

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 3: HÀM SỐ SỐ LƯỢNG GIÁC



LÝ THUYẾT.

1. Định nghĩa hàm số lượng giác

- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\sin x$ được gọi là **hàm số sin**, kí hiệu là $y = \sin x$.
Tập xác định của hàm số sin là $\mathbb{R}$.
- Quy tắc đặt tương ứng mỗi số thực x với số thực $\cos x$ được gọi là **hàm số cosin**, kí hiệu là $y = \cos x$.
Tập xác định của hàm số cosin là $\mathbb{R}$.
- Hàm số cho bằng công thức $y = \frac{\sin x}{\cos x}$ được gọi là **hàm số tang**, kí hiệu là $y = \tan x$.
Tập xác định của hàm số tang là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Hàm số cho bằng công thức $y = \frac{\cos x}{\sin x}$ được gọi là **hàm số cotang**, kí hiệu là $y = \cot x$.
Tập xác định của hàm số cotang là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

2. Hàm số chẵn, hàm số lẻ, hàm số tuần hoàn

a) Hàm số chẵn, hàm số lẻ

Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D .

- Hàm số $f(x)$ được gọi là **hàm số chẵn** nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = f(x)$.

Đồ thị của một hàm số chẵn nhận trục tung là trục đối xứng.

- Hàm số $f(x)$ được gọi là **hàm số lẻ** nếu $\forall x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = -f(x)$.

Đồ thị của một hàm số lẻ nhận gốc toạ độ là tâm đối xứng.

b) Hàm số tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là **hàm số tuần hoàn** nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

i) $x + T \in D$ và $x - T \in D$;

ii) $f(x + T) = f(x)$.

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là **chu kì** của hàm số tuần hoàn đó.

3. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \sin x$

Hàm số $y = \sin x$ xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trên đoạn $[-1;1]$ và

☐ Là hàm số lẻ vì: $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.

☐ Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

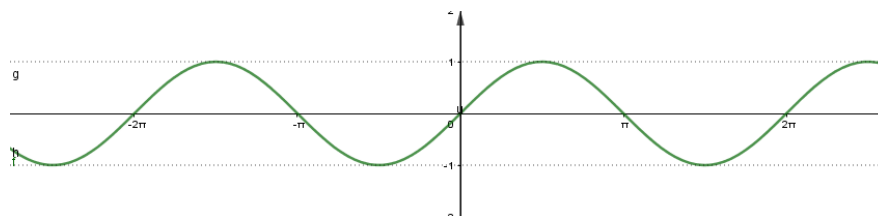
Hàm số $y = \sin x$ nhận các giá trị đặc biệt:

☐ $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☐ $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☐ $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số $y = \sin x$:



4. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cos x$

Hàm số $y = \cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$, nhận giá trị trên đoạn $[-1;1]$ và

☐ Là hàm số chẵn vì: $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

☐ Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ 2π .

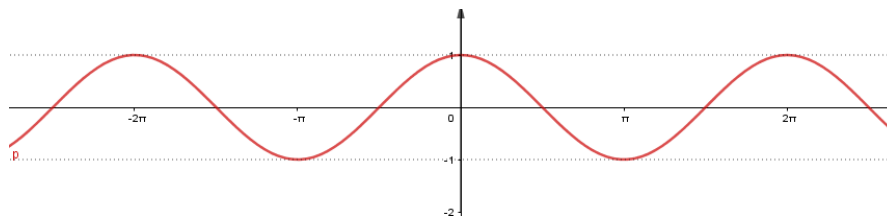
Hàm số $y = \cos x$ nhận các giá trị đặc biệt:

☐ $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☐ $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☐ $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số $y = \cos x$:



5. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \tan x$

Hàm số $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, nhận giá trị trên $\mathbb{R}$ và

☐ Là hàm số chẵn vì: $\tan(-x) = -\tan x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

