

CHƯƠNG

VI

HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

BÀI 16. HÀM SỐ BẬC HAI



LÝ THUYẾT.

1. ĐỊNH NGHĨA

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức: $y = ax^2 + bx + c$,

trong đó x là biến số, a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Chú ý :

+ Khi $a = 0, b \neq 0$, hàm số trở thành hàm số bậc nhất $y = bx + c$.

+ Khi $a = b = 0$, hàm số trở thành hàm hằng $y = c$.

2. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

a) Đồ thị hàm số $y = ax^2, a \neq 0$ là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ, có trục đối xứng là trục tung (là đường thẳng $x = 0$). Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.

b) Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ là một parabol có:

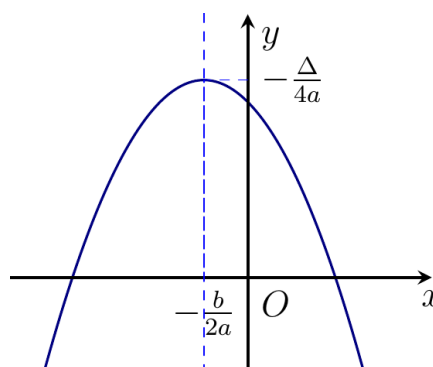
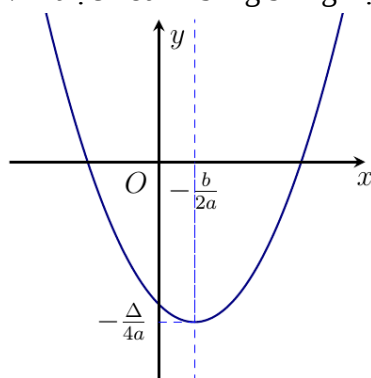
+ Đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

+ Trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$.

+ Bề lõm hướng lên trên nếu $a > 0$, hướng xuống dưới nếu $a < 0$.

+ Giao điểm với trục tung là $M(0; c)$.

+ Số giao điểm với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.



$$a > 0$$

$$a < 0$$

BẢNG BIẾN THIÊN

$$a > 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$+\infty$

$$a < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$-\infty$

+ Khi $a > 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

+ Khi $a < 0$, hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

- Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta tiến hành theo các bước sau:

1. Xác định tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

2. Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$;

3. Xác định tọa độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;

4. Vẽ parabol.



BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.

6.7. Vẽ các đường parabol sau:

a) $y = x^2 - 3x + 2$;

b) $y = -2x^2 + 2x + 3$;

c) $y = x^2 + 2x + 1$;

d) $y = -x^2 + x - 1$.

6.8. Từ các parabol đã vẽ ở Bài tập 6.7, hãy cho biết khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của mỗi hàm số bậc hai tương ứng.

6.9. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 1$, trong mỗi trường hợp sau:

a) Đi qua hai điểm $A(1;0)$ và $B(2;4)$;

b) Đi qua điểm $A(1;0)$ và có trục đối xứng $x = 1$;

c) Có đỉnh $I(1;2)$;

d) Đi qua điểm $A(-1;6)$ và có tung độ đỉnh $-0,25$.

- 6.10. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó đi qua điểm $A(8;0)$ và có đỉnh là $I(6;-12)$.
- 6.11. Gọi (P) là đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$. Hãy xác định dấu của hệ số a và biệt thức Δ , trong mỗi trường hợp sau:
- (P) nằm hoàn toàn phía trên trục hoành;
 - (P) nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành;
 - (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía dưới trục hoành;
 - (P) tiếp xúc với trục hoành và nằm phía trên trục hoành.
- 6.12. Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau.

An nói: Tôi đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội (H.6.14) có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là 8m và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng 0,5m là 2,93 m. Từ đó tôi tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là 12m.

Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác.

Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không nhé!



