



GIỚI HẠN HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 15: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ



LÝ THUYẾT.

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

Ta nói rằng dãy số (u_n) **có giới hạn là 0** khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tùy ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $\lim u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ hay $v_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Từ định nghĩa ta có các kết quả sau:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = 0$; hay $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$;

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0, (k > 0, k \in \mathbb{N}^*)$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$;

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;

d) Cho hai dãy số (u_n) và (v_n)

Nếu $|u_n| \leq v_n$ với mọi n và $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

2. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó ta có :

☐ $\lim (u_n + v_n) = a + b$ • $\lim (u_n - v_n) = a - b$

☐ $\lim (u_n \cdot v_n) = a \cdot b$ • $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}, (b \neq 0)$

☐ $\lim (c \cdot u_n) = c \cdot a$ • $\lim |u_n| = |a|$ và $\lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{a}$

☐ Nếu $u_n \geq 0$ với mọi n thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$.

b) Cho ba dãy số $(u_n), (v_n)$ và (w_n) . Nếu $u_n \leq v_n \leq w_n, (\forall n)$ và $\lim u_n = \lim w_n = a, (a \in \mathbb{R})$ thì $\lim v_n = a$ (gọi định lý kẹp).

c) Điều kiện để một dãy số tăng hoặc dãy số giảm có giới hạn hữu hạn:

☐ Một dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn hữu hạn.

☐ Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn hữu hạn.

Kỹ năng sử dụng máy tính

Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ thì nhập u_n và ấn phím CALC $n = 10^{10}$.

3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q , với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn: $S = \frac{u_1}{1-q}$

4. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA DÃY SỐ

• Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

• Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

Nhận xét: $u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận các kết quả sau

a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương;

b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

Quy tắc tính giới hạn vô cực

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n > 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n \cdot v_n = +\infty$.

Quy tắc tìm giới hạn tích $\lim(u_n \cdot v_n)$

Nếu $\lim u_n = L, \lim v_n = +\infty$ (hay $-\infty$). Khi đó $\lim(u_n v_n)$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n$	$\lim(u_n v_n)$
+	$+\infty$	$+\infty$
+	$-\infty$	$-\infty$
-	$+\infty$	$-\infty$
-	$-\infty$	$+\infty$

Quy tắc tìm giới hạn thương $\lim \frac{u_n}{v_n}$

$\lim u_n$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
	0	$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
	0	$-$	$+\infty$

Nhận xét: Ta thường dùng quy tắc giới hạn tích trong bài toán giới hạn vô cực của dãy số.

TÓM TẮT CÁC GIỚI HẠN ĐẶC BIỆT

Giới hạn hữu hạn	Giới hạn vô cực
1. Giới hạn đặc biệt: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0 \quad (q < 1); \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} C = C$ 2. Định lí: a) Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = b$ thì $\lim u_n + v_n = a + b$ $\lim u_n - v_n = a - b$ $\lim u_n \cdot v_n = a \cdot b$ $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ b) Nếu $u_n \geq 0, \forall n$ và $\lim u_n = a$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$ c) Nếu $u_n \leq v_n, \forall n$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$ d) Nếu $\lim u_n = a$ thì $\lim u_n = a$ 3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = u_1 + u_1q + u_1q^2 + \dots = \frac{u_1}{1-q} \quad (q < 1)$	1. Giới hạn đặc biệt: $\lim \sqrt[n]{n} = +\infty; \quad \lim n^k = +\infty \quad (k \in \mathbb{Z}^+)$ $\lim q^n = +\infty \quad (q > 1)$ 2. Định lí: a) Nếu $\lim u_n = +\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$ b) Nếu $\lim u_n = a, \lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$ c) Nếu $\lim u_n = a \neq 0, \lim v_n = 0$ thì $\lim \frac{u_n}{v_n} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a \cdot v_n > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a \cdot v_n < 0 \end{cases}$ d) Nếu $\lim u_n = +\infty, \lim v_n = a$ thì $\lim = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } a > 0 \\ -\infty & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$ * Khi tính giới hạn có một trong các dạng vô định: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty$ thì phải tìm cách khử dạng vô định.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: CHỨNG MINH DẪY SỐ CÓ GIỚI HẠN 0

Phương pháp giải: Để chứng minh $\lim u_n = 0$ ta chứng minh với mỗi số $a > 0$ nhỏ tùy ý luôn tồn tại một số n_0 sao cho $|u_n| < a \quad \forall n > n_0$.

