

## CÂU HỎI

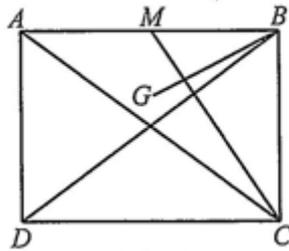
**Câu 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (-2; 3), \vec{b} = (4; 1)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = 12$		
b)	$(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 4$		
c)	Vectơ $\vec{c} = m\vec{i} + \vec{j}$ vuông góc với $\vec{a}$ khi $m = \frac{3}{2}$		
d)	Tọa độ vectơ $\vec{d}$ sao cho $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4, \vec{b} \cdot \vec{d} = -2$ bằng $\left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$		

**Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (2; 5), \vec{b} = (3; -7), \vec{c} = (1; 1)$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 29$		
b)	$(\vec{a}, \vec{b}) = 15^\circ$		
c)	$(\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ$		
d)	Đề $\vec{d} = (4x+1)\vec{i} + (x+4)\vec{j}$ tạo với vectơ $\vec{c}$ một góc $45^\circ$ thì $x = -\frac{1}{4}$ .		

**Câu 3.** Cho hình chữ nhật  $ABCD, AB = 4a, AD = 3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB, G$  là trọng tâm tam giác  $ACM$  (Hình).



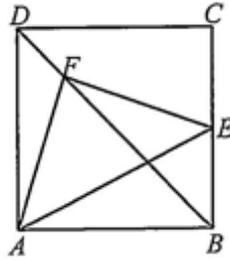
Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{CM} = \frac{1}{2}\vec{BA} - 3\vec{BC}$		
b)	$\vec{BG} = \frac{3}{2}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC}$		
c)	$\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 0$		
d)	$\vec{BG} \cdot \vec{CM} = -a^2$		

**Câu 4.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = -6\sqrt{3}$		
b)	$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 7$		
c)	$(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + 30\sqrt{3}$		
d)	$(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 5 + 30\sqrt{3}$		

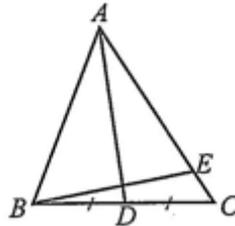
**Câu 5.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Lấy  $E$  là trung điểm của  $BC$ , điểm  $F$  thỏa mãn  $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$		
b)	$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}$		
c)	$\overrightarrow{EF} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$		
d)	Tam giác $AEF$ vuông cân.		

**Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4\sqrt{2}, AC = 6, BAC = 45^\circ$ . Gọi  $D$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Điểm  $E$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC} (k \in \mathbb{R})$  (Hình). Các mệnh đề sau đúng hay sai?



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$		
b)	$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$		
c)	$BC = 3\sqrt{5}$		
d)	$AD \perp BE$ khi $k = \frac{14}{15}$		

**Câu 7.** Cho tam giác  $ABC$  đều, đường cao  $AH$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 30^\circ$		
b)	$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$		
c)	$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$		
d)	$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = 130^\circ$		

**Câu 8.** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng 2 và góc  $B$  bằng  $60^\circ$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$		
b)	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) = 30^\circ$		
c)	$\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 3$		
d)	$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = -3$		

**Câu 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a, BC = 2a$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$ACB = 60^\circ$		
b)	$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$		
c)	$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 3a^2$		
d)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$		

**Câu 10.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ , có cạnh  $a$ . Biết  $M$  là trung điểm của  $AB, G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$		
b)	$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{3}$		
c)	$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$		
d)	$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$		

**Câu 11.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ , cạnh bằng  $a$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$		
b)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = a^2$		
c)	$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = -a^2$		
d)	$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$		

**Câu 12.** Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ , biết  $AD = a, BC = 3a$  và cạnh  $AB = 2a$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -4a^2$		
b)	$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$		
c)	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$		
d)	Gọi $I, J$ lần lượt là trung điểm của $AB, CD$ . Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = 6a^2$		

**Câu 13.** Cho tam giác đều  $ABC$ , đường cao  $AH$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$		
b)	$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$		
c)	$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$		
d)	$(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$		

**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh  $a$ , có trọng tâm  $G$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$		
b)	$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{4}$		
c)	$\angle AGB = 120^\circ$		
d)	$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{a^2}{6}$		

**Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a, AC = 3a, \angle BAC = 60^\circ$ . Gọi  $I$  là trung điểm đoạn thẳng  $BC$ . Điểm  $J$  thuộc đoạn  $AC$  thỏa mãn:  $12AJ = 7AC$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4a^2$		
b)	$\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$		
c)	$\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$		
d)	$AI \perp BJ$		