☐ Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

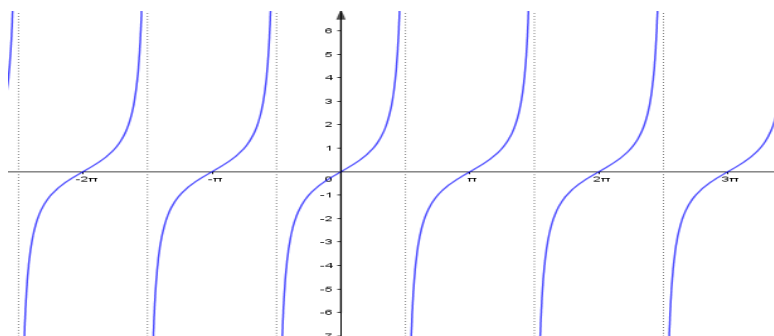
Hàm số $y = \tan x$ nhận các giá trị đặc biệt:

☐ $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☐ $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☐ $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số $y = \tan x$:



6. Đồ thị và tính chất của hàm số $y = \cot x$

Hàm số $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, nhận giá trị trên $\mathbb{R}$ và

☐ Là hàm số lẻ vì: $\cot(-x) = -\cot x, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

☐ Là hàm số tuần hoàn với chu kỳ π .

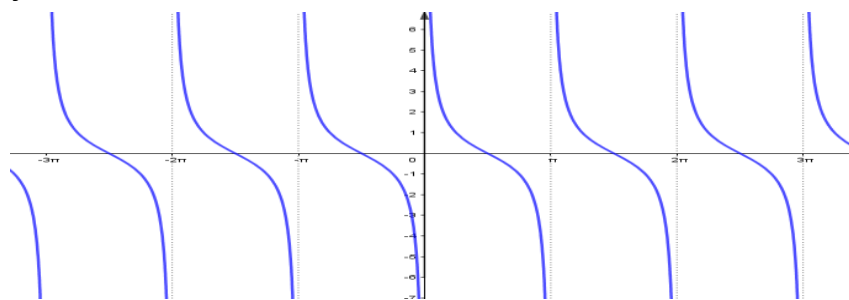
Hàm số $y = \cot x$ nhận các giá trị đặc biệt:

☐ $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☐ $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

☐ $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Đồ thị hàm số $y = \cot x$:



II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ

1 KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN.

Hàm số $y = \sin x$; $y = \cos x$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

PHƯƠNG PHÁP

+ Tìm điều kiện để hàm số có nghĩa

+ Giải ra điều kiện

+ Suy ra tập xác định của hàm số

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định bởi:

+ $y = f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ lưu ý $Q(x) \neq 0$.

+ $y = f(x) = \sqrt[n]{Q(x)}$ thì $y = f(x)$ có nghĩa khi $Q(x) \geq 0$.

+ $y = f(x) = \frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}}$ lưu ý $Q(x) > 0$.

+ $y = \tan(u(x))$ xác định $\Leftrightarrow u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

+ $y = \cot(u(x))$ xác định $\Leftrightarrow u(x) \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

2 BÀI TẬP.

Câu 1: Tìm tập xác định của hàm số $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Câu 2: Tìm tập xác định của hàm số $y = \cot^2\left(\frac{2\pi}{3} - 3x\right)$

Câu 3: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan 2x}{\sin x + 1} + \cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

Câu 4: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan 5x}{\sin 4x - \cos 3x}$

Câu 5: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3 + 2\cos x}$

Câu 6: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sin \frac{\pi^2}{2x-1}$

Câu 7: Tìm tập xác định của hàm số $y = 3\cot(2x+3)$

Câu 8: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$

Câu 9: Tìm tập xác định của các hàm số sau

- | | | | |
|---|---|---|--|
| a) $y = \sin x + \cos x$ | b). $y = \sin \sqrt{x+4}$ | c) $y = \frac{1 + \tan x}{\sin x}$ | d). $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ |
| e) $y = \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ | f). $y = \sqrt{3 - 2\cos x}$ | g) $y = \frac{1 + \sin x}{\sqrt{\cos x}}$ | h) $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$ |
| i) $y = \cot\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\tan 2x}{\sin x + 1}$ | j) $y = \sqrt{5 + 2\cot^2 x - \sin x} + \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ | | |

Câu 10: Tìm m để hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$.

