

BÀI 19: LOGARIT

A. TÓM TẮT KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. KHÁI NIỆM LÔGARIT

HD1. Nhận biết khái niệm lôgarit

Tìm x , biết:

$$\text{a) } 2^x = 8; \quad \text{b) } 2^x = \frac{1}{4}; \quad \text{c) } 2^x = \sqrt{2}.$$

Cho a là một số thực dương khác 1 và M là một số thực dương. Số thực α để $a^\alpha = M$ được gọi là **lôgarit cơ số a của M** và kí hiệu là $\log_a M$.

$$\alpha = \log_a M \Leftrightarrow a^\alpha = M.$$

Chú ý. Không có lôgarit của số âm và số 0. Cơ số của lôgarit phải dương và khác 1.

Từ định nghĩa lôgarit, ta có các tính chất sau:

Với $0 < a \neq 1, M > 0$ và α là số thực tùy ý, ta có:

$$\begin{aligned} \log_a 1 &= 0; & \log_a a &= 1; \\ a^{\log_a M} &= M; & \log_a a^\alpha &= \alpha. \end{aligned}$$

Ví dụ 1. Tính: a) $\log_2 \frac{1}{8}$; b) $\log_{\sqrt{3}} 9$.

Luyện tập 1. Tính: a) $\log_3 3\sqrt{3}$; b) $\log_{\frac{1}{2}} 32$.

2. TÍNH CHẤT CỦA LÔGARIT

a) Quy tắc tính lôgarit

HD2. Nhận biết quy tắc tính lôgarit

Cho $M = 2^5, N = 2^3$. Tính và so sánh:

a) $\log_2(MN)$ và $\log_2 M + \log_2 N$;

b) $\log_2 \left(\frac{M}{N} \right)$ và $\log_2 M - \log_2 N$.

Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tùy ý.

Khi đó:

$$\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N;$$

$$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M.$$

Ví dụ 2. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\log_4 2 + \log_4 32$; b) $\log_2 80 - \log_2 5$.

Luyện tập 2. Rút gọn biểu thức: $A = \log_2(x^3 - x) - \log_2(x + 1) - \log_2(x - 1) (x > 1)$.

b) Đổi cơ số của lôgarit

Trong nhiều vấn đề lí thuyết và ứng dụng, chúng ta cần đổi từ lôgarit theo một cơ số này sang lôgarit theo một cơ số khác.

HD 3. Xây dựng công thức đổi cơ số của lôgarit

Giả sử đã cho $\log_a M$ và ta muốn tính $\log_b M$. Để tìm mối liên hệ giữa $\log_a M$ và $\log_b M$, hãy thực hiện các yêu cầu sau:

a) Đặt $y = \log_a M$, tính M theo y ,

b) Lấy lôgarit theo cơ số b cả hai vế của kết quả nhận được trong câu a , từ đó suy ra công thức mới để tính y .

Ví dụ 3. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính $\log_4 8$.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng:

a) Nếu a và b là hai số dương khác 1 thì $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;

b) Nếu a là số dương khác 1, M là số dương và $\alpha \neq 0$, thì $\log_{a^\alpha} M = \frac{1}{\alpha} \log_a M$.

Luyện tập 3. Không dùng máy tính cầm tay, hãy tính $\log_9 \frac{1}{27}$.

3. LÔGARIT THẬP PHÂN VÀ LÔGARIT TỰ NHIÊN

a) Lôgarit thập phân

Trong thực hành, ta hay dùng hệ đếm thập phân (hệ đếm cơ số 10); lôgarit cơ số 10 đóng vai trò quan trọng trong tính toán.

Lôgarit cơ số 10 của một số dương M gọi là **lôgarit thập phân** của M , kí hiệu là $\log M$ hoặc $\lg M$ (đọc là lôc của M).

Ví dụ 5. Độ pH của một dung dịch hoá học được tính theo công thức: $\text{pH} = -\log [H^+]$

trong đó $[H^+]$ là nồng độ (tính theo mol/lit) của các ion hydrogen. Giá trị pH nằm trong khoảng từ 0 đến 14.