## LỜI GIẢI

**Câu 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (-2; 3), \vec{b} = (4; 1)$ . Khi đó:

a)  $\vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = 12$

b)  $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 4$

c) Vectơ  $\vec{c} = m\vec{i} + \vec{j}$  vuông góc với  $\vec{a}$  khi  $m = \frac{3}{2}$

d) Tọa độ vectơ  $\vec{d}$  sao cho  $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4, \vec{b} \cdot \vec{d} = -2$  bằng  $\left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$

**Lời giải:**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Ta có :  $\vec{a} - \vec{b} = (-6; 2) \Rightarrow \vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = -2(-6) + 3 \cdot 2 = 18;$

$\vec{a} + \vec{b} = (2; 4), 2\vec{a} - \vec{b} = (-8; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 2(-8) + 4 \cdot 5 = 4.$

b) Ta có :  $\vec{c} = (m; 1)$ . Vì  $\vec{c} \perp \vec{a}$  nên  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow -2m + 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}.$

c) Gọi  $\vec{d} = (x; y)$ . Ta có: 
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{d} = 4 \\ \vec{b} \cdot \vec{d} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases} \text{ Vậy } \vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right).$$

**Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (2; 5), \vec{b} = (3; -7), \vec{c} = (1; 1)$ . Khi đó:

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 29$

b)  $(\vec{a}, \vec{b}) = 15^\circ$

c)  $(\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ$

d) Để  $\vec{d} = (4x+1)\vec{i} + (x+4)\vec{j}$  tạo với vectơ  $\vec{c}$  một góc  $45^\circ$  thì  $x = -\frac{1}{4}.$

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	---------------	----------------	----------------

a) Ta có:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-7)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ;$

$\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7\sqrt{58}}{58} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ.$

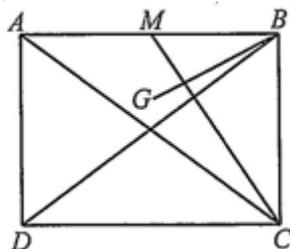
b) Ta có:  $\vec{d} = (4x+1; x+4)$  tạo với  $\vec{c}$  một góc  $45^\circ$  nên:

$$\cos(\vec{d}, \vec{c}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{4x+1+x+4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(4x+1)^2 + (x+4)^2}} = \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17x^2+16x+17}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 5x+5 = \sqrt{17x^2+16x+17}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 17x^2+16x+17 = 25x^2+50x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 8x^2+34x+8=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}$$

**Câu 3.** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $AB = 4a$ ,  $AD = 3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ACM$  (Hình).



a)  $\vec{CM} = \frac{1}{2}\vec{BA} - 3\vec{BC}$

b)  $\vec{BG} = \frac{3}{2}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC}$ .

c)  $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 0$

b)  $\vec{BG} \cdot \vec{CM} = -a^2$ .

**Lời giải**

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------

Ta có:  $\vec{CM} = \vec{BM} - \vec{BC} = \frac{1}{2}\vec{BA} - \vec{BC}$ .

Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ACM$  nên

$$3\vec{BG} = \vec{BA} + \vec{BM} + \vec{BC} = \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{BC} = \frac{3}{2}\vec{BA} + \vec{BC} \Rightarrow \vec{BG} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC}$$

Vì  $ABCD$  là hình chữ nhật nên  $BC = AD = 3a$ ,  $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = 0$ .

$$\text{Ta có: } \vec{BG} \cdot \vec{CM} = \left(\frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{3}\vec{BC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{BA} - \vec{BC}\right) = \frac{1}{4}\vec{BA}^2 - \frac{1}{3}\vec{BA} \cdot \vec{BC} - \frac{1}{3}\vec{BC}^2$$

$$= \frac{1}{4}(4a)^2 - \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot 3a - \frac{1}{3}(3a)^2 = -3a^2.$$

**Câu 4.** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn  $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 4, (\vec{a}, \vec{b}) = 150^\circ$ . Khi đó:

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6\sqrt{3}$

b)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 7$ .

$$c) (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = -5 + 30\sqrt{3}$$

$$d) (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) = 5 + 30\sqrt{3}$$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	---------------	----------------	---------------

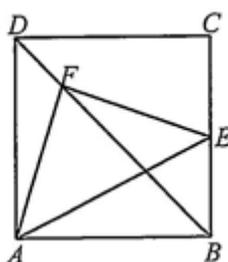
Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot 4 \cdot \cos 150^\circ = -6\sqrt{3}$ .

