

CHƯƠNG

VI

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

BÀI 15. HÀM SỐ



LÝ THUYẾT.

I. HÀM SỐ

1. Định nghĩa

Cho một tập hợp **khác rỗng** $D \subset \mathbb{R}$.

Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập hợp số D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x .

Tập hợp D gọi là tập xác định của hàm số.

Tập tất cả các giá trị y nhận được, gọi là tập giá trị của hàm số. Ta nói $T = \{f(x) | x \in D\}$ là tập giá trị của $f(x)$ (trên D).

Chú ý: Cho $K \subset D$. Ta nói $T_K = \{f(x) | x \in K\}$ là tập giá trị của $f(x)$ trên K .

Khi y là hàm số của x , ta có thể viết $y = f(x), y = g(x), \dots$

2. Cách cho hàm số

a) Hàm số cho bằng công thức $y = f(x)$

+ Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các giá trị của x để $f(x)$ có nghĩa.

b) Hàm số cho bằng nhiều công thức.

c) Hàm số không cho bằng công thức.

II. ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với mọi x thuộc D . Hay có thể diễn tả bằng: $M(x_0; y_0) \in (G) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$ với $x_0 \in D$.

III. SỰ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm

Hàm số $y = f(x)$ xác định trên K .

Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (hay tăng) trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (hay giảm) trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

2. Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị

+ Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số “đi lên” trên khoảng đó.

+ Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số “đi xuống” trên khoảng đó.



BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

6.1. Xét hai đại lượng x, y phụ thuộc vào nhau theo các hệ thức dưới đây. Những trường hợp nào thì y là hàm số của x ?

a) $x + y = 1$; b) $y = x^2$; c) $y^2 = x$; d) $x^2 - y^2 = 0$.

6.2. Hãy cho một ví dụ về hàm số được cho bằng bảng hoặc biểu đồ. Hãy chỉ ra tập xác định và tập giá trị của hàm số đó.

6.3. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 + 3x + 1$; b) $y = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ c) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$.

6.4. Tìm tập xác định và tập giá trị của mỗi hàm số sau:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = 2x^2$

6.5. Vẽ đồ thị các hàm số sau và chỉ ra các khoảng đồng biến, nghịch biến của chúng.

a) $y = -2x + 1$; b) $y = -\frac{1}{2}x^2$.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để tìm tập xác định D của hàm số $y = f(x)$ ta tìm điều kiện của x để $f(x)$ có nghĩa.

Chú ý. Thông thường $y = f(x)$ cho bởi biểu thức đại số, ta xét một số trường hợp sau:

+ Hàm số $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ có nghĩa khi $u(x)$, $v(x)$ có nghĩa và $v(x) \neq 0$.

+ Hàm số $y = f(x) = \sqrt{u(x)}$ có nghĩa khi $u(x)$ có nghĩa và $u(x) \geq 0$.

+ Hàm số $y = f(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{v(x)}}$ có nghĩa khi $u(x)$, $v(x)$ có nghĩa và $v(x) > 0$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2x-1}{1-x}$.

Câu 2. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$.

Câu 3. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2x-1}{x^2 - 3x + 2}$.

Câu 4. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{2x-2}$.

Câu 5. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{6-2x}$.

Câu 6. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{3x-1}{\sqrt{2x-2}}$.

Câu 7. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{6-2x}}$.

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{-2x+3} - \sqrt{x-1}$.

Câu 9. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$.

Câu 10. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x}{1-x^2} - \sqrt{-x}$.

Câu 11. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x+4}}$.

Câu 12. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x-2}{(x^2 + 7x + 6)\sqrt{2x+4}}$.

Câu 13. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{5-x}{(x^2 - 8x - 9)\sqrt{3-x}}$.

Câu 14. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{x-2}{\sqrt{2x+4} - \sqrt{4-2x}}$.

Câu 15. Tìm tập xác định của hàm số

a) $y = \frac{3x-1}{-2x+2}$. b) $y = \frac{2x-1}{(2x+1)(x-3)}$.

c) $y = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}$. d) $y = \frac{2x+1}{x^3 - 3x + 2}$.

Câu 16. Tìm tập xác định của hàm số

a) $y = \sqrt{3x-2}$.

b) $y = \sqrt{x^2+1}$.

c) $y = \sqrt{-2x+1} - \sqrt{x-1}$.

d) $y = \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x-3}$.

e) $y = \sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}} + \sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$.

f) $y = \sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

Câu 17. Tìm tập xác định của hàm số

a) $y = \frac{2}{(x+2)\sqrt{x+1}}$.

b) $y = \frac{x}{1-x^2} - \sqrt{-x}$.

c) $y = \frac{x-3\sqrt{2-x}}{\sqrt{x+2}}$.

d) $y = \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$.

e) $y = \sqrt{1-x} + \frac{1}{x\sqrt{1+x}}$.

f) $y = \frac{2015}{\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-7}}$.

g) $y = \sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \frac{1}{1-x}$.

h) $y = \sqrt{\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1)}$.

DẠNG 2. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ XÁC ĐỊNH TRÊN MỘT TẬP K CHO TRƯỚC



PHƯƠNG PHÁP.

Bài toán. Cho hàm $y = f(x, m)$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số xác định trên tập K .

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của hàm số (theo m). Gọi D là tập xác định của hàm số.

Bước 2: Hàm số xác định trên tập K khi và chỉ khi $K \subset D$.