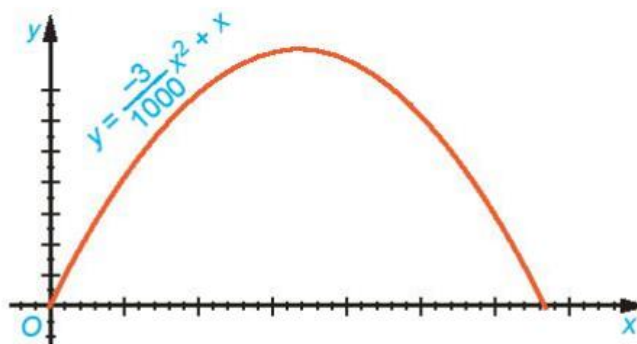
Hình 6.14. Cổng parabol của trường Đại học Bách khoa Hà Nội

- 6.13. Bác Hùng dùng 40 m lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau.
- Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng x (mét) của nó.
 - Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác Hùng có thể rào được.
- 6.14. Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng tọa độ Oxy là một parabol có phương trình $y = \frac{-3}{1000}x^2 + x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo

phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O , y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất (H.6.15).

a) Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay.

b) Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O . Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.



Hình 6.15

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

VẤN ĐỀ 1. TÌM ĐIỀU KIỆN ĐỂ HÀM SỐ $y = ax^2 + bx + c$ ĐỒNG BIẾN TRÊN KHOẢNG $(a; b)$

1 PHƯƠNG PHÁP.

+ Trường hợp $a = 0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

+ Trường hợp $a > 0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (A; B) \subset \left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right) \end{cases}$.

+ Trường hợp $a < 0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ (A; B) \subset \left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right) \end{cases}$.

Lưu ý:

- Việc tìm điều kiện để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nghịch biến trên khoảng $(A; B)$ được làm tương tự.

- Có thể dựa vào định nghĩa tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để thực hiện các bài toán trên.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + 2mx + 1$ đồng biến trên $(-\infty; 3)$.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -4x^2 + 4mx - m^2 + 2$ nghịch biến trên $(-2; +\infty)$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m^2 + 1)x^2 - 4mx + 1$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^2 - (m^2 + 1)x + 3$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 5. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = mx^2 + 2(m-1)x + 2m+1$ nghịch biến trên $(-1; 2)$.

Câu 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = (m-2)x^2 - 2mx + m + 2019$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 7. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = mx^2 - (2m+1)x + 3$ đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.

Câu 8. Cho hàm số: $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các tham số, $(a > 0)$. Biết rằng $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{6a^2}{5a^2 + 2ab + b^2}$.

VẤN ĐỀ 2. XÁC ĐỊNH HÀM SỐ BẬC HAI



PHƯƠNG PHÁP.

Để xác định hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (đồng nghĩa với xác định các tham số a, b, c) ta cần dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là a, b, c . Từ đó tìm được a, b, c . Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$.

- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = x_0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = x_0$.

- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I(x_I; y_I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = x_I \\ -\frac{\Delta}{4a} = y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{b}{2a} = x_I \\ f(x_I) = y_I \end{pmatrix}$.

- Trên $\mathbb{R}$, ta có:

1. $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a < 0$. Lúc này giá trị lớn nhất của $f(x)$ là $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2. $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a > 0$. Lúc này giá trị nhỏ nhất $f(x)$ là $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng (P) đi qua điểm $M(1;5)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{1}{4}$.

Câu 2. Xác định parabol $(P): y = ax^2 + 2x + c$, biết rằng $I\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$ là đỉnh của (P) .

Câu 3. Tìm parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết rằng (P) đi qua ba điểm $A(1;-1)$, $B(2;3)$, $C(-1;-3)$.

Câu 4. Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các tham số, biết rằng hàm số ấy đạt giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x = -2$ và có đồ thị đi qua điểm $M(1;-1)$.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ ($m \neq 0$) cắt đường thẳng $y = 3x - 1$ tại đỉnh của nó.

Câu 6. Tìm parabol $(P): y = ax^2 - 4x + c$ biết rằng hoành độ đỉnh của (P) bằng -3 và (P) đi qua điểm $M(-2;1)$.

Câu 7. Tìm các tham số a, b, c sao cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4 tại $x = 2$ và đồ thị của nó cắt trục tung tại điểm có tung độ là 6.

Câu 8. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt trục Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của $f(x) = 3$.

VẤN ĐỀ 3. ĐỒ THỊ HÀM SỐ BẬC HAI

Dạng 1. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$.

+ Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của (P) .

+ Tương giao của (P) với trục Ox .

+ Tìm điều kiện để các giao điểm của (P) và trục Ox thỏa mãn điều kiện nào đó.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Thường dùng đến các kết quả sau:

+ Đường thẳng $x = \frac{-b}{2a}$ là trục đối xứng của (P) , điểm $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ là đỉnh của (P) .

