

Câu hỏi

Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $m \leq -x + y$ với mọi cặp số $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất

phương trình sau:
$$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \leq 4 \\ x + y \leq 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Trả lời:

Câu 2. Cho hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ x - 2y \leq 2 \text{ (II)} \\ y \leq 3. \end{cases}$$
 Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương

trình $2x - 5y + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi cặp số $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình (II).

Trả lời:

Câu 3. Trong một cuộc thi pha chế đồ uống gồm hai loại là A và B , mỗi đội chơi được sử dụng tối đa $24g$ hương liệu, 9 cốc nước lọc và $210g$ đường. Để pha chế 1 cốc đồ uống loại A cần 1 cốc nước lọc, $30g$ đường và $1g$ hương liệu. Để pha chế 1 cốc đồ uống loại B cần 1 cốc nước lọc, $10g$ đường và $4g$ hương liệu. Mỗi cốc đồ uống loại A nhận được 6 điểm thưởng, mỗi cốc đồ uống loại B nhận được 8 điểm thưởng. Để đạt được số điểm thưởng cao nhất, đội chơi cần pha chế bao nhiêu cốc đồ uống mỗi loại?

Trả lời:

Câu 4. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi ki-lô-gam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi ki-lô-gam thịt lợn (heo) chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là $1,6kg$ thịt bò và $1,1kg$ thịt lợn; giá $1kg$ thịt bò là 200000 đồng, $1kg$ thịt lợn là 160000 đồng. Hỏi gia đình đó cần mua bao nhiêu ki-lô-gam thịt mỗi loại để đảm bảo cung cấp đủ lượng protein, lipid cho gia đình và có chi phí là ít nhất?

Trả lời:

Câu 5. Nhân dịp tết Trung thu, xí nghiệp sản xuất bánh muốn sản xuất hai loại bánh: bánh nướng và bánh dẻo. Để sản xuất hai loại bánh này, xí nghiệp cần: đường, bột mì, trứng, mứt bí, lạp xường,... Xí nghiệp đã nhập về $600kg$ bột mì và $240kg$ đường, các nguyên liệu khác luôn đáp ứng được số lượng mà xí nghiệp cần. Mỗi chiếc bánh nướng cần $120g$ bột mì, $60g$ đường. Mỗi chiếc bánh dẻo cần $160g$ bột mì và $40g$ đường. Theo khảo sát thị trường, lượng bánh dẻo tiêu thụ không vượt quá ba lần lượng bánh nướng và sản phẩm của xí nghiệp sản xuất luôn được tiêu thụ hết. Mỗi chiếc bánh nướng lãi 8000 đồng, mỗi chiếc bánh dẻo lãi 6000 đồng, Hãy lập kế hoạch sản xuất cho xí nghiệp để đáp ứng nhu cầu thị trường; đảm bảo lượng bột mì, đường không vượt quá số lượng mà xí nghiệp đã chuẩn bị và vẫn thu được lợi nhuận cao nhất.

Trả lời:

Câu 6. Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm là sản phẩm loại I và sản phẩm loại II:

- Mỗi kg sản phẩm loại I cần $2kg$ nguyên liệu và 30 giờ, thu lời được 40 nghìn.

- Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, thu lời được 30 nghìn. Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc tối đa. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

Trả lời:

Câu 7. Một hộ nông dân định trồng dưa và củ đậu trên diện tích 8 ha. Trên diện tích mỗi ha, nếu trồng dưa thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng, nếu trồng củ đậu thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu ha để thu được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180 .

Trả lời:

Câu 8. Có ba nhóm máy X, Y, Z dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại lần lượt phải dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được dùng cho trong bảng sau:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị	
		Loại I	Loại II
X	10	2	2
Y	4	0	2
Z	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm loại I lãi 3 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm loại II lãi 5 nghìn đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất để cho tổng số tiền lãi thu được là cao nhất.

Trả lời:

Câu 9. Tìm GTLN của $f(x, y) = x + 2y$ với điều kiện

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 & (d_1) \\ 0 \leq x & (d_2) \\ x - y - 1 \leq 0 & (d_3) \\ x + 2y - 10 \leq 0 & (d_4) \end{cases}$$

Trả lời:

Câu 10. Bác Năm dự định trồng ngô và đậu xanh trên một mảnh đất có diện tích 8 hecta (ha). Nếu trồng 1 ha ngô thì cần 20 ngày công và thu được 40 triệu đồng. Nếu trồng 1 ha đậu xanh thì cần 30 ngày công và thu được 50 triệu đồng. Bác Năm cần trồng bao nhiêu ha cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền nhất? Biết rằng, bác Năm chỉ có thể sử dụng không quá 180 ngày công cho việc trồng ngô và đậu xanh.

Trả lời:

Câu 11. Cho hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x - y + 4 \geq 0 \\ x + y \leq 0 \\ x \leq 0 \\ y + 2 \geq 0 \end{cases}$$
 . Miền nghiệm của hệ tạo thành là hình gì?

Trả lời:

Câu 12. Cho biểu thức $T = 3x - 2y - 4$ với x và y thỏa mãn hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x - y - 1 \leq 0 \\ x + 4y + 9 \geq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Biết T đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = x_0$ và $y = y_0$. Tính $x_0^2 + y_0^2$.

Trả lời:

Câu 13. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị Prôtêin và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị Lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 1,6kg thịt bò và 1,1kg thịt lợn, giá tiền mỗi kg thịt bò là 250.000 đồng, giá tiền mỗi kg thịt lợn là 85.000 đồng. Hỏi chi phí ít nhất để mua thịt mỗi ngày của gia đình đó là bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 14. Một công ty X có 2 phân xưởng A, B cùng sản xuất 2 loại sản phẩm M, N . Số đơn vị sản phẩm các loại được sản xuất ra và chi phí mỗi giờ hoạt động của A, B như sau:

	Phân xưởng 1	Phân xưởng 2
Sản phẩm M	250	250
Sản phẩm N	100	200
Chi phí	600.000	1.000.000

Công ty nhận được yêu cầu đặt hàng là 5000 đơn vị sản phẩm M và 3000 đơn vị sản phẩm N .

Công ty đã tìm được cách phân phối thời gian cho mỗi phân xưởng hoạt động thỏa mãn yêu cầu đơn đặt hàng và chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 15. Một người dùng ba loại nguyên liệu A, B, C để sản xuất ra hai loại sản phẩm P và Q . Để sản xuất 1kg mỗi loại sản phẩm P hoặc Q phải dùng một số kilogram nguyên liệu khác nhau. Tổng số kilogram nguyên liệu mỗi loại mà người đó có và số kilogram từng loại nguyên liệu cần thiết để sản xuất ra 1 kg sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Số kilogram nguyên liệu đang có	Số kilogram từng loại nguyên liệu cần để sản xuất 1kg sản phẩm	
		P	Q
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Biết 1kg sản phẩm P có lợi nhuận 3 triệu đồng và 1kg sản phẩm Q có lợi nhuận 5 triệu đồng.

Người đó đã lập được phương án sản xuất hai loại sản phẩm trên sao cho có lãi cao nhất. Hỏi lãi cao nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = 3y - 2x$ trên miền xác định bởi hệ
$$\begin{cases} x - y \leq 6 \\ y - 2x \geq 2 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

Trả lời:

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = x - 3y + 1$ trên miền xác định bởi hệ
$$\begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ y - x \leq 1 \\ x + y \geq 2 \end{cases}.$$

Trả lời:

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = x - y$ với điều kiện
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}.$$

Trả lời:

Câu 19. Trong mặt phẳng Oxy , cho tứ giác $ABCD$ có $A(-3; 0); B(0; 2); C(3; 1); D(3; -2)$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho điểm $M(m; m - 1)$ nằm trong hình tứ giác $ABCD$ kẻ cả 4 cạnh.

Trả lời:

Câu 20. Trong một đợt dã ngoại, một trường học cần thuê xe chở 180 người và 8 tấn hàng. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B , trong đó xe A có 10 chiếc và xe B có 9 chiếc. Một xe loại A cho thuê với giá 5 triệu đồng và một xe loại B cho thuê với giá 4 triệu đồng. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 30 người và 0,8 tấn hàng, mỗi xe loại B có thể chở tối đa 20 người và 1,6 tấn hàng. Tìm số xe mỗi loại sao cho chi phí thuê là thấp nhất.

Trả lời:

Câu 21. Một gia đình cần ít nhất 1200 đơn vị protein và 800 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 2,0kg thịt bò và 1,5kg thịt lợn. Giá tiền 1kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Gọi x, y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipit trong thức ăn. Tính $4x^2 + y^2$.

Trả lời:

Câu 22. Một hộ nông dân định trồng bắp và khoai lang trên diện tích 4ha. Trên diện tích mỗi ha, nếu trồng bắp thì cần 10 công và thu 2 triệu đồng, nếu trồng khoai lang thì cần 15 công và thu 2,5 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu ha để thu được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 45 công.

Trả lời:

Câu 23. Người ta dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 160kg hóa chất A và 12kg hóa chất B . Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 5 triệu đồng có thể chiết xuất được 25kg chất A và 1,2kg chất B . Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 4 triệu đồng có thể chiết xuất được 20kg chất A và 2kg chất B . Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất. Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 9 tấn nguyên liệu loại I và không quá 7 tấn nguyên liệu loại II .

