CHƯƠNG IV

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 13: HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

I LÝ THUYẾT.

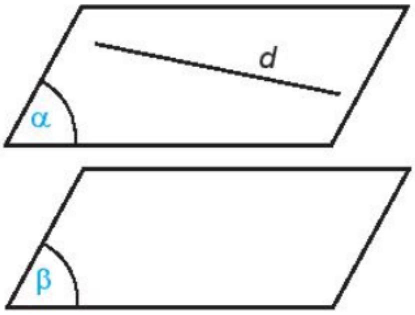
1. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG.

Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung. Kí hiệu:

$(\alpha)//(\beta) hay (\beta)//(\alpha)$

Khi đó: $(\alpha)//(\beta) \Leftrightarrow (\alpha)\cap(\beta)=\varnothing$

Chú ý: Nếu $(\alpha)//(\beta)$ thì mọi đường thẳng $a\subset(\alpha)$ đều song song với (β).



2. ĐIỀU KIỆN VÀ TÍNH CHẤT CỦA HAI MẶT PHẲNG SONG SONG.

Tính chất 1. Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau và hai đường thẳng này cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).

Tính chất 2. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

Hệ quả 1. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì có duy nhất một mặt phẳng (Q) chứa d và song song với (P).

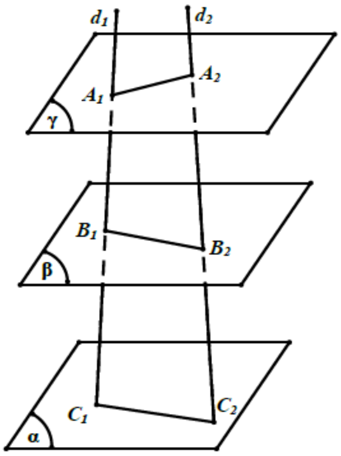
Hệ quả 2. Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Hệ quả 3. Cho điểm $A\notin(P)$. khi đó mọi đthẳng đi qua A và song song với (P) đều nằm trong một mặt phẳng (Q) đi qua A và song song với (P).

Tính chất 3. Nếu một mặt phẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì cũng cắt mặt phẳng kia và các giao tuyến của chúng song song với nhau.

Hệ quả. Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.

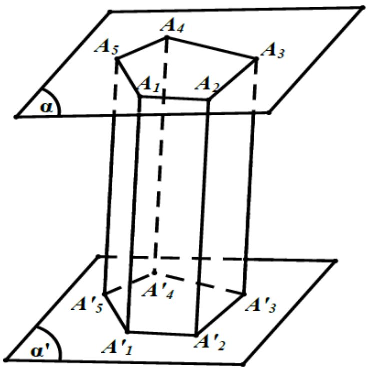
3. ĐỊNH LÝ THALÈS. Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



4. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP.

 HÌNH LĂNG TRỤ.

Định nghĩa: Trên mặt phẳng (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$, từ các đỉnh của đa giác dựng các đường thẳng song song cắt mặt phẳng (α') song song với (α) tại các điểm $A_1', A_2',.., A_n'$. Hình hợp bởi hai miền đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A_1'A_2'...A_n'$ với các hình chữ nhật $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$,. được gọi là hình lăng trụ.



Tính chất:

- Các hình bình hành được gọi là các mặt bên, hai miền đa giác gọi là hai mặt đáy của lăng trụ.

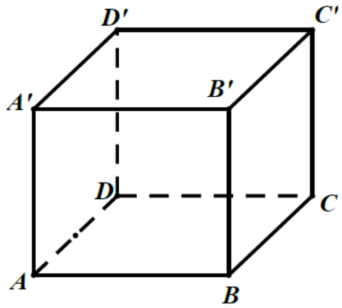
- Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau.

- Các đoạn thẳng $A_1A_1', A_2A_2',...$ được gọi là các cạnh bên. Các cạnh bên của lăng trụ song song và bằng nhau.