Nếu $\text{pH} < 7$ thì dung dịch có tính acid, nếu $\text{pH} > 7$ thì dung dịch có tính base, còn nếu $\text{pH} = 7$ thì dung dịch là trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng 0,01 mol/ít.

b) Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ $\text{pH} = 7,4$.

b) Số e và lôgarit tự nhiên

Bài toán lãi kép liên tục và số e

Ta đã biết: Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là P theo thể thức lãi kép với lãi suất hằng năm không đổi là r và chia mỗi năm thành m kì tính lãi thì sau t năm (tức là sau tm kì) số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là

$$A_m = P \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{tm}$$

Nếu kì tính lãi được chia càng ngày càng nhỏ, tức là tính lãi hằng ngày, hằng giờ, hằng phút, hằng giây,... thì dẫn đến việc tính giới hạn của dãy số A_m khi $m \rightarrow +\infty$. Ta có:

$$A_m = P \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{tm} = P \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{r}} \right)^{\frac{m}{r}} \right]^{tr}$$

Để tính giới hạn $\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m$, ta cần xét giới hạn $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{r}} \right)^{\frac{m}{r}}$. Một cách tổng quát, ta xét giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x.$$

Người ta chứng minh được giới hạn trên tồn tại, nó là một số vô tỉ có giá trị bằng 2,718281828... và kí hiệu là e .
Vậy

$$e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2,7183.$$

Từ các kết quả trên suy ra $\lim_{m \rightarrow +\infty} A_m = Pe^{tr}$.

Thế thức tính lãi khi $m \rightarrow +\infty$ theo cách trên gọi là thế thức *lãi kép liên tục*.

Như vậy, với số vốn ban đầu là P , theo thế thức lãi kép liên tục, lãi suất hằng năm không đổi là r thì sau t năm, số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là $A = Pe^{tr}$.

Công thức trên gọi là *công thức lãi kép liên tục*.

Lôgarit tự nhiên

Ta có định nghĩa sau:

Lôgarit cơ số e của một số dương M gọi là **lôgarit tự nhiên** của M , kí hiệu là $\ln M$ (đọc là lôgarit Nêpe của M).

Ví dụ 6. Biết thời gian cần thiết (tính theo năm) để tăng gấp đôi số tiền đầu tư theo thế thức lãi kép liên tục với lãi suất không đổi r mỗi năm được cho bởi công thức sau: $t = \frac{\ln 2}{r}$

Tính thời gian cần thiết để tăng gấp đôi một khoản đầu tư khi lãi suất là 6% mỗi năm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

c) Tính lôgarit bằng máy tính cầm tay

Có thể dùng máy tính cầm tay để tính lôgarit của một số dương.

Tính (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ tư)	Bấm phím	Màn hình hiện	Kết quả
$\log 6,52$		0.8142475957	$\log 6,52 \approx 0,8142$
$\ln 6,52$		1.874874376	$\ln 6,52 \approx 1,8749$
$\log_{14} 17$		1.073570215	$\log_{14} 17 \approx 1,0736$

Ví dụ 7. Giải bài toán trong *tình huống mở đầu*.

Vận dụng. Cô Hương gửi tiết kiệm 100 triệu đồng với lãi suất 6% một năm.

a) Tính số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm, nếu lãi suất được tính theo một trong các thế thức sau:

- Lãi kép kì hạn 12 tháng;
- Lãi kép kì hạn 1 tháng;
- Lãi kép liên tục.

b) Tính thời gian cần thiết để cô Hương thu được số tiền (cả vốn lẫn lãi) là 150 triệu đồng nếu gửi theo thế thức lãi kép liên tục (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

- Công thức lãi kép tính số tiền thu được sau N kì gửi là $A = 100 \cdot \left(1 + \frac{0,06}{n}\right)^N$, trong đó n là số kì tính lãi trong 1 năm.

- Công thức lãi kép liên tục tính số tiền thu được sau t năm gửi là $A = 100 \cdot e^{0,06t}$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Rút gọn biểu thức

1. Phương pháp

- Sử dụng tư duy tự luận: Kết hợp nhiều tính chất và công thức
- Sử dụng Casio

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. (Trường THPT Lê Quý Đôn – Hà Nội năm 2017) Rút gọn biểu thức $A = \log_a \left(a^5 \sqrt{a^3 \sqrt{a \sqrt{a}}} \right)$

với $a > 0, a \neq 1$ ta được kết quả nào sau đây?

- A. $\frac{7}{4}$. B. $\frac{5}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. 2.