Trả lời:

LỜI GIẢI THAM KHẢO

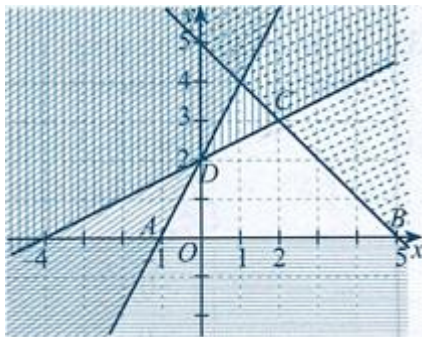
Câu 1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $m \leq -x + y$ với mọi cặp số $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất

phương trình sau:
$$\begin{cases} -2x + y \leq 2 \\ -x + 2y \leq 4 \\ x + y \leq 5 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Trả lời: $m \leq -5$

Lời giải

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác $ABCD$ với $A(-1; 0), B(5; 0), C(2; 3), D(0; 2)$ (Hình). Ta có: $x - y + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -x + y$.



Đặt $F = -x + y$. Tính giá trị của $F = -x + y$ tại các cặp số $(x; y)$ là tọa độ của các đỉnh tứ giác $ABCD$ rồi so sánh bằng -5 tại $x = 5, y = 0$.

Để $m \leq -x + y$ với mọi x, y thỏa mãn hệ bất phương trình đã cho thì $m \leq \min F$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình đó hay $m \leq -5$.

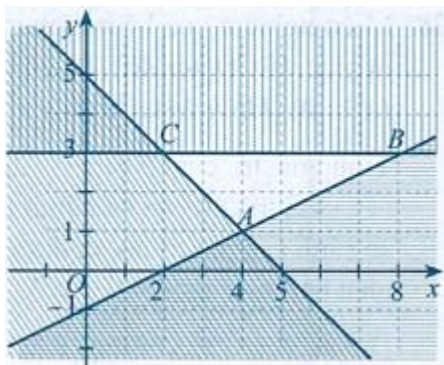
Câu 2. Cho hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x + y \geq 5 \\ x - 2y \leq 2 \text{ (II)} \\ y \leq 3. \end{cases}$$
 Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương

trình $2x - 5y + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi cặp số $(x; y)$ thỏa mãn hệ bất phương trình (II).

Trả lời: $m \geq 11$

Lời giải

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (II) là miền tam giác ABC với $A(4; 1), B(8; 3), C(2; 3)$ (Hình).



Ta có: $2x - 5y + m \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -2x + 5y$.

Đặt $F = -2x + 5y$. Tính giá trị của $F = -2x + 5y$ tại các cặp số $(x; y)$ là toạ độ của các đỉnh tam giác ABC rồi so sánh các giá trị đó, ta được F đạt giá trị lớn nhất bằng 11 tại $x = 2, y = 3$.

Để bất phương trình $2x - 5y + m \geq 0$ nghiệm đúng với mọi x, y thoả mãn hệ bất phương trình đã cho thì $m \geq \text{Max } F$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình đó hay $m \geq 11$.

Câu 3. Trong một cuộc thi pha chế đồ uống gồm hai loại là A và B , mỗi đội chơi được sử dụng tối đa $24g$ hương liệu, 9 cốc nước lọc và $210g$ đường. Để pha chế 1 cốc đồ uống loại A cần 1 cốc nước lọc, $30g$ đường và $1g$ hương liệu. Để pha chế 1 cốc đồ uống loại B cần 1 cốc nước lọc, $10g$ đường và $4g$ hương liệu. Mỗi cốc đồ uống loại A nhận được 6 điểm thưởng, mỗi cốc đồ uống loại B nhận được 8 điểm thưởng. Để đạt được số điểm thưởng cao nhất, đội chơi cần pha chế bao nhiêu cốc đồ uống mỗi loại?

Trả lời: 4 cốc đồ uống loại A , 5 cốc đồ uống loại B .

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số cốc đồ uống loại A , loại B mà đội chơi cần pha chế với $x \geq 0, y \geq 0$.

Số cốc nước cần dùng là: $x + y$ (cốc).

Lượng đường cần dùng là: $30x + 10y(g)$.

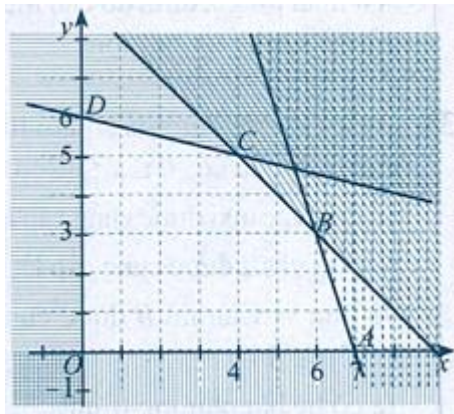
Lượng hương liệu cần dùng là: $x + 4y(g)$.

$$\text{Theo giả thiết, ta có: } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 9 \\ 30x + 10y \leq 210 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 9 \\ 3x + y \leq 21 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases} \quad (III)$$

Số điểm thưởng nhận được là: $F = 6x + 8y$.

Ta tìm giá trị lớn nhất trên miền nghiệm của hệ bất phương trình (III).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (III) là miền ngũ giác $OABCD$ với $O(0;0), A(7;0), B(6;3), C(4;5), D(0;6)$ (hình).



Tính giá trị của $F = 6x + 8y$ tại các cặp số $(x; y)$ là tọa độ của các đỉnh ngũ giác $OABCD$ rồi so sánh các giá trị đó, ta được F đạt giá trị lớn nhất bằng 64 tại $x = 4; y = 5$.

Vậy để đạt được số điểm thưởng cao nhất, đội chơi cần pha chế 4 cốc đồ uống loại A, 5 cốc đồ uống loại B.

Câu 4. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi ki-lô-gam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi ki-lô-gam thịt lợn (heo) chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6kg thịt bò và 1,1kg thịt lợn; giá 1kg thịt bò là 200000 đồng, 1kg thịt lợn là 160000 đồng. Hỏi gia đình đó cần mua bao nhiêu ki-lô-gam thịt mỗi loại để đảm bảo cung cấp đủ lượng protein, lipid cho gia đình và có chi phí là ít nhất?

Trả lời: 0,6kg thịt bò và 0,7kg thịt lợn

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số ki-lô-gam thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó mua trong một ngày với $0 \leq x \leq 1,6, 0 \leq y \leq 1,1$.

Số đơn vị protein gia đình có là: $800x + 600y$.

Số đơn vị lipid gia đình có là: $200x + 400y$. Theo bài ra, ta có:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases} \quad (IV)$$

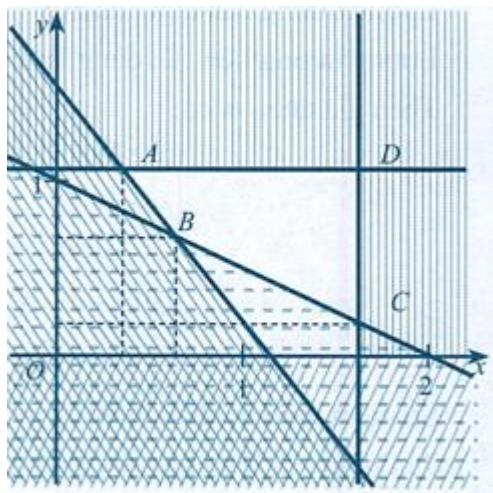
Số tiền gia đình đã dùng để mua thịt bò và thịt lợn là:

$$T = 200000x + 160000y \text{ (đồng)}.$$

Bài toán đưa về tìm x, y là nghiệm của hệ bất phương trình (IV) để $T = 200000x + 160000y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trước hết, ta biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (IV).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (IV) là miền tứ giác $ABCD$ với $A(0,3;1,1), B(0,6;0,7), C(1,6;0,2), D(1,6;1,1)$ (hình)



Tính giá trị của T tại các cặp số $(x; y)$ là tọa độ của các đỉnh tứ giác $ABCD$ rồi so sánh các giá trị đó, ta được T đạt giá trị nhỏ nhất bằng 232000 đồng tại $x = 0,6; y = 0,7$

Vậy để đảm bảo cung cấp đủ lượng protein, lipid cho gia đình và có chi phí là ít nhất thì gia đình đó cần mua thêm 0,6kg thịt bò và 0,7kg thịt lợn

Câu 5. Nhân dịp tết Trung thu, xí nghiệp sản xuất bánh muốn sản xuất hai loại bánh: bánh nướng và bánh dẻo. Để sản xuất hai loại bánh này, xí nghiệp cần: đường, bột mì, trứng, mứt bí, laps xường,... Xí nghiệp đã nhập về 600kg bột mì và 240kg đường, các nguyên liệu khác luôn đáp ứng được số lượng mà xí nghiệp cần. Mỗi chiếc bánh nướng cần 120g bột mì, 60g đường. Mỗi chiếc bánh dẻo cần 160g bột mì và 40g đường. Theo khảo sát thị trường, lượng bánh dẻo tiêu thụ không vượt quá ba lần lượng bánh nướng và sản phẩm của xí nghiệp sản xuất luôn được tiêu thụ hết. Mỗi chiếc bánh nướng lãi 8000 đồng, mỗi chiếc bánh dẻo lãi 6000 đồng, Hãy lập kế hoạch sản xuất cho xí nghiệp để đáp ứng nhu cầu thị trường; đảm bảo lượng bột mì, đường không vượt quá số lượng mà xí nghiệp đã chuẩn bị và vẫn thu được lợi nhuận cao nhất.

