

CÂU HỎI

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ và các điểm M, N, P thỏa mãn

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}. \text{ Các mệnh đề sau đúng hay sai?}$$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$		
b)	$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$		
c)	$\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$		
d)	Ba điểm M, N, P thẳng hàng.		

Câu 2. Cho ngũ giác $ABCDE$. Các điểm M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các đoạn EA, AB, BC, CD, MP, NQ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ})$		
b)	$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$		
c)	RS cắt ED		
d)	$RS = \frac{1}{4}ED$		

Câu 3. Cho bốn điểm A, B, C, D có M, N là trung điểm của AB, CD . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$		
b)	$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$		
c)	$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$		
d)	$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$		

Câu 4. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi D là điểm đối xứng của B qua G, M là trung điểm của BC . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}$		
b)	$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$		
c)	$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$		
d)	$\overrightarrow{MD} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$		

Câu 5. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BN, CP . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có : $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$		
b)	$\vec{BA} + \vec{BC} = 3\vec{BN}$		
c)	$\vec{AB} = -\frac{2}{3} \cdot \vec{BN} - \frac{2}{3} \vec{CP}$		
d)	$\vec{BC} = -\frac{2}{3} \vec{CP} + \frac{2}{3} \vec{BN}$.		

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O, M là một điểm bất kỳ. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$		
b)	$\vec{AB} + 5\vec{AC} + \vec{AD} = 6\vec{AC}$		
c)	$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = \vec{MO}$		
d)	$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO}$		

Câu 7. Cho tứ giác $OABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{AB}$		
b)	$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{OB} - \vec{OA}$		
c)	$\vec{BN} = \frac{1}{3} \vec{OC} - \vec{OB}$		
d)	$\vec{MN} = \frac{1}{2} (\vec{OC} - \vec{OB})$		

Câu 8. Cho ΔABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$2\vec{CM} = \vec{CB} + \vec{CA}$		
b)	$\vec{AB} = -\frac{2}{3} \vec{CM} - \frac{4}{3} \vec{BN}$		
c)	$\vec{AC} = \frac{4}{3} \vec{CM} + \frac{2}{3} \vec{BN}$		
d)	$\vec{MN} = \frac{1}{3} \vec{BN} - \frac{1}{3} \vec{CM}$		

Câu 9. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O, H là trực tâm tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$BD // CH$		
b)	$CD // BH$		
c)	$\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 3\vec{HO}$		
d)	$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OH}$		

Câu 10. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$ \overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC} = \overline{AM} - \overline{AB} $ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường tròn tâm B , bán kính $R = CG$.		
b)	$2 \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3 \overline{MB} + \overline{MC} $ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GI (với I là trung điểm của BC).		
c)	$ \overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 2028$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường tròn tâm G , bán kính $R = 626$.		
d)	$ \overline{3AM} - \overline{3AC} = \overline{MA} + 2\overline{MB} $ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng IC với $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AB}$.		

Câu 11. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB // CD, AB = 2AD = 2CD, E$ là trung điểm cạnh AB . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overline{AB} = 2\overline{DC}$		
b)	$\overline{DE} = -\overline{CB}$		
c)	$\overline{CA} + \overline{CB} = 2\overline{CE}$		
d)	$\overline{AD} = \overline{EC}$		
e)	$\overline{AB} + \overline{EB} = 3\overline{DC}$		
f)	$\overline{DE} = \frac{1}{2}(\overline{DA} + \overline{DB})$		

Câu 12. Cho ΔABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Phân tích các vectơ $\overline{AI}, \overline{AJ}$ theo cặp vectơ \overline{AB} và \overline{AC} . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$2\overline{IC} = -3\overline{IB}$		
b)	$5\overline{JB} = 3\overline{JC}$		
c)	$\overline{AI} = 2\overline{AB} + \frac{2}{5}\overline{AC}$		
d)	$\overline{AJ} = \frac{5}{3}\overline{AB} - \frac{2}{3}\overline{AC}$		

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức: $\overline{OP} = -\frac{1}{3}\overline{OA}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overline{OA} + 3\overline{OP} = \vec{0}$		
b)	$3\overline{AP} - 3\overline{AC} = \vec{0}$		
c)	Ba điểm B, P, N không thẳng hàng		
d)	Ba đường thẳng AC, BD, MN đồng quy		