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 3^2 - 4^2 = -7.$$

$$\begin{aligned} (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) &= 3\vec{a}^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = 3|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 \\ &= 3 \cdot 3^2 - 5(-6\sqrt{3}) - 2 \cdot 4^2 = -5 + 30\sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Câu 5.** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Lấy  $E$  là trung điểm của  $BC$ , điểm  $F$  thỏa mãn  $\vec{BF} = \frac{3}{4}\vec{BD}$

Khi đó:



$$a) \vec{AE} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$$

$$b) \vec{AF} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{5}{4}\vec{AD}.$$

$$c) \vec{EF} = \frac{-3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}.$$

d) Tam giác  $AEF$  vuông cân.

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	---------------	----------------	----------------

Ta có:  $\vec{AE} = \vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$ .

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BD} = \vec{AB} + \frac{3}{4}(\vec{AD} - \vec{AB}) = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}.$$

$$\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = \left(\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}\right) - \left(\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}\right) = \frac{-3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}.$$

$$\text{Ta có: } \vec{AF} \cdot \vec{EF} = \left(\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AD}\right) \cdot \left(\frac{-3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}\right)$$

$$= \frac{-3}{16}\vec{AB}^2 - \frac{1}{2}\vec{AB} \cdot \vec{AD} + \frac{3}{16}\vec{AD}^2 = 0 \Rightarrow AF \perp EF.$$

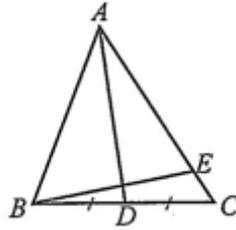
$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AF}^2 = \left( \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \right)^2 = \frac{1}{16}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{9}{16}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2.$$

$$\overrightarrow{EF}^2 = \left( \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \right)^2 = \frac{9}{16}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{3}{8}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{16}\overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2.$$

$$\Rightarrow AF^2 = EF^2 = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}^2 \Rightarrow AF = EF. \text{ Vậy tam giác } AEF \text{ vuông cân tại } F.$$

Chú ý: Ta có thể chứng minh tam giác  $AEF$  vuông bằng định lí Pythagore.

**Câu 6.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4\sqrt{2}, AC = 6, BAC = 45^\circ$ . Gọi  $D$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Điểm  $E$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC} (k \in \mathbb{R})$  (Hình). Khi đó:



a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

b)  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c)  $BC = 3\sqrt{5}$

d)  $AD \perp BE$  khi  $k = \frac{14}{15}$ .

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 4\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ = 24$ .

b) Ta có:  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .

Khi đó:

$$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = 6^2 - 2 \cdot 24 + (4\sqrt{2})^2 = 20$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{5}.$$

$$\overrightarrow{AD}^2 = \left( \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \right)^2 = \frac{1}{4} \left( \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left[ (4\sqrt{2})^2 + 2 \cdot 24 + 6^2 \right] = 29 \Rightarrow AD = \sqrt{29}.$$

c) Ta có:  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ . Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2} \left( k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{2} \left[ 24k + 6^2 \cdot k - (4\sqrt{2})^2 - 24 \right] \\ &= 30k - 28. \end{aligned}$$

Khi đó  $AD \perp BE \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \Leftrightarrow 30k - 28 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{14}{15}$ .

**Câu 7.** Cho tam giác  $ABC$  đều, đường cao  $AH$ . Khi đó:

- a)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 30^\circ$
- b)  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$
- c)  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$
- d)  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = 130^\circ$

**Lời giải**

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Ta có:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle BAC = 60^\circ$ .

b) Ta có:  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$  do  $AH \perp BC$ .

c) Cách giải 1: Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $C$ , ta có:  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$ .

Khi đó:  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \angle ACD = 120^\circ$ .

Cách giải 2: Áp dụng tính chất được rút ra từ định nghĩa:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - (-\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - (\vec{a}, -\vec{b}), \text{ ta được:}$$

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \angle ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

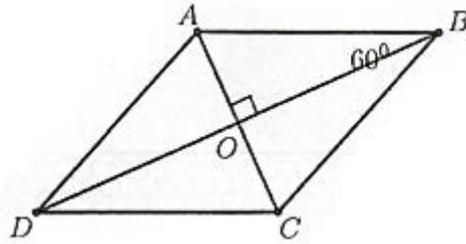
d) Ta có:  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ - \angle BAH = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ .

**Câu 8.** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng 2 và góc  $B$  bằng  $60^\circ$ . Khi đó:

- a)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$
- b)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) = 30^\circ$
- c)  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 3$
- d)  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = -3$

**Lời giải**

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



Xét hình thoi  $ABCD$  có  $ABC = 60^\circ \Rightarrow BAD = 120^\circ$ ; tam giác  $ABC$  có

$$AB = BC = 2, ABC = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều cạnh } 2 \Rightarrow OB = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

Ta có:  $(\overline{AB}, \overline{AC}) = BAC = 60^\circ, (\overline{AB}, \overline{DA}) = 180^\circ - (\overline{AB}, \overline{AD}) = 180^\circ - BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Ta có:  $\overline{DA} \cdot \overline{DC} = |\overline{DA}| \cdot |\overline{DC}| \cos(\overline{DA}, \overline{DC}) = DA \cdot DC \cdot \cos ADC = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2$ ;

$$\overline{OB} \cdot \overline{BA} = -\overline{BO} \cdot \overline{BA} = -|\overline{BO}| \cdot |\overline{BA}| \cdot \cos ABO = -BO \cdot BA \cdot \cos 30^\circ = -\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3.$$

**Câu 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a, BC = 2a$ . Khi đó:

a)  $ACB = 60^\circ$

b)  $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = a^2$

c)  $\overline{BC} \cdot \overline{CA} = 3a^2$ .

b)  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} = -4a^2$

### Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

Xét tam giác vuông  $ABC$  :  $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ ,  $\cos ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow ABC = 60^\circ \Rightarrow ACB = 30^\circ.$$

Ta có:  $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = |\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}| \cdot \cos(\overline{BA}, \overline{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos ABC = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2$ .

Ta có:  $\overline{BC} \cdot \overline{CA} = -\overline{CB} \cdot \overline{CA} = -|\overline{CB}| \cdot |\overline{CA}| \cos ACB$

$$= -CB \cdot CA \cdot \cos 30^\circ = -2a \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3a^2.$$

Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $\overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$ .

Ta có:  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = -a^2, \overline{BC} \cdot \overline{CA} = -3a^2$ .

Suy ra  $\overline{AB} \cdot \overline{BC} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} + \overline{CA} \cdot \overline{AB} = -a^2 - 3a^2 = -4a^2$ .

**Câu 10.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ , có cạnh  $a$ . Biết  $M$  là trung điểm của  $AB, G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Khi đó:

a)  $\overline{AB} \cdot \overline{CA} = a^2$

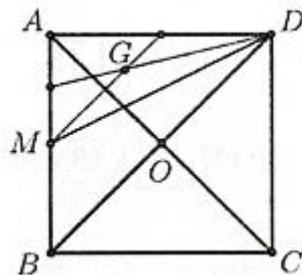
$$b) \overline{AM} \cdot \overline{AC} = \frac{a^2}{3}$$

$$c) \overline{AD} \cdot \overline{BD} + \overline{OM} \cdot \overline{AC} = \frac{a^2}{2}$$

$$d) (\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{BC}) = a^2$$

### Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------



Độ dài đường chéo hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  là  $AC = BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ .

Ta có:  $\overline{AB} \cdot \overline{CA} = -\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \cos(\overline{AB}, \overline{AC})$

$$= -AB \cdot AC \cdot \cos BAC = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = -a^2$$

$$\overline{AM} \cdot \overline{AC} = |\overline{AM}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \cos(\overline{AM}, \overline{AC})$$

$$= AM \cdot AC \cdot \cos CAM = \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}$$

Ta có:  $\overline{AD} \cdot \overline{BD} + \overline{OM} \cdot \overline{AC} = \overline{DA} \cdot \overline{DB} + \frac{1}{2} \overline{DA} \cdot \overline{AC} = |\overline{DA}| \cdot |\overline{DB}| \cdot \cos(\overline{DA}, \overline{DB}) - \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{AC}$

$$= DA \cdot DB \cdot \cos ADB - \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \cos CAD$$

$$= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2 - \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} a^2$$

Ta có  $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$  (quy tắc hình bình hành).

Do đó:  $(\overline{AB} + \overline{AD})(\overline{BD} + \overline{BC}) = \overline{AC}(\overline{BD} + \overline{BC})$

$$= \underbrace{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}_0 + \overline{AC} \cdot \overline{BC} = \overline{CA} \cdot \overline{CB} = |\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}| \cos ACB = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$$

(trong đó  $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$  vì  $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ).