Câu 1: Chứng minh rằng $\lim \frac{1}{n^2 + 1} = 0$

Câu 2: Chứng minh rằng $\lim \frac{\sin^2 n}{n+2} = 0$

Câu 3: Chứng minh rằng $\lim \left(\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) = 0$

DẠNG 2: TÌM GIỚI HẠN BẰNG 0 CỦA DẪY SỐ

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa giới hạn 0 và các giới hạn đặc biệt để giải quyết bài toán.

Câu 4: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$. Tính $\lim u_n$

Câu 5: Cho dãy số (u_n) với $u_n = (-0,97)^n$. Tính $\lim u_n$

Câu 6: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+2\sin(n+1)}{n^3\sqrt{n}+2^3\sqrt{n}}$. Tính $\lim u_n$

Câu 7: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2+1} - n$. Tính $\lim u_n$

Câu 8: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{-2n^3+3n^2+4}{n^4+4n^3+n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 9: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-1)^n \cdot 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$. Tính $\lim u_n$

Câu 10: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{(-5)^n + 4^n}{(-7)^{n+1} + 4^{n+1}}$. Tính $\lim u_n$

Câu 11: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n \cdot 3^n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 12: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 13: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{\sqrt{4n^2+1}-2n}{\sqrt{n^2+4n+1}-n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 14: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1+2+3+4+\dots+n}{(1+3+3^2+3^3+\dots+3^n) \cdot (n+1)}$. Tính $\lim u_n$

Câu 15: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$. Tính $\lim(u_n - 1)$

Câu 16: Dùng định nghĩa dãy số có giới hạn 0 tìm $\lim u_n$ với $u_n = \frac{(-1)^n}{3n+2}$.

Câu 17: Dùng định nghĩa dãy số có giới hạn 0 tìm $\lim u_n$ với $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt{n^3 + 2n}}$.

Câu 18: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{2n\sqrt{n}+1}{n^2+2\sqrt{n}-3}$. Tính $\lim u_n$

Câu 19: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 20: Dùng định nghĩa dãy số có giới hạn 0 tìm $\lim u_n$ với $u_n = \frac{1+\cos n^3}{2n+3}$.

Câu 21: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n \cdot 3^n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 22: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}$. Tính $\lim u_n$

Câu 23: Cho dãy số (u_n) được xác định bởi: $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2^n}, (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$. Tính $\lim(u_n - 2)$

DẠNG 3. TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ (u_n) có $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n), Q(n)$ là các đa thức của n)

Phương pháp giải: Chia tử và mẫu cho n^k với n^k là lũy thừa có số mũ cao nhất của $P(n), Q(n)$, sau đó áp dụng các định lý về giới hạn hữu hạn

Câu 24: $\lim u_n$, với $u_n = \frac{5n^2+3n-7}{n^2}$ bằng:

Câu 25: Tính giới hạn $\lim \frac{-4n^2+n+2}{2n^2+n+1}$

Câu 26: Tính giới hạn $\lim \frac{n^4}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$

Câu 27: Tính giới hạn $\lim (2n+1)^2 \left(\frac{3}{n^2+2n} - \frac{1}{n^2+3n-1} \right)$

DẠNG 4. TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ (u_n) có $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các biểu thức chứa căn của n).

Phương pháp giải

- Đánh giá bậc của tử và mẫu. Sau đó, chia cả tử và mẫu cho n^k với k là số mũ lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ (hoặc rút n^k là lũy thừa lớn nhất của $P(n)$ và $Q(n)$ ra làm nhân tử. Áp dụng các định lý về giới hạn để tìm giới hạn

Câu 28: Tìm $\lim \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n+1}}$.

Câu 29: Tìm $\lim \frac{\sqrt{2n+2} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

Câu 30: Tìm $\lim \frac{\sqrt[3]{n^3+n}}{3n+2}$.

Câu 31: Tìm $\lim \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}}{\sqrt{4n-5}}$.

Câu 32: Tìm $\lim \frac{\sqrt{4n^2+3} - 2n+1}{\sqrt{n^2+2n+3n}}$.

Câu 33: Tìm $\lim \frac{\sqrt{4n^2-n+1} - n}{\sqrt{9n^2+3n}}$.

Câu 34: Tìm $\lim \frac{2n+1-\sqrt{n^2+2n-4}}{3n+\sqrt{n^2+7}}$.

Câu 35: Tìm $\lim \frac{\sqrt{4n^2+3} - 2n+1}{n(\sqrt{n^2+3} - 2n)}$.

Câu 36: Tìm $\lim \frac{\sqrt{4n^2-1} + \sqrt[3]{8n^3+2n^2-3}}{\sqrt{16n^2+4n} - \sqrt[4]{n^4+1}}$.