- Ta gọi lăng trụ theo tên của đa giác đáy, tức là nếu đáy là tam giác thì gọi là lăng trụ tam giác, nếu đáy là tứ giác thì gọi là lăng trụ tứ giác.

HÌNH HỘP.

Định nghĩa: Hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.



Tính chất:

- Hình hộp có sáu mặt đều là những hình bình hành.

- Hai mặt song song với nhau gọi là hai mặt đối diện, hình hộp có ba cặp mặt đối diện.

- Hai đỉnh của hình hộp được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào.

- Các đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện được gọi là các đường chéo. Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.

- Hai cạnh gọi là đối nhau nếu chúng song song nhưng không cùng nằm trên một mặt của hình chóp.

- Mặt chéo của hình hộp là hình bình hành có hai cạnh là hai cạnh đối diện của hình hộp.

- Tổng bình phương các đường chéo của một hình hộp bằng tổng các bình phương của tất cả các cạnh của hình hộp đó.

II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: CHỨNG MINH 2 MẶT PHẲNG SONG SONG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Phương pháp giải tự luận: Dựa vào định lý, hệ quả sau:

i. $\begin{cases} \alpha \supset a,\ b \\ a \cap b = I \\ a//\ \beta\ ,\ b//\ \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha\ //\ \beta$ **ii.** $\begin{cases} \alpha\ //\ \gamma \\ \beta\ //\ \gamma \\ \alpha \neq \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha\ //\ \beta$

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA,SD. Chứng minh $(OMN)//(SBC)$.

Câu 2: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM=BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M,N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'. Chứng minh:

a) $(ADF)\parallel(BCE)$.

b) $(DEF)\parallel(MM'N'N)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, SA. Chứng minh rằng mặt phẳng (DMP) song song với mặt phẳng (SBN)

Câu 4: Trong không giancho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Chứng minh rằng mặt phẳng $(AFD)//(BCE)$.

Câu 5: Cho hình tứ diện $ABCD$, lấy M là điểm tùy ý trên cạnh $AD(M\neq A,D)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M song song với mặt phẳng (ABC) lần lượt cắt DB,DC tại N,P

Chứng minh rằng: $NP//BC$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi G_1,G_2,G_3 lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC, SAC. Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3)//(SBC)$.

Câu 7: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có tâm lần lượt là O, O' và không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

a: $(ADF)//(BCE)$ **b:** $(MOO')//(ADF)$. **C:** $(MOO')//(BCE)$.

DẠNG 2: CHỨNG MINH ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Phương pháp giải tự luận, dựa vào các hệ quả sau:

1. $\begin{cases}\alpha // \beta\\ a\subset\alpha\end{cases}\Rightarrow a//\beta$ **2.** $\begin{cases}AB//\alpha\\ AC//\alpha\\ AB\cap AC=A\end{cases}\Rightarrow BC//\alpha$

và các định lý, hệ quả của bài trước.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 8: Cho hình thang $ABCD$ có $AB//CD$ và $S\notin(ABCD)$. Trên SA,BD lấy hai điểm M,N sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{DN}{DB}=\frac{2}{3}$. Kẻ $NI//AB$ $(I\in AD)$. Chứng minh $MN//(SCD)$.

DẠNG 3: CHỨNG MINH 2 ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dựa vào định lý ở bài hai mặt phẳng song song

$$\begin{cases} \alpha \;//\; \beta \\ \gamma \;//\; \alpha = a \\ \gamma \;//\; \beta = b \end{cases} \Rightarrow a//b$$

và các định lý, hệ quả ở các bài trước.