**Câu 11.** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ , cạnh bằng  $a$ . Khi đó:

a)  $\overline{AB} \cdot \overline{DC} = 2a^2$ ;

b)  $\overline{AB} \cdot \overline{OC} = a^2$ ;

c)  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = -a^2$ ;

d)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	---------------	----------------	----------------

a) Do  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  cùng hướng nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ$ .

Suy ra:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB \cdot DC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2$ .

b) Hai vectơ  $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}$  cùng hướng, do đó  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = BAO = 45^\circ$

Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = AB \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}$ .

c) Hai vectơ  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}$  ngược hướng, do đó  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = 180^\circ$ .

Suy ra  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = CA \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 180^\circ = -a^2$ .

d) Ta có:  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  (trong đó  $AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ ).

Ta có:  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = CA \cdot CB \cdot \cos ACB = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2$ .

Vậy  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$ .

**Câu 12.** Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ , biết  $AD = a, BC = 3a$  và cạnh  $AB = 2a$ . Khi đó:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -4a^2$

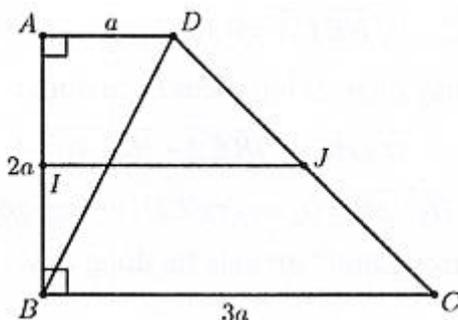
b)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$

c)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$

d) Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = 6a^2$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	---------------	---------------	----------------



a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$ . Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_0$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2 = -AB^2 = -4a^2.$$

b) Tính  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$ . Ta có:  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \cdot BD \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = BC \cdot BD \cdot \cos DBC$

$$= BC \cdot BD \cdot \cos BDA = BC \cdot BD \cdot \frac{AD}{BD} = BC \cdot AD = 3a^3.$$

(trong đó  $DBC = BDA$  vì là hai góc so le trong).

c) Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$= -\overrightarrow{AB}^2 + 0 + 0 + BC \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = -AB^2 + 3a \cdot a \cdot 1 = -(2a)^2 + 3a^2 = -a^2.$$

d) Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ}$ . Ta có:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{IJ} = \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ}}_0 + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IJ} = BC \cdot IJ \cdot \cos 0^\circ = 3a \cdot 2a \cdot 1 = 6a^2.$$

**Câu 13.** Cho tam giác đều  $ABC$ , đường cao  $AH$ . Khi đó:

a)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$

b)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

c)  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$

d)  $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$

### Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = BAC = 60^\circ$ .

b) Dụng hình bình hành  $ABCD$ , ta có:  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ .

Suy ra:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = BAD = 180^\circ - ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

c) Tam giác  $ABC$  đều nên  $AH \perp BC$ . Suy ra  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$

d) Dụng hình bình hành  $ABEH$ , ta có:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HE}$ .

Suy ra:  $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HE}) = AHE = 180^\circ - BAH = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ .

**Câu 14.** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh  $a$ , có trọng tâm  $G$ . Khi đó:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

$$b) \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{4}$$

$$c) \angle AGB = 120^\circ$$

$$c) \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{a^2}{6}$$

### Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} a^2$$

$$b) \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AG}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) = AG \cdot AC \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2} a^2$$

$$c) \text{ Tam giác } AGB \text{ có } \angle GAB = \angle GBA = 30^\circ \Rightarrow \angle AGB = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos \angle AGB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}$$

**Câu 15.** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a, AC = 3a, \angle BAC = 60^\circ$ . Gọi  $I$  là trung điểm đoạn thẳng  $BC$ . Điểm  $J$  thuộc đoạn  $AC$  thỏa mãn:  $12AJ = 7AC$ . Khi đó:

$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4a^2$$

$$b) \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2} \overrightarrow{AC}$$

$$c) \overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12} \overrightarrow{AC}$$

$$d) AI \perp BJ$$

### Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos \angle BAC = 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = 3a^2$$

$$b) \text{ Do } I \text{ là trung điểm } BC \text{ nên } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$$

$$c) \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12} \overrightarrow{AC}$$

$$c) \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \left( -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{2} \left( -\overrightarrow{AB}^2 + \frac{7}{12} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{12} \overrightarrow{AC}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( -4a^2 + \frac{7}{12} \cdot 3a^2 - 3a^2 + \frac{7}{12} \cdot 9a^2 \right) = 0$$

Vậy  $AI \perp BJ$