DẠNG 5. NHÂN VỚI MỘT LƯỢNG LIÊN HỢP

Phương pháp giải

□ Sử dụng các công thức nhân liên hợp.

$$\bullet a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \rightarrow \begin{cases} a-b = \frac{a^2-b^2}{a+b} \\ a+b = \frac{a^2-b^2}{a-b} \end{cases}$$

$$\bullet a-b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} \quad \bullet a+b = \frac{a^3+b^3}{a^2-ab+b^2}.$$

$$\bullet \sqrt[3]{a}-b = \frac{(\sqrt[3]{a}-b)\left[(\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}.b + b^2\right]}{(\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}.b + b^2} = \frac{a-b^3}{(\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}.b + b^2}.$$

$$\bullet \sqrt[3]{a}+b = \frac{(\sqrt[3]{a}+b)\left[(\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a}.b + b^2\right]}{(\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a}.b + b^2} = \frac{a+b^3}{(\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a}.b + b^2}$$

$$\bullet a-\sqrt[3]{b} = \frac{(a-\sqrt[3]{b})\left[a^2+a.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2\right]}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2} = \frac{a^3-b}{a^2+a.\sqrt[3]{b}+(\sqrt[3]{b})^2}$$

$$\bullet \quad a + \sqrt[3]{b} = \frac{(a + \sqrt[3]{b})[a^2 - a\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2]}{a^2 - a\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2} = \frac{a^3 + b}{a^2 - a\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2}$$

$$\bullet \quad \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})[(\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2]}{(\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2} = \frac{a - b}{(\sqrt[3]{a})^2 + \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2}.$$

$$\bullet \quad \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = \frac{(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})[(\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2]}{(\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2} = \frac{a + b}{(\sqrt[3]{a})^2 - \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2}$$

Câu 37: Tìm $\lim(\sqrt{n^2 + 3n + 5} - n)$.

Câu 38: Tìm $\lim(\sqrt{9n^2 + 3n - 4} - 3n + 2)$.

Câu 39: Tìm $\lim(\sqrt[3]{n^3 + 3n^2} - n)$.

Câu 40: Tìm $\lim(\sqrt[3]{8n^3 + 4n^2 + 2} - 2n + 3)$.

Câu 41: Tìm $\lim(n + \sqrt[3]{4n^2 - n^3})$.

Câu 42: Tìm $\lim(\sqrt{4n^2 + 3n + 7} - \sqrt[3]{8n^3 + 5n^2 + 1})$.

Câu 43: Tìm $\lim(\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^6 + 1})$.

Câu 44: Tìm $\lim \frac{\sqrt{n^2 + n} - n}{\sqrt{4n^2 + 3n} - 2n}$.

Câu 45: Tìm $\lim \frac{2n - \sqrt{4n^2 + n}}{n + \sqrt[3]{4n^2 - n^3}}$.

Câu 46: Tìm $\lim(2n - \sqrt{9n^2 + n} + \sqrt{n^2 + 2n})$.

Câu 47: Tìm $\lim(\sqrt{n^2 - 2n} + 2\sqrt[3]{n^2 - 8n^3} + 3\sqrt{n^2 + n})$.

DẠNG 6 $u_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$ (trong đó $P(n)$ và $Q(n)$ là các biểu thức chứa hàm mũ $a^n, b^n, c^n, \dots$)

Phương pháp giải: Chia cả tử và mẫu cho a^n trong đó a là cơ số lớn nhất.

Câu 48: Tìm $\lim \frac{1 - 2^n}{1 + 2^n}$.

Câu 49: Tìm $\lim \frac{4^n}{2 \cdot 3^n + 4^n}$.

Câu 50: Tìm $\lim \frac{2^n + 4^n}{4^n - 3^n}$.

Câu 51: Tìm $\lim \frac{3 \cdot 2^n - 5^n}{5 \cdot 4^n + 6 \cdot 5^n}$.

Câu 52: Tìm $\lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^n}{7 + 3 \cdot 5^n}$.

Câu 53: Tìm $\lim \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$.

Câu 54: Tìm $\lim \frac{4^{n+2} + 6^{n+1}}{5^{n-1} + 2 \cdot 6^{n+3}}$.

Câu 55: Tìm $\lim \frac{2^n - 3^n + 4 \cdot 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}}$.

Câu 56: Tìm $\lim \frac{2^n - 3^n + 5^{n+2}}{2^{n+1} + 3^{n+2} + 5^{n+1}}$.

Câu 57: Tìm $\lim \frac{2^n + 3^n - 4^{n+3}}{2^n - 3^{n+1} + 4^{n-1}}$.

