

# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

### I LÝ THUYẾT.

#### 1. GÓC LƯỢNG GIÁC

##### a. Khái niệm góc lượng giác và số đo của góc lượng giác

Trong mặt phẳng cho hai tia  $Ou$ ,  $Ov$ . Xét tia  $Om$  cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia  $Om$  quay điểm  $O$ , theo một chiều nhất định từ  $Ou$  đến  $Ov$ , thì ta nói nó quét một **góc lượng giác** với tia đầu  $Ou$ , tia cuối  $Ov$  và kí hiệu là  $(Ou, Ov)$ .

Góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  chỉ được xác định khi ta biết được chiều chuyển động quay của tia  $Om$  từ tia đầu  $Ou$  đến tia cuối  $Ov$ . Ta quy ước: chiều quay ngược với chiều quay của kim đồng hồ là chiều dương, chiều quay cùng với chiều quay của kim đồng hồ là chiều âm.

Khi tia  $Om$  quay góc  $\alpha^\circ$  thì ta nói góc lượng giác mà tia đó quét nên có số đo  $\alpha^\circ$ . Số đo của **góc lượng giác** với tia đầu  $Ou$ , tia cuối  $Ov$  được kí hiệu là  $sd(Ou, Ov)$ .

Cho hai tia  $Ou$ ,  $Ov$  thì có vô số **góc lượng giác** tia đầu  $Ou$ , tia cuối  $Ov$ . Mỗi **góc lượng giác** như thế đều kí hiệu là  $(Ou, Ov)$ . Số đo của các góc lượng giác này sai khác nhau một bội nguyên của  $360^\circ$ .

##### b. Hệ thức Chasles: với 3 tia $Ou$ , $Ov$ , $Ow$ bất kì ta có:

$$sd(Ou, Ov) + sd(Ov, Ow) = sd(Ou, Ow) + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Từ đó suy ra:  $sd(Ou, Ov) = sd(Ou, Ow) - sd(Ov, Ow) + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$

#### 2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

##### a. Đơn vị đo góc và cung tròn

**Đơn vị độ:**

**Đơn vị radian:** Cho đường tròn  $(O)$  tâm  $O$  bán kính  $R$  và một cung  $AB$  trên  $(O)$ . Ta nói cung  $AB$  có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính  $R$ . Khi đó ta cũng nói rằng góc  $AOB$  có số đo bằng 1 radian và viết  $AOB = 1 \text{ radian}$

##### b) Quan hệ giữa độ và radian

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad và } 1 \text{ rad} = \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

##### b. Độ dài của một cung tròn

Một cung của đường tròn bán kính  $R$  có số đo  $\alpha$  rad thì có độ dài là  $\ell = R\alpha$ .

### 3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

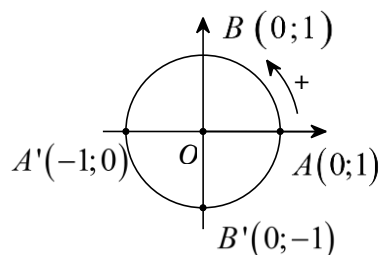
#### a. Đường tròn lượng giác

Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1, được định hướng và lấy điểm  $A(1;0)$  làm gốc của đường tròn.

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm  $A(1;0)$

$A'(-1;0)$ ,  $B(0;1)$ ,  $B'(0;-1)$ .

Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\alpha$  là điểm  $M$  trên đường tròn lượng giác sao cho  $sd(OA, OM) = \alpha$ .



#### b. Giá trị lượng giác của góc lượng giác

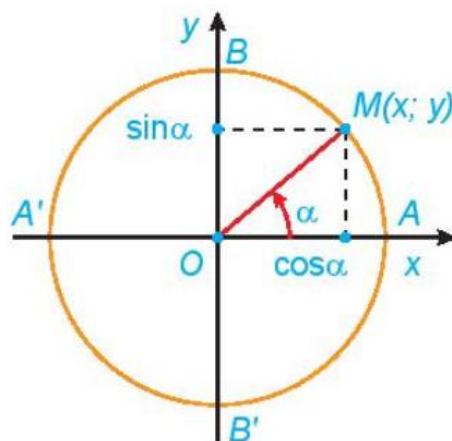
Giả sử  $M(x; y)$  là điểm trên đường tròn lượng giác, biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\alpha$ .