Câu 14. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Lấy hai điểm I, J sao cho: $2\vec{IA} + 3\vec{IC} = \vec{0}$ và $2\vec{JA} + 5\vec{JB} + 3\vec{JC} = \vec{0}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	M, N, J thẳng hàng.		
b)	$\vec{JM} = \frac{3}{2}\vec{JN}$		
c)	J là trung điểm của BI .		
d)	Gọi E là điểm thuộc AB sao cho $\vec{AE} = \frac{5}{7}\vec{AB}$ thì C, E, J thẳng hàng.		

Câu 15. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD, K là trung điểm IJ, M là điểm bất kì. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{AC} + \vec{BD} = 2\vec{IJ}$		
b)	$\vec{AD} + \vec{BC} = 2\vec{IJ}$		
c)	$\vec{MI} + \vec{MJ} = \vec{MK}$		
d)	$\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MK}$		

Câu 16. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC . Gọi G là trọng tâm, H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , AA' là đường kính của (O) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{BH} = \vec{A'C}$		
b)	$\vec{AH} = 2\vec{OM}$		
c)	$\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC} = 3\vec{HO}$		
d)	$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OH}$		

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và CD . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$		
b)	$\vec{AI} = \vec{AC} + \vec{AB}$		
c)	$\vec{AI} = \vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AD}$		
d)	$\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$.		

Câu 18. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = BI$. J là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $5JB = JC$. G là trọng tâm $\triangle ABC$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{BI} = 2\vec{CI}$		
b)	$\vec{AI} = -\vec{AB} + 3\vec{AC}$		
c)	$\vec{AJ} = \frac{5}{4}\vec{AB} - \frac{3}{4}\vec{AC}$		
d)	$\vec{AG} = \frac{14}{27}\vec{AI} - \frac{172}{27}\vec{AJ}$		

Câu 19. Cho ΔABC có trọng tâm G . Gọi I, J là 2 điểm định bởi $\vec{IA} = 2\vec{IB}$, $3\vec{JA} + 2\vec{JC} = \vec{0}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{AI} = 3\vec{AB}$		
b)	$\vec{IJ} = -2\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$		
c)	$\vec{IG} = \frac{-5}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$		
d)	3 điểm I, J, G thẳng hàng.		

Câu 20. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD . Gọi G là trung điểm EF . Gọi O là điểm bất kì. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$		
b)	$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = 3\vec{AG}$		
c)	$\vec{EF} = \frac{1}{3}(\vec{AD} + \vec{BC})$		
d)	$\vec{OG} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$		

Câu 21. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Đặt $\vec{u} = \vec{AB}, \vec{v} = \vec{AE}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{AD} = \vec{u} + \vec{v}$		
b)	$\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$		
c)	$\vec{AF} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$		
d)	$\vec{EF} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$		

Câu 22. Cho ΔABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm BC , B' là điểm đối xứng của B qua G . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tứ giác $AGCB'$ là hình bình hành		
b)	$\vec{CB'} = \frac{-1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$		
c)	$\vec{AB'} = \frac{-1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$		
d)	$\vec{MB'} = \frac{-5}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$		

Câu 23. Cho ΔABC . Gọi I là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $IB = 3IC$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	\vec{IB} và \vec{IC} ngược hướng		
b)	$\vec{AI} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$		
c)	Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC$, $KB = 3KA$. $\vec{JK} = \frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}$		
d)	$\vec{BC} = -\frac{20}{17}\vec{AI} - \frac{48}{17}\vec{JK}$		

Câu 24. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức:

$\vec{BC} + \vec{MA} = \vec{0}, \vec{AB} - \vec{NA} - 3\vec{AC} = \vec{0}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{MN} = 3\vec{AC}$		
b)	Hai vectơ \vec{MN}, \vec{AC} cùng phương		
c)	M thuộc đường thẳng AC		
d)	Hai đường thẳng MN và AC song song		

LỜI GIẢI

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ và các điểm M, N, P thoả mãn

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}. \text{ Khi đó:}$$

a) $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

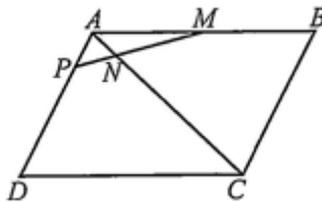
b) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

c) $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

d) Ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



Ta có: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{MP}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$ cùng phương.