Ví dụ 2. (Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Thuận năm 2017) Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$. Đặt $\log_a b = \alpha$, tính theo α biểu thức $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$

- A. $P = \frac{2-5\alpha^2}{\alpha}$ B. $P = \frac{\alpha^2-12}{2\alpha}$ C. $P = \frac{4\alpha^2-3}{2\alpha}$ D. $P = \frac{\alpha^2-3}{\alpha}$

Ví dụ 3. (Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn – Bình Thuận năm 2017) Cho $x > 0$ thỏa mãn $\log_2(\log_8 x) = \log_8(\log_2 x)$. Tính $(\log_2 x)^2$

- A. 3 B. $3\sqrt{3}$ C. 27 D. 9

Ví dụ 4. (Trường THPT Lê Quý Đôn – Hà Nội năm 2017) Cho $\log_2 m = a$ và $A = \log_m 8m$ ($m > 0, m \neq 1$). Khi đó mối quan hệ giữa A và a là:

- A. $A = (3-a)a$. B. $A = \frac{3-a}{a}$. C. $A = \frac{3+a}{a}$. D. $A = (3+a)a$.

Ví dụ 5. (Trường Chuyên Võ Nguyên Giáp – 2017) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $xy = 10^a, yz = 10^{2b}, zx = 10^{3c}$ ($a, b, c \in R$). Tính $P = \log x + \log y + \log z$

- A. $P = 3abc$ B. $P = a + 2b + 3c$
C. $P = 6abc$ D. $P = \frac{a + 2b + 3c}{2}$

Ví dụ 6. (Chuyên Hùng Vương – Gia Lai Lần 1 – 2017) Cho a, b là hai số thực dương khác 1 và thỏa mãn $\log_a^2 b - 8 \log_b(a \sqrt[3]{b}) = -\frac{8}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = \log_a(a \sqrt[3]{ab}) + 2017$.

- A. $P = 2019$. B. $P = 2020$. C. $P = 2017$. D. $P = 2016$.

Ví dụ 7. (Sở GD và ĐT Vĩnh Phúc L2 – 2017) Cho a, b là hai số thực dương, khác 1. Đặt $\log_a b = m$, tính theo m giá trị của $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$.

- A. $\frac{4m^2-3}{2m}$ B. $\frac{m^2-12}{2m}$ C. $\frac{m^2-12}{m}$ D. $\frac{m^2-3}{2m}$

Ví dụ 8. (Sở GD và Vũng Tàu năm 2017) Cho x, y, z, a, b, c thỏa mãn $\frac{\ln x}{a} = \frac{\ln y}{b} = \frac{\ln z}{c} = \ln t$ và $xy = z^2 t^2$. Tính giá trị của $P = a + b - 2c$

- A. 4 B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

Ví dụ 9. (Trung Tâm BDVH Lý Tự Trọng) Cho $\frac{\log a}{p} = \frac{\log b}{q} = \frac{\log c}{r} = \log x \neq 0; \frac{b^2}{ac} = x^y$. Tính y theo p, q, r .

A. $y = q^2 - pr$. B. $y = \frac{p+r}{2q}$. C. $y = 2q - p - r$. D. $y = 2q - pr$.

Ví dụ 10. (Chuyên Lương Văn Tụy Lần 1 – 2017) Cho $x > 0, x \neq 1$ thỏa mãn biểu thức

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \dots + \frac{1}{\log_{2017} x} = M.$$

Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. $x = \sqrt[2017]{\frac{2017!}{M}}$ B. $x = 2017^M$ C. $x = \frac{2017!}{M}$ D. $x^M = 2017!$

Ví dụ 11. Cho hai số thực dương x và y thỏa mãn $\log_4 x = \log_6 y = \log_9 (x+y)$ và

$$\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2} \quad (a, b \in \mathbb{Z}^+).$$

Tính tỉ số $S = a + b$.

A. $S = 6$ B. $S = 8$ C. $S = 4$ D. $S = 11$

Ví dụ 12. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^{\log_3 7} = 27, b^{\log_7 11} = 49, c^{\log_{11} 25} = \sqrt{11}$. Tính giá trị biểu thức

$$T = a^{\log_3^2 7} + b^{\log_7^2 11} + c^{\log_{11}^2 25}$$

A. $T = 76 + \sqrt{11}$ B. $T = 31141$ C. $T = 2017$ D. $T = 469$

Ví dụ 13. (Sở GD và ĐT Vĩnh Phúc L2 – 2017) Cho x, y, z là ba số thực khác 0 thỏa mãn $2^x = 5^y = 10^{-z}$.

