

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

I LÝ THUYẾT.

1. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH TƯƠNG ĐƯƠNG

- Hai phương trình được gọi là *tương đương* khi chúng có cùng tập nghiệm.
- Nếu phương trình $f(x) = 0$ tương đương với phương trình $g(x) = 0$ thì ta viết

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0.$$

2. PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$ (1).

+ Trường hợp $|m| > 1$, phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp $|m| \leq 1$, tồn tại duy nhất một số $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ thỏa mãn $\sin \alpha = m$. Ta có

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Nếu số thực α thỏa mãn: $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = m \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arcsin m$. Ta có

$$\sin x = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin m + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý:

+ Một số trường hợp đặc biệt

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$$

+ Phương trình $\sin x = \sin \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k.360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Trong một công thức về nghiệm của phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

3. PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$ (1).

+ Trường hợp $|m| > 1$ phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp $|m| \leq 1$, khi đó: Tồn tại duy nhất một số thực $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\cos \alpha = m$.

Ta có

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

.Nếu số thực a thỏa mãn: $\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq \pi \\ \cos \alpha = a \end{cases}$ thì ta viết $\alpha = \arccos a$. Ta có:

$$\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

Chú ý:

+ Một số trường hợp đặc biệt

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi; (k \in \mathbb{Z})$$

+ Phương trình $\cos x = \cos \beta^\circ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k.360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k.360^\circ \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$

Trong một công thức nghiệm về nghiệm của phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

4. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$ (1) VÀ $\cot x = m$ (2).

I LÝ THUYẾT.

| | $\tan x = m(1)$ | $\cot x = m(2)$ |
|-----------------------|---|---|
| Điều kiện | $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ | $x \neq k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$ |
| Tổng quát | Tồn tại một số α sao cho $m = \tan \alpha$ (1) $\Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) | Tồn tại một số α sao cho $m = \cot \alpha$ (2) $\Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) |
| Chú ý 1: Đặc biệt: | $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ | $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$ |
| Chú ý 2: | Số thực α thỏa mãn: $\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \tan \alpha = m \end{cases}$ ta viết $\alpha = \arctan m$. (1) $\Leftrightarrow x = \arctan m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ | Số thực α thỏa mãn: $\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ \cot \alpha = m \end{cases}$ ta viết $\alpha = \operatorname{arccot} m$. (2) $\Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} m + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ |
| Chú ý 3: | $\tan x = \tan \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) | $\cot x = \cot \beta^\circ \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k.180^\circ$ ($k \in \mathbb{Z}$) |

Chú ý 4 : Trong một công thức nghiệm về phương trình lượng giác, không được dùng đồng thời hai đơn vị độ và radian.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: PHƯƠNG TRÌNH $\sin x = m$

Câu 1: Giải các phương trình sau

a. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b. $\sin x = \frac{1}{4}$.

c. $\sin(x - 60^\circ)$.

d. $\sin x = 1$.

e. $\sin 3x = -\frac{4}{3}$.

f. $\sin(2019x + 2020) = 2$.

g. $\sin 3x = \frac{1}{2}$.

h. $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

i. $2\sin(3x + 1) = 1$.

j. $\sin\left[\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 0$.

k. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

l. $\sin^2 3x = \frac{3}{4}$. m. $\sin 2x - \cos x = 0$.

n. $\sin 3x + \sin x = 0$. o. $\sin x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Câu 2: Tìm nghiệm của phương trình $\sin x = -\frac{1}{2}$ trên khoảng $(0; \pi)$.

Câu 3: Tìm nghiệm của phương trình $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$ trên khoảng $(-180^\circ; 180^\circ)$.

Câu 4: Tìm nghiệm của phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ trên đoạn $[2\pi; 4\pi]$.

DẠNG 2: PHƯƠNG TRÌNH $\cos x = m$ (1).

Câu 5: Giải các phương trình sau

a. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. b. $\cos(x - 2) = \frac{2}{5}$.

c. $\cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2}$. d. $(1 + 2\cos x)(3 - \cos x) = 0$.

e. $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$. f. $2\cos x = -1$.

g. $2019 \cdot \cos(x + 30^\circ) = 2020$. h. $\cos(3x + 10^\circ) = -1$.

i. $\sin 3x - \cos 2x = 0$. j. $\cos(\cos(x + 2)) = 1$.

Câu 6: Phương trình $\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$ có bao nhiêu nghiệm thỏa mãn $0 \leq x \leq 2\pi$?

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH $\tan x = m$ (1) VÀ $\cot x = m$ (2).

Câu 7: Giải các phương trình sau

a. $\tan 2x = \tan \frac{2\pi}{7}$. b. $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{3}$.

c. $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. d. $\tan^2 x = 1$.

e. $\tan 2x = 0$. f. $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

g. $\left(\cot \frac{x}{2} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$. h. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 1$.

i. $\tan(x - 30^\circ) \cdot \cos(2x - 150) = 0$. j. $(3\tan x + \sqrt{3})(2\sin x - 1) = 0$.

k. $\tan x \cdot \tan 2x = -1$. l. $\tan 4x \cdot \cot 2x = 1$.

m. $\sin 2x \cdot \cot x = 0$.

Câu 8: Tìm số nghiệm của phương trình $\tan x = \tan \frac{3\pi}{11}$ trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; 2\pi\right)$.



BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

Câu 9: Giải phương trình $\tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

Câu 10: Giải phương trình $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 11: Giải phương trình $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

Câu 12: Giải phương trình $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cot\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0$

Câu 13: Giải phương trình $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ với $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$

Câu 14: Giải phương trình $\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = 0$.

Câu 15: Giải phương trình $\left(\cot \frac{x}{3} - 1\right)\left(\cot \frac{x}{2} + 1\right) = 0$ (1)

Câu 16: Giải phương trình $\tan(x - 30^\circ)\cos(2x - 150^\circ) = 0$ (1)

Câu 17: Giải phương trình $(3 \tan x + \sqrt{3})(2 \sin x - 1) = 0$ (1).

Câu 18: Giải phương trình $\cos 2x \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ (1)

Câu 19: $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ (*) (CĐ CNTP khối A_2007)

Câu 20: $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ (ĐH D-2011)

Câu 21: $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$ (*) (ĐH A-2009)