Vậy ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Câu 2. Cho ngũ giác $ABCDE$. Các điểm M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các đoạn EA, AB, BC, CD, MP, NQ . Khi đó:

a) $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ})$

b) $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ED}$.

c) RS cắt ED

d) $RS = \frac{1}{4}ED$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{EB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{ED}.$$

Vậy $RS // ED$ và $RS = \frac{1}{4}ED$.

Câu 3. Cho bốn điểm A, B, C, D có M, N là trung điểm của AB, CD . Khi đó:

- a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$
- b) $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$.
- c) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$
- d) $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

Do M và N là trung điểm của AB, CD nên ta có các đẳng thức:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}, \quad \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}.$$

$$\text{Ta lại có } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN} \end{cases}$$

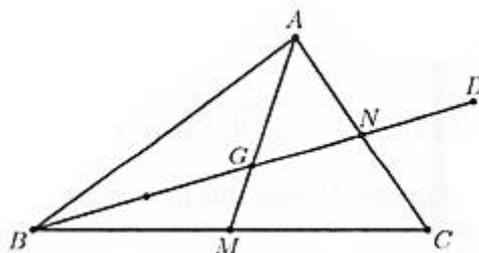
Cộng hai đẳng thức trên về theo vế, ta chứng minh được $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi D là điểm đối xứng của B qua G, M là trung điểm của BC . Khi đó:

- a) $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}$
- b) $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- c) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BN}$
- d) $\overrightarrow{MD} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



Ta có: $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$

Ta có: $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN})$
 $= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BN, CP . Khi đó:

a) G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BN}$

c) $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$

d) $\overrightarrow{BC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA}$

Khi đó:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GB} + (\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$= 2\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}$$

$$= -\frac{4}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CP}; \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}.$$

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O, M là một điểm bất kỳ. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 6\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO}$

d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

Ta có: $\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + 5\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

$$\begin{aligned}
&= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} \\
&= 4\overrightarrow{MO} + \underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})}_0 + \underbrace{(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})}_0 = 4\overrightarrow{MO}.
\end{aligned}$$

Câu 7. Cho tứ giác $OABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OB và OC . Khi đó:

a) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$;

c) $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$;

d) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

$$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AB}$$

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Ta có: $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$.

Câu 8. Cho ΔABC . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC . Khi đó:

a) $2\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$

b) $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CM} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BN}$

c) $\overrightarrow{AC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BN}$

d) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CM}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
----------------	----------------	---------------	----------------

Ta có: $-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & -\frac{4}{3}\overrightarrow{CM} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\ & = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

Ta có:

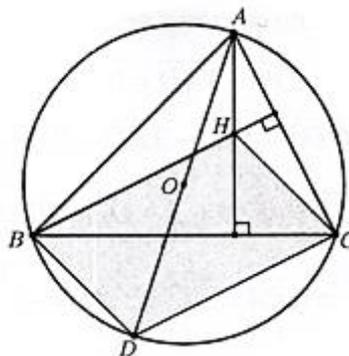
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} &= -\frac{2}{3}\overrightarrow{CM} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CM}. \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BN} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CM}. \end{aligned}$$

Câu 9. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn tâm O , H là trực tâm tam giác, D là điểm đối xứng của A qua O . Khi đó:

- a) $BD // CH$
- b) $CD // BH$
- a) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HO}$;
- b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



Xét tam giác ABD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $AB \perp BD$; mặt khác $AB \perp CH$ nên $BD // CH$ (1).

Tương tự, tam giác ACD nội tiếp đường tròn đường kính AD nên $AC \perp CD$; mặt khác $AC \perp BH$ nên $CD // BH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BDCH$ là hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$ (vì O là trung điểm AD).

Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC}$
 $= 3\overrightarrow{OH} + (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}) = 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH}$.