Giá trị của biểu thức $A = xy + yz + zx$ bằng?

A. 3 B. 0 C. 1 D. 2

Ví dụ 14. Cho ba điểm $A(b; \log_a b), B(c; 2\log_a c), C(b; 3\log_a b)$ với $0 < a \neq 1, b > 0, c > 0$. Biết B là trọng tâm của tam giác OAC với O là gốc tọa độ. Tính $S = 2b + c$.

A. $S = 9$. B. $S = 7$. C. $S = 11$. D. $S = 5$.

Dạng 2. Biểu diễn theo lôgã

1. Phương pháp

- Sử dụng tư duy tự luận: Kết hợp nhiều tính chất và công thức
- Sử dụng Casio

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1. (Đề minh họa 2017) Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .

A. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab}$ B. $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab}$

C. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab+b}$ D. $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab+b}$

Ví dụ 2. (Sở GD và ĐT Vũng Tàu lần 2 năm 2017) Cho $a = \log_3 2$ và $b = \log_3 5$. Tính $\log_{10} 60$ theo a và b .

A. $\frac{2a+b+1}{a+b}$. B. $\frac{2a+b-1}{a+b}$. C. $\frac{2a-b+1}{a+b}$. D. $\frac{a+b+1}{a+b}$.

Ví dụ 3. (Sở GD và ĐT Thanh Hoá năm 2017) Cho $\log_7 12 = x, \log_{12} 24 = y$ và $\log_{54} 168 = \frac{axy+1}{bxy+cx}$,

trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S = a + 2b + 3c$.

A. $S = 4$. B. $S = 19$. C. $S = 10$. D. $S = 15$.

Dạng 3. So sánh

1. Phương pháp

- Sử dụng tư duy tự luận: Kết hợp nhiều tính chất và công thức
- Sử dụng Casio

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1. Nếu $a^{\frac{\sqrt{5}}{5}} > a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ và $\log_b \frac{4}{5} < \log_b \frac{5}{6}$ thì

- A. $0 < a < 1, 0 < b < 1$ B. $0 < a < 1, b > 1$
C. $a > 1, b > 1$ D. $a > 1, 0 < b < 1$

Ví dụ 2. (Trường THPT Hà Trung lần 3 năm 2017) Cho hai số thực dương a, b khác 1 thỏa mãn:

$a^{\frac{13}{7}} > a^{\frac{15}{8}}, \log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $a < 1$ và $b < 1$. B. $a > 1$ và $b > 1$.
C. $a > 1$ và $b < 1$. D. $a < 1$ và $b > 1$.

Ví dụ 3. (Đề minh họa 2017) Cho hai số thực a và b , với $1 < a < b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. $\log_a b < 1 < \log_b a$ B. $1 < \log_a b < \log_b a$
C. $\log_b a < \log_a b < 1$ D. $\log_b a < 1 < \log_a b$

Ví dụ 3. (Chuyên Lam Sơn Lần 1 năm 2017) Cho $0 < x < 1; 0 < a; b; c \neq 1$ và $\log_c x > 0 > \log_b x > \log_a x$ so sánh a, b, c ta được kết quả:

- A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $c > b > a$ D. $b > a > c$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 6.9. Tính:

- a) $\log_2 2^{-13}$; b) $\ln e^{\sqrt{2}}$;
c) $\log_8 16 - \log_8 2$; d) $\log_2 6 \cdot \log_6 8$.

Bài 6.10. Viết mỗi biểu thức sau thành lôgarit của một biểu thức (giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

- a) $A = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln(x^2 - 1)$; b) $B = 21 \log_3 \sqrt[3]{x} + \log_3(9x^2) - \log_3 9$.

Bài 6.11. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $A = \log_{\frac{1}{3}} 5 + 2\log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{5}$;
b) $B = \log_a M^2 + \log_{a^2} M^4$.

Bài 6.12. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $A = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$; b) $B = \log_2 2 \cdot \log_2 4 \dots \log_2 2^n$.

Bài 6.13. Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là

$$a = 15500(5 - \log p)$$

trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal).

Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao 8850 m so với mực nước biển.