Trả lời: 3000 chiếc bánh nướng và 1.500 chiếc bánh dẻo.

Lời giải

Gọi x, y (chiếc) là số lượng bánh nướng, bánh dẻo mà xí nghiệp cần sản xuất. Trong đó $0 < x, 0 < y$ với $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Khối lượng bột mì cần dùng là: $0,12x + 0,16y(kg)$.

Khối lượng đường cần dùng là: $0,06x + 0,04y(kg)$.

Ta có: $0,12x + 0,16y \leq 600$ hay $3x + 4y \leq 15000$;

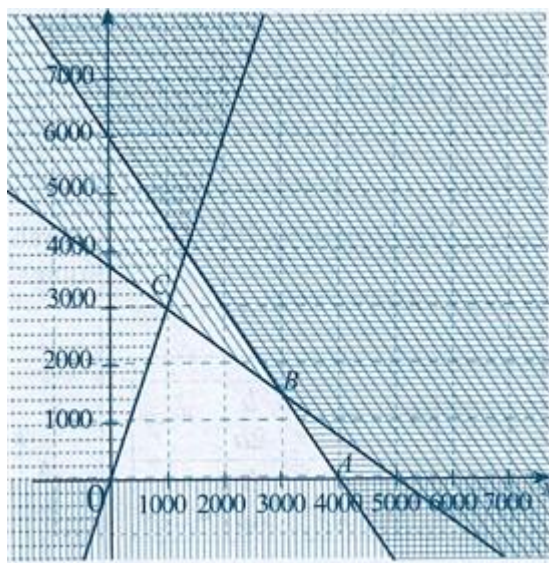
$0,06x + 0,04y \leq 240$ hay $3x + 2y \leq 12000$.

Số tiền lãi thu được là: $T = 8x + 6y$ (nghìn đồng). Bài toán đưa về, tìm x, y là nghiệm của hệ bất

$$\text{phương trình: } \begin{cases} 3x + 4y \leq 15000 \\ 3x + 2y \leq 12000 \\ y \leq 3x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (V) \text{ để } T = 8x + 6y \text{ đạt giá trị lớn nhất.}$$

Trước hết, ta biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình (V).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác $OABC$ với $O(0;0), A(4000;0), B(3000;1500), C(1000;3000)$



Tính giá trị của T tại các cặp số $(x; y)$ là tọa độ các đỉnh trên rồi so sánh các giá trị đó, ta được T đạt giá trị lớn nhất bằng 33000 (nghìn đồng) hay 33 triệu đồng tại $x = 3000; y = 1500$.

Vậy để đạt được tiền lãi cao nhất, xí nghiệp nên sản xuất 3000 chiếc bánh nướng và 1.500 chiếc bánh dẻo.

Câu 6. Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm là sản phẩm loại I và sản phẩm loại II:

- Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2kg nguyên liệu và 30 giờ, thu lời được 40 nghìn.

- Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, thu lời được 30 nghìn. Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc tối đa. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

Trả lời: 20 sản phẩm loại I và 40 sản phẩm loại II

Lời giải:

Gọi x, y lần lượt là số kg sản phẩm loại I và loại II mà xưởng sản xuất được.

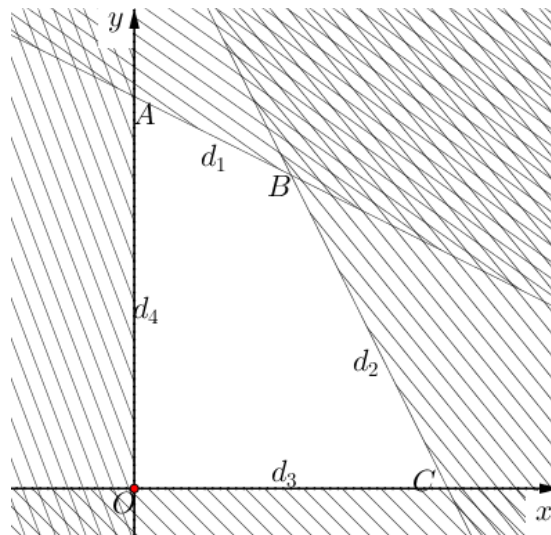
Tổng nguyên liệu được dùng là $2x + 4y$ (kg); tổng thời gian sản xuất là $30x + 15y$ (giờ); $x, y \geq 0$.

$$\text{Ta có hệ bất phương trình: } \begin{cases} 2x + 4y \leq 200 \\ 30x + 15y \leq 1200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y \leq 100 \\ 2x + y \leq 80 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Vẽ trên cùng hệ trục các đường thẳng $d_1: x + 2y = 100, d_2: 2x + y = 80, d_3: y = 0, d_4: x = 0$

Ta có điểm $M(1;1)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình vì khi thay tọa độ điểm này vào

$$\text{hệ: } \begin{cases} 1 + 2.1 \leq 100 \\ 2.1 + 1 \leq 80 \\ 1 \geq 0 \\ 1 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{đúng})$$



Gạch bỏ các phần không thuộc miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ (nửa mặt phẳng có bờ là các đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 và không chứa điểm M). Khi đó miền nghiệm của hệ bất phương trình chính là miền của tứ giác $OABC$ (kể cả các cạnh của tứ giác đó) với $O(0;0), A(0;50), B(20;40), C(40;0)$.

Lãi thu về từ việc sản xuất hai sản phẩm: $F(x; y) = 40x + 30y$ (nghìn đồng).

Tại $O(0;0)$, ta có $F(0;0) = 0$; tại $A(0;50)$, ta có $F(0;50) = 1500$; tại $B(20;40)$, ta có $F(20;40) = 2000$; tại $C(40;0)$, ta có $F(40;0) = 1600$.

Vậy lãi suất cao nhất thu được bằng 2000000 đồng, khi đó $x = 20, y = 40$ (tức là xưởng cần sản xuất ra 20 sản phẩm loại I và 40 sản phẩm loại II).

Câu 7. Một hộ nông dân định trồng dưa và củ đậu trên diện tích 8 ha. Trên diện tích mỗi ha, nếu trồng dưa thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng, nếu trồng củ đậu thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu ha để thu được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180.

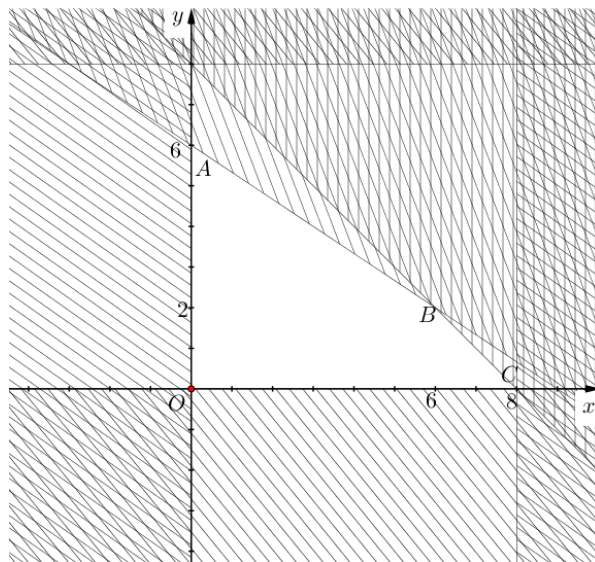
Trả lời: 6ha dưa và 2ha củ đậu

Lời giải:

Gọi x, y lần lượt là số ha trồng dưa và củ đậu. Điều kiện: $0 \leq x \leq 8, 0 \leq y \leq 8$. Tổng diện tích trồng là $x + y$ (ha); tổng số công cần thiết là $20x + 30y$ (công). Số tiền thu được là $T(x, y) = 3x + 4y$

$$\text{Ta có hệ bất phương trình } \begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ (*) là miền tứ giác $OABC$ (kể cả biên) với $O(0;0), A(0;6), B(6;2), C(8;0)$



Khi đó $T(x, y)$ đạt cực đại tại một trong các đỉnh của tứ giác $OABC$.

Ta có: $T(0, 0) = 0; T(0; 6) = 24; T(6; 2) = 26; T(8; 0) = 24$.

Vậy giá trị lớn nhất của $T(x, y)$ bằng 26 (triệu đồng), khi đó $x = 6, y = 2$ (tức là hộ nông dân cần trồng 6ha dưa và 2ha củ đậu để có thể thu lại số tiền nhiều nhất).

Câu 8. Có ba nhóm máy X, Y, Z dùng để sản xuất ra hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại lần lượt phải dùng các máy thuộc các nhóm khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy của từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được dùng cho trong bảng sau:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất ra một đơn vị	
		Loại I	Loại II
X	10	2	2
Y	4	0	2
Z	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm loại I lãi 3 nghìn đồng, một đơn vị sản phẩm loại II lãi 5 nghìn đồng. Hãy lập kế hoạch sản xuất để cho tổng số tiền lãi thu được là cao nhất.