Câu 10. Cho tam giác ABC có trọng tâm G . Khi đó:

- a) $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}|$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường tròn tâm B , bán kính $R = CG$.

b) $2|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = 3|\overline{MB} + \overline{MC}|$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GI (với I là trung điểm của BC).

c) $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = 2028$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường tròn tâm G , bán kính $R = 676$.

d) $|3\overline{AM} - 3\overline{AC}| = |\overline{MA} + 2\overline{MB}|$ khi và chỉ khi tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng IC với $\overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AB}$.

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

Lời giải

a) Ta có: $|\overline{MA} + \overline{MB} - 2\overline{MC}| = |\overline{AM} - \overline{AB}| \Leftrightarrow |\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} - 3\overline{MC}| = |\overline{BM}|$
 $\Leftrightarrow |3\overline{MG} - 3\overline{MC}| = BM \Leftrightarrow |3(\overline{MG} - \overline{MC})| = BM \Leftrightarrow 3|\overline{CG}| = BM \Leftrightarrow BM = 3CG$.

Nhận xét: Ba điểm B, C, G cố định. Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm B , bán kính $R = 3CG$.

b) Ta có: $2|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = 3|\overline{MB} + \overline{MC}| \Leftrightarrow 2|3\overline{MG}| = 3|2\overline{MI}|$

(với I là trung điểm của BC).

$$\Leftrightarrow 6MG = 6MI \Leftrightarrow MG = MI.$$

Nhận xét: Hai điểm G, I cố định. Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng GI .

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC nên G cố định.

Ta có: $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = 2028 \Leftrightarrow |3\overline{MG}| = 2028 \Leftrightarrow 3MG = 2028 \Leftrightarrow MG = 676$.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G , bán kính $R = 676$.

d) Ta có: $3\overline{AM} - 3\overline{AC} = 3(\overline{AM} - \overline{AC}) = 3\overline{CM}$ (1).

Gọi I thỏa mãn $\overline{IA} + 2\overline{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{IA} + 2\overline{IA} + 2\overline{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AI} = \frac{2}{3}\overline{AB}$.

Suy ra I là điểm cố định. Khi đó:

$$\overline{MA} + 2\overline{MB} = \overline{MI} + \overline{IA} + 2(\overline{MI} + \overline{IB}) = 3\overline{MI} + (\overline{IA} + 2\overline{IB}) = 3\overline{MI} + \vec{0} = 3\overline{MI} \quad (2).$$

Thay (1) và (2) vào hệ thức $|3\overline{AM} - 3\overline{AC}| = |\overline{MA} + 2\overline{MB}|$, ta được:

$$|3\overline{CM}| = |3\overline{MI}| \Leftrightarrow 3CM = 3MI \Leftrightarrow MC = MI.$$

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng IC .

Câu 11. Cho hình thang cân $ABCD$ có $AB // CD, AB = 2AD = 2CD, E$ là trung điểm cạnh AB . Khi đó:

a) $\overline{AB} = 2\overline{DC}$;

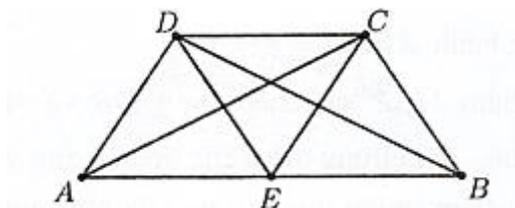
b) $\overline{DE} = -\overline{CB}$;

c) $\overline{CA} + \overline{CB} = 2\overline{CE}$;

- d) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EC}$;
 e) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{DC}$;
 f) $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
e) Đúng	f) Đúng		



Ta có: $AE = CD = \frac{1}{2}AB$, $AE \parallel CD$ nên $AECD$ là hình bình hành (*).

Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được $BCDE$ là hình bình hành (**).

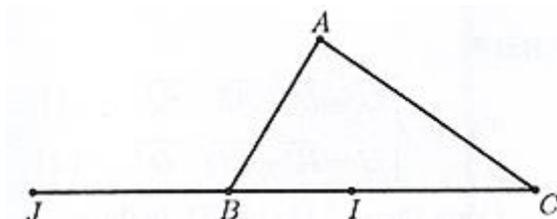
- a) Mệnh đề đúng.
 b) Mệnh đề sai (do (**)).
 c) Mệnh đề đúng (tính chất trung điểm).
 d) Mệnh đề đúng (do (*)).
 e) Mệnh đề đúng. Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{EB} = 3\overrightarrow{DC}$.
 f) Mệnh đề đúng (tính chất trung điểm).

