

## BÀI 18. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI



### LÝ THUYẾT.

1. Phương trình dạng:  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

Để giải phương trình:

Ta làm như sau:  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

Bước 1: Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.

Bước 2: Thử lại các giá trị  $x$  tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm

$$\text{Hoặc } \sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + bx + c \geq 0 \\ dx^2 + ex + f \geq 0 \\ ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f \end{cases}$$

Ví dụ: Giải phương trình  $\sqrt{2x^2 - 4x - 2} = \sqrt{x^2 - x - 2}$

**Lời giải**

Bình phương hai vế của phương trình ta được:  $2x^2 - 4x - 2 = x^2 - x - 2$

Sau khi thu gọn ta được  $x^2 - 3x = 0$

Từ đó tìm được  $x = 0$  hoặc  $x = 3$

Thay lần lượt hai giá trị này của  $x$  vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có  $x = 3$  thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = 3$ .

Ví dụ: Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{3x^2 - 6x + 1} = \sqrt{-2x^2 - 9x + 1}$

b)  $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = \sqrt{x^2 - 7}$

**Lời giải**

a)  $\sqrt{3x^2 - 6x + 1} = \sqrt{-2x^2 - 9x + 1}$

Bình phương hai vế của phương trình ta được  $3x^2 - 6x + 1 = -2x^2 - 9x + 1$ .

Sau khi thu gọn ta được  $5x^2 + 3x = 0$ .

Từ đó tìm được  $x = 0$  hoặc  $x = -\frac{3}{5}$ .

Thay lần lượt hai giá trị này của  $x$  vào phương trình đã cho, ta thấy  $x = 0$  và  $x = -\frac{3}{5}$  thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S = \left\{0; -\frac{3}{5}\right\}$

b)  $\sqrt{2x^2 - 3x - 5} = \sqrt{x^2 - 7}$

Bình phương hai vế của phương trình ta được  $2x^2 - 3x - 5 = x^2 - 7$ .

Sau khi thu gọn ta được  $x^2 - 3x + 2 = 0$ .

Từ đó tìm được  $x = 1$  hoặc  $x = 2$ .

Thay lần lượt hai giá trị này của  $x$  vào phương trình đã cho, ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S = \emptyset$ .

**2. Phương trình dạng:  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$**

**Để giải phương trình:**

Ta làm như sau:  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

Bước 1: Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.

Bước 2: Thử lại các giá trị  $x$  tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm

**Hoặc**  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e \Leftrightarrow \begin{cases} dx + e \geq 0 \\ ax^2 + bx + c = (dx + e)^2 \end{cases}$

**Ví dụ:** Giải phương trình  $\sqrt{2x^2 - 5x - 9} = x - 1$

**Lời giải**

Bình phương hai vế của phương trình ta được:

$$2x^2 - 5x - 9 = x^2 - 2x + 1.$$

Sau khi thu gọn ta được  $x^2 - 3x - 10 = 0$ .

Từ đó tìm được  $x = -2$  hoặc  $x = 5$ .

Thay lần lượt hai giá trị này của  $x$  vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có  $x = 5$  thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là  $x = 5$ .

**Ví dụ:** Giải các phương trình sau:

b)  $\sqrt{2x^2 + x + 3} = 1 - x$

b)  $\sqrt{3x^2 - 13x + 14} = x - 3$

**Lời giải**

c) Bình phương hai vế của phương trình ta được  $2x^2 + x + 3 = 1 - 2x + x^2$

Sau khi thu gọn ta được  $x^2 + 3x + 2 = 0$

Từ đó tìm được  $x = -1$  hoặc  $x = -2$

Thay lần lượt hai giá trị này của  $x$  vào phương trình đã cho, ta thấy  $x = -1$  hoặc  $x = -2$  thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S = \{-1; -2\}$ .

d) Bình phương hai vế của phương trình ta được  $3x^2 - 13x + 14 = x^2 - 6x + 9$ .