Bài 6.14. Mức cường độ âm L đo bằng decibel (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông,

kí hiệu là W / m^2) được định nghĩa như sau: $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$

trong đó $I_0 = 10^{-12} \text{ W} / m^2$ là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là *ngưỡng nghe*).

Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

- a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7} \text{ W} / m^2$.
 b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3} \text{ W} / m^2$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\log_2 a = x, \log_2 b = y$. Tính $P = \log_2 (a^2 b^3)$.

- A. $P = x^2 y^3$ B. $P = x^2 + y^3$ C. $P = 6xy$ D. $P = 2x + 3y$

Câu 2: Cho $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$, biểu thức $P = \log_{\sqrt{a}} b^3 \cdot \log_b a^4$ có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. 18. B. 24. C. 12. D. 6.

Câu 3: Cho b là số thực dương khác 1. Tính $P = \log_b \left(b^2 \cdot b^{\frac{1}{2}} \right)$.

- A. $P = \frac{3}{2}$. B. $P = 1$. C. $P = \frac{5}{2}$. D. $P = \frac{1}{4}$.

Câu 4: Cho $a > 0, a \neq 1$. Biểu thức $a^{\log_a a^2}$ bằng

- A. $2a$. B. 2. C. 2^a . D. a^2 .

Câu 5: Giá trị biểu thức $A = 2^{\log_4 9 + \log_2 5}$ là:

- A. $A = 8$. B. $A = 15$. C. $A = 405$. D. $A = 86$.

Câu 6: Cho $a > 0, a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{\sqrt[3]{a}} \left(\frac{1}{a^3} \right)$

- A. $P = -9$. B. $P = -1$. C. $P = 1$. D. $P = 9$.

Câu 7: Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right)$.

- A. $I = \frac{1}{2}$. B. $I = -\frac{1}{2}$. C. $I = 2$. D. $I = -2$.

Câu 8: Cho a là số thực dương và b là số thực khác 0. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $\log_3 \left(\frac{3a^3}{b^2} \right) = 1 + \frac{1}{3} \log_3 a - 2 \log_3 |b|$. B. $\log_3 \left(\frac{3a^3}{b^2} \right) = 1 + 3 \log_3 a - 2 \log_3 b$.
 C. $\log_3 \left(\frac{3a^3}{b^2} \right) = 1 + 3 \log_3 a - 2 \log_3 |b|$. D. $\log_3 \left(\frac{3a^3}{b^2} \right) = 1 + 3 \log_3 a + 2 \log_3 b$.

Câu 9: Cho $\log 3 = a$. Tính $\log 9000$ theo a .

- A. $6a$ B. $a^2 + 3$. C. $3a^2$. D. $2a + 3$.

Câu 10: Cho $\log_6 9 = a$. Tính $\log_3 2$ theo a

- A. $\frac{a}{2-a}$. B. $\frac{a+2}{a}$. C. $\frac{a-2}{a}$. D. $\frac{2-a}{a}$.

Câu 11: Cho $a, b > 0$. Rút gọn biểu thức $\log_a b^2 + \log_{a^2} b^4$

- A. $2\log_a b$ B. 0 C. $\log_a b$ D. $4\log_a b$

Câu 12: Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

- A. 6. B. -6. C. $\frac{1}{6}$. D. $-\frac{1}{6}$.

Câu 13: Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b .

- A. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab+b}$. B. $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab}$.
C. $\log_6 45 = \frac{a+2ab}{ab}$. D. $\log_6 45 = \frac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Câu 14: Cho 2 số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{a} \neq b$, $a \neq 1$, $\log_a b = 2$. Tính $T = \log_{\frac{\sqrt{a}}{b}} \sqrt[3]{ba}$.

- A. $T = -\frac{2}{5}$. B. $T = \frac{2}{5}$. C. $T = \frac{2}{3}$. D. $T = -\frac{2}{3}$.

Câu 15: Với $a = \log_2 5$ và $b = \log_3 5$, giá trị của $\log_6 5$ bằng

- A. $\frac{ab}{a+b}$. B. $\frac{a+b}{ab}$. C. $\frac{1}{a+b}$. D. $a+b$.

Câu 16: Biết $\log(xy^3) = 1$ và $\log(x^2y) = 1$, tìm $\log(xy)$?