Câu 12. Cho $\triangle ABC$. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = 3BI$ và J là điểm trên BC kéo dài sao cho $5JB = 2JC$. Phân tích các vector $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ theo cặp vector \overrightarrow{AB} và \overrightarrow{AC} . Khi đó:

- a) $2\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB}$
 b) $5\overrightarrow{JB} = 3\overrightarrow{JC}$
 c) $\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$
 d) $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



Theo giả thiết, ta có: $2\vec{IC} = -3\vec{IB}(1), 5\vec{JB} = 2\vec{JC}(2)$.

Từ (1) ta được: $2\vec{IC} = -3\vec{IB} \Leftrightarrow 2(\vec{AC} - \vec{AI}) = -3(\vec{AB} - \vec{AI}) \Leftrightarrow 5\vec{AI} = 3\vec{AB} + 2\vec{AC} \Leftrightarrow \vec{AI} = \frac{3}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$.

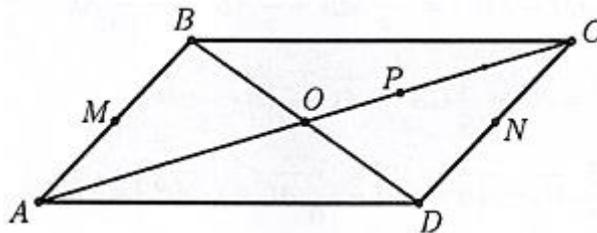
Từ (2) ta được: $5\vec{JB} = 2\vec{JC} \Leftrightarrow 5(\vec{AB} - \vec{AJ}) = 2(\vec{AC} - \vec{AJ}) \Leftrightarrow 3\vec{AJ} = 5\vec{AB} - 2\vec{AC} \Rightarrow \vec{AJ} = \frac{5}{3}\vec{AB} - \frac{2}{3}\vec{AC}$.

Câu 13. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD và P là điểm thỏa mãn hệ thức: $\vec{OP} = -\frac{1}{3}\vec{OA}$. Khi đó:

- a) $\vec{OA} + 3\vec{OP} = \vec{0}$
- b) $3\vec{AP} - 3\vec{AC} = \vec{0}$
- c) Ba điểm B, P, N không thẳng hàng
- d) Ba đường thẳng AC, BD, MN đồng quy

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



Ta có: $\vec{OA} = -3\vec{OP} \Leftrightarrow \vec{OA} + 3\vec{OP} = \vec{0}$.

Khi đó: $3\vec{AP} - 2\vec{AC} = 3(\vec{AO} + \vec{OP}) - 2.2\vec{AO} = \vec{OA} + 3\vec{OP} = \vec{0}$.

Ta có: $\vec{OP} = -\frac{1}{3}\vec{OA} = \frac{1}{3}\vec{OC} \Rightarrow P$ là trọng tâm của tam giác BCD , do vậy trung tuyến BN của tam giác BCD đi qua trọng tâm P đó. Vậy ba điểm B, P, N thẳng hàng.

Nhận xét : AC và BD cắt nhau tại tâm O là trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác : $\vec{OM} + \vec{ON} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) + \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) + \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OD}) = \vec{0}$.

Do đó O là trung điểm của MN hay AC, BD, MN đồng quy tại O .