Sau khi thu gọn ta được  $2x^2 - 7x + 5 = 0$ .

Từ đó tìm được  $x = 1$  hoặc  $x = \frac{5}{2}$ .

Thay lần lượt hai giá trị này của  $x$  vào phương trình đã cho, ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là  $S = \emptyset$ .

**\*Chú ý: Một số dạng phương trình chứa ẩn dưới dấu căn khác**

1) Dạng:  $\sqrt{A} = B \Leftrightarrow \begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 \end{cases}$       2) Dạng:  $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} \Leftrightarrow \begin{cases} A \geq 0; B \geq 0 \\ A + B + 2\sqrt{AB} = C \end{cases}$

3) Dạng:  $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C} + \sqrt{D}$ .

\* Nếu  $A+B = C+D$  (hoặc  $A.B = C.D$ ) thì bình phương 2 vế ta được phương trình tương đương.

\* Nếu  $A+C = B+D$  (hoặc  $A.C = B.D$ ) thì phải đưa phương trình về dạng:

$$\sqrt{A} - \sqrt{C} = \sqrt{D} - \sqrt{B}$$

sau đó bình phương hai vế, tìm nghiệm sau đó thử lại để chọn nghiệm.

4) Dạng:  $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$

\* Lập phương hai vế ta được:  $A + B + 3\sqrt[3]{AB}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = C$ .

Sau đó thay thế:  $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \sqrt[3]{C}$  vào phương trình, ta được:  $A + B + 3\sqrt[3]{ABC} = C$

Chú ý: sự thay thế này có thể dẫn đến nghiệm ngoại lai, vì vậy phải thử lại nghiệm.



**BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA.**

**6.20** Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{3x^2 - 4x - 1} = \sqrt{2x^2 - 4x + 3}$

b)  $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = \sqrt{-2x^2 + 5}$

c)  $\sqrt{2x^2 + 3x - 3} = \sqrt{-x^2 - x + 1}$

d)  $\sqrt{-x^2 + 5x - 4} = \sqrt{-2x^2 + 4x + 2}$

**6.21** Giải các phương trình sau:

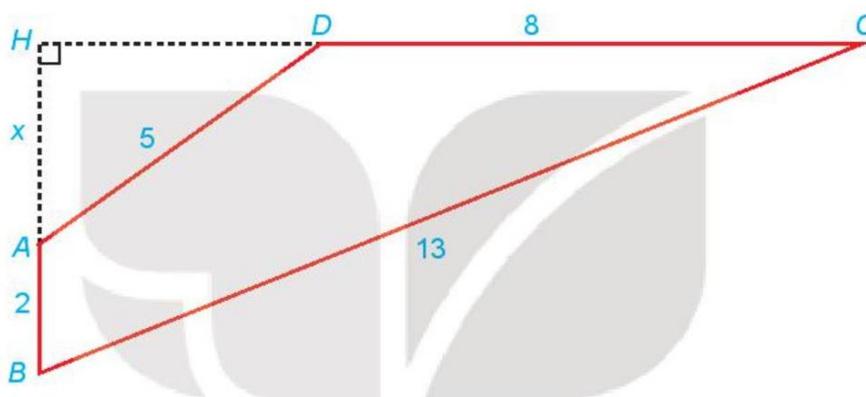
a)  $\sqrt{6x^2 + 13x + 13} = 2x + 4$

b)  $\sqrt{2x^2 + 5x + 3} = -3 - x$

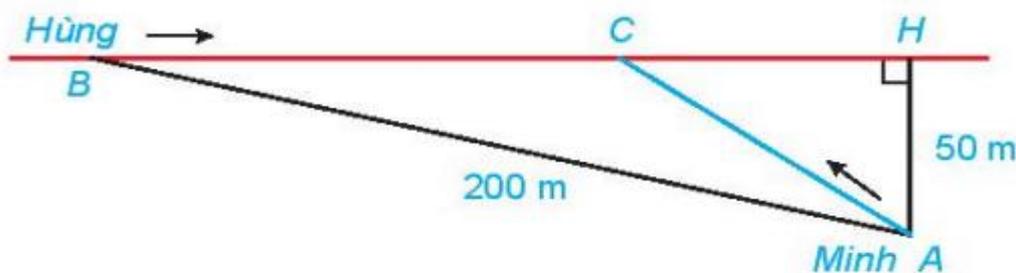
c)  $\sqrt{3x^2 - 17x + 23} = x - 3$

d)  $\sqrt{-x^2 + 2x + 4} = x - 2$

**6.22** Cho tứ giác  $ABCD$  có  $AB \perp CD$ ;  $AB = 2$ ;  $BC = 13$ ;  $CD = 8$ ;  $DA = 5$ . Gọi  $H$  là giao điểm của  $AB$  và  $CD$  và đặt  $x = AH$ . Hãy thiết lập một phương trình để tính độ dài  $x$ , từ đó tính diện tích tứ giác  $ABCD$ .



**6.23** Hằng ngày bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí  $A$  cách lề đường một khoảng  $50m$  để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm  $B$ , cách mình một đoạn  $200m$  thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ của Minh là  $5km/h$ , vận tốc xe đạp của Hùng là  $15km/h$ . Hãy xác định vị trí  $C$  trên lề đường (H.6.22) để hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 6.22



**HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.**

- Câu 1:** Giải phương trình  $\sqrt{3x^2 + 6x + 3} = \sqrt{2x^2 - 5x + 3}$
- Câu 2:** Giải phương trình  $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$
- Câu 3:** Giải phương trình  $\sqrt{3 + 2x - x^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$
- Câu 4:** Giải phương trình  $\sqrt{-x^2 + 9x - 5} = x$
- Câu 5:** Giải phương trình  $\sqrt{3x^2 + 6x + 3} = 2x + 1$
- Câu 6:** Giải phương trình  $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = x - 1$ :
- Câu 7:** Giải phương trình  $\sqrt{3 - 3x - x^2} = x$
- Câu 8:** Giải phương trình  $\sqrt{3x^2 - 4x + 4} = 3x + 2$ .
- Câu 9:** Giải phương trình  $\sqrt{x - 1} = x - 3$
- Câu 10:** Giải phương trình  $(x^2 - 4x + 3)\sqrt{x - 2} = 0$
- Câu 11:** Giải phương trình  $(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x - 3} = 0$
- Câu 12:** Giải phương trình  $\sqrt{2x - 3} = x - 3$
- Câu 13:** Giải phương trình  $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{1 - x}$
- Câu 14:** Biết phương trình (ẩn  $x$ ):  $\sqrt{x - 1} = 5 - m$  có nghiệm. Khi đó tìm số các giá trị nguyên dương của tham số  $m$
- Câu 15:** Tính tổng  $S$  tất cả các nghiệm của phương trình  $\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \sqrt{1 + x}$
- Câu 16:** Phương trình  $(x^2 + 5x + 4)\sqrt{x + 3} = 0$  có bao nhiêu nghiệm?
- Câu 17:** Tập nghiệm của phương trình  $(x + 3)\sqrt{10 - x^2} = x^2 - x - 12$
- Câu 18:** Giải phương trình  $x - \sqrt{2x + 7} = -4$
- Câu 19:** Tính tổng các nghiệm của phương trình  $\sqrt{6 - 5x} = 2 - x$
- Câu 20:** Giải phương trình  $2\sqrt{x + 5} + 1 = x + \sqrt{x + 5}$
- Câu 21:** Phương trình  $(x - 1)\sqrt{5x + 1} = x^2 - 1$  có bao nhiêu nghiệm
- Câu 22:** Giải phương trình  $\sqrt{5x + 6} = x - 6$
- Câu 23:** Số nghiệm của phương trình  $\sqrt{3x^2 - 9x + 7} = x - 2$
- Câu 24:** Giải phương trình  $(x - 3)(\sqrt{4 - x^2} - x) = 0$
- Câu 25:** Giải phương trình  $\sqrt{x^2 - 6x + 17} = 2x - 1$
- Câu 26:** Tìm  $m$  để phương trình  $(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x - m} = 0$  có đúng hai nghiệm phân biệt.
- Câu 27:** Tập hợp các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $\frac{x^2 - 2(m + 1)x + 6m - 2}{\sqrt{x - 2}} = \sqrt{x - 2}$  có nghiệm duy nhất
- Câu 28:** Giải phương trình  $\sqrt{3x + 7} - \sqrt{x + 1} = 2$
- Câu 29:** Tìm tham số  $m$  để phương trình  $(x^2 - x)\sqrt{x - m} = 0$  chỉ có một nghiệm