- A. $\log(xy) = \frac{5}{3}$. B. $\log(xy) = \frac{1}{2}$. C. $\log(xy) = \frac{3}{5}$. D. $\log(xy) = 1$.

Câu 17: Tính giá trị của biểu thức $P = \log_{a^2} (a^{10}b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2}$ (với $0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$).

- A. $P = 2$. B. $P = 1$. C. $P = \sqrt{3}$. D. $P = \sqrt{2}$.

Câu 18: Biết $\log_{27} 5 = a$, $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$ thì $\log_{12} 35$ tính theo a, b, c bằng:

- A. $\frac{3(b+ac)}{c+2}$. B. $\frac{3b+2ac}{c+1}$. C. $\frac{3b+2ac}{c+2}$. D. $\frac{3(b+ac)}{c+1}$.

Câu 19: Cho $a, b > 0$, nếu $\log_8 a + \log_4 b^2 = 5$ và $\log_4 a^2 + \log_8 b = 7$ thì giá trị của ab bằng

- A. 2^9 . B. 8. C. 2^{18} . D. 2.

Câu 20: Số nào trong các số sau lớn hơn 1

- A. $\log_{0,5} \frac{1}{8}$. B. $\log_{0,2} 125$. C. $\log_{\frac{1}{6}} 36$. D. $\log_{0,5} \frac{1}{2}$.

Câu 21: Cho a, b là các số thực, thỏa mãn $0 < a < 1 < b$, khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\log_b a + \log_a b < 0$. B. $\log_b a > 1$.
C. $\log_a b > 0$. D. $\log_a b + \log_b a \geq 2$.

Câu 22: Cho các số thực a, b thỏa mãn $1 < a < b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\frac{1}{\log_a b} < 1 < \frac{1}{\log_b a}$. B. $\frac{1}{\log_b a} < 1 < \frac{1}{\log_a b}$.

C. $1 < \frac{1}{\log_a b} < \frac{1}{\log_b a}$. D. $\frac{1}{\log_a b} < \frac{1}{\log_b a} < 1$.

Câu 23: Cho $0 < a < b < 1$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_b a > \log_a b$. B. $\log_b a < \log_a b$. C. $\log_a b > 1$. D. $\log_a b < 0$.

Câu 24: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A. $\log_3 5 > 0$. B. $\log_{2+x^2} 2016 < \log_{2+x^2} 2017$.

C. $\log_{0,3} 0,8 < 0$. D. $\log_3 4 > \log_4 \left(\frac{1}{3}\right)$.

Câu 25: Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_3 \pi = 1$. B. $\ln 3 < \log_3 e$. C. $\log_3 5 > \log_7 4$. D. $\log_{\frac{1}{2}} 2 > 0$.

Câu 26: Cho a, b là các số thực thỏa mãn $0 < a < b < 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_b a < 0$. B. $m = 3$. C. $m = -2$. D. $\log_a b > 1$.

Câu 27: Cho hai số thực a, b thỏa mãn điều kiện $0 < a < b < 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $1 < \log_a b < \log_b a$. B. $\log_a b < 1 < \log_b a$.

C. $1 < \log_b a < \log_a b$. D. $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Câu 28: Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{e}{2}} a < \log_{\frac{e}{2}} b$. B. Nếu $0 < a < b$ thì $\log a < \log b$.

C. Nếu $0 < a < b$ thì $\ln a < \ln b$. D. Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a < \log_{\frac{\pi}{4}} b$.

Câu 29: Gọi $a = 3^{\log_{0,5} 4}$; $b = 3^{\log_{0,5} 13}$, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a < 1 < b$. B. $b < a < 1$. C. $a < b < 1$. D. $b < 1 < a$.

Câu 30: Giả sử x, y là các số thực dương. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\log_2 xy = \log_2 x + \log_2 y$

B. $\log_2 \sqrt{xy} = \frac{1}{2}(\log_2 x + \log_2 y)$

C. $\log_2 \frac{x}{y} = \log_2 x - \log_2 y$

D. $\log_2 (x + y) = \log_2 x + \log_2 y$

Câu 31: Cho hai số thực dương a và b , với $a \neq 1$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $\log_{a^2} (ab) = 2 + 2 \log_a b$. B. $\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{2} \log_a b$.

