

Hình 9.9

Ví dụ 2: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \cos 2x$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1$. Giải $f''(x) \geq 0$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{x+1}$. Tính y'' ?

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$. Tính $M = 2(y')^2 + (1-y)y''$.

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Tính $y'^2 - 2y.y''$.

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x \sin x$. Tính $xy - 2(y' - \sin x) + xy''$.

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = A \sin(\omega x + \varphi)$. Tính $M = y'' + \omega^2 y$.

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x$. Giải phương trình $y'' = 0$.

Ví dụ 10: Cho hàm số: $y = (m-4)\frac{x^2}{2} + \cos x$.

Tìm m sao cho $y'' \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{1-x}$. Giải bất phương trình $y'' > 0$.

Ví dụ 12 : Hàm số $f(x) = \frac{x^3 + 3x + 2}{x-1}$ có $f''(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{(x-1)^3}$. Tính $S = a - b + c - 2d$.

Dạng 2: Ý nghĩa vật lý của đạo hàm cấp hai

1. Phương pháp

Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai: Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm t là đạo hàm cấp 2 của hàm số $s = f(t)$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Câu 1: Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình: $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động khi $t = 3$.

Câu 2: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Câu 3: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t . Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 9.13. Cho hàm số $f(x) = x^2 e^x$. Tính $f''(0)$.

Bài 9.14. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \ln(x+1)$;

b) $y = \tan 2x$.

Bài 9.15. Cho hàm số $P(x) = ax^2 + bx + 3$ (a, b là hằng số). Tìm a, b biết $P(1) = 0$ và $P''(1) = -2$.

Bài 9.16. Cho hàm số $f(x) = 2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Chứng minh rằng $|f''(x)| \leq 4$ với mọi x .

Bài 9.17. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi $s(t) = 10 + 0,5\sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = 2x^5 - \frac{4}{x} + 1$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A.** $40x^3 - \frac{4}{x^3}$. **B.** $40x^3 + \frac{4}{x^3}$. **C.** $40x^3 - \frac{8}{x^3}$. **D.** $40x^3 + \frac{8}{x^3}$.

Câu 2: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

- A.** $-\sin 2x$. **B.** $-4\sin x$. **C.** $-4\sin 2x$. **D.** $-2\sin 2x$.

Câu 3: Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Tính y'' ?

- A.** $y'' = -2\cos 2x$. **B.** $y'' = -4\cos 2x$. **C.** $y'' = 2\cos 2x$. **D.** $y'' = 4\cos 2x$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Tính $M = y^3 \cdot y'' + 1$.

- A.** -2 . **B.** 0 . **C.** -1 . **D.** $\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = (x+1)^4$. Tính $f''(2)$.

- A.** 27 . **B.** 81 . **C.** 96 . **D.** 108 .

Câu 6: Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Tính $M = y'' + 9y$.

- A.** $\sin x$. **B.** $6\sin x$. **C.** $6\cos x$. **D.** $-6\sin x$.

Câu 7: Cho hàm số $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

- A.** $x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$. **B.** $x \in (1; +\infty)$. **C.** $x \in (-1; 1)$. **D.** $x \in (-2; 2)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^3}$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

- A.** $x < -1$. **B.** $x > -1$. **C.** $x \neq 1$. **D.** Vô nghiệm.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp 2 của f là:

- A.** $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$. **B.** $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$. **C.** $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$. **D.** $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.

Câu 10: Cho hàm số: $y = (2-m)x^4 + 2x^3 + 2mx^2 + 2m - 1$.

Tìm m để phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

- A.** $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$. **B.** $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.

D. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.

Câu 11: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2$ (t: tính bằng giây, s: tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 12m/s$.

B. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 24m/s$.

C. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 18m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 9m/s^2$.

Câu 12: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

A. $24(m/s^2)$.

B. $17(m/s^2)$.

C. $14(m/s^2)$.

D. $12(m/s^2)$.

Câu 13: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$$S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2 \text{ (t: tính bằng giây, s tính bằng mét).}$$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$ hoặc $t = 3$.

B. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1$ là $a = 12m/s^2$.

C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $a = 12m/s^2$.

D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.

Câu 14: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 2$ là:

A. $12(m/s^2)$.

B. $8(m/s^2)$.

C. $7(m/s^2)$.

D. $6(m/s^2)$.

Câu 15: Phương trình chuyển động của một chất điểm được biểu thị bởi công thức $S(t) = 4 - 2t + 4t^2 + 2t^3$, trong đó $t > 0$ và t tính bằng giây (s), $S(t)$ tính bằng mét (m). Tìm gia tốc a của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$.

A. $a = 68$.

B. $a = 115$.

C. $a = 100$.

D. $a = 225$.

Câu 16: Một vật chuyển động có phương trình $S = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1$ (m), t là thời gian tính bằng giây.

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là

A. $48 m/s^2$.

B. $28 m/s^2$.

C. $18 m/s^2$.

D. $54 m/s^2$.

Câu 17: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = -t^3 + t^2 + t + 4$ (t là thời gian tính bằng giây). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là

A. 6.

B. 0.

C. 2.

D. 4.

Câu 18: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm gia tốc bằng không là

A. $-2,5m/s$.

B. $4m/s$.

C. $2,5m/s$.

D. $8,5m/s$.