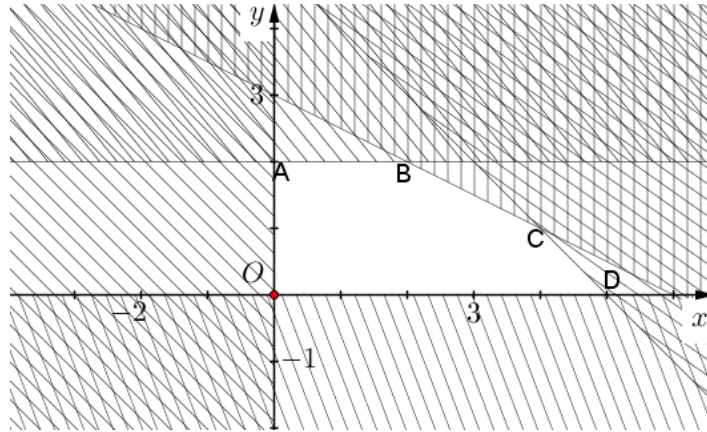
Trả lời: 4 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II

Lời giải:

Gọi x là số đơn vị sản phẩm loại I, y là số đơn vị sản phẩm loại II sản xuất ra. Như vậy tiền lãi có được là $F(x; y) = 3x + 5y$ (nghìn đồng).

Theo giả thiết, số máy cần dùng nhóm X: $2x + 2y$ (máy); số máy cần dùng ở nhóm Y là $0x + 2y$ (máy); số máy cần dùng ở nhóm Z là $2x + 4y$ (máy).

Ta có hệ bất phương trình (*):
$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



Miền nghiệm của hệ (*) được biểu diễn là miền của ngũ giác $OABCD$ với $O(0;0), A(0;2), B(2;2), C(4;1), D(5;0)$.

Xét $O(0;0)$, ta có $F(0;0) = 3.0 + 5.0 = 0$;

Xét $A(0;2)$, ta có $F(0;2) = 3.0 + 5.2 = 10$;

Xét $B(2;2)$, ta có $F(2;2) = 3.2 + 5.2 = 16$;

Xét $C(4;1)$, ta có $F(4;1) = 3.4 + 5.1 = 17$;

Xét $D(5;0)$, ta có $F(5;0) = 3.5 + 5.0 = 15$.

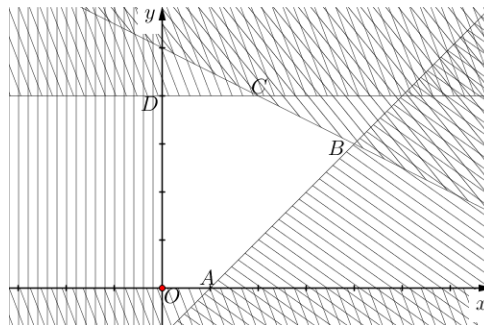
Từ các kết quả trên, ta thấy khoản lãi lớn nhất ($F(x,y)$ lớn nhất) bằng 17 (ngàn đồng), khi đó người ta cần làm ra 4 sản phẩm loại I và 1 sản phẩm loại II (tức là $x = 4, y = 1$).

Câu 9. Tìm GTLN của $f(x,y) = x + 2y$ với điều kiện

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 & (d_1) \\ 0 \leq x & (d_2) \\ x - y - 1 \leq 0 & (d_3) \\ x + 2y - 10 \leq 0 & (d_4) \end{cases}$$

Trả lời: 10

Lời giải



$\{M(x,y)\}$ thỏa mãn (I) là miền bên trong đa giác $OABCD$

Tìm tọa độ A, B, C, D bằng phương pháp đồ thị hay phương trình hoành độ giao điểm.

Thay toạ độ O, A, B, C, D vào $f(x; y) = x + 2y$ ta có

	O	A	B	C	D
$f(x; y)$	0	1	10	10	8

$$\Rightarrow \max(f(x; y)) = 10$$

Câu 10. Bác Năm dự định trồng ngô và đậu xanh trên một mảnh đất có diện tích 8 hecta (ha). Nếu trồng 1 ha ngô thì cần 20 ngày công và thu được 40 triệu đồng. Nếu trồng 1 ha đậu xanh thì cần 30 ngày công và thu được 50 triệu đồng. Bác Năm cần trồng bao nhiêu ha cho mỗi loại cây để thu được nhiều tiền nhất? Biết rằng, bác Năm chỉ có thể sử dụng không quá 180 ngày công cho việc trồng ngô và đậu xanh.

Trả lời: 6 ha ngô và 2 ha đậu xanh.

Lời giải

Gọi x là số hecta (ha) đất trồng ngô và y là số hecta đất trồng đậu xanh.

Ta có các điều kiện ràng buộc đối với x, y như sau: Hiển nhiên $x \geq 0, y \geq 0$.

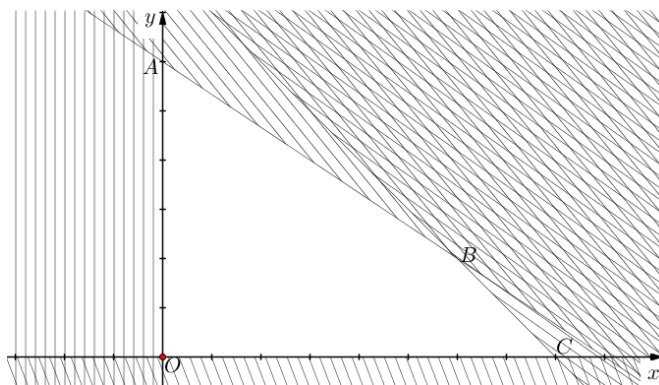
- Diện tích canh tác không vượt quá 8 ha nên $x + y \leq 8$.

- Số ngày công sử dụng không vượt quá 180 nên $20x + 30y \leq 180$.

Từ đó, ta có hệ bất phương trình mô tả các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình này trên hệ trục toạ độ Oxy, ta được miền tứ giác $OABC$ (Hình). Toạ độ các đỉnh của tứ giác đó là: $O(0;0); A(0;6); B(6;2); C(8;0)$



Gọi F là số tiền (đơn vị: triệu đồng) bác Năm thu được, ta có: $F = 40x + 50y$.

Ta phải tìm x, y thỏa mãn hệ bất phương trình sao cho F đạt giá trị lớn nhất, nghĩa là tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 40x + 50y$ trên miền tứ giác $OABC$.

Tính các giá trị của biểu thức F tại các đỉnh của đa giác, ta có:

Tại $O(0;0)$: $F = 40.0 + 50.0 = 0$; Tại $A(0;6)$: $F = 40.0 + 50.6 = 300$;

Tại $B(6;2)$: $F = 40.6 + 50.2 = 340$; Tại $C(8;0)$: $F = 40.8 + 50.0 = 320$.

F đạt giá trị lớn nhất bằng 340 tại $B(6;2)$.

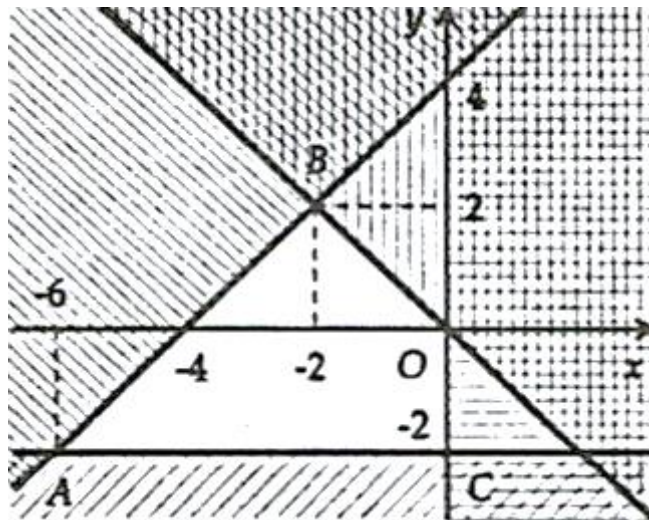
Vậy để thu được nhiều tiền nhất, bác Năm cần trồng 6 ha ngô và 2 ha đậu xanh.

Câu 11. Cho hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x - y + 4 \geq 0 \\ x + y \leq 0 \\ x \leq 0 \\ y + 2 \geq 0 \end{cases}$$
. Miền nghiệm của hệ tạo thành là hình gì?

Trả lời: Tứ giác

Lời giải

Miền nghiệm của hệ là miền tứ giác $ABOC$ với $A(-6;-2)$, $B(-2;2)$ và $C(0;-2)$



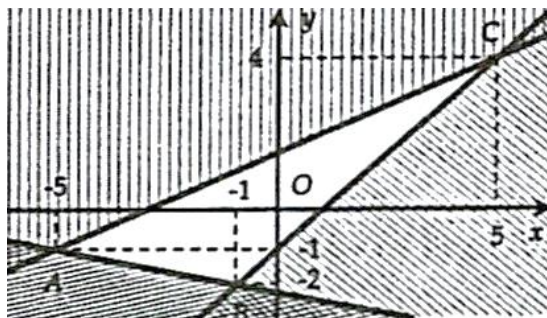
Câu 12. Cho biểu thức $T = 3x - 2y - 4$ với x và y thỏa mãn hệ bất phương trình:
$$\begin{cases} x - y - 1 \leq 0 \\ x + 4y + 9 \geq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Biết T đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = x_0$ và $y = y_0$. Tính $x_0^2 + y_0^2$.

Trả lời: 26

Lời giải

Miền nghiệm của hệ là miền tam giác ABC với $A(-5;-1)$, $B(-1;-2)$ và $C(5;4)$. Lập bảng:



Đỉnh	$A(-5; -1)$	$B(-1; -2)$	$C(5; 4)$
T	-17	-3	3

Vậy T đạt giá trị nhỏ nhất bằng -17 khi $x = -5$ và $y = -1$.