C. $\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b$. D. $\log_{a^2} (ab) = \frac{1}{4} \log_a b$.

Câu 32: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. B. $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a$. C. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b$. D. $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

Câu 33: Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$

B. $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$

C. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$

D. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$

Câu 34: Giả sử ta có hệ thức $a^2 + b^2 = 7ab$ ($a, b > 0$). Hệ thức nào sau đây là đúng?

A. $2\log_2(a+b) = \log_2 a + \log_2 b.$

B. $2\log_2 \frac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b.$

C. $\log_2 \frac{a+b}{3} = 2(\log_2 a + \log_2 b).$

D. $4\log_2 \frac{a+b}{6} = \log_2 a + \log_2 b.$

Câu 35: Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\ln \frac{a+b}{4} = \frac{\ln a + \ln b}{2}.$ **B.** $2\log_2(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b.$

C. $2\log_4(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b.$

D. $2\log \frac{a+b}{4} = \log a + \log b.$

Câu 36: Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $3\log a + 2\log b = 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $a^3 + b^2 = 1.$

B. $3a + 2b = 10.$

C. $a^3 b^2 = 10.$

D. $a^3 + b^2 = 10.$

Câu 37: Với các số thực dương a, b bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $\log_2 \frac{9a^2}{b^3} = 2 + 2\log_2 a - 3\log_2 b.$

B. $\ln \frac{9a^2}{b^3} = 2\ln 3 + 2\ln a - 3\ln b.$

C. $\log \frac{9a^2}{b^3} = 2\log 3 + 2\log a - 3\log b.$

D. $\log_3 \frac{9a^2}{b^3} = 2 + 2\log_3 a - 3\log_3 b.$

Câu 38: Với các số thực dương a, b bất kỳ. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab) = \ln a + \ln b.$

B. $\ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a.$

C. $\ln(ab) = \ln a \cdot \ln b.$

D. $\ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}.$

Câu 39: Cho các số thực dương a, b, c khác 1. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây.

A. $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c.$

B. $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}.$

C. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c.$

D. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$

Câu 40: Cho $P = \log_a b^2$ với $0 < a \neq 1$ và $b < 0$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P = -2\log_a(-b).$ **B.** $P = 2\log_a(-b).$

C. $P = -\frac{1}{2}\log_a(-b).$ **D.** $P = \frac{1}{2}\log_a(-b).$

Câu 41: Cho $a > 0, b > 0$ và $a^2 + b^2 = 7ab$. Chọn mệnh đề đúng.

A. $2(\ln a + \ln b) = \ln(7ab).$

B. $3\ln(a+b) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$

C. $\ln\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$

D. $\ln(a+b) = \frac{3}{2}(\ln a + \ln b).$

Câu 42: Cho các số $a, b > 0$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\log_{\sqrt{2}}(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b.$

B. $\log_2(a+b)^2 = 4(\log_2 a + \log_2 b).$

C. $\log_2\left(\frac{a+b}{4}\right) = 2(\log_2 a + \log_2 b).$

D. $\log_2\left(\frac{a+b}{16}\right) = \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b).$

Câu 43: Cho $\log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1$, với $y > 0, y > x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $3x = 4y.$

B. $x = 3y.$

C. $x = \frac{3}{4}y.$

D. $y = \frac{3}{4}x.$

Câu 44: Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b).$

B. $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b.$

C. $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b).$

D. $\log(a+b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b.$

Câu 45: Cho $\log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2 xy$, với $xy > 0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $x > y.$

B. $x < y.$

C. $x = y.$

D. $x = y^2.$

Câu 46: Cho $\log_a x = 2, \log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

A. $P = -6.$

B. $P = \frac{1}{6}.$

C. $P = -\frac{1}{6}.$

D. $P = 6.$

Câu 47: Với các số thực $a, b > 0$ bất kì, rút gọn biểu thức $P = 2\log_2 a - \log_{\frac{1}{2}} b^2$ ta được

A. $P = \log_2(2ab^2).$

B. $P = \log_2(ab)^2.$

C. $P = \log_2\left(\frac{a}{b}\right)^2.$

D. $P = \log_2\left(\frac{2a}{b^2}\right).$

Câu 48: Với các số thực dương a, b bất kì, đặt $M = \left(\frac{a^{10}}{\sqrt[3]{b^5}}\right)^{-0,3}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log M = -3\log a + \frac{1}{2}\log b.$

B. $\log M = -3\log a - \frac{1}{2}\log b.$

C. $\log M = -3\log a + 2\log b.$

D. $\log M = 3\log a + 2\log b.$

Câu 49: Cho $a, b > 0, a \neq 1, ab \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai.