- a) $y = \sqrt{2m - 3\cos x}$ b) $y = \frac{2}{\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + m - 1}}$

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{5 - m\sin x - (m+1)\cos x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

DẠNG 2. XÉT TÍNH CHẴN LẺ CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN



KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D

- Hàm số f được gọi là hàm số chẵn nếu với mọi x thuộc D , ta có $-x$ cũng thuộc D và $f(-x) = f(x)$.
- Hàm số f được gọi là hàm số lẻ nếu với mọi x thuộc D , ta có $-x$ cũng thuộc D và $f(-x) = -f(x)$.

Phương pháp giải

Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó:

- ☐ Nếu D là tập đối xứng (tức là $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), ta thực hiện tiếp bước 2.
- ☐ Nếu D không phải là tập đối xứng (tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$), ta kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$, khi đó:

- ☐ Nếu $f(-x) = f(x)$ kết luận hàm số là hàm chẵn.
- ☐ Nếu $f(-x) = -f(x)$ kết luận hàm số là hàm lẻ.
- ☐ Ngoài ra kết luận hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Chú ý: Với các hàm số lượng giác cơ bản, ta có:

1. Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.
2. Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn
3. Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.
4. Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

*** Lưu ý:** Một số công thức liên quan đến việc xử lý dấu “ $-$ ”

1. Công thức hai cung đối nhau:

$$\sin(-x) = -\sin x; \cos(-x) = \cos x; \tan(-x) = -\tan x; \cot(-x) = -\cot x$$

$$2. |-x| = |x|$$

$$3. (-x)^n = x^n \text{ khi } n \text{ chẵn và } (-x)^n = -x^n \text{ khi } n \text{ lẻ.}$$



BÀI TẬP.

Câu 12: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = 2x \sin x$ $y = 2x \sin x$. b) $y = \cos x + \sin 2x$.

c) $y = \frac{\cos 2x}{x}$. d) $y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$.

Câu 13: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = \tan x + \cot x$ b) $y = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right)$ c) $y = \frac{\sin^{2020n}(x) + 2020}{\cos(x)}, n \in \mathbb{Z}$

Câu 14: Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$ là hàm chẵn.

DẠNG 3: TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ



KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D được gọi là hàm số tuần hoàn, nếu tồn tại một số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:

☐ $x - T \in D$ và $x + T \in D$.

☐ $f(x + T) = f(x)$.

Số dương T nhỏ nhất thỏa mãn các tính chất trên được gọi là chu kỳ hàm số tuần hoàn đó.

Người ta chứng minh được rằng hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$; hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$; hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$; Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

Chú ý:

☐ Sử dụng định nghĩa hàm số tuần hoàn và tìm chu kỳ của nó.

☐ Sử dụng các kết quả sau:

- Hàm số $y = A \cdot \sin(ax + b)$ ($A, a \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$

- Hàm số $y = A \cdot \cos(ax + b)$ ($A, a \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$

- Hàm số $y = A \cdot \tan(ax + b)$ ($A, a \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{|a|}$

- Hàm số $y = A \cdot \cot(ax + b)$ ($A, a \neq 0$) là một hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{|a|}$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ chỉ chứa các hàm số lượng giác có chu kỳ lần lượt là $T_1, T_2, \dots, T_n$ thì hàm số f có chu kỳ T là bội chung nhỏ nhất của $T_1, T_2, \dots, T_n$.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ tuần hoàn với chu kì T thì hàm số $y = f(x) + c$ (c là hằng số) cũng là hàm số tuần hoàn với chu kì T .