Do đó $x_0 = -5$ và $y_0 = -1 \Rightarrow x_0^2 + y_0^2 = 26$.

Câu 13. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị Prôtêin và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kg thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kg thịt lợn chứa 600 đơn vị prôtêin và 400 đơn vị Lipít. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất $1,6kg$ thịt bò và $1,1kg$ thịt lợn, giá tiền mỗi kg thịt bò là 250.000 đồng, giá tiền mỗi kg thịt lợn là 85.000 đồng. Hỏi chi phí ít nhất để mua thịt mỗi ngày của gia đình đó là bao nhiêu?

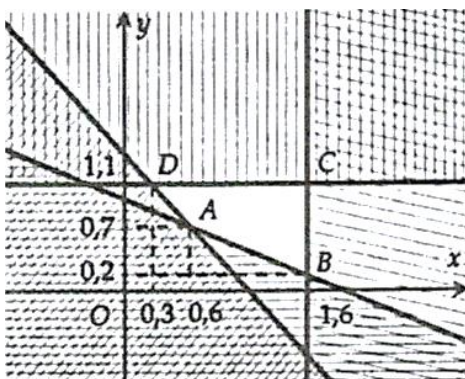
Trả lời: 168.500 đồng.

Lời giải

Gọi x và y lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó mua mỗi ngày. Khi đó x và y

phải thỏa mãn hệ:
$$\begin{cases} 8x + 6y \geq 9 \\ 2x + 4y \geq 4 \\ 0 \leq x \leq 1,6 \\ 0 \leq y \leq 1,1 \end{cases}$$
. Lượng tiền để mua thịt là: $T = 250x + 85y$ (nghìn đồng).

Miền nghiệm của hệ là miền tứ giác $ABCD$ với $A(0,6; 0,7)$, $B(1,6; 0,2)$, $C(1,6; 1,1)$ và $D(0,3; 1,1)$.



Lập bảng:

Đỉnh	$A(0,6; 0,7)$	$B(1,6; 0,2)$
T	209.500	417.000
Đỉnh	$C(1,6; 1,1)$	$D(0,3; 1,1)$
T	493.500	168.500

Vậy chi phí mua thịt ít nhất là 168.500 đồng.

Câu 14. Một công ty X có 2 phân xưởng A, B cùng sản xuất 2 loại sản phẩm M, N . Số đơn vị sản phẩm các loại được sản xuất ra và chi phí mỗi giờ hoạt động của A, B như sau:

	Phân xưởng 1	Phân xưởng 2
Sản phẩm M	250	250
Sản phẩm N	100	200
Chi phí	600.000	1.000.000

Công ty nhận được yêu cầu đặt hàng là 5000 đơn vị sản phẩm M và 3000 đơn vị sản phẩm N .

Công ty đã tìm được cách phân phối thời gian cho mỗi phân xưởng hoạt động thỏa mãn yêu cầu đơn đặt hàng và chi phí thấp nhất. Hỏi chi phí thấp nhất bằng bao nhiêu?

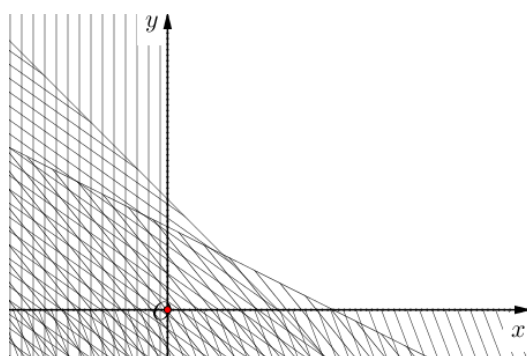
Trả lời: 16000000 đồng.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số giờ nên cho phân xưởng A và B . Ta có bài toán

$$F = 600000x + 1000000y \rightarrow \min F \text{ thỏa } \begin{cases} 250x + 250y \geq 5000 & (1) \\ 100x + 200y \geq 3000 & (2) \\ x \geq 0, y \geq 0 & (3) \end{cases}$$

Miền ràng buộc D của bài toán được biểu diễn bằng cách vẽ đồ thị bất phương trình (1) và (2) và (3) tạo thành miền kín rồi lấy các điểm giao nhau làm tọa độ điểm đỉnh. Đỉnh nào làm cho F nhỏ nhất thì thỏa yêu cầu bài toán.



Qua vẽ hình ta tìm được phương án tối ưu là $x = 10, y = 10$

Vậy để thỏa mãn yêu cầu đặt hàng với chi phí thấp nhất công ty cần cho phân xưởng A và B hoạt động 10 giờ. Chi phí thấp nhất là 16000000 đồng.

Câu 15. Một người dùng ba loại nguyên liệu A, B, C để sản xuất ra hai loại sản phẩm P và Q . Để sản xuất $1kg$ mỗi loại sản phẩm P hoặc Q phải dùng một số kilôgam nguyên liệu khác nhau. Tổng số kilôgam nguyên liệu mỗi loại mà người đó có và số kilôgam từng loại nguyên liệu cần thiết để sản xuất ra $1kg$ sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

Loại nguyên liệu	Số kilôgam nguyên liệu đang có	Số kilôgam từng loại nguyên liệu cần để sản xuất 1kg sản phẩm	
		P	Q
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

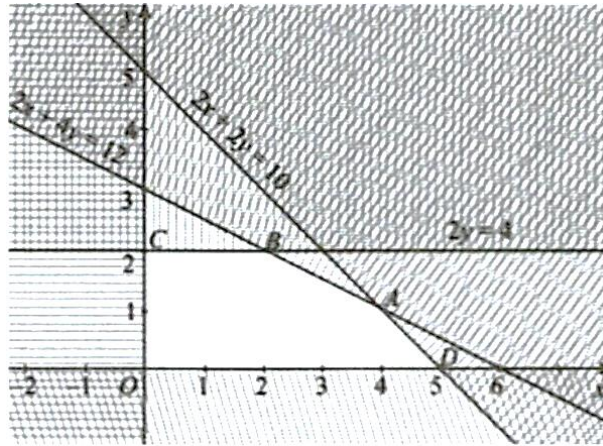
Biết $1kg$ sản phẩm P có lợi nhuận 3 triệu đồng và $1kg$ sản phẩm Q có lợi nhuận 5 triệu đồng. Người đó đã lập được phương án sản xuất hai loại sản phẩm trên sao cho có lãi cao nhất. Hỏi lãi cao nhất bằng bao nhiêu?

Trả lời: 17 triệu đồng.

Lời giải

Gọi x là số kilôgam sản phẩm P , y là số kilôgam sản phẩm Q cần sản xuất. Ta có hệ bất phương trình: $2x + 2y \leq 10; 2y \leq 4; 2x + 4y \leq 12; x \geq 0; y \geq 0$.

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy, ta được như hình trên.



Miền nghiệm là miền ngũ giác $OCBAD$, các đỉnh: $O(0;0)$; $C(0;2)$; $B(2;2)$; $A(4;1)$; $D(5;0)$

Gọi F là số tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) thu được, ta có: $F = 3x + 5y$.

Tính giá trị của F tại các đỉnh của ngũ giác:

Tại $O(0;0)$: $F = 3.0 + 5.0 = 0$; Tại $C(0;2)$: $F = 3.0 + 5.2 = 10$;

Tại $B(2;2)$: $F = 3.2 + 5.2 = 16$; Tại $A(4;1)$: $F = 3.4 + 5.1 = 17$;

Tại $D(5;0)$: $F = 3.5 + 5.0 = 15$. F đạt giá trị lớn nhất bằng 17 tại $A(4;1)$.

Vậy cần sản xuất 4kg sản phẩm P và 1 kg sản phẩm Q để có lãi cao nhất là 17 triệu đồng.

Câu 16. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = 3y - 2x$ trên miền xác định bởi hệ
$$\begin{cases} x - y \leq 6 \\ y - 2x \geq 2 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$

Trả lời: -16

Lời giải

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = 3y - 2x$ trên miền xác định bởi hệ
$$\begin{cases} x - y \leq 6 \\ x \geq 2 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$
. Vẽ đường

thẳng $d_1: x - y - 6 = 0$ đi qua hai điểm $(0; -6)$ và $(6; 0)$.

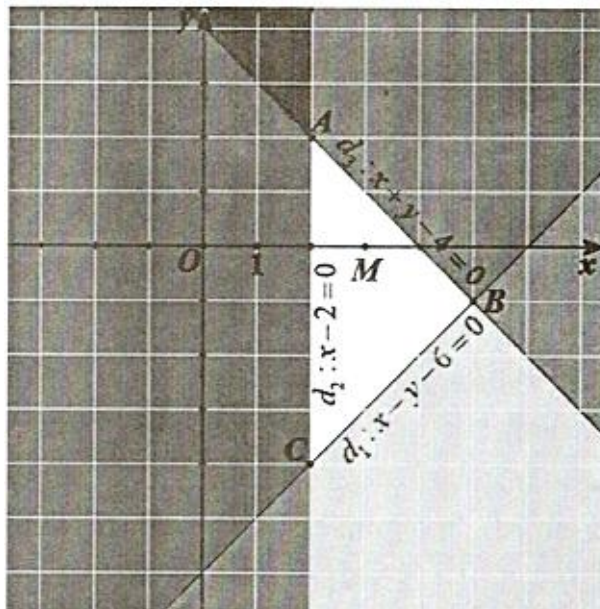
Vẽ đường thẳng $d_2: x - 2 = 0$ đi qua hai điểm $(2; 0)$ và $(2; 2)$.