+ Nghiệm (nếu có) của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ là hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox .

+ Giả sử $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ là hai giao điểm của (P) và trục Ox . Khi đó:

- A, B cùng ở bên trái đối với trục $Oy \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_A + x_B < 0. \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$

- A, B cùng ở bên phải đối với trục $Oy \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_A + x_B > 0 \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$.
- A, B cùng ở một bên đối với trục $Oy \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ x_A \cdot x_B > 0 \end{cases}$.
- A, B không ở cùng một bên đối với trục $Oy \Leftrightarrow x_A \cdot x_B < 0$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Cho parabol $(P): y = x^2 + 5x - 6$. Xác định trục đối xứng, tọa độ đỉnh của parabol (P) , tọa độ giao điểm của parabol (P) với trục hoành.

Câu 2. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$. Xét dấu của Δ, b, c biết rằng (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ âm.

Dạng 2. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ và đường thẳng $d: y = mx + n$

- + Biện luận số điểm chung của (P) và trục hoành.
- + Tìm điều kiện để đường thẳng d tiếp xúc với (P) .

1 PHƯƠNG PHÁP.

- + Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*).
- (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt.
- (P) và trục hoành có một điểm chung (còn gọi là tiếp xúc với nhau) $\Leftrightarrow (*)$ có một nghiệm.
- (P) và trục hoành không có điểm chung $\Leftrightarrow (*)$ vô nghiệm.
- + d và (P) tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = mx + n$ có nghiệm kép.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = x^2 + 3x + m$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$ và trục Ox không có điểm chung.

Câu 3. Cho parabol $(P): y = x^2 + x + 2$ và đường thẳng $d: y = ax + 1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để d tiếp xúc với (P) .

VẤN ĐỀ 4. TƯƠNG GIAO ĐỒ THỊ

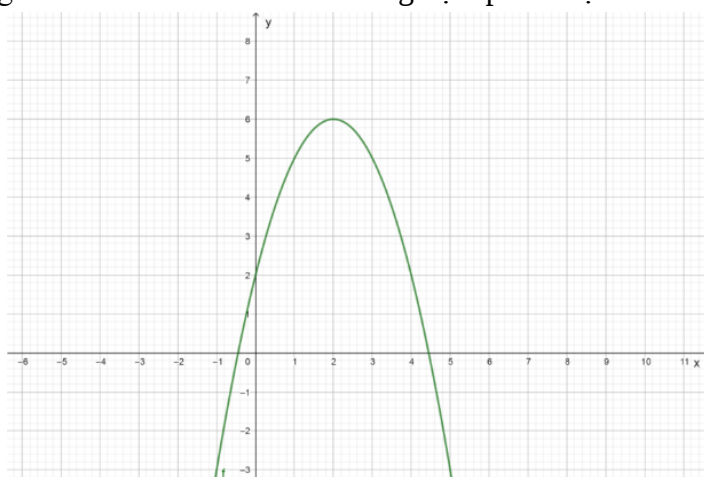
Dạng 1. Dựa vào đồ thị của hàm số $f(x)$ để biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$.

1 PHƯƠNG PHÁP.

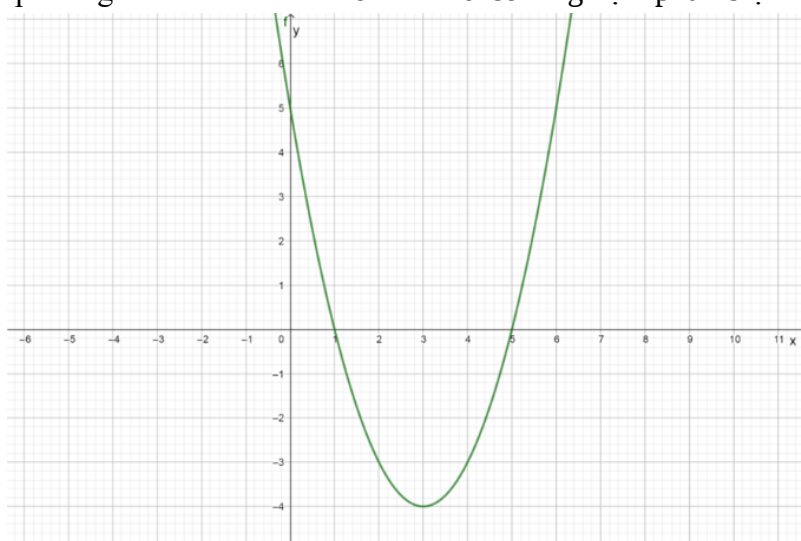
- Vẽ đồ thị (C) của hàm số $f(x)$.
 - Tùy vào giá trị của $g(m)$ để chỉ ra số giao điểm của đường thẳng $d: y = g(m)$ và (C) .
 - Số giao điểm của d và (C) cũng chính là số nghiệm của phương trình $f(x) = g(m)$.
- *Lưu ý:** Đường thẳng $d: y = g(m)$ là đường thẳng có phương ngang và cắt trục tung tại điểm có tung độ $g(m)$.

