

CHƯƠNG IX. ĐẠO HÀM

BÀI 31. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

THUẬT NGỮ

- Đạo hàm tại một điểm
- Đạo hàm trên một khoảng
- Hệ số góc của tiếp tuyến
- Vận tốc tức thời
- Tốc độ biến đổi tức thời

KIẾN THỨC, KĨ NĂNG

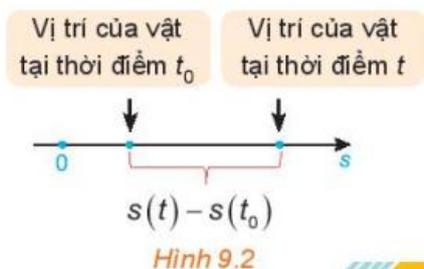
- Nhận biết một số bài toán dẫn đến khái niệm đạo hàm.
- Nhận biết định nghĩa đạo hàm. Tính đạo hàm của một số hàm đơn giản bằng định nghĩa.
- Nhận biết ý nghĩa hình học của đạo hàm. Thiết lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại một điểm thuộc đồ thị.
- Vận dụng định nghĩa đạo hàm vào giải quyết một số bài toán thực tiễn.

Nếu một quả bóng được thả rơi tự do từ đài quan sát trên sân thượng của tòa nhà Landmark 81 (Thành phố Hồ Chí Minh) cao 461,3 m xuống mặt đất. Có tính được vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất hay không? (Bỏ qua sức cản không khí).

1. MỘT SỐ BÀI TOÁN DẪN ĐẾN KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM

a) Vận tốc tức thời của một vật chuyển động thẳng

HĐ1. Một vật di chuyển trên một đường thẳng (H.9.2). Quãng đường s của chuyển động là một hàm số của thời gian t , $s = s(t)$ (được gọi là phương trình của chuyển động).



a) Tính vận tốc trung bình của vật trong khoảng thời gian từ t_0 đến t .

b) Giới hạn $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ cho ta biết điều gì?

b) Cường độ tức thời

HĐ2. Điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian t , có dạng $Q = Q(t)$.

a) Tính cường độ trung bình của dòng điện trong khoảng thời gian từ t_0 đến t .

b) Giới hạn $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ cho ta biết điều gì?

2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng (a, b) và điểm $x_0 \in (a, b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$

Ví dụ 4. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Luyện tập 3. Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$.

b) Phương trình tiếp tuyến

HĐ5. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị parabol (P) .

a) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến của (P) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến đó.

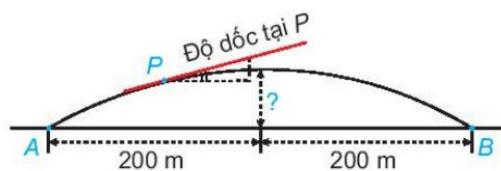
Ví dụ 5. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P): y = 3x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.

Luyện tập 4. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P): -2x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$.

Vận dụng: Người ta xây một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là 400 m (H.9.4). Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang như Hình 9.5). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Hình 9.4. Cầu vượt thép tại nút giao Nguyễn Văn Cừ quận Long Biên, Hà Nội



Hình 9.5

Hướng dẫn. Chọn hệ trục tọa độ sao cho đỉnh cầu là gốc tọa độ và mặt cắt cầu cây cầu có hình dạng parabol dạng $y = -ax^2$ (với a là hằng số dương). Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu là $k = y' = -2ax, -200 \leq x \leq 200$.

Do đó, $|k| = 2a|x| \leq 400a$. Vì độ dốc của mặt cầu không quá 10° nên ta có: $400a \leq \tan 10^\circ$. Từ đó tính được chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

1. Phương pháp

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tính $f(x) - f(x_0)$.
2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$.
3. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y = 2x^2 + x + 1$ tại $x_0 = 2$.

□ BÀI GIẢNG TOÁN 11-KNTT VỚI CS

Ví dụ 2: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3}$ tại $x; \forall x \in \mathbb{R}$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

Ví dụ 4: Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$.

Dạng 2. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

1. Phương pháp

❶. Vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 của chất điểm chuyển động với phương trình $s = s(t)$ là

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

❷. Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng $Q = Q(t)$ là

$$I(t_0) = Q'(t_0).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là:

$$s = f(t) = t^2 + 4t + 6 \quad (\text{t được tính bằng giây, s được tính bằng mét})$$

a) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0 .

b) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

Ví dụ 2: Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$.

Dạng 3. Phương trình tiếp tuyến

1. Phương pháp

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Nếu tiếp tuyến có hệ số góc k thì ta giải phương trình $f'(x_0) = k$ tìm hoành độ tiếp điểm.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = x^2 + 5$ có $f'(x) = 2x$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0 = -1$.

Ví dụ 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^4$ tại điểm có hoành độ bằng -1

Ví dụ 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3$ tại điểm mà tiếp điểm có tung độ bằng -1

Ví dụ 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^4$ có hệ số góc bằng 4 .

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 9.1. Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm các hàm số sau:

□ BÀI GIẢNG TOÁN 11-KNTT VỚI CS

a) $y = x^2 - x$ tại $x_0 = 1$;

b) $y = -x^3$ tại $x_0 = 1$.