Vẽ đường thẳng $d_3: x + y - 4 = 0$ đi qua hai điểm $(0; 4)$ và $(4; 0)$.

Xét điểm $M(3; 0)$. Ta thấy tọa độ M thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ.

Do đó, miền nghiệm của hệ bất phương trình
$$\begin{cases} x - y \leq 6 \\ x \geq 2 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$$
 là miền không bị tô đậm (hình tam giác

ABC bao gồm cả các cạnh AB, BC và AC trên hình vẽ).



Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

Điểm $A = d_2 \cap d_3$ nên tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 2 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$. Vậy $A(2; 2)$.

Điểm $B = d_1 \cap d_3$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - y - 6 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$. Vậy $B(5; -1)$.

Điểm $C = d_1 \cap d_2$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 2 \\ x - y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$. Vậy $C(2; -4)$.

Ta thấy $F = 3y - 2x$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C .

Tại $A(2; 2)$ thì $F = 2$.

Tại $B(5; -1)$ thì $F = -13$.

Tại $C(2; -4)$ thì $F = -16$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = 3y - 2x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} x - y \leq 6 \\ x \geq 2 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$ là -16 khi $x = 2, y = -4$.

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = x - 3y + 1$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ y - x \leq 1 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$.

Trả lời: 3

Lời giải

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = x - 3y + 1$ trên miền xác định bởi hệ

$$\begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ y - x \leq 1 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$$

Vẽ đường thẳng $d_1: 2x - y - 4 = 0$ đi qua hai điểm $(0; -4)$ và $(2; 0)$.

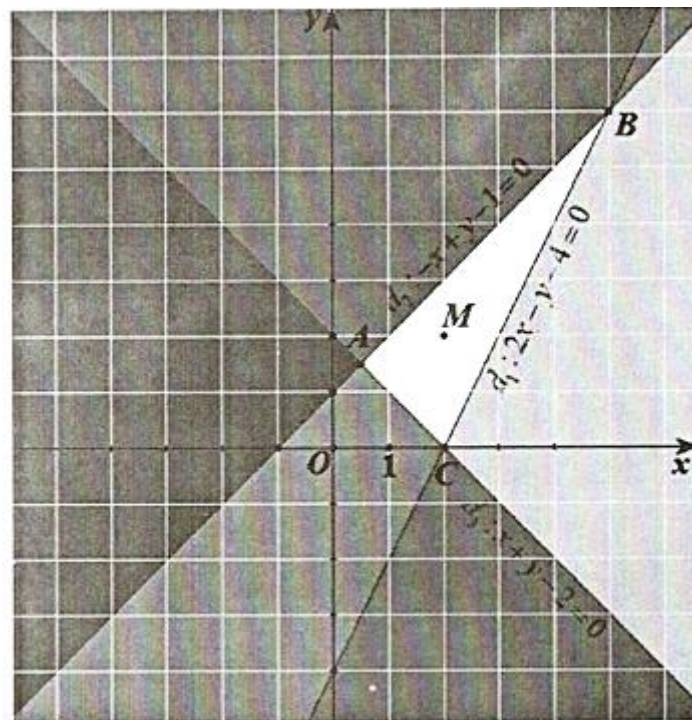
Vẽ đường thẳng $d_2: -x + y - 1 = 0$ đi qua hai điểm $(0; 1)$ và $(-1; 0)$.

Vẽ đường thẳng $d_3: x + y - 2 = 0$ đi qua hai điểm $(0; 2)$ và $(2; 0)$.

Xét điểm $M(2; 2)$. Ta thấy tọa độ M thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ.

Do đó, miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ y - x \leq 1 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ là miền không bị tô đậm (hình tam giác

ABC bao gồm cả các cạnh AB, BC và AC trên hình vẽ).



Tìm tọa độ các điểm A, B, C .

Điểm $A = d_2 \cap d_3$ nên tọa độ điểm A là

$$\text{nghiệm của hệ } \begin{cases} -x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$$

Điểm $B = d_1 \cap d_2$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ -x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 6 \end{cases}$. Vậy $B(5;6)$.

Điểm $C = d_1 \cap d_3$ nên tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$. Vậy $C(2;0)$.

Ta thấy $F = x - 3y + 1$ đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C .

Tại $A\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ thì $F = -3$.

Tại $B(5;6)$ thì $F = -12$

Tại $C(2;0)$ thì $F = 3$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $F = x - 3y + 1$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} 2x - y \leq 4 \\ y - x \leq 1 \\ x + y \geq 2 \end{cases}$ là 3

khi $x = 2, y = 0$.

Câu 18. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = x - y$ với điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$.

Trả lời: -3

Lời giải

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = x - y$ với điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$.

Vẽ đường thẳng $d_1 : x = 0$ đi qua hai điểm $(0;0)$ và $(0;1)$.

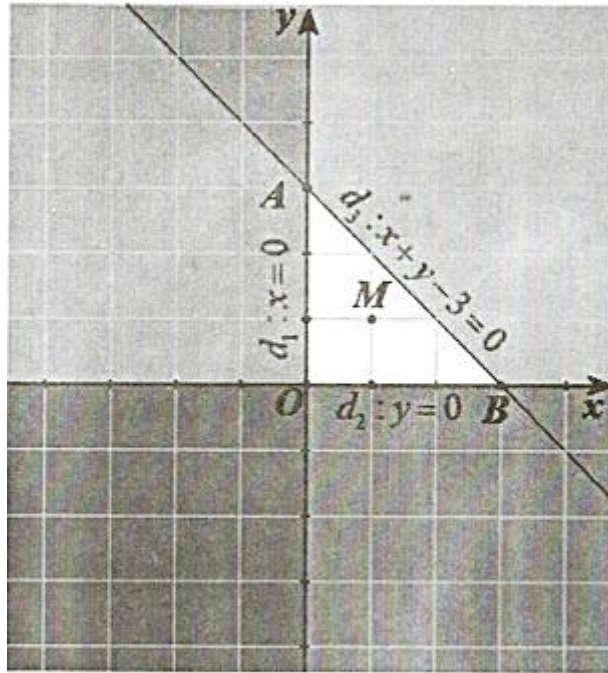
Vẽ đường thẳng $d_2 : y = 0$ đi qua hai điểm $(0;0)$ và $(1;0)$.

Vẽ đường thẳng $d_3 : x + y - 3 = 0$ đi qua hai điểm $(0;3)$ và $(3;0)$.

Xét điểm $M(1;1)$. Ta thấy tọa độ M thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ.

Do đó, miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$ là miền không bị tô đậm (hình tam

giác OAB bao gồm cả các cạnh OA, OB và AB trên hình vẽ).



Tìm tọa độ các điểm O, A, B .

Điểm $O = d_1 \cap d_2$ nên tọa độ điểm O là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$. Vậy $O(0;0)$.

Điểm $A = d_1 \cap d_3$ nên tọa độ điểm A là

nghiệm của hệ $\begin{cases} x=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$. Vậy $A(0;3)$.

Điểm $B = d_2 \cap d_3$ nên tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} y=0 \\ x+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$. Vậy $B(3;0)$.

Ta thấy $F = x - y$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm O, A, B .

Tại $O(0;0)$ thì $F = 0$.

Tại $A(0;3)$ thì $F = -3$

Tại $B(3;0)$ thì $F = 3$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = x - y$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \end{cases}$ là -3

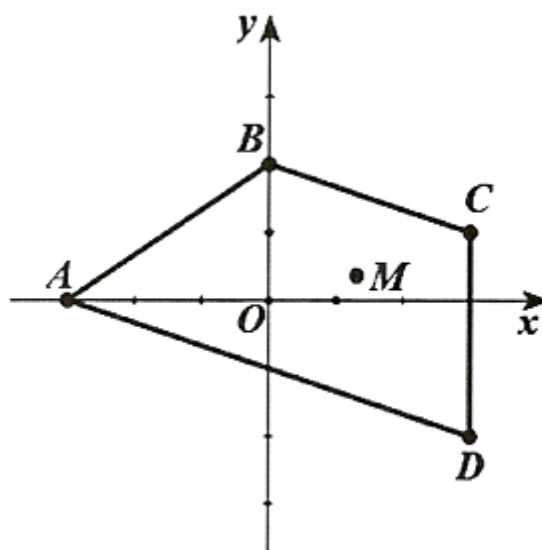
khi $x=0, y=3$.

Câu 19. Trong mặt phẳng Oxy , cho tứ giác $ABCD$ có $A(-3;0); B(0;2); C(3;1); D(3;-2)$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho điểm $M(m;m-1)$ nằm trong hình tứ giác $ABCD$ kể cả 4 cạnh.

Trả lời: $0 \leq m \leq \frac{9}{4}$

Lời giải

Trong mặt phẳng Oxy , cho tứ giác $ABCD$ có $A(-3;0); B(0;2); C(3;1); D(3;-2)$. Tìm tất cả các giá trị của m sao cho điểm $M(m;m-1)$ nằm trong hình tứ giác $ABCD$ kể cả 4 cạnh.



Nhận thấy hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình gồm 4 bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng chứa điểm $O(0;0)$ và lần lượt có các bờ là các đường thẳng AB, BC, CD và DA .