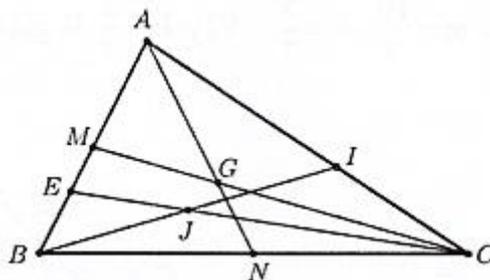
Câu 14. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC . Lấy hai điểm I, J sao cho: $2\vec{IA} + 3\vec{IC} = \vec{0}$ và $2\vec{JA} + 5\vec{JB} + 3\vec{JC} = \vec{0}$. Khi đó:

- a) M, N, J thẳng hàng.
- b) $\vec{JM} = \frac{3}{2}\vec{JN}$
- c) J là trung điểm của BI .

d) Gọi E là điểm thuộc AB sao cho $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$ thì C, E, J thẳng hàng.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------



a) Ta có: $2\overrightarrow{JA} + 5\overrightarrow{JB} + 3\overrightarrow{JC} = 2(\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}) + 3(\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC}) = 4\overrightarrow{JM} + 6\overrightarrow{JN} = \vec{0}$
 $\Rightarrow \overrightarrow{JM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{JN}$. Do đó J, M, N thẳng hàng.

Điểm J thuộc đoạn MN và thỏa mãn $JM = \frac{3}{2}JN$.

b) Ta có: $\overrightarrow{JM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{JN} \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} = -\frac{3}{2}(\overrightarrow{JM} + \overrightarrow{MN})$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{2}\overrightarrow{JM} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{JM} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{MN}$$

$$2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}.$$

Khi đó: $\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JM} + \overrightarrow{MB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{MN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{10}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI} &= \overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \\ &= \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -2\left(-\frac{3}{10}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = -2\overrightarrow{JB} \text{ (do (1)).} \end{aligned}$$

Vậy J là trung điểm của BI .

$$c) \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$$

$$= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = -\frac{7}{10}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

Mặt khác: $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB}$.

Để C, E, J thẳng hàng thì:

$$\exists m \in \mathbb{R}, \overrightarrow{CE} = m \cdot \overrightarrow{CJ} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB} = -\frac{7m}{10}\overrightarrow{AC} + \frac{m}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -\frac{7m}{10} \\ k = \frac{m}{2} \end{cases} \Rightarrow m = \frac{10}{7}, k = \frac{5}{7} \Rightarrow k = \frac{5}{7}.$$

Câu 15. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD , K là trung điểm IJ , M là điểm bất kì. Khi đó:

- a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{IJ}$
 b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$
 c) $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{MK}$
 d) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MK}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

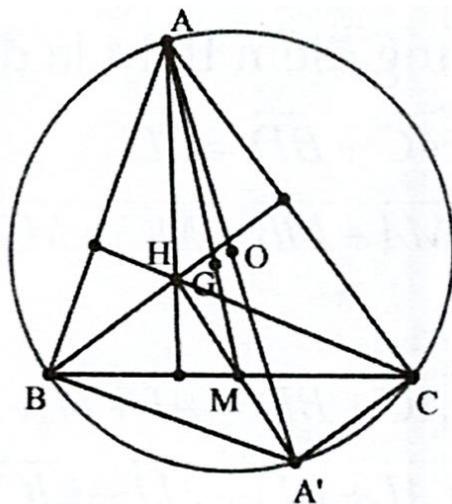
- a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$
 $= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + 2\overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{JC} + \overrightarrow{JD}) = 2\overrightarrow{IJ}$
 b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JC}$
 $= (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BI}) + 2\overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{JD} + \overrightarrow{JC}) = 2\overrightarrow{IJ}$
 c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MJ} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MJ}) = 4\overrightarrow{MK}$

Câu 16. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC . Gọi G là trọng tâm, H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , AA' là đường kính của (O) . Khi đó:

- a) $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$
 b) $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$
 c) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{HO}$
 d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OH}$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



a) Do tứ giác $BHCA'$ có $BH // A'C (\perp AC)$ và $CH // BA' (\perp AB)$ nên $BHCA'$ là hình bình hành
 $\Rightarrow \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{A'C}$

b) Lại có M là trung điểm của đường chéo BC nên M là trung điểm của HA' hay H, M, A' thẳng hàng.

Do OM là đường trung bình của $\Delta AHA'$ nên $AH = 2OM$, mà \overrightarrow{AH} và \overrightarrow{OM} cùng hướng
 $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

c) $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'}$ (Tứ giác $AHCA'$ là hình bình hành $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$)

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HC} = 3\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}$
 $= 3\overrightarrow{OH} + 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OH}$.