2 BÀI TẬP.

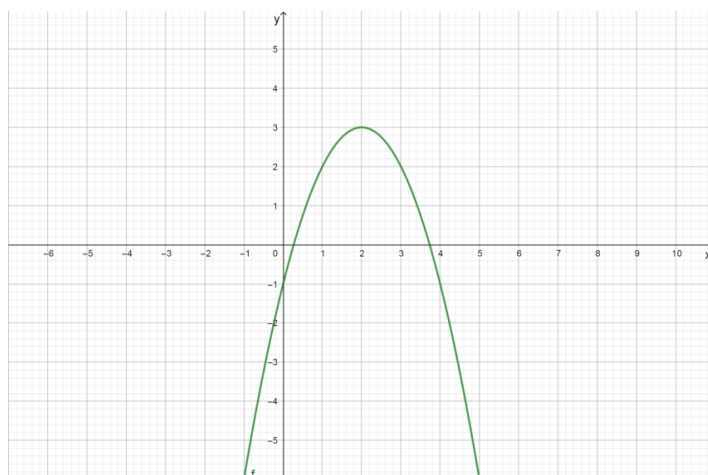
Câu 1. Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Dựa vào đồ thị tìm các giá trị của tham số m để phương trình $-x^2 + 4x + 2 = m$ có 2 nghiệm phân biệt.



Câu 2. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 5$ có đồ thị (P) như hình vẽ bên dưới. Dựa vào đồ thị, tìm các giá trị của tham số m để phương trình: $2x^2 - 12x + 6m - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt dương.



Câu 3. Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình $|ax^2 + bx + c| = m$ có bốn nghiệm phân biệt.



Câu 4. Cho phương trình $x^2 + 4x - m = 0$ (1). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình (1) có đúng một nghiệm thuộc khoảng $(-3; 1)$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị m nguyên trong nửa khoảng $(0; 2019]$ để phương trình $|x^2 - 4|x| - 5| - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

Dạng 2. Sự tương giao của đồ thị hàm số bậc nhất và bậc hai

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho đồ thị (P) của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$ và đồ thị d của hàm số $y = kx + m$.

Toạ độ giao điểm của hai đồ thị (P) và d là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = kx + m \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$ax^2 + bx + c = kx + m \Leftrightarrow ax^2 + (b - k)x + c - m = 0 \quad (2)$$

Nhận xét:

- Số giao điểm của (P) và d bằng số nghiệm của hệ phương trình (1) và cũng bằng số nghiệm của phương trình (2).
- Nếu phương trình (2) vô nghiệm thì ta nói d và (P) không giao nhau.
- Nếu phương trình (2) có nghiệm kép thì ta nói d và (P) tiếp xúc với nhau. Lúc này ta nói d là tiếp tuyến của (P) .
- Nếu phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt thì ta nói d và (P) cắt nhau.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm toạ độ giao điểm của Parabol $(P): y = -x^2 - 4x + 1$ và đường thẳng $d: y = -x + 3$.

Câu 2. Cho Parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ và đường thẳng $d: y = mx + 2$. Tìm m để d tiếp xúc với (P) .

Tìm tọa độ tiếp điểm khi đó.