Một số lưu ý:

+ Hàm số $y = \frac{A}{f(x, m)}$ (A là biểu thức luôn có nghĩa) xác định trên tập K khi và chỉ khi phương trình $f(x, m) = 0$ vô nghiệm trên K .

+ Hàm số $y = \sqrt{f(x, m)}$ xác định trên tập K khi và chỉ khi bất phương trình $f(x, m) \geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in K$.

+ Hàm số $y = \frac{A}{\sqrt{f(x, m)}}$ (A là biểu thức luôn có nghĩa) xác định trên tập K khi và chỉ khi bất phương trình $f(x, m) > 0$ nghiệm đúng với mọi $x \in K$.

+ $K \subset (D_1 \cap D_2) \Leftrightarrow \begin{cases} K \subset D_1 \\ K \subset D_2 \end{cases}$

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x^2+x+m}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = \sqrt{2x-m}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có tập xác định là $[2; +\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{3x-5m+6}}{x+m-1}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số xác định trên $(0; +\infty)$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \sqrt{m-x} + \sqrt{2x-m+1}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số xác định trên $(0; 1)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \sqrt{x^4 + 4x^3 + (m+5)x^2 + 4x + 4 + m}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Câu 6. Tìm m để các hàm số sau đây xác định với mọi x thuộc khoảng $(0; +\infty)$.

a) $y = \sqrt{x-m} + \sqrt{2x-m-1}$.

b) $y = \sqrt{2x-3m+4} + \frac{x-m}{x+m-1}$.

Câu 7. Tìm m để các hàm số

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x-m}} + \sqrt{-x+2m+6}$ xác định trên $(-1; 0)$.

b) $y = \sqrt{1-|2x^2+mx+m+15|}$ xác định trên $[1; 3]$.

Câu 8. Tìm m để các hàm số

a) $y = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+m-2}}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

b) $y = \frac{\sqrt{m+1}}{3x^2-2x+m}$ xác định trên toàn trục số.

DẠNG 3. TẬP GIÁ TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHƯƠNG PHÁP.

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D .

Tập hợp $T = \{y = f(x) | x \in D\}$ gọi là tập giá trị của hàm số $y = f(x)$.

BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm tập giá trị của hàm số $y = 5x - 4$.

Câu 2. Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2\sqrt{x} + 3$.

Câu 3. Tìm tập giá trị của hàm số $y = -x^2 + 4x + 4$.

Câu 4. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{4-x^2}$.

Câu 5. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$.

DẠNG 4. TÍNH ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN CỦA HÀM SỐ

PHƯƠNG PHÁP.

*** Phương pháp 1:**

Tìm tập xác định D của hàm số.

Với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$.

Tính $f(x_1) - f(x_2)$.

Nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số đã cho đồng biến (tăng).

Nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số đã cho nghịch biến (giảm).

*** Phương pháp 2:**

Tìm tập xác định D của hàm số.

Với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$.

Lập tỉ số $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

Nếu $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ thì hàm số đã cho đồng biến (tăng).

Nếu $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ thì hàm số đã cho nghịch biến (giảm).

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2 - 7$ trên khoảng $(-\infty; 0)$ và trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 2. Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $f(x) = \frac{x}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty; 1)$ và trên khoảng $(1; +\infty)$.

DẠNG 5. TÌM ĐIỀU KIỆN CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN (NGỊCH BIẾN) TRÊN MỘT TẬP HỢP CHO TRƯỚC

1 PHƯƠNG PHÁP.

Hàm số đồng biến (nghịch biến) trên D . Ta xét $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$.

Để hàm số đồng biến thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ từ đó ta dễ dàng tìm được m thỏa mãn đề bài;

ngược lại để hàm số nghịch biến thì $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ ta cũng dễ dàng tìm được m thỏa mãn đề bài.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-3; 3]$ để hàm số

$$f(x) = (m+1)x + m - 2 \text{ đồng biến trên } \mathbb{R} ?$$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (2m+3)x + m + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -x^2 + (m-1)x + 2$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

DẠNG 6. BÀI TOÁN THỰC TẾ

1 PHƯƠNG PHÁP.

Bước 1: Lập biểu thức theo yêu cầu bài toán (nếu cần);

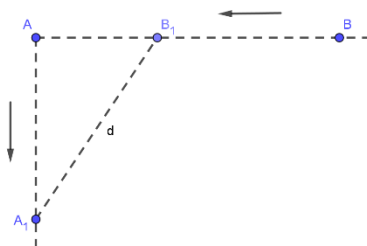
Bước 2: Khai thác giả thiết để xử lí bài toán phù hợp;

Bước 3: Kết luận.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Cho rằng diện tích rừng nhiệt đới trên trái đất được xác định bởi hàm số $S = 718,3 - 4,6t$, trong đó S được tính bằng triệu hec-ta, t tính bằng số năm kể từ năm 1990. Hãy tính diện tích rừng nhiệt đới vào các năm 1990 và 2018.

Câu 2. Hai con tàu đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 5 hải lý. Đồng thời cả hai con tàu cùng khởi hành, một tàu chạy về hướng nam với 6 hải lý/giờ, còn tàu kia chạy về vị trí hiện tại của tàu thứ nhất với vận tốc 7 hải lý/giờ. Hãy xác định thời điểm mà khoảng cách của hai tàu là nhỏ nhất?



Câu 3. Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 USD. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x USD thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?