Dạng 4: Bài toán liên quan đến tỷ lệ độ dài

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dựa vào định lý Talet, hệ quả ở bài hai mặt phẳng song song:

1. $\begin{cases} \alpha \;//\; \beta \\ d \cap \alpha = A,\; d \cap \beta = B \\ d' \cap \alpha = A',\; d' \cap \beta = B' \\ d//d' \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$

2. $\begin{cases} \alpha \;//\; \beta \;//\; \gamma \\ d \cap \alpha = A,\; d \cap \beta = B,\; d \cap \gamma = C \\ d' \cap \alpha = A',\; d' \cap \beta = B',\; d' \cap \gamma = C' \end{cases} \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$

và địnhlý Talet thuận và đảo trong mặt phẳng.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ và M,N là các điểm thay trên các cạnh AB,CD sao cho $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{CN}{ND}$.

a) Chứng minh MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

B) Tính theo k tỉ số diện tích tam giác MNP và diện tích thiết diện.

A. $\dfrac{k}{k+1}$ **B.** $\dfrac{2k}{k+1}$ **C.** $\dfrac{1}{k}$ **D.** $\dfrac{1}{k+1}$

Câu 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M,N lần lượt trên AD',BD sao cho $AM = DN = x$ $\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$.

a) Chứng minh khi x biến thiên, đường thẳng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Chứng minh khi $x = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ thì $MN \,||\, A'C$.

DẠNG 5: XÁC ĐỊNH GIAO TUYẾN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dựa vào định lý:

$$\begin{cases} \alpha \;//\; \beta \\ \gamma \;//\; \alpha \;= a \Rightarrow a\;/\;/b \\ \gamma \;//\; \beta \;= b \end{cases}$$

Và các kết quả có trước.

DẠNG 6: XÁC ĐỊNH THIẾT DIỆN

1 PHƯƠNG PHÁP.

Dựa vào định lý:

$$\begin{cases} \alpha \;//\; \beta \\ \gamma \;//\; \alpha \;= a \Rightarrow a\;/\;/b \\ \gamma \;//\; \beta \;= b \end{cases}$$

Và các kết quả có trước.

2 BÀI TẬP TỰ LUẬN.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua MN và song song với mặt phẳng (SAD).Thiết diện là hình gì?

Câu 12: Ba mặt phẳng $(ABCD),(SBC)$ và (α) đôi một cắt nhau theo các giao tuyến là MN, HK, BC, mà $MN \,||\, BC \Rightarrow MN \,||\, HK$. Vậy thiết diện là một hình thang. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Trên ba cạnh AB, DD', $C'B'$ lần lượt lấy ba điểm M, N, P không trùng với các đỉnh sao cho $\frac{AM}{AB}=\frac{D'N}{D'D}=\frac{B'P}{B'C'}$. Tìm thiết diện của hình hộp khi cắt bởi mặt phẳng (MNP)

Câu 13: Cho hình chóp S.$ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a, SAD là tam giác đều. Gọi M là một điểm thuộc cạnh $AB, AM = x$, (P) là mặt phẳng qua M song song với (SAD). Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB. M là một điểm trên cạnh AD, mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N. Đặt $AM = x\ (0 \le x \le a)$. Giá trị x để diện tích thiết diện $HKMN$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

III. HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, SA.

a) Chứng minh $(SBN) \parallel (DPM)$.

b) Q là một điểm thuộc đoạn SP (Q khác S, P). Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) đi qua Q và song song với (SBN).

c) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (β) đi qua MN song song với (SAD).

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh $(OMN) \parallel (SBC)$

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Chứng minh $IJ \parallel (SAB)$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình bình hành tâm O, các tam giác SAD và ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh $EF \parallel (SAD)$.

Câu 18: Hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

a) Chứng minh $(BCE) \parallel (ADF)$.

b) Chứng minh $(DEF) \parallel (MNN'M')$.

c) Gọi I là trung điểm của MN. Tìm tập hợp điểm I khi M, N thay đổi trên AC và BF.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, $AB = 3a, AD = CD = a$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S và $SA = 2a$, mặt phẳng (α) song song với (SAB) cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $x = AM\ (0 < x < a)$. Tính x để $MNPQ$ là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn. Tính bán kính đường tròn đó.

c) Gọi $I = MQ \cap NP$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên AD.

d) Gọi $J = MP \cap NQ$. Chứng minh IJ có phương không đổi và điểm J luôn thuộc một mặt phẳng cố định.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$, một mặt phẳng (α) di động luôn song song với (ABC), cắt SA,SB,SC lần lượt tại A',B',C'. Tìm tập hợp điểm chung của ba mặt phẳng $(A'BC),(B'AC),(C'AB)$.

