



GIỚI HẠN HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI 17: HÀM SỐ LIÊN TỤC



LÝ THUYẾT.

1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM.

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại $x = x_0$ nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Hàm số không liên tục tại $x = x_0$ gọi là gián đoạn tại x_0 .

2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG, TRÊN MỘT ĐOẠN.

Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên một khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục tại mọi điểm trên khoảng đó.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên $[a; b]$ nếu nó liên tục trên $(a; b)$ và

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Hàm số đa thức, hàm số $y = \sin x, y = \cos x$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$. Hàm số phân thức hữu tỉ và các hàm số lượng giác $y = \tan x, y = \cot x, y = \sqrt{x}$ là những hàm số liên tục trên tập xác định của chúng.

3. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN.

Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là các hàm số liên tục tại điểm x_0 . Khi đó:

a) Các hàm số $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x), y = f(x).g(x)$ liên tục tại x_0 .

b) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Nhận xét: Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

- Câu 1:** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \frac{2}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$
- Câu 2:** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$
- Câu 3:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ mx + 1 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x = 2$.
- Câu 4:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-3|}{x-3} & \text{khi } x \neq 3 \\ m & \text{khi } x = 3 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục tại $x = 3$.
- Câu 5:** Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+1} & , \text{ khi } x > -1 \\ 2x+3 & , \text{ khi } x \leq -1 \end{cases}$ tại $x_0 = -1$
- Câu 6:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{6}}{x-2} & , \text{ khi } x \neq 2 \\ a & , \text{ khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số liên tục tại $x = 2$.
- Câu 7:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , x > 1 \\ x^2 + 3 & , x < 1 \\ k^2 & , x = 1 \end{cases}$. Tìm k để $f(x)$ gián đoạn tại $x = 1$.
- Câu 8:** Cho a và b là các số thực khác 0. Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax+1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 4x^2 + 5b & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.
- Câu 9:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+7} - \sqrt{3x+1}}{x-1} & , x \neq 1 \\ ax & , x = 1 \end{cases}$. Tìm a để hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.
- Câu 10:** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 3m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số gián đoạn tại $x = 1$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ m^2 + 3m & \text{khi } x = 2 \end{cases}$. Tìm m để hàm số liên tục tại $x_0 = 2$.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 - 4} & \text{khi } x > 2 \\ x^2 + ax + 3b & \text{khi } x < 2 \\ 2a + b - 6 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$. Tính $I = a + b$?

Câu 13: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ mx - 4 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

Câu 14: Để hàm số $y = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{khi } x \leq -1 \\ 4x + a & \text{khi } x > -1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = -1$ thì giá trị của a là

Câu 15: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 16}{x - 4} & \text{khi } x > 4 \\ mx + 1 & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 4$.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{|2x^2 - 7x + 6|}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ a + \frac{1 - x}{2 + x} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 2$

Câu 17: Giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & \text{khi } x > 1 \\ ax - \frac{1}{2} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x = 1$ là

Câu 18: Giá trị của a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x-1}-1}{x^2-3x+2} & \text{khi } x \neq 2 \\ \frac{2a+1}{6} & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ liên tục tại $x = 2$.

DẠNG 2: HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

a. Các hàm số đa thức, phân thức hữu tỉ, lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

b. Tổng, hiệu, tích của các hàm số liên tục tại x_0 thì cũng liên tục tại x_0 .

c. Nếu hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục tại x_0 và $g(x_0) \neq 0$ thì hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 .

Câu 19: Tìm các khoảng liên tục của hàm số

a) $y = x^3 + 3x^2 + x$ b) $y = \frac{x-1}{x+1}$ c) $y = \frac{x+1}{x^2+x-2}$; d) $y = \tan x + \cos x$

Câu 20: Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + a & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Câu 21: Định a để hàm số $f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \\ \frac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 22: Định a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{8x+1}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ x^2 + 2x - 4a & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{9-x}}{x}, & 0 < x < 9 \\ m & , x = 0 \\ \frac{3}{x}, & , x \geq 9 \end{cases}$. Tìm m để $f(x)$ liên tục trên $[0; +\infty)$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x \geq 2 \\ \frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a^2x^2 & \text{khi } x \leq \sqrt{2}, a \in \mathbb{R} \\ (2-a)x^2 & \text{khi } x > \sqrt{2} \end{cases}$. Giá trị của a để $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là:

Câu 26: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x+a-1 & \text{khi } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \end{cases}$. Tìm tất cả giá trị của a để hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 27: Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} & \text{khi } x > 4 \\ \frac{(a+2)x}{4} & \text{khi } x \leq 4 \end{cases}$ liên tục trên tập xác định.

Câu 28: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-4x^2+3}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ ax + \frac{5}{2} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Xác định a để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 29: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x \geq 2 \\ \frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 30: Cho a, b là hai số thực sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+b}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2ax-1 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Tính $a-b$.

- Câu 31:** Nếu hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x < -5 \\ x + 17 & \text{khi } -5 \leq x \leq 10 \\ ax + b + 10 & \text{khi } x > 10 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thì $a + b$ bằng
- Câu 32:** Tìm tham số thực m để hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 12}{x + 4} & \text{khi } x \neq -4 \\ mx + 1 & \text{khi } x = -4 \end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0 = -4$.
- Câu 33:** Biết rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} & \text{khi } x > -2 \\ mx + n & \text{khi } x \leq -2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và n là một số thực tùy ý. Giá trị của m bằng

DẠNG 3: CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

- Câu 34:** CMR phương trình sau đây có nghiệm: $x^4 - 3x + 1 = 0$
- Câu 35:** CMR phương trình $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có 3 nghiệm trong khoảng.
- Câu 36:** CMR phương trình $x^3 + (m + 3)x^2 + (1 - m)x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m .
- Câu 37:** CMR phương trình $a \cos 3x + b \cos 2x + c \cos x + \sin x = 0$ luôn có nghiệm trên $[0; 2\pi]$
- Câu 38:** Chứng minh rằng với mọi giá trị thực của tham số m phương trình sau luôn có nghiệm
- $$x^3 - 2x^2 + x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{m}{x + 3} = 0.$$
- Câu 39:** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình sau có nghiệm:
- $$(2m^2 - 5m + 2)(x - 1)^{2017} (x^{2018} - 2) + 2x + 3 = 0$$
- Câu 40:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho phương trình $x^3 - 3x^2 + (2m - 2)x + m - 3 = 0$ có ba nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < -1 < x_2 < x_3$.
- Câu 1:** Với mọi giá trị thực của tham số m , chứng minh phương trình $(m^2 + 2m + 3)(x^4 - 5x^2 + 4) + 4x^3 - 9x = 0$ luôn có ít nhất ba nghiệm thực.
- Câu 2:** Vậy với mọi số thực m thì phương trình đã cho có ít nhất 3 nghiệm thực. Chứng minh rằng phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm với mọi giá trị của tham số m .
- Câu 3:** Cho phương trình $ax^2 + bx + 505c = 0$ ($a \neq 0$) thỏa mãn $a + 2b + 2022c = 0$. Chứng minh phương trình trên có nghiệm.
- Câu 4:** Cho phương trình: $(m^2 - m + 5)x^3 - 3x - 6 = 0$. Chứng minh rằng: Với mọi $m \in \mathbb{R}$, phương trình đã cho có ít nhất 1 nghiệm.
- Câu 5:** Với mọi giá trị thực của tham số m , chứng minh phương trình $(1 - m^2)x^5 - 3x - 1 = 0$ luôn có nghiệm thực.
- Câu 6:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(m^2 - 3m + 2)x^3 - 3x + 1 = 0$ có nghiệm.