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm BC và CD . Khi đó:

a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

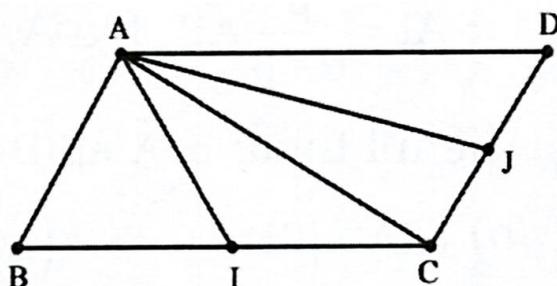
b) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$

d) $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Câu 18. Cho ΔABC . Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho $2CI = BI$. J là điểm trên cạnh BC kéo dài sao cho $5JB = JC$. G là trọng tâm ΔABC . Khi đó:

a) $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CI}$

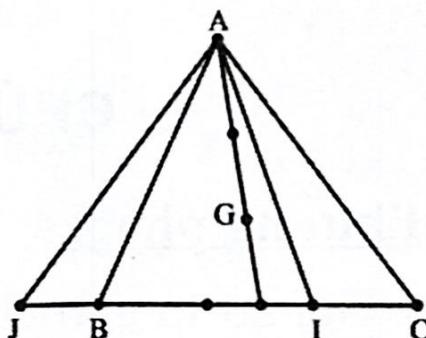
b) $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AG} = \frac{14}{27}\overrightarrow{AI} - \frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



a) Vì $BI = 2CI$ và \overrightarrow{BI} và \overrightarrow{CI} cùng hướng

$$\Rightarrow \overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} = 2(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

Vì $5JB = JC$ và \overrightarrow{JB} và \overrightarrow{JC} cùng hướng

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{JB} = \overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 5(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AJ}) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

b) Gọi M là trung điểm cạnh BC :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Ta có hệ: } \begin{cases} \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AJ} \\ -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AJ} \\ -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = 8\overrightarrow{AJ} \\ -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AI} + \frac{8}{9}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AJ} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AI} + \frac{8}{9}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = 5\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{AI} - 4\overrightarrow{AJ}\right) + \frac{8}{9}\overrightarrow{AJ} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AI} + \frac{8}{9}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{13}{9}\overrightarrow{AI} - 20\overrightarrow{AJ} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } \overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\overrightarrow{AI} + \frac{8}{9}\overrightarrow{AJ}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{13}{9}\overrightarrow{AI} - 20\overrightarrow{AJ}\right) \\ &= \frac{1}{27}\overrightarrow{AI} + \frac{8}{27}\overrightarrow{AJ} + \frac{13}{27}\overrightarrow{AI} - \frac{20}{3}\overrightarrow{AJ} = \frac{14}{27}\overrightarrow{AI} - \frac{172}{27}\overrightarrow{AJ}. \end{aligned}$$

Câu 19. Cho ΔABC có trọng tâm G . Gọi I, J là 2 điểm định bởi $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$, $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AB}$

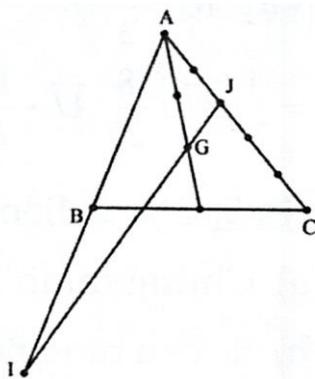
b) $\overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{IG} = \frac{-5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

d) 3 điểm I, J, G thẳng hàng.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------



$$\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) \Leftrightarrow -\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB}$$

$$3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Leftrightarrow -3\overrightarrow{AJ} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AJ}) = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$$

Gọi M là trung điểm BC

$$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - 2\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \frac{-5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}.$$

Xét hệ:

$$\begin{cases} \overrightarrow{IJ} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{IG} = \frac{-5}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \\ \frac{3}{5}\overrightarrow{IG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{6}{5}\overrightarrow{IG}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}$ và \overrightarrow{IG} cùng phương $\Rightarrow I, J, G$ thẳng hàng.