Câu 58: Tìm $\lim \frac{(-2)^n - 4 \cdot 5^{n+1}}{2 \cdot 4^n + 3 \cdot 5^n}$.

Câu 59: Tìm $\lim \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$.

Câu 60: Tìm $\lim \frac{(\sqrt{5})^n - 2^{n+1} + 1}{5 \cdot 2^n + (\sqrt{5})^{n+1} - 3}$.

Câu 61: Tìm $\lim \frac{\pi^n + 3^n + 2^{2n}}{3\pi^n - 3^n + 2^{2n+2}}$.

Câu 62: Tìm $\lim \frac{\pi^{n+1} + 3^n + 2^n}{5 \cdot \pi^n - 4 \cdot 3^n + 2^{n+2}}$.

Câu 63: Tìm $\lim \frac{(-1)^n \cdot 2^{5n+1}}{3^{5n+2}}$.

Câu 64: Tìm $\lim \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^n} \right)$.

Câu 65: Tìm $\lim \left(\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4} \right) + \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right)$.

Câu 66: Tìm $\lim \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}$.

Câu 67: Tìm $\lim \frac{1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}$.

DẠNG 7: Dãy số (u_n) trong đó u_n là một tổng hoặc một tích của n số hạng (hoặc n thừa số)

Phương pháp: Rút gọn u_n rồi tìm $\lim u_n$ theo định lí hoặc dùng nguyên lí định lí kẹp để suy ra $\lim u_n$

- Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) . Nếu $|u_n| \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ với $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Cho 3 dãy số $(x_n), (y_n), (z_n)$ và số thực L . Nếu $x_n \leq y_n \leq z_n$ và $\lim x_n = \lim z_n = L$ thì $\lim y_n = L$.

Câu 68: Tính giới hạn $\lim \left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \right)$

Câu 69: Tính giới hạn $\lim \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$

Câu 70: Tính giới hạn $\lim \left(\frac{1}{\sqrt{4n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2+n}} \right)$

Câu 71: Tính giới hạn $\lim \frac{1.3.5.7 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)}$

Câu 72: Tính giới hạn $\lim \frac{3\sin n - 4\cos n}{2n^2 + 1}$

Câu 73: $\lim \frac{\sin(n!)}{n^2 + 1}$ bằng

Câu 74: $\lim \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ bằng

DẠNG 8. u_n cho bằng công thức truy hồi

Phương pháp giải: Tìm công thức số hạng tổng quát của u_n rồi sử dụng các phương pháp tính giới hạn dãy số.

Câu 75: Tìm $\lim u_n$ biết $(u_n): \begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$.

Câu 76: Tìm $\lim u_n$ biết $(u_n): \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$.

Câu 77: Tìm $\lim \frac{u_n}{n^2}$ biết $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 3 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$.

Câu 78: Tìm $\lim \frac{u_n}{3.2^n}$ biết $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 6 \\ u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$.

Câu 79: Tìm $\lim u_n$ biết (u_n) có giới hạn hữu hạn và $(u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$.

Câu 80: Tìm $\lim u_n$ biết (u_n) có giới hạn hữu hạn và $(u_n): \begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$.

- Câu 81:** Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 1, u_{n+1} = \frac{2(2u_n + 1)}{u_n + 3}$ với mọi $n \geq 1$. Biết dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, $\lim u_n$ bằng:
- Câu 82:** Cho số thập phân vô hạn tuần hoàn $a = 2,151515\dots$ (chu kỳ 15), a được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản, trong đó m, n là các số nguyên dương. Tìm tổng $m + n$.
- Câu 83:** Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,32111\dots$ được biểu diễn dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$, trong đó a, b là các số nguyên dương. Tính $a - b$.

DẠNG 9: GIỚI HẠN CỦA DÃY CHỨA ĐA THỨC HOẶC CĂN THEO n

Phương pháp: Rút bậc lớn nhất của đa thức làm nhân tử chung. (Tử riêng, mẫu riêng).