Bài 9.2. Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm các hàm số sau:

a) $y = kx^2 + c$ (với k, c là các hằng số);

b) $y = x^3$.

Bài 9.3. Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $y = -x^2 + 4x$, biết:

a) Tiếp tuyến có hoành độ $x_0 = 1$;

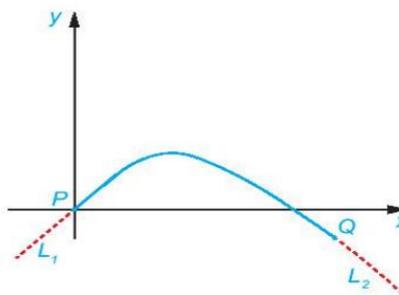
b) Tiếp điểm có tung độ $y_0 = 0$.

Bài 9.4. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $19,6 \text{ m/s}$ thì độ cao h của nó (tính bằng m) sau t giây được cho bởi công thức $h = 19,6t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Bài 9.5. Một kĩ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một đường cong có dạng parabol (H.9.6a), đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và $-0,75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải có những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q (H.9.6b). Giả sử góc tọa độ đặt tại P và phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x tính bằng mét.



Hình 9.6a



Hình 9.6b

a. Tìm c

b. Tính $y'(0)$ và tìm b .

c. Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40 m . Tìm a .

d. Tìm độ chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q .

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

B. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.

C. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

D. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Câu 2: Cho f là hàm số liên tục tại x_0 . Đạo hàm của f tại x_0 là:

A. $f(x_0)$.

B. $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x+x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = \frac{1}{4}$.

B. $f'(0) = \frac{1}{16}$.

C. $f'(0) = \frac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = 1$.

C. $f'(0) = \frac{1}{2}$.

D. Không tồn tại.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. $f'(1) = \frac{3}{2}$.

B. $f'(1) = 1$.

C. $f'(1) = 0$.

D. Không tồn tại.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số không liên tục tại $x = 0$.

B. Hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.

C. Hàm số liên tục tại $x = 2$.

D. Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Câu 8: Tìm tham số thực b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$.

A. $b = 3$.

B. $b = 6$.

C. $b = 1$.

D. $b = -6$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x > 0 \\ nx + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

A. Không tồn tại m, n . **B.** $m = 2, \forall n$.

C. $n = 2, \forall m$.

D. $m = n = 2$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a, b sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

A. $a = 1, b = -\frac{1}{2}$.

B. $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$.

C. $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$.

D. $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

□ BÀI GIẢNG TOÁN 11-KNTT VỚI CS

- Câu 11:** Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.
A. 2m/s. B. 3m/s. C. 4m/s. D. 5m/s.
- Câu 12:** Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?
A. 1690m. B. 1069m. C. 1906m. D. 1960m.
- Câu 13:** Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?
A. $t = 1s$. B. $t = 2s$. C. $t = 3s$. D. $t = 6s$.
- Câu 14:** Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét / giây
A. $6m/s^2$. B. $11m/s^2$. C. $14m/s^2$. D. $20m/s^2$.
- Câu 15:** Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8m/s^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5s$) đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0,001s$.
A. $v_{tb} = 49m/s$. B. $v_{tb} = 49,49m/s$. C. $v_{tb} = 49,0049m/s$. D. $v_{tb} = 49,245m/s$.
- Câu 16:** Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$.
A. $k = 0$. B. $k = 1$. C. $k = \frac{1}{4}$. D. $k = -\frac{1}{2}$.
- Câu 17:** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $-1; -1$.
A. $y = -3x - 4$. B. $y = -1$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = 3x + 2$.
- Câu 18:** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .
A. $x + y + 2 = 0$. B. $y = x + 2$. C. $y = x - 2$. D. $y = -x + 2$.
- Câu 19:** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.
A. $y = 8$. B. $y = -12x + 16$. C. $y = 12x - 24$. D. $y = 12x - 16$.
- Câu 20:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.
A. $y = 2x$. B. $y = 2$. C. $y = 0$. D. $y = -2$.

□ BÀI GIẢNG TOÁN 11-KNTT VỚI CS

- Câu 21:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.
- A. $y = -9x + 7; y = -2$. B. $y = -2$. C. $y = 9x + 7; y = -2$. D. $y = 9x + 7; y = 2$.
- Câu 22:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.
- A. $y = 9x + 7; y = 9x - 25$. B. $y = 9x - 25$.
C. $y = 9x - 7; y = 9x + 25$. D. $y = 9x + 25$.
- Câu 23:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$.
- A. $y = 45x - 173; y = 45x + 83$. B. $y = 45x - 173$.
C. $y = 45x + 173; y = 45x - 83$. D. $y = 45x - 83$.
- Câu 24:** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.
- A. $x + 4y - 1 = 0; x + 4y + 1 = 0$. B. $x + 4y - 4 = 0; x + 4y + 4 = 0$.
C. $y = -\frac{1}{4}x - 4; y = -\frac{1}{4}x + 4$. D. $y = -\frac{1}{4}x$.
- Câu 25:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x - 3y = 0$ bằng $\frac{3}{5}$.
- A. $y = 2; y = 1$. B. $y = -2; y = 1$. C. $y = -2; y = -1$. D. $y = 2; y = -2$.