A. $\log_{ab} a = \frac{1}{1 + \log_a b}.$

B. $\log_a \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(1 + \log_a b).$

C. $\log_{a^2} \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{4}(1 - \log_a b).$

D. $\log_{\sqrt{a}}(ab^2) = 4(1 + \log_a b).$

Câu 50: Cho các số thực dương a, x, y, a khác 1. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\log x = \frac{\log_a x}{\log_a 10}.$

B. $\log x = \frac{\log_a x}{\log_a e}.$

C. $\log x = \frac{\log_a x}{\ln 10}.$

D. $\log x = \frac{\log_x a}{\log a}.$

- Câu 51:** Cho các số thực dương a, b, x thỏa mãn $\log_3 x = 4\log_3 a + 7\log_3 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $x = 4a + 7b$. B. $x = 4a - 7b$. C. $x = a^4 b^7$. D. $x = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{7}}$.
- Câu 52:** Cho $a > 1, a \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\log_2(\log_4 x) = \log_4(\log_2 x) + a$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $\log_2 x = 4^a$. B. $\log_2 x = a + 1$. C. $\log_2 x = 2^{a+1}$. D. $\log_2 x = 4^{a+1}$.
- Câu 53:** Cho $\log_a bc = x, \log_b ca = y$ và $\log_c ab = \frac{mx + ny + 2}{pxy - 1}$, với m, n, p là các số nguyên. Tính $S = m + 2n + 3p$
- A. $S = 6$. B. $S = 9$. C. $S = 0$. D. $S = 3$.
- Câu 54:** Cho hai số thực dương a, b và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_2 a = \frac{b}{4}, \log_a b = \frac{16}{b}$. Tính ab ?
- A. $ab = 256$. B. $ab = 16$. C. $ab = 32$. D. $ab = 64$.
- Câu 55:** Cho $\log_a(bc) = 2, \log_b(ca) = 3$. Tính $S = \log_c(ab)$.
- A. $S = \frac{7}{5}$. B. $S = \frac{7}{6}$. C. $S = \frac{5}{7}$. D. $S = \frac{6}{7}$.
- Câu 56:** Cho các số thực dương a, b khác 1 và số thực dương x thỏa mãn $\log_a(\log_b x) = \log_b(\log_a x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A. $\log_a x = b^{\frac{\log_b(\log_a b)}{a}}$. B. $\log_a x = a^{\frac{\log_b(\log_a b)}{a}}$. C. $\log_a x = b^{\frac{\log_a(\log_b b)}{b}}$. D. $\log_a x = a^{\frac{\log_a(\log_b b)}{b}}$.
- Câu 57:** Cho $0 < a \neq 1$ tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + \dots + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008 \cdot 2017^2 \log_a 2019$
- A. $n = 2016$. B. $n = 2019$. C. $n = 2017$. D. $n = 2020$.
- Câu 58:** Với a là số dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng:
- A. $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. B. $\ln(2a)$. C. $\ln \frac{5}{3}$. D. $\frac{\ln 5}{\ln 3}$.
- Câu 59:** Cho ba số thực dương a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân và $a + b + c = 64$. Giá trị của biểu thức $P = 3\log_2(ab + bc + ca) - \log_2(abc)$ bằng:
- A. 18. B. 6. C. 24. D. 8
- Câu 60:** Cho 3 số $2017 + \log_2 a; 2018 + \log_3 a; 2019 + \log_4 a$; theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Công sai của cấp số cộng này bằng:
- A. 1. B. 12. C. 9. D. 20.
- Câu 61:** cho các số thực dương a, b, c lớn hơn 1, đặt $x = \log_a b + \log_b a, y = \log_b c + \log_c b$ và $z = \log_c a + \log_a c$. Giá trị của biểu thức $x^2 + y^2 + z^2 - xyz$ bằng
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 62:** Tìm số tự nhiên n thỏa mãn $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_{3^2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{3^n} x} = \frac{120}{\log_3 x}$ với $0 < x \neq 1$
- A. $n = 15$. B. $n = 20$. C. $n = 12$. D. $n = 10$.