Phương trình đường thẳng AB :

$$\frac{x+3}{0-(-3)} = \frac{y-0}{2-0} \Leftrightarrow 2x-3y+6=0.$$

Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ AB (tính cả bờ AB) và chứa điểm O là $2x-3y+6 \geq 0$.

Phương trình đường thẳng BC : $\frac{x-0}{3-0} = \frac{y-2}{1-2} \Leftrightarrow x+3y-6=0$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ BC (tính cả bờ BC) và chứa điểm O là $x+3y-6 \leq 0$.

Phương trình đường thẳng CD : $x-3=0$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ CD (tính cả bờ CD) và chứa điểm O là $x-3 \leq 0$.

Phương trình đường thẳng DA : $\frac{x+3}{3-(-3)} = \frac{y-0}{-2-0} \Leftrightarrow x+3y+3=0$. Bất phương trình có miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ DA (tính cả bờ DA) và chứa điểm O là $x+3y+3 \geq 0$.

Hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó là miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} 2x-3y+6 \geq 0 \\ x+3y-6 \leq 0 \\ x-3 \leq 0 \\ x+3y+3 \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

Điểm $M(m; m-1)$ nằm trong hình tứ giác $ABCD$ tính cả 4 cạnh của nó khi và chỉ khi $(m; m-1)$ là một nghiệm của hệ (1), tức là

$$\begin{cases} 2m - 3(m-1) + 6 \geq 0 \\ m + 3(m-1) - 6 \leq 0 \\ m - 3 \leq 0 \\ m + 3(m-1) + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 9 \\ m \leq \frac{9}{4} \\ m \leq 3 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{9}{4}$$

Vậy các giá trị của m thỏa mãn là $0 \leq m \leq \frac{9}{4}$.

Câu 20. Trong một đợt dã ngoại, một trường học cần thuê xe chở 180 người và 8 tấn hàng. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B , trong đó xe A có 10 chiếc và xe B có 9 chiếc. Một xe loại A cho thuê với giá 5 triệu đồng và một xe loại B cho thuê với giá 4 triệu đồng. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 30 người và 0,8 tấn hàng, mỗi xe loại B có thể chở tối đa 20 người và 1,6 tấn hàng. Tìm số xe mỗi loại sao cho chi phí thuê là thấp nhất.

Trả lời: 4 xe loại A và 3 xe loại B .

Lời giải

Gọi x, y (xe) lần lượt là số xe loại A và B cần thuê.

Khi đó, số tiền cần bỏ ra để thuê xe là $F(x; y) = 5x + 4y$ (triệu đồng)

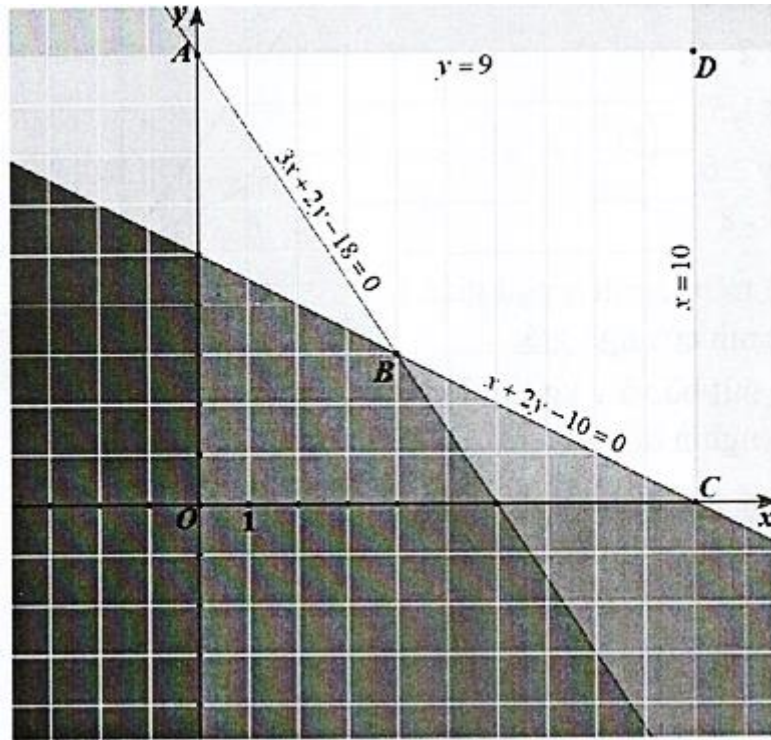
Ta có x xe loại A chở được $30x$ người và $0,8x$ tấn hàng; y xe loại B chở được $20y$ người và $1,6y$ tấn hàng.

Suy ra x xe loại A và y xe loại B chở được $30x + 20y$ người và $0,8x + 1,6y$ tấn hàng.

Ta có hệ bất phương trình sau:
$$\begin{cases} 30x + 20y \geq 180 \\ 0,8x + 1,6y \geq 8 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y \geq 18 \\ x + 2y \geq 10 \\ 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \end{cases} (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x; y)$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Miền nghiệm của hệ (*) là tứ giác $ABCD$ (kể cả bờ)



Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D .

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x+2y-18=0 \\ y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=9 \end{cases}$. Vậy $A(0;9)$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x+2y-18=0 \\ x+2y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$. Vậy $B(4;3)$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=10 \\ x+2y-10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=0 \end{cases}$. Vậy $C(10;0)$.

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=10 \\ y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=9 \end{cases}$. Vậy $D(10;9)$.

Ta thấy $F(x;y) = 5x + 4y$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C, D .

Tại $A(0;9)$ thì $F = 36$ (triệu đồng).

Tại $B(4;3)$ thì $F = 32$ (triệu đồng).

Tại $C(10;0)$ thì $F = 50$ (triệu đồng).

Tại $D(10;9)$ thì $F = 86$ (triệu đồng).

Như vậy để chi phí thấp nhất cần thuê 4 xe loại A và 3 xe loại B .

Câu 21. Một gia đình cần ít nhất 1200 đơn vị protein và 800 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilogram thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipid. Mỗi kilogram thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipid. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất 2,0kg thịt bò và 1,5kg thịt lợn. Giá tiền 1kg thịt bò là 200 nghìn đồng, 1kg thịt lợn là 100 nghìn đồng. Gọi x, y

lần lượt là số kg thịt bò và thịt lợn mà gia đình đó cần mua để tổng số tiền họ phải trả là ít nhất mà vẫn đảm bảo lượng protein và lipid trong thức ăn. Tính $4x^2 + y^2$.

Trả lời: $\frac{45}{16}$

Lời giải

Điều kiện: $0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1,5$

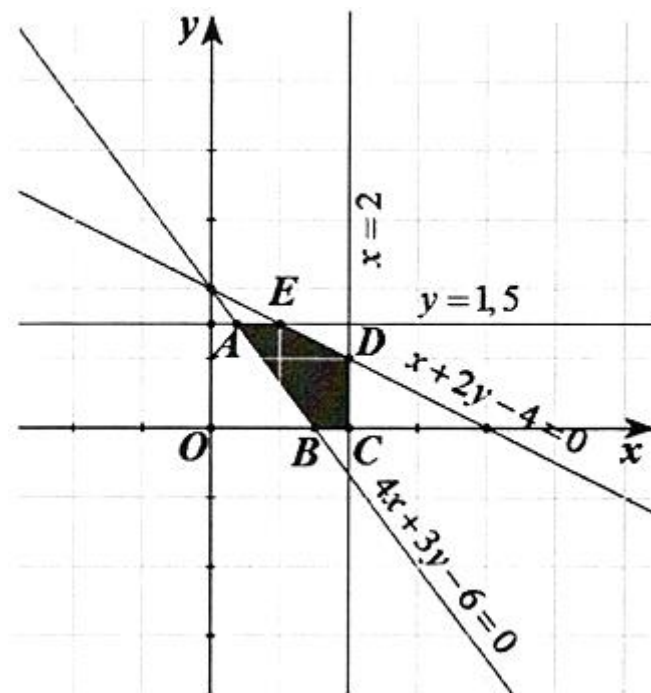
Khi đó số protein có được là $800x + 600y$ và số lipid có được là $200x + 400y$

Vì gia đình đó cần ít nhất 1200 đơn vị protein và 800 đơn vị lipid trong thức ăn mỗi ngày nên điều kiện tương ứng là:

$$800x + 600y \geq 1200 \Leftrightarrow 4x + 3y \geq 6 \text{ và } 200x + 400y \geq 800 \Leftrightarrow x + 2y \geq 4$$

Ta có hệ bất phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1,5 \\ 4x + 3y \geq 6 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases} (*)$$



Miền nghiệm của hệ trên là miền ngũ giác $ABCDE$ kể cả các cạnh của ngũ giác.

Chi phí để mua $x kg$ thịt bò và $y kg$ thịt lợn là $T = 200x + 100y$ (nghìn đồng).

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $T(x; y) = 200x + 100y$ trên miền nghiệm của hệ $(*)$.

Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D, E .

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x+5y-6=0 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{8} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$. Vậy $A\left(\frac{3}{8};\frac{3}{2}\right)$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$. Vậy $C(2;0)$.

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x=2 \\ x+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$. Vậy $D(2;1)$.

Tọa độ điểm E là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+2y-4=0 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$. Vậy $E\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

Ta thấy $T(x;y)=200x+100y$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C, D, E .

Tại $A\left(\frac{3}{8};\frac{3}{2}\right)$ thì $T=200\cdot\frac{3}{8}+100\cdot\frac{3}{2}=225$ (nghìn đồng).