- Hoành độ  $x$  của điểm  $M$  gọi là cosin của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\cos \alpha$ .

$$\cos \alpha = x$$

- Tung độ  $y$  của điểm  $M$  gọi là sin của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\sin \alpha$ .

$$\sin \alpha = y$$



- Nếu  $\cos \alpha \neq 0$ , tỉ số  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  gọi là tang của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\tan \alpha$  (người ta còn dùng kí hiệu

$$\operatorname{tg} \alpha): \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

- Nếu  $\sin \alpha \neq 0$ , tỉ số  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$  gọi là cotang của  $\alpha$  và kí hiệu là  $\cot \alpha$  (người ta còn dùng kí hiệu

$$\operatorname{cotg} \alpha): \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

Các giá trị  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\tan \alpha$ ,  $\cot \alpha$  được gọi là các **giá trị lượng giác của cung  $\alpha$** .

#### Chú ý:

a) Ta cũng gọi trục tung là **trục sin**, còn trục hoành là **trục cosin**

b) Từ định nghĩa ta suy ra:

1)  $\sin \alpha$  và  $\cos \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Hơn nữa, ta có:

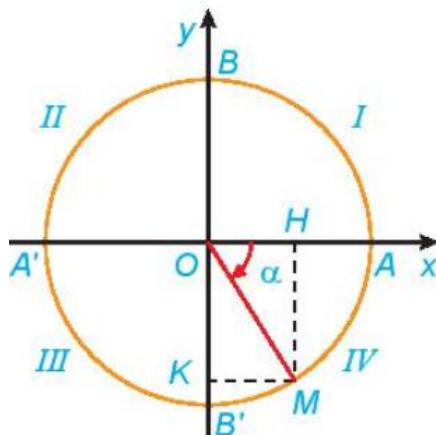
$$\begin{aligned} \sin(\alpha + k2\pi) &= \sin \alpha, \quad \forall k \in \mathbb{Z}; \\ \cos(\alpha + k2\pi) &= \cos \alpha, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -1 &\leq \sin \alpha \leq 1 \\ -1 &\leq \cos \alpha \leq 1. \end{aligned}$$

2)  $\tan \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

3)  $\cot \alpha$  xác định với mọi  $\alpha \neq k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

4) Dấu của các giá trị lượng giác của góc  $\alpha$  phụ thuộc vào vị trí điểm biểu diễn  $M$  trên đường tròn lượng giác.



**Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác**

| Góc phần tư<br>Giá trị lượng giác | I | II | III | IV |
|-----------------------------------|---|----|-----|----|
| $\cos \alpha$                     | + | –  | –   | +  |
| $\sin \alpha$                     | + | +  | –   | –  |
| $\tan \alpha$                     | + | –  | +   | –  |
| $\cot \alpha$                     | + | –  | +   | –  |

**c. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt**

|               |                |                      |                      |                      |                 |
|---------------|----------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
| $\alpha$      | 0              | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin \alpha$ | 0              | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos \alpha$ | 1              | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\tan \alpha$ | 0              | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | Không xác định  |
| $\cot \alpha$ | Không xác định | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0               |

#### 4. QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

##### a. Công thức lượng giác cơ bản

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

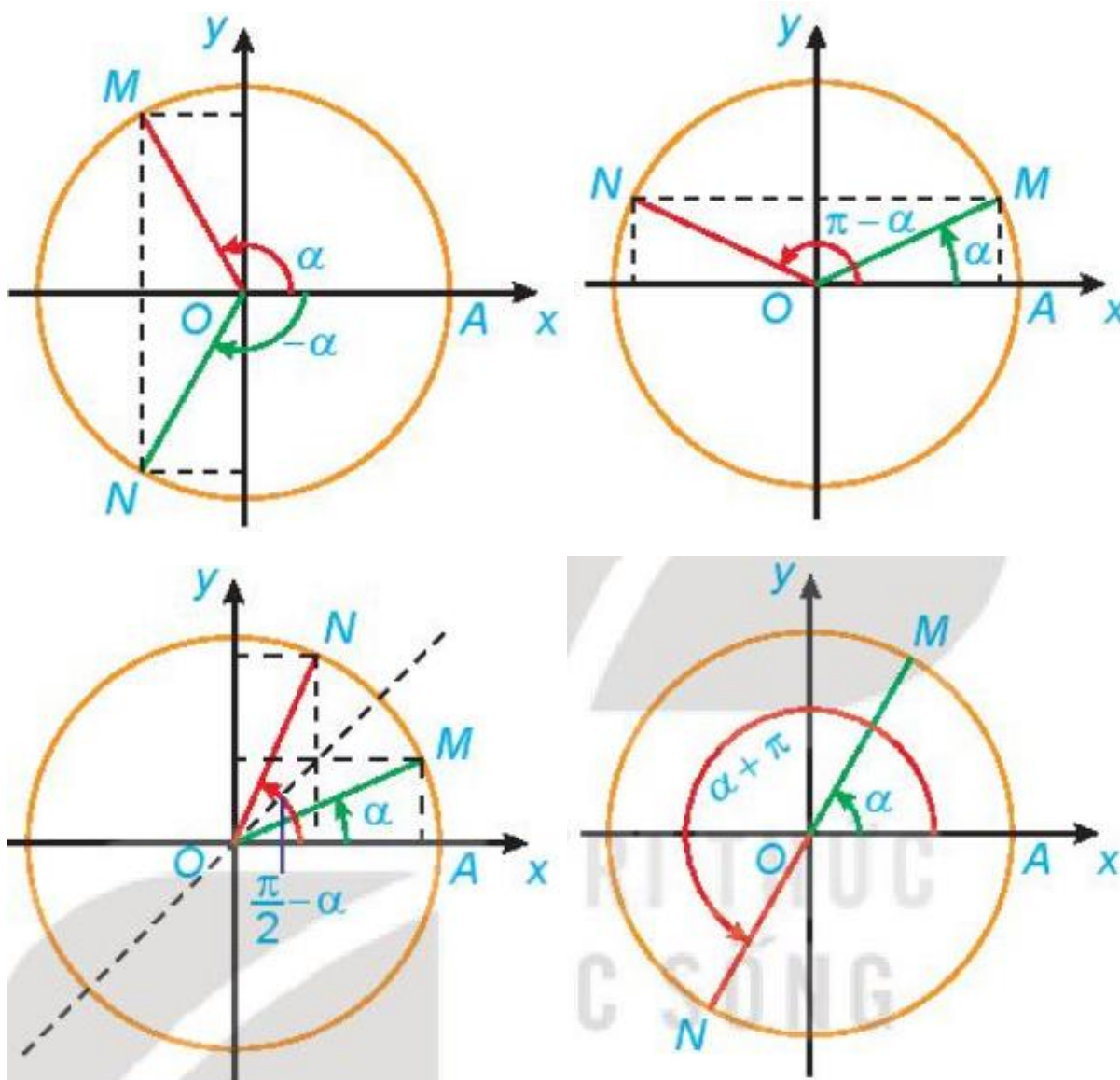
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

##### b. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt



| Góc đối nhau                   | Góc bù nhau                         | Góc phụ nhau                                            |
|--------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$  | $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$  | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ |
| $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ | $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ |
| $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ | $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ | $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ |
| $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$ | $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$ |

| Góc hơn kém $\pi$                   | Góc hơn kém $\frac{\pi}{2}$                              |
|-------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$  |
| $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$ |
| $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$  | $\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$ |
| $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$  | $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$ |



## HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

### DẠNG 1: XÁC ĐỊNH ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Một cung tròn có số đo  $a^\circ$  (hoặc  $\alpha$  rad) có độ dài là  $l = \frac{a\pi R}{180}$  (hoặc  $l = \alpha R$ )

- Câu 1:** Một đường tròn có bán kính 10. Tính độ dài cung tròn có số đo  $30^\circ$
- Câu 2:** Một bánh xe máy có đường kính 60. Nếu xe chạy với vận tốc  $50(\text{km/h})$  thì trong 5 giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng.
- Câu 3:** Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc  $270^\circ$ ?
- Câu 4:** Một đồng hồ treo tường có kim giờ dài 10,25cm, kim phút dài 13,25cm. Trong 30 phút kim giờ vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu?