Câu 21: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Chứng minh $(BDA') \parallel (B'D'C)$.

b) Chứng minh đường chéo AC' đi qua trọng tâm G_1,G_2 của các tam giác $BDA',B'D'C$ đồng thời chia đường chéo AC' thành ba phần bằng nhau.

c) Xác định thiết diện của hình hộp cắt $(A'B'G_2)$. Thiết diện là hình gì?

Câu 22: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a.Trên các cạnh $AB,CC',C'D'$ và AA' lấy các điểm M,N,P,Q sao cho $AM = C'N = C'P = AQ = x(0 \le x \le a)$.

a) Chứng minh bốn điểm M,N,P,Q đồng phẳng và MP,NQ cắt nhau tại một điểm cố định.

b) Chứng minh $(MNPQ)$ đi qua một đường thẳng cố định.

c) Dựng thiết diện của hình hộp khi cắt bởi $(MNPQ)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của chu vi thiết diện.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và ΔSAD vuông tại A. Qua điểm M trên cạnh AB dựng mặt phẳng (α) song song với (SAD) cắt CD,SC,SB tại N,P,Q.

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình thang vuông.

b) Gọi $I = NP \cap MQ$. Tìm tập hợp điểm I khi M di động trên cạnh AB.

Câu 24: Cho hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B',BB',BC$.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cụt với (MNP).

b) Gọi I là trung điểm của AB. Tìm giao điểm của IC' với (MNP).

Câu 25: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình vuông cạnh a. Các điểm M,N nằm trên AD',BD sao cho $AM = DN = x\left(0 < x < a\sqrt{2}\right)$

a) Chứng minh khi x biến thiên thì MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

b) Khi $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, chứng minh $MN \parallel A'C$.

Câu 26: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$

a) Gọi I,K,G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC,A'B'C'$ và ACC'. Chứng minh $(IGK)\parallel(BB'C'C)$ và $(A'KG)\parallel(AIB)$.

b) Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của BB' và CC'. Hãy dựng đường thẳng đi qua trọng tâm của tam giác ABC cắt AB' và PQ.

Câu 27: Cho mặt phẳng (α) và hai đường thẳng chéo nhau d_1,d_2 cắt (α) tại A,B. Đường thẳng Δ thay đổi luôn song song với (α) cắt d_1,d_2 lần lượt tại M và N. Đường thẳng qua N song song với d_1 cắt (α) tại N'.

a) Tứ giác $AMNN'$ là hình gì? Tìm tập hợp điểm N'.

b) Xác định vị rí của Δ để độ dài MN nhỏ nhất.

c) Gọi O là trung điểm của AB, I là trung điểm của MN. Chứng minh OI là đường thẳng nằm trong mặt phẳng cố định khi M di động.

Câu 28: Cho tứ diện đều cạnh a. Gọi I,J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và DBC. Mặt phẳng (α) qua IJ cắt các cạnh AB,AC,DC,DB lần lượt tại M,N,P,Q.

a) Chứng minh MN,PQ,BC đồng quy hoặc song song và $MNPQ$ là hình thang cân.

b) Đặt $AM=x,AN=y$. Chứng minh $a(x+y)=3xy$. Tìm GTNN và GTLN của $AM+AN$.

c) Tính diện tích tứ giác $MNPQ$ theo a và $s=x+y$.

Câu 29: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thang, $AD=CD=BC=a$, $AB=2a$. Mặt phẳng (α) đi qua A cắt các cạnh BB',CC',DD' lần lượt tại M,N,P.

a) Tứ giác $AMNP$ là hình gì?

b) So sánh AM và NP.