Câu 3. Cho Parabol $(P) y = x^2 - 2x + 4$ và đường thẳng $d: y = 2mx - m^2$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1^2 + 2(m+1)x_2 = 3m^2 + 16.$$

Câu 4. Cho Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $d: y = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2}$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m thì đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho biểu thức

$$T = y_1 + y_2 - x_1x_2 - (x_1 + x_2)$$
 đạt giá trị nhỏ nhất.

Dạng 3. Sự tương giao của hai đồ thị hàm số bậc hai



PHƯƠNG PHÁP.

Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai có đồ thị lần lượt là các đường parabol (P_1) và (P_2) , khi đó tọa độ giao điểm của (P_1) và (P_2) là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases} \quad (1)$$

Để giải hệ (1) ta cần giải phương trình $f(x) = g(x)$ (2), phương trình (2) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của (P_1) và (P_2) .

* Nhận xét:

i) Số giao điểm của (P_1) và (P_2) bằng số nghiệm của hệ (1) và bằng số nghiệm của phương trình (2).

ii) $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số bậc hai nên phương trình (2) có nhiều nhất 2 nghiệm.

iii) Các bài toán liên quan đến dạng này thường áp dụng đến nội dung định lý Vi et thuận, nhắc lại như sau. Cho phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm x_1 và x_2 , ta luôn có

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$



BÀI TẬP.

Câu 1. Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^2 - 6x$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^2 - 4$ tại hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Tính $y_A + y_B$.

Câu 2. Biết rằng parabol $y = x^2 - x + 1$ cắt parabol $y = -x^2 + 2x + 4$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2 . Tính giá trị biểu thức $P = x_1^3 + x_2^3$.

Câu 3. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y = (m+1)x^2 + 2x + 3m - 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^2 + 2mx + 4$ tại đúng hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hai parabol $y = x^2 + mx + (m+1)^2$ và

$y = -x^2 - (m+2)x - 2(m+1)$ cắt nhau tại hai điểm có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn

$P = |x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2)|$ đạt giá trị lớn nhất.

VẤN ĐỀ 5. ĐIỂM CỐ ĐỊNH CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho họ hàm số $f(x; m) = 0$ (m là tham số) có đồ thị (P_m) . Để tìm điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua với mọi giá trị của m , ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (P_m) luôn đi qua.

Tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình $f(x; m) = 0$.

Bước 2: Chuyển phương trình về phương trình ẩn m dạng $Am + B = 0$ (hoặc $Am^2 + Bm + C = 0$). Phương trình nghiệm đúng với mọi m .

Khi đó ta có $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} A=0 \\ B=0 \\ C=0 \end{cases}$. Tìm được $x_0; y_0 \Rightarrow M(x_0; y_0)$.

Bước 3: Kết luận.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Cho hàm số $y = (1+m)x^2 - 2(m-1)x + m - 3$ (P_m). Chứng tỏ rằng (P_m) luôn đi qua một điểm cố định, tìm tọa độ điểm cố định đó.

Câu 2. Cho hàm số $y = (m-1)x^2 + 2mx - 3m + 1$ (P_m). Tìm điểm cố định của họ đồ thị hàm số trên.

Câu 3. Tìm điểm cố định của đồ thị hàm số $(P_m): y = m^2 x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = x^2 + (2m-3)x + 5 - 4m$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , đồ thị (P_m) của hàm số đã cho và đường thẳng $(d_m): y = 2mx - 4m + 3$ luôn có một điểm chung cố định.

Câu 5. Cho các hàm số $(P_m): y = x^2 - (m+3)x + 4m - 7$, $(C_m): y = mx^2 - 3(m+1)x - 4m + 9$, $(d_m): (m-1)x + my + 4 - m = 0$. Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , các đồ thị của các hàm số đã cho luôn cùng đi qua một điểm cố định.

VẤN ĐỀ 6: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ BẬC HAI

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên 1 tập cho trước

1 PHƯƠNG PHÁP.

Để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số bậc hai, ta lập bảng biến thiên cho hàm số đó trên tập hợp đã cho. Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số trên tập hợp đã cho.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 4x - 3$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $[-3; 5]$.

Câu 2. Cho hàm số $y = -2x^2 + 4x + 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[2; 7]$.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ trên $[-1; 2]$.

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -2\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 1} + 4\sqrt[3]{x^2 + 1} + 3$.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ trên $[-2; 4]$.

Câu 6. Cho các số x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1 + xy$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = x^4 + y^4 - x^2y^2$.