**DẠNG 2: TÍNH GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC HOẶC MỘT BIỂU THỨC**

**Sử dụng công thức lượng giác cơ bản trong các bài toán:**

1)  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

2)  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3)  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

4)  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1, \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

5)  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}.$

6)  $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$

**Câu 5:** Cho  $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}} \left( -\frac{\pi}{2} < x < 0 \right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Câu 6:** Cho  $\sin x = \frac{3}{5} \left( \frac{\pi}{2} < x < \pi \right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Câu 7:** Cho  $\tan x = \frac{3}{4} \left( -\pi < x < -\frac{\pi}{2} \right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Câu 8:** Cho  $\cot x = \frac{3}{4} \left( \pi < x < \frac{3\pi}{2} \right)$ . Tính giá trị của các giá trị lượng giác còn lại.

**Câu 9:** Biết  $\tan \alpha = 2$  và  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ . Tính giá trị của biểu thức:  $\sin \alpha + \cos \alpha$

**Câu 10:** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính giá trị của biểu thức:  $A = \frac{3\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$

**Câu 11:** Cho  $\tan x = 3$ . Tính  $P = \frac{2\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ .

**Câu 12:** Cho  $\sin a = \frac{1}{3}$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{\cot a - \tan a}{\tan a + 2\cot a}$  bằng

**Câu 13:** Cho  $\tan x = -4$ . Giá trị của biểu thức  $A = \frac{2\sin x - 5\cos x}{3\cos x + \sin x}$  là

**Câu 14:** Cho  $\tan \alpha = 3$ , khi đó giá trị của biểu thức  $P = \frac{2\sin \alpha - \cos \alpha}{3\sin \alpha - 5\cos \alpha}$  là

**Câu 15:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  và  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ . Giá trị của biểu thức  $P = \sin \alpha + \frac{1}{\cos \alpha}$  bằng

**Câu 16:** Cho  $\tan \alpha = 2$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \frac{\sin^4 \alpha - 3\sin^3 \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha}$ .

**Câu 17:** Cho  $2\tan a - \cot a = 1$  với  $-\frac{\pi}{2} < a < 0$ . Tính giá trị biểu thức  $P = \frac{\tan(8\pi - a) + 2\cot(\pi + a)}{3\tan\left(\frac{3\pi}{2} + a\right)}$

**Câu 18:** Cho  $\sin x + \cos x = m$ . Tính giá trị của biểu thức:  $M = |\sin x - \cos x|$

**Câu 19:** Cho  $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$  Tính giá trị của biểu thức:  $A = \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3}$

**DẠNG 3: GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT**

**Câu 20:** Tính giá trị của biểu thức:  $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$

**Câu 21:** Rút gọn biểu thức  $D = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(13\pi + \alpha) - 3\sin(\alpha - 5\pi)$ .

**Câu 22:** Tính giá trị của biểu thức:  $\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \dots + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ$

**Câu 23:** Tính giá trị của biểu thức:

$$M = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ + \\ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 100^\circ + \cos^2 110^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 130^\circ + \cos^2 140^\circ + \cos^2 150^\circ + \cos^2 160^\circ + \\ + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ$$

**DẠNG 4: RÚT GỌN BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC. ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 24:** Rút gọn biểu thức  $A = (1 - \sin^2 x) \cdot \cot^2 x + (1 - \cot^2 x)$

**Câu 25:** Rút gọn biểu thức  $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$ .

**Câu 26:** Rút gọn biểu thức  $C = 2(\cos^4 x + \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x)^2 - (\cos^8 x + \sin^8 x)$