Một số dấu hiệu nhận biết hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm tuần hoàn

Hàm số $y = f(x)$ không phải là hàm tuần hoàn khi một trong các điều kiện sau bị vi phạm:

- + Tập xác định của hàm số là tập hữu hạn.
- + Tồn tại số a sao cho hàm số không xác định với $x > a$ hoặc $x < a$.
- + Phương trình $f(x) = k$ có nghiệm nhưng số nghiệm hữu hạn.
- + Phương trình $f(x) = k$ có vô số nghiệm sắp thứ tự:

$$\dots < x_n < x_{n+1} < \dots$$

$$\text{mà } |x_n - x_{n+1}| \rightarrow 0 \text{ hay } \infty.$$



BÀI TẬP.

Câu 15: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau: $y = \cos^2 x - 1$.

Câu 16: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau: $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$.

Câu 17: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của hàm số sau: $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

Câu 18: Chứng minh rằng hàm số sau là hàm số tuần hoàn và tìm chu kì của nó: $y = \frac{1}{\sin x}$.

Câu 19: Cho a, b, c, d là các số thực khác 0. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = a \sin cx + b \cos dx$ là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi $\frac{c}{d}$ là số hữu tỉ.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số tuần hoàn với chu kỳ lần lượt là T_1, T_2 . Chứng minh rằng nếu $\frac{T_1}{T_2}$ là số hữu tỉ thì các hàm số $f(x) \pm g(x); f(x) \cdot g(x)$ là những hàm số tuần hoàn.

Câu 21: Tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = 1 - \sin 5x$. b) $y = \cos^2 x - 1$.

b) c) $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$. d) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

Câu 22: Tìm chu kỳ của hàm số: $f(x) = \sin 3x + 3 \cos 2x$.

DẠNG 4: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC



KIẾN THỨC CẦN THIẾT.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

$$1) \begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0 \leq |\sin x| \leq 1 \\ 0 \leq |\cos x| \leq 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 0 \leq \sqrt{\sin x} \leq 1 \\ 0 \leq \sqrt{\cos x} \leq 1 \end{cases}$$



BÀI TẬP.

Câu 23: Tìm GTLN - GTNN của các hàm số sau:

$$\begin{aligned} \text{a. } y &= 2 + 3\cos x. & \text{b. } y &= 3\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2. \\ \text{c. } y &= \sqrt{4\cos^2 2x + 1}. & \text{d. } y &= 3 - 2|\sin x|. \\ \text{e. } y &= 2(\sin^4 x + \cos^4 x) + 3. & \text{f. } y &= 3\sin 2x - 12 \text{ với } x \in \left[-\frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}\right]. \\ \text{g. } y &= 4\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right) - 7 \text{ với } x \in [0; \pi]. \end{aligned}$$

Câu 24: Tìm GTLN – GTNN của các hàm số sau:

$$\begin{aligned} \text{a. } y &= -2\sin^2 x + 3\sin x - 1 \\ \text{b. } y &= \cos^2 x + 2\sin x + 2 \\ \text{c. } y &= \cos x + 2\cos 2x \\ \text{d. } y &= (1 - \cos^2 x)^2 - 2\cos^2 x + 1 \\ \text{e. } y &= 2\sin^2 x - \sin x + 2 \text{ trên đoạn } [0; \pi] \\ \text{f. } y &= 2\cos x + \cos 2x - 8 \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]. \\ \text{g. } y &= \tan^2 x - \tan x + 1 \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]. \\ \text{h. } y &= \sin x + \cos x + 4\sin x \cos x + 7. \\ \text{i. } & \text{Tìm min của hàm số: } y = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} - \sin x - \frac{1}{\sin x} \text{ với } 0 < x < \pi. \end{aligned}$$