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để hàm số bậc hai đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

1 PHƯƠNG PHÁP.

Cho hàm số bậc hai: $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- Nếu $a > 0$ thì $\min y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ đạt tại hoành độ đỉnh $x_l = -\frac{b}{2a}$.

- Nếu $a < 0$ thì $\max y = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$ đạt tại hoành độ đỉnh $x_l = -\frac{b}{2a}$.

Trường hợp tập xác định khác $\mathbb{R}$, ta kẻ bảng biến thiên của hàm số trên tập đó để có được giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

2 BÀI TẬP.

Câu 1. Tìm giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x = 1$ và nhận giá trị bằng 3 khi $x = 2$. Tính abc .

Câu 3. Cho hàm số $y = mx^2 - 2x - m - 1$. Tìm giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 4. Cho hàm số $y = -(m-1)^2 x^2 + 2(m-1)x + 1 + 2m$. Với $m \neq 1$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \frac{\min_{x \in [0; 2]} y}{\max_{x \in [0; 2]} y}.$$

VẤN ĐỀ 7: BÀI TOÁN THỰC TẾ

1 PHƯƠNG PHÁP.

DẠNG 1: Các bài toán thực tế mà mô hình thực tiễn chưa chuyển về mô hình toán học. Các bước làm như sau:

Bước 1: Dựa vào giả thiết và các yếu tố của đề bài, ta xây dựng mô hình toán học cho vấn đề đang xét, tức là diễn tả dưới “dạng ngôn ngữ toán học” cho mô hình mô phỏng thực tiễn. Căn cứ vào các yếu tố bài ra ta chọn biến số, tìm điều kiện tồn tại, đơn vị.

Bước 2: Dựa vào các mối liên hệ ràng buộc giữa biến số với các giả thiết của đề bài cũng như các kiến thức liên quan đến thực tế, ta thiết lập hàm số bậc hai. Chuyển yêu cầu đặt ra đối với bài toán thực tiễn thành yêu cầu bài toán hàm số bậc hai.

Bước 3: Dùng tính chất hàm số bậc hai để giải quyết bài toán hình thành ở bước 2. Lưu ý kiểm tra điều kiện, và kết quả thu được có phù hợp với bài toán thực tế đã cho chưa.

DẠNG 2: Các bài toán thực tế đã mô hình hóa bằng một hàm số bậc hai. Thực hiện bước 3 của dạng 1.

2 BÀI TẬP.

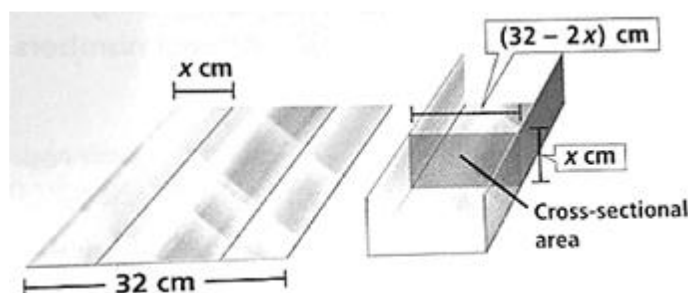
Câu 1. Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t) = -t^2 + 2t + 3$ (tính bằng mét), t là thời gian tính bằng giây ($t \geq 0$).

- Tính chiều cao lớn nhất quả bóng đạt được.
- Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất ?

Câu 2. Độ cao của quả bóng golf tính theo thời gian có thể được xác định bằng một hàm bậc hai. Với các thông số cho trong bảng sau, hãy xác định độ cao quả bóng đạt được tại thời điểm 3 giây ?

Thời gian (giây)	0	0,5	1	2
Độ cao (mét)	0	28	48	64

Câu 3. Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tám nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất ?



Câu 4. Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm.

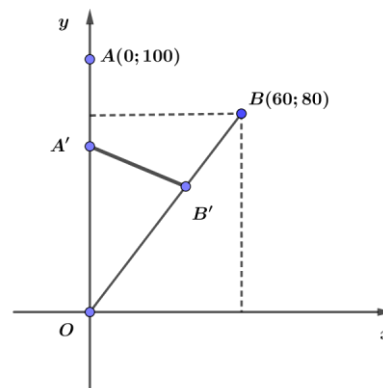
Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm

$A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 5 m/s.