**Câu 27:** Đơn giản biểu thức  $A = \frac{(\sin x - \cos x)^2 - 1}{\tan x - \sin x \cdot \cos x}$

**Câu 28:** Tính giá trị của biểu thức  $A = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ .

**Câu 29:** Cho  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Tính  $\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$

**DẠNG 5: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Câu 30:** Giá trị lớn nhất của  $Q = \sin^6 x + \cos^6 x$  bằng:

**Câu 31:** Giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = 7 \cos^2 x - 2 \sin^2 x$  là.

**Câu 32:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2 \tan^2 a \cdot \tan^2 b + 2$

**Câu 33:** Tính giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$  biết:

**a.**  $\sin x = -\frac{3}{5}$  với  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ .      **b.**  $\cos x = \frac{1}{4}$  với  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

**c.**  $\cos x = \frac{3}{5}$  với  $0 < x < 90^\circ$ .      **d.**  $\cos x = -\frac{5}{13}$  với  $180^\circ < x < 270^\circ$ .

**Câu 34:** Tính giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$  biết

a)  $\cos x = \frac{2}{\sqrt{5}}$  với  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ . b)  $\cos x = \frac{4}{5}$  với  $270^\circ < x < 360^\circ$ .

c)  $\sin x = \frac{5}{13}$  với  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  d)  $\sin x = -\frac{1}{3}$  với  $180^\circ < x < 270^\circ$ .

**Câu 35:** Tính giá trị lượng giác còn lại của góc  $x$  biết

a)  $\tan x = 3$  với  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ .      b)  $\tan x = -2$  với  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ .

c)  $\tan x = -\frac{1}{2}$  với  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$       d)  $\cot x = 3$  với  $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ .

**Câu 36:** Tính giá trị lượng giác của các biểu thức sau:

a) Cho  $\tan x = -2$ . Tính:  $A_1 = \frac{5 \cot x + 4 \tan x}{5 \cot x - 4 \tan x}$ ,  $A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x}$ .

b) Cho  $\cot x = \sqrt{2}$ . Tính:  $B_1 = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ ,  $B_2 = \frac{\sin x - 3 \cos x}{\sin x + 3 \cos x}$ .

c) Cho  $\cot x = 2$ . Tính:  $C_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$ ,  $C_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$ .

d) Cho  $\sin x = \frac{3}{5}$ ,  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ . Tính:  $E = \frac{\cot x + \tan x}{\cot x - \tan x}$ .

e) Cho  $\sin x = \frac{1}{5}$ ,  $90^\circ < x < 180^\circ$ . Tính:  $F = \frac{8 \tan^2 x + 3 \cot x - 1}{\tan x + \cot x}$ .

**Câu 37:** Chứng minh các đẳng thức sau:

a)  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$ .      b)  $2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$

c)  $3 - 4 \sin^2 x = 4 \cos^2 x - 1$       d)  $\sin x \cot x + \cos x \tan x = \sin x + \cos x$

**Câu 38:** Chứng minh các đẳng thức sau:

a.  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x$       b.  $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos^2 x - \sin^2 x$

c.  $4 \cos^2 x - 3 = 1 - 2 \sin x \cdot 1 + 2 \sin x$       d.  $1 + \cos x \cdot \sin^2 x - \cos x + \cos^2 x = \sin^2 x$

**Câu 39:** Chứng minh các đẳng thức sau:

a.  $\sin^4 x - \cos^4 x = 1 - 2 \cos^2 x = 2 \sin^2 x - 1$       b.  $\sin^3 x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos^3 x = \sin x \cdot \cos x$

c.  $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$       d.  $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$

**Câu 40:** Chứng minh các đẳng thức sau:

a.  $\tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \cdot \cos x}$       b.  $\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

c.  $\frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \cot x} = 1$       d.  $\left(1 - \frac{1}{\cos x}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) + \tan^2 x = 0$

**Câu 41:** Chứng minh các đẳng thức sau không phụ thuộc vào biến  $x$ :

a)  $A = -\sin^4 x + \cos^4 x + 2 \sin^2 x$ .

b)  $B = \sin^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \cos^2 x$ .

c)  $B = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$