- Câu 84:** Giá trị của $\lim(n^4 - 2n^2 + 3)$ là.
- Câu 85:** Giá trị của $\lim(-2n^3 + 3n - 1)$ là.
- Câu 86:** Giá trị của $\lim(-2n^2 + 4)^3$ là.
- Câu 87:** Giá trị của $\lim(2n - \sqrt{n^3 + 2n - 2})$ là.
- Câu 88:** Giá trị của $\lim \frac{2n^4 - 3n^3 + 2}{n^3 + 2}$ là.
- Câu 89:** Giá trị của $\lim \frac{(2n-1)(3n^2+2)^3}{-2n^5 + 4n^3 - 1}$ là.
- Câu 90:** Giá trị của $\lim \frac{3n^2 - \sqrt{2n^4 + 3n - 2}}{4n - \sqrt{3n^2 + 2}}$ là.
- Câu 91:** $\lim(n^2 - n\sqrt{4n+1})$ bằng.
- Câu 92:** Cho dãy số (u_n) xác định $u_1 = 0, u_2 = 1, u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 2$ với mọi $n \geq 2$. Tìm giới hạn của dãy số (u_n) .

DẠNG 10: GIỚI HẠN CỦA DÃY CHỨA LŨY THỪA BẬC n

Phương pháp: Rút cơ số lớn nhất của đa thức làm nhân tử chung. (Tử riêng, mẫu riêng).

- Câu 93:** $\lim(5^n - 2^n)$ bằng.
- Câu 94:** $\lim(3 \cdot 2^{n+1} - 5 \cdot 3^n + 7n)$ bằng.
- Câu 95:** Giá trị của $\lim \frac{9^n - 3 \cdot 4^n}{6 \cdot 7^n + 8^n}$ là.
- Câu 96:** Giá trị của $\lim \frac{3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^n}{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}$ là.



BÀI TẬP TỰ LUẬN TỔNG HỢP.

- Câu 97:** Tìm giới hạn sau $\lim \frac{2n^3 - 2n + 3}{1 - 4n^3}$

Câu 98: Tìm giới hạn sau $\lim \frac{\sqrt{n^4 + 2n + 2}}{n^2 + 1}$

Câu 99: Tìm giới hạn sau $\lim \frac{3^{n+1} - 4^n}{4^{n-1} + 3}$

Câu 100: Tìm giới hạn sau $\lim \frac{n^3 + 1}{n^2 - 2n + 3}$

Câu 101: Tìm giới hạn sau $\lim \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}$

Câu 102: Giá trị của $L = \lim \frac{(2n^2 + 1)^4 (n + 2)^9}{n^{17} + 1}$ bằng

Câu 103: Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L = \lim \frac{5n^2 - 3an^4}{(1-a)n^4 + 2n + 1} > 0$.

Câu 104: Kết quả của giới hạn $\lim \frac{2 - 5^{n+2}}{3^n + 2.5^n}$ bằng:

Câu 105: Biết rằng $\lim \frac{\sqrt[3]{an^3 + 5n^2 - 7}}{\sqrt{3n^2 - n + 2}} = b\sqrt{3} + c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a + c}{b^3}.$$

Câu 106: Tìm giới hạn sau $\lim(\sqrt{n^2 - 4n} - n)$

Câu 107: Tìm giới hạn sau $\lim \left(\sqrt[3]{2n - 3n^3} + n - 1 \right)$

Câu 108: Tìm giới hạn sau $\lim(\sqrt{n^2 + 2n} - n)$

Câu 109: Tìm giới hạn sau $\lim \left(\sqrt{n^2 + 4} + \sqrt{n^2 - 3} \right)$

Câu 110: Tìm giới hạn sau $\lim \frac{\sqrt{4n^2 + 1} - n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n + 1} - n}$

Câu 111: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1})$ bằng:

Câu 112: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt{n^2 - n + 1} - n)$ là:

Câu 113: Giá trị của giới hạn $\lim(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n})$ là:

Câu 114: Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim(\sqrt{n^2 + a^2n} - \sqrt{n^2 + (a+2)n + 1}) = 0$.

Câu 115: Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim(\sqrt{n^2 - 8n - n + a^2}) = 0$.

Câu 116: Cho dãy số (u_n) với $u_n = \sqrt{n^2 + an + 5} - \sqrt{n^2 + 1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n = -1$.

Câu 117: Tính $\lim n(\sqrt{4n^2 + 3} - \sqrt[3]{8n^3 + n})$

Câu 118: Tính giới hạn của dãy số $L = \lim \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - 2\sqrt[3]{n^3 + n^2 - 1} + n \right) .:$

Câu 119: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} +$

Câu 120: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = -4 + 2 - 1 +$

Câu 121: Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$ có kết quả bằng:

Câu 122: Tính giới hạn $\lim \frac{1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + ... + \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + ... + \left(\frac{3}{4}\right)^n}$

Câu 123: Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài là 1. Ta nội tiếp trong hình vuông này một hình vuông thứ 2, có đỉnh là trung điểm của các cạnh của nó. Và cứ thế ta nội tiếp theo hình vẽ. Tính tổng chu vi của các hình vuông đó