Tại $B\left(\frac{3}{2};0\right)$ thì $T=200\cdot\frac{3}{2}+100\cdot0=300$ (nghìn đồng).

Tại $C(2;0)$ thì $T=200\cdot2+100\cdot0=400$ (nghìn đồng).

Tại $D(2;1)$ thì $T=200\cdot2+100\cdot1=500$ (nghìn đồng).

Tại $E\left(1;\frac{3}{2}\right)$ thì $T=200\cdot1+100\cdot\frac{3}{2}=350$ (nghìn đồng).

Như vậy để chi phí bỏ ra thấp nhất mà vẫn đảm bảo nhu cầu dinh dưỡng khi $x=\frac{3}{8}$ và

$$y=\frac{3}{2} \Rightarrow 4x^2+y^2=4\cdot\left(\frac{3}{8}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{45}{16}.$$

Câu 22. Một hộ nông dân định trồng bắp và khoai lang trên diện tích 4ha. Trên diện tích mỗi ha, nếu trồng bắp thì cần 10 công và thu 2 triệu đồng, nếu trồng khoai lang thì cần 15 công và thu 2,5 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu ha để thu được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 45 công.

Trả lời: 3ha bắp và 1ha khoai lang

Lời giải

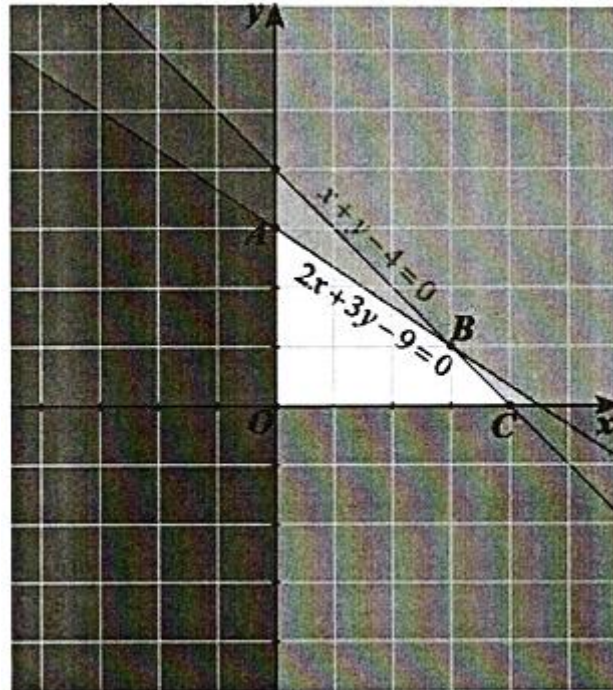
Gọi x, y (ha) lần lượt là số ha trồng bắp và khoai lang.

Điều kiện $0 \leq x \leq 4; 0 \leq y \leq 4; x+y \leq 4; 10x+15y \leq 45 \Rightarrow 2x+3y \leq 9$

Số tiền thu được là $T(x,y)=2x+2,5y$ (triệu đồng).

Ta có hệ
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \\ x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 9 \end{cases} \quad (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $T(x; y) = 2x + 2,5y$ trên miền nghiệm của hệ (*).



Tìm tọa độ các điểm O, A, B, C .

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$. Vậy $A(0;3)$.

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x + 3y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$. Vậy $B(3;1)$.

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$. Vậy $C(4;0)$.

Tọa độ điểm $O(0;0)$.

Ta thấy $T(x; y) = 2x + 2,5y$ đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm O, A, B, C .

Tại $A(0;3)$ thì $T = 2.0 + 2,5.3 = 7,5$ (triệu đồng).

Tại $B(3;1)$ thì $T = 2.3 + 2,5.1 = 8,5$ (triệu đồng).

Tại $C(4;0)$ thì $T = 2.4 + 2,5.0 = 8$ (triệu đồng).

Tại $O(0;0)$ thì $T = 2.0 + 2,5.0 = 0$ (triệu đồng).

Vậy cần trồng 3ha bắp và 1ha khoai lang để thu được số tiền nhiều nhất.

Câu 23. Người ta dùng hai loại nguyên liệu để chiết xuất ít nhất 160kg hóa chất A và 12kg hóa chất B . Từ mỗi tấn nguyên liệu loại I giá 5 triệu đồng có thể chiết xuất được 25kg chất A và $1,2\text{kg}$ chất B . Từ mỗi tấn nguyên liệu loại II giá 4 triệu đồng có thể chiết xuất được 20kg chất A và 2kg chất B . Hỏi phải dùng bao nhiêu tấn nguyên liệu mỗi loại để chi phí mua nguyên liệu là ít nhất. Biết rằng cơ sở cung cấp nguyên liệu chỉ có thể cung cấp không quá 9 tấn nguyên liệu loại I và không quá 7 tấn nguyên liệu loại II .

Trả lời: dùng $\frac{4}{5}$ tấn nguyên liệu loại I và 7 tấn nguyên liệu loại II hoặc dùng $\frac{40}{13}$ tấn nguyên liệu loại I và $\frac{54}{13}$ tấn nguyên liệu loại II

Lời giải

Gọi x, y (tấn) lần lượt là số tấn nguyên liệu loại I và loại II cần sử dụng.

Điều kiện $0 \leq x \leq 9; 0 \leq y \leq 7$.

Khi đó số kg chất A thu được là: $25x + 20y$

Số kg chất B thu được là: $1,2x + 2y$

Ta có hệ bất phương trình

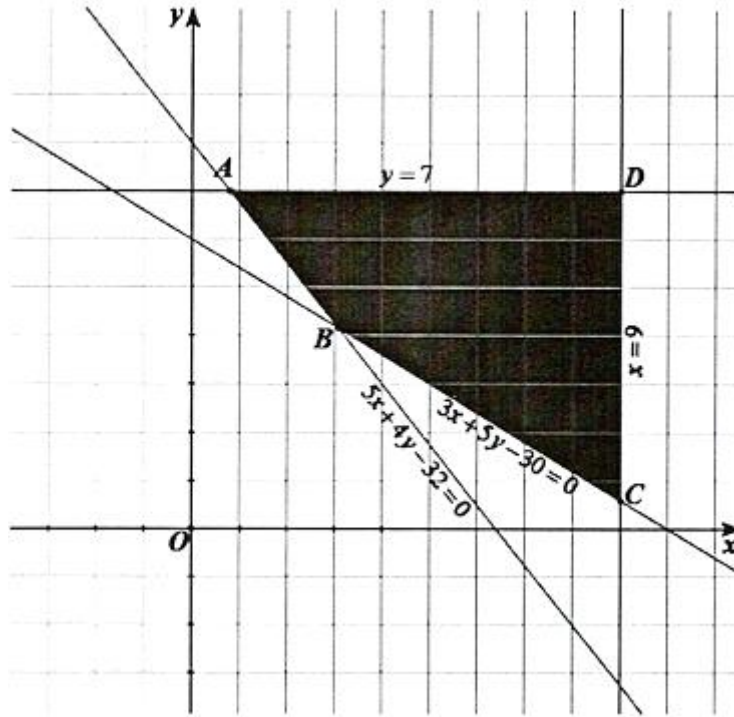
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 7 \\ 25x + 20y \geq 160 \\ 1,2x + 2y \geq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ 0 \leq y \leq 7 \\ 5x + 4y \geq 32 \\ 3x + 5y \geq 30 \end{cases}$$

Chi phí mua nguyên liệu là:

$$T(x; y) = 5x + 4y \text{ (triệu đồng)}.$$

Bài toán trở thành tìm giá trị nhỏ nhất của $T(x; y) = 5x + 4y$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền được tô màu như hình vẽ.



Tìm tọa độ các điểm A, B, C, D .

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 5x+4y-32=0 \\ y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{5} \\ y=7 \end{cases}. \text{ Vậy } A\left(\frac{4}{5}; 7\right).$$

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} 5x+4y-32=0 \\ 3x+5y-30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{40}{13} \\ y=\frac{54}{13} \end{cases}. \text{ Vậy } B\left(\frac{40}{13}; \frac{54}{13}\right).$$

Tọa độ điểm C là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x=9 \\ 3x+5y-30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=\frac{3}{5} \end{cases}. \text{ Vậy } C\left(9; \frac{3}{5}\right).$$

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ
$$\begin{cases} x=9 \\ y=7 \end{cases}. \text{ Vậy } D(9; 7).$$

Ta thấy $T(x; y) = 5x + 4y$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C, D .

Tại $A\left(\frac{4}{5}; 7\right)$ thì $T = 5 \cdot \frac{4}{5} + 4 \cdot 7 = 32$ (triệu đồng).

Tại $B\left(\frac{40}{13}; \frac{54}{13}\right)$ thì $T = 5 \cdot \frac{40}{13} + 4 \cdot \frac{54}{13} = 32$ (triệu đồng).

Tại $C\left(9; \frac{3}{5}\right)$ thì $T = 5 \cdot 9 + 4 \cdot \frac{3}{5} = 47,4$ (triệu đồng).

Tại $D(9; 7)$ thì $T = 5 \cdot 9 + 4 \cdot 7 = 73$ (triệu đồng).

Vậy cần dùng $\frac{4}{5}$ tấn nguyên liệu loại I và 7 tấn nguyên liệu loại II hoặc dùng $\frac{40}{13}$ tấn nguyên liệu loại I và $\frac{54}{13}$ tấn nguyên liệu loại II để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất.