứng của D qua C . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$. B. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}a^2$. C. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = \sqrt{5}a^2$. D. $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = 5a^2$.
- Câu 6:** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = -4$. B. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$. C. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 4$. D. $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = 16$.
- Câu 7:** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 8$, $AD = 5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 62$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = 64$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -62$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -64$.
- Câu 8:** Cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 8$ và $BD = 6$. Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 24$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 28$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 32$.
- Câu 9:** Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$ và $AD = a\sqrt{2}$. Gọi K là trung điểm của cạnh AD . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. B. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -a^2 \sqrt{2}$. C. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = a^2 \sqrt{2}$. D. $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$.
- Câu 10:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-4;1)$, $B(2;4)$, $C(2;-2)$. Tìm tọa độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.
- A. $I\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. B. $I\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$. C. $I\left(1; \frac{1}{4}\right)$. D. $I\left(1; -\frac{1}{4}\right)$.
- Câu 11:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba điểm $A(2;0)$, $B(0;2)$ và $C(0;7)$. Tìm tọa độ đỉnh thứ tư D của hình thang cân $ABCD$.
- A. $D(7;0)$. B. $D(7;0), D(2;9)$. C. $D(0;7), D(9;2)$. D. $D(9;2)$.

DẠNG 4: ĐIỀU KIỆN VUÔNG GÓC.



PHƯƠNG PHÁP.

Cho $\vec{a} = (x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$. Khi đó $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

- Câu 1.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ và $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm k để vector $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.
- Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-2;4)$ và $B(8;4)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục hoành sao cho tam giác ABC vuông tại C .
- Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(2;4)$, $B(-3;1)$, $C(3;-1)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' vẽ từ đỉnh A của tam giác đã cho.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

- Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho ba vector $\vec{a} = (-2;3)$, $\vec{b} = (4;1)$ và $\vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b}$ với $k, m \in \mathbb{R}$. Biết rằng vector $\vec{c}$ vuông góc với vector $(\vec{a} + \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $2k = 2m$ B. $3k = 2m$ C. $2k + 3m = 0$ D. $3k + 2m = 0$.
- Câu 2:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vector $\vec{u} = (3;4)$ và $\vec{v} = (-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $|\vec{u}| = |\vec{v}|$. B. $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ và $\vec{v}$ cùng phương.
- C. $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. D. $\vec{u} = -\vec{v}$.
- Câu 3:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{CB}$. B. Tam giác ABC đều.
- C. Tứ giác $ABCD$ là hình vuông. D. Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.
- Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?
- A. Tam giác ABC đều. B. Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.
- C. Tam giác ABC cân tại B . D. Tam giác ABC vuông cân tại A .
- Câu 5:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A .
- A. $C(0;6)$. B. $C(5;0)$. C. $C(3;1)$. D. $C(0;-6)$.
- Câu 6:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.
- A. $a + 6b = 5$. B. $a + 6b = 6$. C. $a + 6b = 7$. D. $a + 6b = 8$.
- Câu 7:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm tọa

độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC .

- A. $A'(1; -4)$. B. $A'(-1; 4)$. C. $A'(1; 4)$. D. $A'(4; 1)$.

Câu 8: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác ABC có $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$ và $C(2; 6)$. Gọi $H(a; b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a + 6b$.

- A. $a + 6b = 5$. B. $a + 6b = 6$. C. $a + 6b = 7$. D. $a + 6b = 8$.

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho tam giác MNP vuông tại M . Biết điểm $M(2; 1)$, $N(3; -2)$ và P là điểm nằm trên trục Oy . Tính diện tích tam giác MNP .

- A. $\frac{10}{3}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{16}{3}$. D. $\frac{20}{3}$.

DẠNG 5: CÁC BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Ta sử dụng các kết quả cơ bản sau:

Cho A, B là các điểm cố định. M là điểm di động

- Nếu $|\overrightarrow{AM}| = k$ với k là số thực dương cho trước thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A , bán kính $R = k$.
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB
- Nếu $\overrightarrow{MA} \cdot \vec{a} = 0$ với $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ cho trước thì tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua A và vuông góc với giá của vectơ $\vec{a}$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho hai điểm A, B cố định có độ dài bằng a , vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho

a) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}$ b) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MA^2$

Câu 2. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M sao cho $(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và số thực k cho trước. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = k$

3 BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 2: Tìm tập các hợp điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 0$ với A, B, C là ba đỉnh của tam giác.

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 3: Cho tam giác ABC . Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ là:

- A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 4: Cho hai điểm A, B cố định có khoảng cách bằng a . Tập hợp các điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB} = 2a^2$ là:

A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 5: Cho hai điểm A, B cố định và $AB=8$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{MB}=-16$ là:

A. một điểm. B. đường thẳng. C. đoạn thẳng. D. đường tròn.

Câu 6: Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức

$$4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$$

nằm trên một đường tròn (C) có bán kính R . Tính R .

A. $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. B. $R = \frac{a}{4}$. C. $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Câu 7: Cho tam giác đều ABC cạnh 18cm. Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức

$$|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$$

là

A. Tập rỗng. B. Đường tròn cố định có bán kính $R=2$ cm.
C. Đường tròn cố định có bán kính $R=3$ cm. D. Một đường thẳng.

DẠNG 6: CỰC TRỊ.



PHƯƠNG PHÁP.

Sử dụng kiến thức tổng hợp để giải toán.



BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(-2;6)$, $C(9;8)$.

- Chứng minh tam giác ABC vuông tại A .
- Xác định tọa độ điểm H thuộc BC sao cho AH ngắn nhất.

Câu 2. Cho điểm $A(2;1)$. Lấy điểm B nằm trên trục hoành có hoành độ không âm sao và điểm C trên trục tung có tung độ dương sao cho tam giác ABC vuông tại A . Tìm tọa độ B, C để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(1;-1)$ và $B(3;2)$. Tìm M thuộc trục tung sao cho $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất.

A. $M(0;1)$. B. $M(0;-1)$. C. $M(0;\frac{1}{2})$. D. $M(0;-\frac{1}{2})$.

Câu 2: Trong hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(2;-3)$, $B(3;-4)$. Tìm tọa độ điểm M trên trục hoành sao cho chu vi tam giác AMB nhỏ nhất.

A. $M(\frac{18}{7};0)$. B. $M(4;0)$. C. $M(3;0)$. D. $M(\frac{17}{7};0)$.

Câu 3: Cho $M(-1;-2)$, $N(3;2)$, $P(4;-1)$. Tìm E trên Ox sao cho $|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EP}|$ nhỏ nhất.

A. $E(4;0)$. B. $E(3;0)$. C. $E(1;0)$. D. $E(2;0)$.