Con còn lại bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ

$B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 10 m/s.

Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu ?



Câu 5. Một cửa hàng bán bưởi Đoàn Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

Câu 1. Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 8$, có đồ thị là (P) .

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) .

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $(x-4)|x-2| + m = 0$.

Câu 2. Vẽ đồ thị hàm số $y = \begin{cases} -x+4 & \text{ khi } x < 1 \\ x^2-4x+3 & \text{ khi } x \geq 1 \end{cases}$.

Câu 3. Xác định parabol $y = ax^2 + 3x - 2$, biết rằng parabol đó

a) Cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

b) Có trục đối xứng $x = -3$.

c) Có đỉnh $I\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$.

d) Đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 4. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$.

b) Có đỉnh $I(2;-2)$.

c) Đi qua điểm $A(3;-4)$ và có trục đối xứng $x = -\frac{3}{4}$.

d) Đi qua điểm $B(-1;6)$ và đỉnh có tung độ $-\frac{1}{4}$.

Câu 5. Xác định parabol $y = 2x^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Có trục đối xứng $x = 1$ và cắt Oy tại điểm $M(0;4)$.

b) Có đỉnh $I(-1;-2)$.

c) Đi qua hai điểm $A(0;-1)$ và $B(4;0)$.

d) Có hoành độ đỉnh -2 và đi qua điểm $N(1;-2)$.

Câu 6. Xác định parabol $y = ax^2 + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua hai điểm $M(1;1)$, $B(2;-2)$.

b) Có đỉnh $I(0;3)$ và một trong hai giao điểm với Ox là $A(-2;0)$.

Câu 7. Xác định parabol $y = ax^2 - 4x + c$, biết rằng parabol đó

a) Có hoành độ đỉnh là -3 và đi qua điểm $M(-2;1)$.

b) Có trục đối xứng là đường thẳng $x = 2$ và cắt trục hoành tại điểm $A(3;0)$.

Câu 8. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(-1;-3)$, $O(0;0)$.

b) Cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 2 , cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng -2 .

c) Đi qua điểm $M(4;-6)$, cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ lần lượt là 1 và 3 .

Câu 9. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó

a) Có đỉnh $I(2;-1)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .

b) Cắt trục hoành tại hai điểm $A(1;0)$, $B(3;0)$ và có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = -1$.

c) Có đỉnh nằm trên trục hoành và đi qua hai điểm $M(0;1)$, $N(2;1)$.

d) Trục đối xứng là đường thẳng $x = 3$, qua $M(-5;6)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -2 .

Câu 10. Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng hàm số

a) Có giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;6)$.

b) Có giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = 2$ và đồ thị hàm số đi qua điểm $B(0;-1)$.

Câu 11. Cho hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ ($m \neq 0$). Xác định giá trị của m trong mỗi trường hợp sau

a) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2;3)$.

b) Có đỉnh thuộc đường thẳng $y = 3x - 1$.

c) Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng -10 .

Câu 12. Cho parabol $(P): y = -x^2 + 4x - 2$ và đường thẳng $d: y = -2x + 3m$. Tìm các giá trị m để

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A , B . Tìm tọa độ trung điểm của AB .

b) d và (P) có một điểm chung duy nhất. Tìm tọa độ điểm chung này.

c) d không cắt (P) .

d) d và (P) có một giao điểm nằm trên đường thẳng $y = -2$.

Câu 13. Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm các giá trị của m để

a) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A , B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{9}{2}$.

b) d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A , B có hoành độ x_1 , x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_2^3 = 8$.

Câu 14. Chứng minh rằng với mọi m , đồ thị hàm số $y = mx^2 + 2(m-2)x - 3m + 1$ luôn đi qua hai điểm cố định.

Câu 15. Chứng minh rằng các parabol sau luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

a) $y = 2x^2 - 4(2m - 1)x + 8m^2 - 3$. b) $y = mx^2 - (4m - 1)x + 4m - 1$ ($m \neq 0$).

Câu 16. Chứng minh rằng các đường thẳng sau luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

a) $y = 2mx - m^2 + 4m + 2$ ($m \neq 0$). b) $y = (4m - 2)x - 4m^2 - 2$ $\left(m \neq \frac{1}{2}\right)$.