- Câu 30:** Cho phương trình  $\sqrt{x^2 - 10x + m} = 2 - x$ . Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình đã cho vô nghiệm.
- Câu 31:** Cho phương trình  $\sqrt{2x + m} = x - 1$  (1). Tất cả giá trị của  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.
- Câu 32:** Giải phương trình  $x^2 - 2x - 8 = 4\sqrt{(4-x)(x+2)}$
- Câu 33:** Giải phương trình  $2\sqrt{x^2 - 8x} = x^2 - 8x - 3$
- Câu 34:** Giải phương trình  $(x-1)(x-3) + 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} - 2 = 0$
- Câu 35:** Giải phương trình  $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$
- Câu 36:** Phương trình:  $5\sqrt{x^3 + x^2 - 2x} = 2x^2 + 6x - 2$  với nghiệm có dạng  $\frac{a \pm \sqrt{b}}{c}$  tính  $S = a + b + c$
- Câu 37:** Phương trình:  $13\sqrt{x^3 + x^2 - 6x} = 5x^2 + 21x - 12$  với nghiệm có dạng  $\frac{a \pm b\sqrt{c}}{d}$  tính  $S = a + b + c + d$
- Câu 38:** Tính tổng các bình phương các nghiệm của phương trình  $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$
- Câu 39:** Tính tích các nghiệm của phương trình  $x^2 + 2x\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 3x + 1$
- Câu 40:** Giải phương trình  $x(x+5) = 2\sqrt[3]{x^2 + 5x - 2} - 2$
- Câu 41:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình  $\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} + 2\sqrt{-x^2 + 16} - m + 2 = 0$  có nghiệm
- Câu 42:** Tập tất cả các giá trị của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 + \sqrt{1-x^2} = m$  có nghiệm là  $[a; b]$ . Tính  $S = a + b$ .
- Câu 43:** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình  $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$  trên tập số thực bằng
- Câu 44:** Giải phương trình  $x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6$  ta được nghiệm dạng  $x_0 = \frac{a - \sqrt{b}}{c}$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên tố. Tính  $P = a + b + c$ .
- Câu 45:** Giải phương trình  $x + \sqrt{11 + \sqrt{x-1}} = 12$  ta được nghiệm dạng  $x_0 = \frac{a - \sqrt{b}}{c}$ , với  $a, b, c$  là các số nguyên tố. Tính  $P = a + b + c$ .
- Câu 46:** Cho phương trình  $\sqrt{x-1} + \sqrt{5-x} + 3\sqrt{(x-1)(5-x)} = m$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để phương trình trên có nghiệm?
- Câu 47:** Giải phương trình  $\sqrt{3x^2 + 5x + 8} - \sqrt{3x^2 + 5x + 1} = 1$
- Câu 48:** Giải phương trình:  $4x^2 + 12x\sqrt{x+1} = 27(x+1)$  trên  $\mathbb{R}$ : ta được nghiệm  $x = a$ ;  $x = \frac{b - c\sqrt{d}}{e}$  trong đó  $a; b; c; d; e$  là các số tự nhiên và  $\frac{b}{e}$  tối giản. Khi đó tính giá trị của biểu thức  $F = a + b - c + d - e$