Câu 20. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD . Gọi G là trung điểm EF . Gọi O là điểm bất kì. Khi đó:

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

c) $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

d) $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = 2(\overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}) = \vec{0}$.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AE} + 2\overrightarrow{AF} = 2(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}) = 4\overrightarrow{AG}$.

c) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FC}) = \overrightarrow{EF}$

d) $\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{OE} + 2\overrightarrow{OF}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) = \frac{1}{2} \cdot 2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG}$

Câu 21. Cho lục giác đều $ABCDEF$. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AE}$. Khi đó:

a) $\overrightarrow{AD} = \vec{u} + \vec{v}$

b) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$

c) $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

d) $\overrightarrow{EF} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------

a) Gọi O là tâm lục giác đều $ABCDEF$

Tứ giác $ABDE$ hình chữ nhật $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \vec{u} + \vec{v}$.

b) Tứ giác $ABCO$ là hình thoi

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$$

c) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA}$ (tứ giác $ABOF$ là hình thoi nên $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{BA}$)

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}.$$

d) Tứ giác $AOEF$ là hình thoi nên

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{AO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}.$$

Câu 22. Cho ΔABC có trọng tâm G . Gọi M là trung điểm BC , B' là điểm đối xứng của B qua G . Khi đó:

a) Tứ giác $AGCB'$ là hình bình hành

b) $\overrightarrow{CB'} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

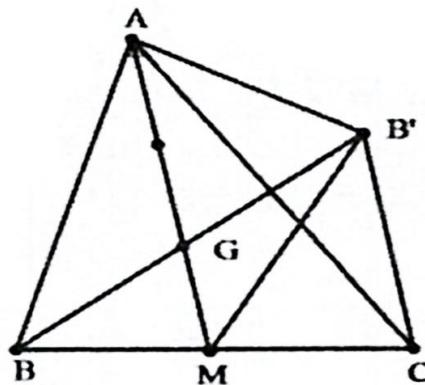
c) $\overrightarrow{AB'} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

d) $\overrightarrow{MB'} = \frac{-5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

Gọi M là trung điểm BC . Tứ giác $AGCB'$ là hình bình hành (có 2 đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường).



$$\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Gọi M là trung điểm AB . Tứ giác $AGCB'$ là hình bình hành

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{GC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{-1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{-5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$$

Câu 23. Cho ΔABC . Gọi I là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $IB = 3IC$. Khi đó:

a) \overrightarrow{IB} và \overrightarrow{IC} ngược hướng

b) $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

c) Gọi J và K lần lượt là các điểm thuộc cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC, KB = 3KA$.

$$\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

d) $\overrightarrow{BC} = -\frac{20}{17}\overrightarrow{AI} - \frac{48}{17}\overrightarrow{JK}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
----------------	---------------	----------------	----------------

Ta có $IB = 3IC$ và \overrightarrow{IB} và \overrightarrow{IC} ngược hướng

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = -3\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI} = -3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}); 4\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

Ta có: $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$

Ta có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AI} \\ 3\overrightarrow{AB} - 8\overrightarrow{AC} = 12\overrightarrow{JK} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = \frac{32}{17}\overrightarrow{AI} + \frac{36}{17}\overrightarrow{JK} \\ \overrightarrow{AC} = \frac{12}{17}\overrightarrow{AI} - \frac{12}{17}\overrightarrow{JK} \end{cases}$

Vậy: $\overrightarrow{BC} = \frac{12}{17}\overrightarrow{AI} - \frac{12}{17}\overrightarrow{JK} - \frac{32}{17}\overrightarrow{AI} - \frac{36}{17}\overrightarrow{JK} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = -\frac{20}{17}\overrightarrow{AI} - \frac{48}{17}\overrightarrow{JK}$

Câu 24. Cho tam giác ABC . Hai điểm M, N được xác định bởi các hệ thức:

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}, \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}. \text{ Khi đó:}$$

a) $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{AC}$

b) Hai vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương

c) M thuộc đường thẳng AC

d) Hai đường thẳng MN và AC song song.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------------	----------------	---------------	----------------

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0} &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - 3\overrightarrow{AC} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

Suy ra hai vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương (1).

Xét: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$. Do đó M là một đỉnh của hình bình hành $ABCM$ hay M không thuộc đường thẳng AC (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai đường thẳng MN và AC song song.